Школа естественно-математической направленности
«Физтех-лицей» им. П.Л. Капицы

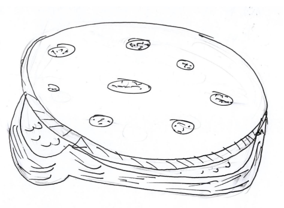
Сентябрьская олимпиада

7 класс

Долгопрудный, 2015

Письменный тур

Задача 1. *На прямоугольном куске хлеба лежит кружок колбасы. Докажите, что этот бутерброд можно разрезать одним прямолинейным разрезом на два так, чтобы и хлеб, и колбаса разделились поровну.*



Решение. Нам помогут следующие соображения: любая прямая, которая проходит через центр прямоугольника, делит его на две равные части (то есть "пополам"), и любая прямая, проходящая через центр круга, делит его пополам.

Значит, прямая, проведённая через центры прямоугольника и круга, делит каждую фигуры на две части, равные между собой.

Задача 2. *На доске таблица 4×4, в каждой клетке которой записано число. Аня выбрала наименьшее число в каждой строке, а затем наибольшее из этих чисел. Боря выбрал наибольшее число в каждом столбце, а затем наименьшее из этих чисел. Чьё число больше — Ани или Бори?*

Решение.

Пусть Анино число стоит в строке m, а Борино число стоит в столбце m. Рассмотрим число S на пересечении m-й строки и n-го столбца. S не меньше Аниного числа (т.к. Анино число — минимальное в своей строке), и не больше Бориного числа (т.к. Борино число — максимальное в своём столбце). Значит,

$$\text{Анино число } \leqslant S \leqslant \text{ Борино число}$$

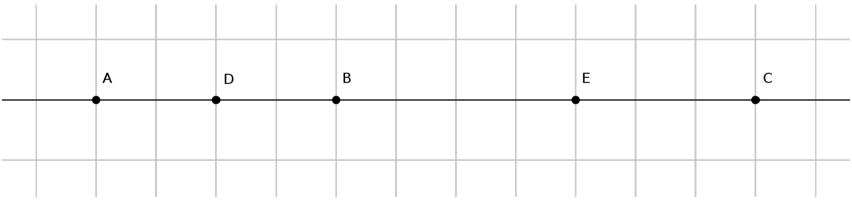
Значит, Анино число не больше Бориного.

Задача 3. *Расставьте скобки в неверном равенстве* $2 : 3 : 4 : 5 : 6 = 5$ *так, чтобы оно стало верным.*

Решение. $(2 : 3) : (4 : 5 : 6) = 5$.

Задача 4. *Можно ли на прямой отметить точки* A, B, C, D, E *так, чтобы расстояния между ними (в см) оказались равны:* $AB = 4$, $BC = 7$, $CD = 9$, $DE = 6$, $AE = 8$? *Если да, то приведите пример, если нет, то объясните почему нельзя.*

Решение. Да, можно.



Задача 5. *У Пети в кармане несколько монет. Если Петя наугад вытащит из кармана 3 монеты, среди них обязательно найдётся монета в 1 рубль. Если Петя наугад вытащит 4 монеты из кармана, среди них обязательно найдётся монета в 2 рубля. Петя вытащил из кармана 5 монет. Назовите эти монеты.*

Решение (автор — Валентин Коновалов). Мы знаем, что в худшем случае Пете придётся вытащить 3 монеты, чтобы достать 1 рубль. Значит, первые две попытки ему могут попасться другие монеты. Из этого следует, что 2 монеты не 1-рублёвые. Мы также знаем, что в худшем случае ему придётся вытащить 4 монеты, чтобы достать 2-рублёвую. Значит, кроме 2-рублёвых монет должны быть не больше 3 монет не 2-рублёвых. $3 + 2 = 5$ монет всего. Соответственно Петя вытащит 2 монеты в 2 рубля и 3 монеты в 1 рубль.

Задача 6. *Подряд записаны числа* $1, 2, 3, \ldots 2000$. *Первое, третье, пятое и т.д. по очереди вычеркивают. Из оставшихся 1000 чисел снова вычеркивают первое, третье, пятое и т.д. Так делают, пока не останется одно число. Что это за число?*

Решение.

Вычеркнем в первый раз. Останутся числа, которые делятся на 2 — ровно 1000 чисел.

Вычеркнем второй раз. Останутся числа, которые делятся на 4 — ровно 500 чисел.

Вычеркнем третий раз. Останутся числа, которые делятся на 8 — ровно 250 чисел.

Вычеркнем четвёртый раз. Останутся числа, которые делятся на 16 - ровно 125 чисел.

Вычеркнем пятый раз. Останутся числа, которые делятся на 32 — ровно 62 числа (т.к. последнее не делится на 62).

Вычеркнем шестой раз. Останутся числа, которые делятся на 64 — ровно 31 число.

Вычеркнем седьмой раз. Останутся числа, которые делятся на 128 — ровно 15 чисел.

Вычеркнем восьмой раз. Останутся числа, которые делятся на 256 — ровно 7 чисел.

Вычеркнем девятый раз. Останутся числа, которые делятся на 512 — ровно 3 числа.

Вычеркнем десятый раз. Останутся числа, которые делятся на 1024 — ровно 1 число.

Очевидно, в первоначальном наборе чисел это 1024.

Устный тур

Задача 1. *Найдите решение числового ребуса $a{,}bb + b{,}ab = 10$, где a и b — различные цифры.*

Решение. Рассмотрим сложение этих чисел в столбик. В последнем разряде при сложении b и b получился 0. Значит, $b = 0$ или $b = 5$.

