Устный тур сентябрьской олимпиады. 10-11 класс.

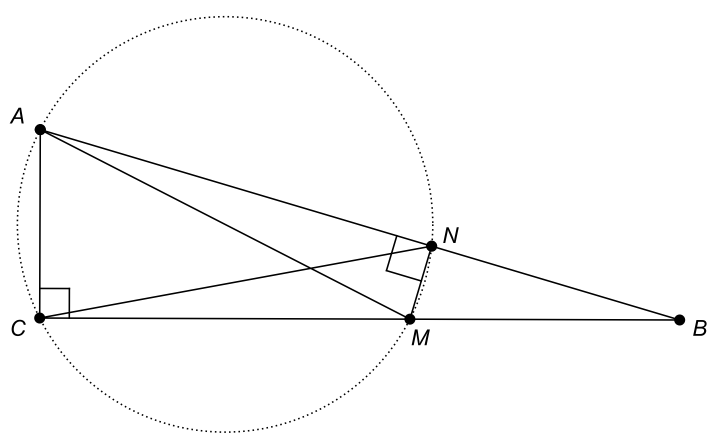
Довывод

1. Натуральные числа a и b таковы, что $a^2 + b^2$ делится на ab. Докажите, что $a = b$.

   Решение. Пусть НОД$(a, b) = 1$ через d. Тогда $a = a_1 d$ и $b = b_1 d$, где НОД$(a_1, b_1) = 1$. Так как $(a_1^2 + b_1^2)d^2$ делится на $a_1 b_1 d^2$, $a_1^2 + b_1^2$ делится на $a_1 b_1$. Однако, легко видеть, что $a_1^2 + b_1^2$ взаимно просто как с a_1, так и с b_1. Значит $a_1 = b_1 = 1$, то есть $a = b$.

2. Из произвольной точки M катета BC прямоугольного треугольника ABC на гипотенузу AB опущен перпендикуляр MN. Докажите, что $\angle MAN = \angle MCN$.

   Решение. Заметим, что $\angle ACM + \angle ANM = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, следовательно, четырехугольник $ACMN$ вписанный по признаку. Рассмотрим его описанную окружность. Углы $\angle MAN$ и $\angle MCN$ вписаны в нее и опираются на одну дугу MN, а значит, равны. Что и требовалось.



3. Играют двое. Первый выписывает в строку слева направо цифры, произвольно чередуя 0 и 1, пока всех цифр не станет всего 2015. Каждый раз после того, как первый выписал очередную цифру, второй меняет между собой две цифры из уже написанного ряда (когда написана только одна цифра, второй пропускает ход). Всегда ли второй может добиться того, чтобы после его последнего хода расположение цифр было симметричным относительно средней цифры?

   Решение. Да, всегда. Пусть первые 1008 ходов он делает произвольно. Рассмотрим момент, когда первый пишет k-ую цифру ($k > 1008$). Если она совпадает с $2 \cdot 1008 - k$-ой цифрой (это как раз номер симметричной цифры), то можно ничего не делать. В противном случае, так как эти цифры различны, одна из них совпадает с центральной. Тогда меняем местами центральную и другую цифры. Теперь на k-ом и $2 \cdot 1008 - k$-ом местах стоят одинаковые цифры.

4. Докажите, что для любых положительных a, b, c выполнено неравенство:

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geqslant a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2$$

Решение. Докажем неравенство

$$a^3 + b^3 \geqslant a^2b + ab^2$$

Для этого перекинем все в левую часть и преобразуем:

$$a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 = a^2(a - b) + b^2(b - a) = (a - b)(a^2 - b^2) = (a - b)^2(a + b) \geqslant 0$$

Что и требовалось.

Теперь, сложив такие же неравенства для пар чисел a, c и b, c, получим требуемое неравенство.

5. По кругу записано 2015 действительных чисел. Профессор Юлий записал между всеми парами соседних их полусумму, а исходные числа стёр. Оказалось, что написан тот же набор чисел, но, возможно, в другом порядке. Докажите, что все числа были равны.

