1. Пусть ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом C, H — основание высоты, опущенной на гипотенузу, I_B и I_A — центры окружностей, вписанных в треугольники HBC и HAC соответственно.

1. Докажите, что $\angle I_A H I_B = 90°$
2. Докажите, что $\angle I_A C I_B = 45°$

2. Пусть r_B, r_A, r — радиусы окружностей, вписанных в $\triangle HBC$, $\triangle HAC$, ABC соответственно.

1. Докажите, что $\triangle ABC$, $\triangle CBH$, $\triangle ACH$ подобны. Чему равны коэффициенты подобия?
2. Докажите теорему Пифагора, используя результат предыдущей задачи.
3. Докажите, что $r^2 = r_A^2 + r_B^2$.

3. Пусть I — центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.

1. Докажите, что $AI = \sqrt{2}r$.
2. Докажите, что $r = \frac{a+b-c}{2}$

> обратите внимание на точки касания, запишите равенство отрезков касательных, проведите радиусы к точке касания, найдите квадратик.

3. Докажите, что $AI^2 = HI_A^2 + HI_B^2$.

> вспомните результат задачи 2.3.

4. Докажите, что $AI = I_A I_B$.

> используйте предыдущую задачу и задачу 1.1.

4. 1. Докажите, что $\triangle I_A I_B H$ подобен $\triangle ABC$.

> вспомните задачу 1.1 и задачи 3 и 4.

2. Найдите коэффициент подобия треугольников из предыдущей задачи.
3. Если есть два подобных треугольника на плоскости, то иногда один из них можно «повернуть» так, чтобы соответственные стороны стали параллельны. На сколько градусов «повернут» $\triangle I_A I_B H$ относительно $\triangle ABC$, если $\angle ABC = \alpha$?
4. Докажите, что угол между прямыми $I_A I_B$ и BC составляет 45°.

Результат последней задачи можно сформулировать очень красиво:

Прямая $I_A I_B$ отсекает от треугольника ABC равнобедренный прямоугольный треугольник.

5. (a) Докажите, что $\angle I_A I I_B = 135°$.

(b) Докажите, что $CI_A \perp BI_B$.

(c) Докажите, что $AI \perp I_A I_B$

Аналогично прошлой задаче докажите, что $CI_B \perp AI_A$, а потом воспользуйтесь тем, что высоты пересекаются в одной точке.

6. Пусть I_AI_B пересекается с AC в точке A', а с BC в точке B'. В предыдущем пункте мы доказали, что $\triangle A'B'C$ — прямоугольный равнобедренный.

(a) Докажите, что $B'C = A'C = HC$.

Рассмотрите треугольники I_BHC и $I_BB'C$ — они равны!.

(b) Докажите, что площадь треугольника $A'B'C$ не превосходит половины площади треугольника ABC.

Используйте результат предыдущей задачи и выразите площади треугольников через катеты AC и BC.