

*Masterarbeit*

# Schätzverfahren für adaptive Regelung von Hybridgetrieben

*Estimation Methods for Adaptive Control of Hybrid Gearboxes*

*vorgelegt von*  
Koray Karci

*Studiengang*  
Maschinenbau

*Prüfer*  
Prof. Dr.-Ing. Oliver Sawodny

*Betreuer*  
M.Sc. Michel Bauer

*Prüfungsdatum*  
30.09.2018



## **Kurzfassung**

Kurzfassung

## **Abstract**

Abstract

# Inhaltsverzeichnis



# Abkürzungen und Formelzeichen

## Abkürzungen

FHG	Freiheitsgrade
SDG	Sensitivitätsdifferentialgleichung
IMC	Internal Model Control
MPC	Modellprädiktive Regelung (Engl.: Model Predictive Control)

## Formelzeichen

Formelzeichen	Einheit	Beschreibung
$I$	A	Strom
$U$	V	Spannung
$T$	K	Temperatur
$\tau$	s	Zeitkonstante
$\rho_L$	kg/m <sup>3</sup>	Dichte der Luft
$\boldsymbol{u}$		Regeleingang des zu regelnden Systems
$\boldsymbol{x}$		Zustandsvektor
$\boldsymbol{y}$		Regelausgang des zu regelnden Systems





# Kapitel 1

## Einleitung und Motivation

Dies ist die Einleitung und Motivation. Freitag



# Kapitel 2

## Modellierung

In diesem Kapitel wird ein für die Simulation verwendetes detailliertes Modell des Antriebsstrangs hergeleitet. Hierfür wird ein vorhandenes, starres Modell um Elastizitäten der Seitenwellen ergänzt. Außerdem wird die Reibung an den Schaltelementen mit einem dynamischen Reibmodell modelliert.

### 2.1 Modellierung des Antriebsstrangs

Zur Modellierung des Antriebsstrangs wird die Getriebedynamik mittels der Newton-Euler Gleichungen berechnet. Dazu wird zu Beginn kurz auf die Herleitung dieser Gleichungen eingegangen [10]. Danach werden die Zwangsbedingungen im Getriebe anhand des schematischen Getriebeaufbaus hergeleitet und somit die Getriebedynamik berechnet. Des Weiteren wird der Abtriebsstrang um die Elastizitäten der Seitenwellen ergänzt. Durch die zusätzliche Berücksichtigung der zustandsabhängigen Widerstandsmomente am Rad ergibt sich somit ein schwingfähiges nichtlineares System.

#### 2.1.1 Beschreibung des allgemeinen Newton-Euler-Formalismus

Die Position und Orientierung von jedem Körper  $i$  eines holonomen Mehrkörpersystems mit  $p$  Körpern und  $f$  Freiheitsgraden (FHG), kann in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinaten  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^f$  angegeben werden mit

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{y}, t), \quad i = 1(1)p \quad (2.1)$$

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_i(\mathbf{y}, t). \quad (2.2)$$

Durch die zeitliche Ableitung dieser Gleichungen ergeben sich die translatorischen und rotatorischen Geschwindigkeiten

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{y}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = \mathbf{J}_{Ti}(\mathbf{y}, t) \cdot \dot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{v}}_i(\mathbf{y}, t) \quad (2.3)$$

$$\boldsymbol{\omega}_i = \dot{\mathbf{s}}_i = \frac{\partial \mathbf{s}_i}{\partial \mathbf{y}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{s}_i}{\partial t} = \mathbf{J}_{Ri}(\mathbf{y}, t) \cdot \dot{\mathbf{y}} + \bar{\boldsymbol{\omega}}_i(\mathbf{y}, t) \quad (2.4)$$

mit den Jacobi-Matrizen der Translation  $\mathbf{J}_{Ti}$  und der Rotation  $\mathbf{J}_{Ri}$ . Die lokalen Geschwindigkeitsvektoren  $\bar{\mathbf{v}}_i(\mathbf{y}, t)$  und  $\bar{\boldsymbol{\omega}}_i(\mathbf{y}, t)$  treten nur bei Systemen mit rheonomen Bindungen auf [10, S.46]. Nach erneuter zeitlicher Ableitung ergeben sich die Beschleunigungen zu