Рабоче-крестьянское решение. Пусть наибольшее из чисел равно M. Если не все числа равны, то числа, равные M образуют несколько групп стоящих рядом чисел. Пусть группы имеют размеры $a_1, \ldots, a_m$. Заметим, что если из двух соседних чисел хотя бы одно меньше M, то и полусумма меньше M. Таким образом, профессор запишет всего $a_1 - 1 + a_2 - 1 + \ldots + a_m - 1$ чисел равных M. Противоречие.

Хитрое решение. Так как набор чисел остался таким же, значит не изменилась и сумма квадратов. Обозначим числа через $x_1, \ldots, x_{2015}$. Тогда:

$$x_1^2 + \ldots + x_{2015}^2 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x_{2014} + x_{2015}}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_{2015} + x_1}{2}\right)^2$$

Это равенство можно преобразовать следующим образом:

$$\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x_{2014} - x_{2015}}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_{2015} - x_1}{2}\right)^2 = 0$$

Сумма квадратов действительных чисел равна нулю в том и только в том случае, когда все эти числа равны нулю. Что и требовалось.

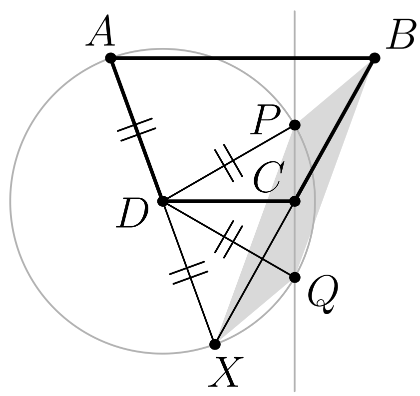
Вывод

1. Внутри выпуклого n-угольника отмечено k точек, $2 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}$. Докажите, что у этого n-угольника можно выбрать $2k$ вершин так, чтобы $2k$-угольник ими образованный содержал все k точек.

Решение. Фиксируем k и будем доказывать утверждение задачи индукцией по n. При $n = 2k$ утверждение очевидно. Пусть $n > 2k$, обозначим вершины через $A_1, \ldots, A_n$. Рассмотрим треугольники $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, …, $A_nA_1A_2$. Каждая из отмеченных точек лежит максимум в двух из них. Так как $n > 2k$, среди этих треугольников найдется такой, который не содержит ни одной из выбранных точек. Тогда его можно отрезать, а к оставшемуся многоугольнику применит предположение индукции.

2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD выполнено $AB = 2CD$. Обозначим прямую перепендикулярную CD, проходящую через точку C, через l. Окружность с центром D и радиусом DA пересекает l в точках P и Q. Докажите, что AP перпендикулярна BQ.

   Решение. Окружность из условия обозначим через ω. Продолжим AD и BC до пересечения в точке X. Из условия следует, что CD — средняя линия треугольника AXB. Тогда $AD = DX$, то есть $X \in \omega$ и AX является диаметром ω.



   Тогда угол $\angle AQX$ прямой, так как опирается на диаметр. Достаточно доказать, что QX параллельна BP. Для этого покажем, что $BPXQ$ — параллелограм. $BC = CX$ из-за того, что CD — средняя линия. $PC = CQ$ из-за того, что C — основание перпендикуляра, опущенного на хорду QP из центра окружности. Так как диагонали делятся пополам точкой пересечения, $BPXQ$ — параллелограм. Что и требовалось доказать.

3. Даны различные натуральные числа a, b и c. Докажите неравенство НОД$(ab+1, bc+1, ac+1) \leqslant \frac{a+b+c}{3}$.

   Решение. Пусть НОД$(ab+1, bc+1, ac+1) = d$. Так как $ab+1$ делится на d, a и d взаимно просты. Аналогично, НОД$(b, d) =$ НОД$(c, d) = 1$. Заметим, что $(ab+1) - (bc+1) = b(a-c)$ делится на d. Так как d и b взаимно просты, $a - c$ делится на d. Аналогично, на d делятся разности $b - c$ и $a - b$. Без ограничения общности множно считать, что $a > b > c$. Отсюда следует, что $b \geqslant c + d$ и $a \geqslant c + 2d$. Значит $\frac{a+b+c}{3} \geqslant \frac{3c+3d}{3} = c + d > d$. Что и требовалось.