Если $b = 0$, то ребус принимает вид $a{,}00 + 0{,}a0 = 10$. Единственный кандидат на роль a — это 9. Однако в таком случае $9{,}00+0{,}90 = 9{,}90 \neq 10$.

Если $b = 5$, то ребус принимает вид $a{,}55 + 5{,}a5 = 10$. Единственный кандидат на роль a — это 4. В таком случае $4{,}55+5{,}45 = 10{,}00 = 10{,}00$.

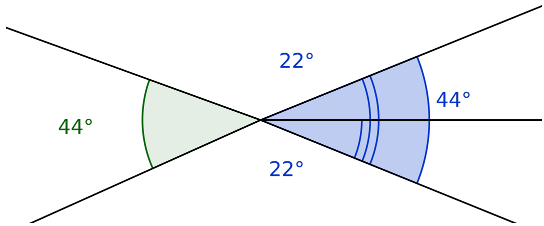
Задача 2. *Четыре друга пришли с рыбалки. Каждые двое сосчитали суммы своих уловов. Получилось шесть чисел: 7, 9, 14, 14, 19, 21. Сколько всего рыб было поймано?*

Решение. Сложим все данные числа. Тогда в сумме каждая рыба будет учтена 3 раза (например, рыбы первого рыбака учтены в его сумме улова со вторым, третьим и четвёртым рыбаком). Значит, суммарное количество рыб — $(7 + 9 + 14 + 14 + 19 + 21)/3 = 28$.[1]

Задача 3. *Можно ли провести из одной точки на плоскости пять лучей так, чтобы среди образованных ими углов было ровно четыре острых? Рассматриваются углы не только между соседними, но и между любыми двумя лучами.*

[1] Вообще говоря, ещё хорошо бы проверить, что такое попарное количество рыб действительно возможно. Это содержание задачи 7.

Решение. Да, можно. Смотри рисунок:



Задача 4. *Имеются двое песочных часов — на 7 минут и на 11 минут. Яйцо варится 15 минут. Как отмерить это время при помощи имеющихся часов?*

Решение. Запустим песочные часы на 7 минут и на 11 минут одновременно. Когда часы на 7 минут закончатся, запустим варку. Когда часы на 11 минут закончатся, пройдёт 4 минуты с момента начала варки. Перевернём часы на 11 минут. Когда они закончатся, закончится и варка яйца.

Задача 5. *Три друга — Пётр, Роман и Сергей — учатся на математическом, физическом и химическом факультетах. Если Пётр математик, то Сергей не физик. Если Роман не физик, то Пётр математик. Если Сергей не математик, то Роман — химик. Сможете ли вы определить специальности каждого?*

Решение. Пусть Пётр физик. Тогда Роман не физик, а следовательно из 2 утверждения Пётр математик. Противоречие.

Пусть Пётр математик. Тогда из 1 утверждения Сергей не физик; поскольку он и не математик (Пётр уже математик), то он химик. Тогда Роман физик. Но из третьего утверждения Роман химик. Противоречие.

Пусть Пётр химик. Тогда из 2 утверждения Роман не может быть не физиком, то есть он физик. Тогда Сергей — математик. Это ничему не противоречит.

Вывод

Задача 6. *В однокруговом футбольном турнире (каждая команда с каждой сыграла ровно по одному матчу) участвовало 7 команд. По итогам турнира оказалось, что команды, занявшие призовые места, набрали ровно половину всех очков. Могло ли по итогам турнира оказаться ровно 6 ничьих? (за победу даётся 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0)*

Решение. Каждая команда сыграла с каждой ровно один раз. Значит, всего был 21 матч (это можно понять, например, нарисовав (и не заполнив) турнирную таблицу). Если 6 парий закончились вничью, то 15 партий закончились чьей-то победой. Каждая ничейная игра делает вклад в 2 очка в общую сумму очков турнира; каждая неничейная игра делает вклад в 3 очка в общую сумму очков турнира. Тогда сумма всех очков $15 \cdot 3 + 6 \cdot 2$ — нечётное число. Значит, первые три команды не могли набрать половину всех очков.

Задача 7. *Пользуясь условием задачи 2 из Довывода, найдите, сколько рыб поймал каждый мальчик.*

Решение. Пусть первый мальчик поймал меньше всех, второй не меньше первого, третий не меньше второго, четвёртый не меньше третьего. Сумма уловов первого и второго — наименьшая из попарных уловов; значит, они вдвоём поймали 7 рыб. Значит, третий и четвёртый вдвоём поймали 21 рыбу. Следующая по величине попарная сумма уловов у первого и третьего рыбаков; значит они поймали вместе 9 рыб. Значит, второй и четвёртый поймали в сумме 19 рыб. Для следующей по величине попарной сумме уловов есть два варианта: у первого и четвёртого рыбака или у второго и третьего. Но в обоих случаях они поймали в сумме 14 рыб.

Итак, мы знаем, что первый и второй поймали в сумме 7 рыб, второй и третий 9 рыб, первый и третий 14 рыб. Значит, в сумме они поймали $(7+9+14)/2 = 15$ рыб. Значит, первый мальчик поймал $15-14 = 1$ рыбу, второй $15-9 = 6$, третий $15-7 = 8$. Учитывая, что в сумме поймано 28 рыб, получаем, что четвёртый поймал $28-15 = 13$ рыб.