$$\mathbf{a}_i = \dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{J}_{Ti} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \dot{\mathbf{J}}_{Ti} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \dot{\bar{\mathbf{v}}}_i = \mathbf{J}_{Ti}(\mathbf{y}, t) \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{a}}_i(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) \quad (2.5)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \mathbf{J}_{Ri} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \dot{\mathbf{J}}_{Ri} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_i = \mathbf{J}_{Ri}(\mathbf{y}, t) \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_i(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) \quad (2.6)$$

mit den lokalen Beschleunigungsvektoren  $\bar{\mathbf{a}}_i$  und  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_i$ . Des Weiteren lassen sich für die Dynamik eines Systems virtuelle Bewegungen definieren. Diese sind willkürliche, infinitesimale Bewegungen des Systems, welche mit den skleronomen und den rheonomen Bindungen verträglich sind. Für virtuelle Bewegungen an holonomen Bindungen gilt

$$\delta \mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad (2.7)$$

$$\delta t = 0. \quad (2.8)$$

Damit lassen sich die virtuellen Bewegungen der einzelnen Körper  $i$  definieren zu

$$\delta \mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} = \mathbf{J}_{Ti}(\mathbf{y}, t) \cdot \delta \mathbf{y} \quad (2.9)$$

$$\delta \mathbf{s}_i = \frac{\partial \mathbf{s}_i}{\partial \mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} = \mathbf{J}_{Ri}(\mathbf{y}, t) \cdot \delta \mathbf{y}. \quad (2.10)$$

Die Kinetik eines Körpers  $i$  wird durch die Newtonschen- und Eulerschen-Gleichungen beschrieben. Die Newtonschen-Gleichungen eines Körpers  $i$  lassen sich angeben als

$$m_i \mathbf{a}_i(t) = \mathbf{f}_i(t) \quad (2.11)$$

wobei  $m_i$  die Masse des Körpers angibt und  $\mathbf{f}_i(t)$  die Summe der angreifenden Kräfte. Diese lassen sich wiederum einteilen in eingeprägte Kräfte  $\mathbf{f}^e$  und Reaktionskräfte  $\mathbf{f}^r$ . Die Eulerschen Gleichungen lauten

$$\mathbf{I}_i(t) \cdot \boldsymbol{\alpha}_i(t) + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i(t) \cdot \mathbf{I}_i(t) \boldsymbol{\omega}_i(t) = \mathbf{l}_i(t) \quad (2.12)$$

mit dem Trägheitstensor  $\mathbf{I}_i(t)$  und den äußeren Momenten  $\mathbf{l}_i(t)$  bezogen auf den Massenmittelpunkt des Körpers  $i$  im Inertialsystem und dem schiefsymmetrische 3x3-Tensor  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i(t)$ . Die äußeren Momenten  $\mathbf{l}_i(t)$  lassen sich äquivalent zum translatorischen Fall wieder in eingeprägte Momente  $\mathbf{l}^e$  und Reaktionsmomente  $\mathbf{l}^r$  aufteilen. Der schiefsymmetrische 3x3-Tensor ist für ein beliebigen Vektor

$$\mathbf{v} = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]^T \quad (2.13)$$

definiert als

$$\tilde{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Darüber hinaus kann mit den virtuellen Bewegungen aus (??) und (??) die virtuelle Arbeit  $\delta \mathbf{W}$  definiert werden. Da es, wie in (??) definiert, in Richtung der Bindungen keine virtuellen Bewegungen geben kann, ergibt sich für die virtuelle Arbeit der Reaktionskräfte zu

$$\delta \mathbf{W}^r = \sum_{i=1}^p (\mathbf{f}_i^r \cdot \delta \mathbf{r}_i + \mathbf{l}_i^r \cdot \delta \mathbf{s}_i) = 0. \quad (2.15)$$

Mit den Gleichungen (??), (??) und der beschriebenen Aufteilung der äußeren Kräfte in eingeprägte Kräfte und Reaktionskräfte, folgt aus (??) das d'Alembertsche Prinzip für Mehrkörpersysteme

$$\sum_{i=1}^p [(m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{f}_i^e) \cdot \delta \mathbf{r}_i + (\mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\alpha}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i - \mathbf{l}_i^e) \cdot \delta \mathbf{s}_i] = 0. \quad (2.16)$$

