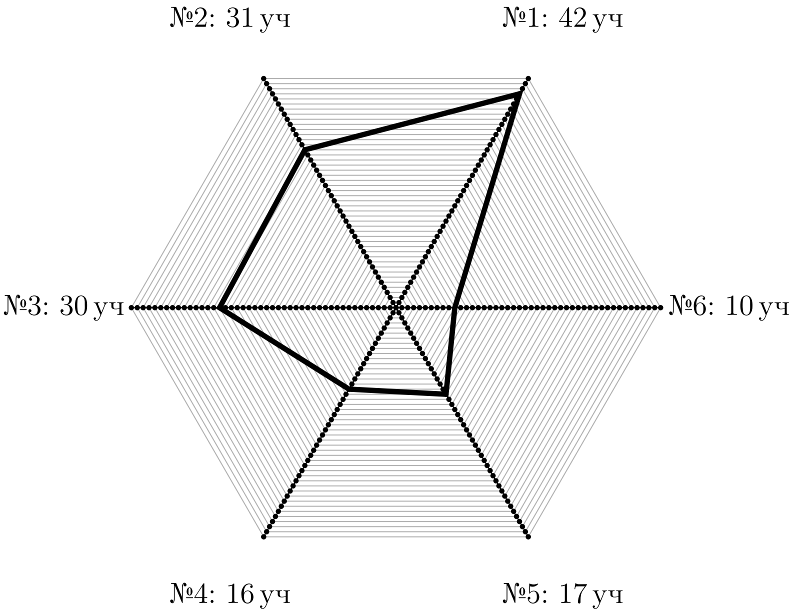
Школа естественно-математической направленности
«Физтех-лицей» им. П.Л. Капицы

Сентябрьская олимпиада

5 класс

Долгопрудный, 2015

Статистика решения задач

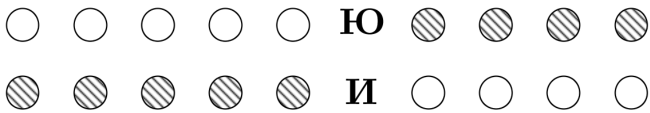


Письменный тур

Письменный тур

Задача 1. *Группа детского сада построилась парами мальчик с девочкой (причём все девочки стояли справа от мальчиков). Илья, идущий в паре с Юлей, насчитал впереди себя 5 мальчиков, а Юля позади себя — 4 девочки. Сколько детей в группе?*

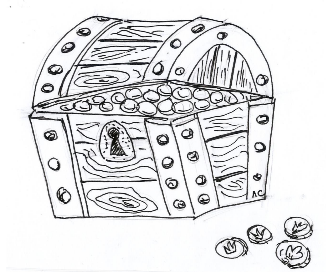
Решение (автор — Наталья Михайловская).



Поскольку впереди 5 мальчиков, это значит, 5 пар. И если сзади 4 девочки, значит, 4 пары позади. Юля и Илья ещё одна пара. Теперь складываем количество пар и умножаем на 2: $(5 + 4 + 1) \cdot 2 = 20$ детей.

Ответ: 20 детей в группе.

Задача 2. *Сундук, полный золота, весит 32 пуда, а сундук, заполненный золотом наполовину, весит 17 пудов. Сколько весит пустой сундук?*



Решение (автор — Андрей Прохоров).

$$\text{сундук} + \text{половина золота} = 17 \text{ пудов}$$

Умножим левую и правую часть на 2. Получится:

$$\text{сундук} + \text{сундук} + \text{всё золото} = 34 \text{ пуда}$$

Но мы знаем из условия, что

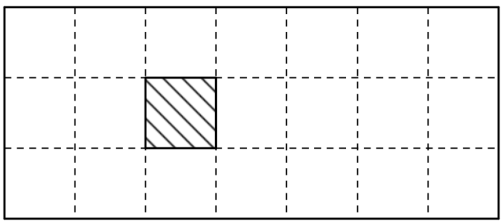
$$\text{сундук} + \text{всё золото} = 32 \text{ пуда},$$

поэтому

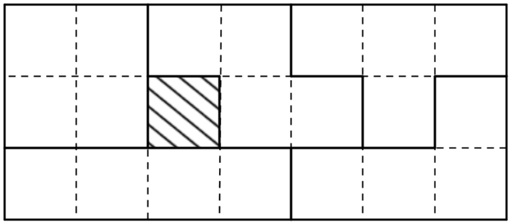
$$\text{сундук} = 2 \text{ пуда}.$$

Ответ: 2 пуда.

Задача 3. *Разрежьте прямоугольник 3×7 с одной вырезанной клеткой (см. рисунок) на 5 различных четырёхклеточных фигурок. Фигурки считаются различными, если поворачивая и переворачивая их, нельзя получить одну из другой.*



Решение.



Задача 4. *Оля, Гриша и Серёжа решали задачи. Гриша и Серёжа решили вместе 4 задачи, Гриша и Оля — 8 задач, а Оля и Серёжа — 6. Кто решил больше всех задач?*

Решение (автор — Георгий Булгаков).

По условию

$$\text{О} + \text{Г} = 8$$
$$\text{О} + \text{С} = 6$$

Значит, Гриша решил больше, чем Серёжа, на 2 задачи (Г=С+2). Мы знаем из условия, что

$$\text{Г} + \text{С} = 4$$

Добавим 2 к левой и правой части:

$$\text{Г} + \text{С} + 2 = 4 + 2$$

Т.к. $\text{С} + 2 = \text{Г}$, получим

$$2\text{Г} = 4 + 2$$
$$\text{Г} = 3$$

Гриша решил 3 задачи. Дальше легко найти, что Серёжа решил 1 задачу, а Оля — 5, то есть больше всех.

Ответ: Оля.

Задача 5. *Действие почти задачи происходит на одном острове, жители которого — рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы — всегда неправду. Каждый из собравшихся на площади жителей острова заявил остальным: «Вы все лжецы». Сколько рыцарей среди них?*

Решение (автор — Даниил Хмельков).

Если рыцарей ноль, то все лжецы будут говорить правду.

Если рыцарь один, то он будет говорить правду, а лжецы — ложь (подходит).

Если рыцарей 2 или больше, то рыцари говорят неправду.

Значит, рыцарь один.

Ответ: 1.

Задача 6. *Найдите наименьшее четырёхзначное число, у которого сумма цифр больше, чем у любого меньшего числа.*

Решение (автор — Мария Демиденко). Среди меньших чисел самая большая сумма цифр у числа 999: $9 + 9 + 9 = 27$. Для того, чтобы сумма цифр стала больше, нужно прибавить хотя бы 1. Нужно поставить её на первое место, потому что чем меньше цифра в старшем разряде, тем меньше число. Итого, ответ: 1999.

Ответ: 1999.

Устный тур

Довывод

Задача 1. *Петя посчитал, на каком этаже он живёт: если считать снизу, то на 33-м, а если считать сверху, то на 67-м. Сколько этажей в доме Пети?*

Решение. В доме есть петин этаж, этажи ниже (32) и этажи выше (66).То есть всего

$$1 + 32 + 66 \text{ этажей.}$$

Задача 2. *Между пятью ребятами произошёл разговор.*

— [Андрей] *А я секрет знаю!*

— [Боря (Андрею)] *Нет, не знаешь!*

— [Витя] *Борис, ты неправ!*

— [Гоша (Вите)] *Это ты неправ!*

— [Дима] *Врёшь, Гоша!*

Известно, что больше половины ребят сказали правду. Знает ли Андрей секрет?

Решение. Допустим, Андрей знает секрет. Тогда:

Андрей: прав;

Боря: не прав;

Витя: прав;

Гоша: не прав;

Дима: прав.

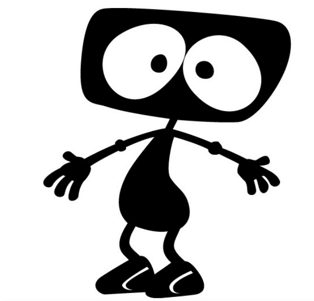
Условие задачи (*больше половины ребят сказали правду*) выполнено.

Теперь нужно рассмотреть случай, когда Андрей не знает секрета (ну и что, что ответ получили. Вдруг есть ещё один?). В этом случае сказали неправду Андрей, Витя и Дима, то есть больше половины всех ребят — значит, он нам не подходит.

Задача 3. *Каких трёхзначных чисел больше: тех, у которых цифра сотен больше цифры единиц или тех, у которых цифра сотен меньше цифры единиц?*

Решение. Разобъём трёхзначные числа на пары: одно число abc, а его пара — cba (например, пара 752 и 257). В каждой паре одно число относится к первой группе (цифра сотен больше цифры единиц), а другое - ко второй группе (цифра сотен меньше цифры единиц). Но некоторые числа остались без пары. Это числа вида aba (например, 737) — они не входят ни в какую группу. А ещё числа вида $ab0$, т.к. пара для них — двузначное число $0ba = ba$. Все числа $ab0$ входят в группу, где цифра сотен больше цифры единиц. Значит, эта группа больше.

Задача 4. *Дана таблица 4×4 клетки. Расставьте семь звёздочек в клетках таблицы так, чтобы при вычёркивании любых двух строк и любых двух столбцов в оставшихся клетках была хотя бы одна звёздочка.*



Решение.

×			
		×	×
×		×	
	×		

Задача 5. *Четыре куста малины растут в ряд. Известно, что количество ягод на соседних кустах отличается на одну. Может ли на всех кустах быть 2015 ягод?*

Решение.

Допустим, на первом кусте чётное кол-во ягод малины. Тогда на соседнем — нечётное (т. к. больше или меньше на одну). На третьем — чётное. На четвертом — нечётное. Всего количество ягод будет чётное+нечётное+чётное+нечётное=чётное, то есть точно не 2015.

Допустим, на первом кусте нечётное количество ягод. Рассуждая аналогично, получим, что общее количество ягод снова чётно.

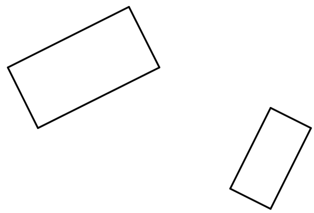
Значит, 2015 ягод получиться никак не могло.

Вывод

Задача 6. *Поезд длиною 180 м проезжает мимо фонаря за 9 секунд. За какое время он проедет мост длиною 360 м?*

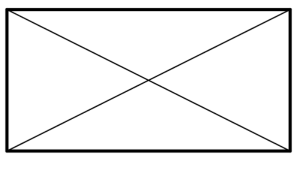
Решение. Раставим вдоль моста 3 фонаря: в начале моста, ровно посередине и в конце моста. Расстояние между соседними фонарями — 180 м, как раз длина поезда. Проехав мимо первого фонаря, поезд тут же начинает проезжать мимо второго. Проехав мимо второго фонаря, поезд тут же начинает проезжать мимо третьего. Проехав мимо третьего фонаря, поезд как раз проедет мост. Значит, поезд затратит втрое больше времени на проезд по мосту, чем на проезд мимо одного фонаря, то есть затратит 27 секунд.

Задача 7. *На столе лежат два прямоугольных пирога (см. рисунок). Как одним прямым разрезом разделить каждый пирог на две равные части? Можно пользоваться ножом, линейкой и делать засечки на пироге. «На глаз» ничего проводить нельзя, сдвигать пироги тоже.*



Решение.

Для решения задачи воспользуемся фактом: любая прямая линия, которая проходит через центр прямоугольника, делит его на две равные части. Чтобы найти центр каждого прямоугольника, сделаем на нём две диагональные насечки:



После того, как мы отметили два центра, осталось только провести через них прямой разрез.