Durch einsetzen der virtuellen Bewegungen (??) und (??) ergibt sich daraus

$$\delta \mathbf{y} \cdot \sum_{i=1}^p \left[ \mathbf{J}_{Ti}^T \cdot (m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{f}_i^e) + \mathbf{J}_{Ri}^T \cdot (\mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\alpha}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i - \mathbf{l}_i^e) \right] = 0. \quad (2.17)$$

Das Einarbeiten der kinematischen Gleichungen (??) – (??) in ... führt zur Bewegungsgleichung für holonome Mehrkörpersysteme (MKS)

$$\underbrace{\sum_{i=1}^p \left[ \mathbf{J}_{Ti}^T \cdot m_i \cdot \mathbf{J}_{Ti} + \mathbf{J}_{Ri}^T \cdot \mathbf{I}_i \cdot \mathbf{J}_{Ri} \right] \ddot{\mathbf{y}}}_{\mathbf{M}(\mathbf{y}, t)} + \underbrace{\sum_{i=1}^p \left[ \mathbf{J}_{Ti}^T \cdot m_i \cdot \bar{\mathbf{a}}_i + \mathbf{J}_{Ri}^T \cdot \mathbf{I}_i \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_i + \mathbf{J}_{Ri}^T \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \cdot \mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i \right]}_{\mathbf{k}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t)} = \underbrace{\sum_{i=1}^p \left[ \mathbf{J}_{Ti}^T \cdot \mathbf{f}_i^e + \mathbf{J}_{Ri}^T \cdot \mathbf{l}_i^e \right]}_{\mathbf{q}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t)}. \quad (2.18)$$

Darin lässt sich die erste Summe zur Massenmatrix  $\mathbf{M}(\mathbf{y}, t)$ , die zweite Summe zum Vektor der verallgemeinerten Zentrifugal- und Corioliskräfte  $\mathbf{k}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t)$  und die dritte Summe zum Vektor der verallgemeinerten Kräfte  $\mathbf{q}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t)$  zusammenfassen, wodurch sich (??) schreiben lässt als

$$\mathbf{M}(\mathbf{y}, t) \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{k}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) = \mathbf{q}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) \quad (2.19)$$

### 2.1.2 Beschreibung des Getriebeaufbaus

Mit der allgemeinen Bewegungsgleichung für MKS (??) kann die Getriebedynamik berechnet werden. Das in dieser Arbeit betrachtete Getriebe besteht im wesentlichen aus vier hintereinander liegenden Planetengetrieben. Der schematische Aufbau eines Umlaufgetriebes ist in Abbildung ?? zu sehen. Dieses besteht aus dem Sonnenrad in der Mitte, den darum gleichmäßig verteilten Planetenrädern, welche auf dem Planetenträger drehbar gelagert sind und dem Hohlrad. Der Zusammenhang der einzelnen Drehzahlen ist gegeben durch die beiden Zwangsbedingungen (ZB) auf Geschwindigkeitsebene

$$\text{Sonne} - \text{Planeten} : r_{S,j} \omega_{S,j} - r_{T,j} \omega_{T,j} + r_{P,j} \omega_{P,j} = 0 \quad (2.20)$$

$$\text{Planeten} - \text{Hohlrad} : r_{H,j} \omega_{H,j} - r_{T,j} \omega_{T,j} - r_{P,j} \omega_{P,j} = 0 \quad (2.21)$$

mit den Rollradien  $r_{S,j}$ ,  $r_{P,j}$ ,  $r_{T,j}$  und  $r_{H,j}$  des Sonnenrads, des Planetenrads, des Planetenträgers und des Hohlrades im  $j$ -ten Planetensatz. Entsprechenden gelten die Indizes auch für die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_{S,j}$ ,  $\omega_{P,j}$ ,  $\omega_{T,j}$  und  $\omega_{H,j}$ . Dabei gilt, dass die Verhältnisse der Rollradien denen der Zähnezahlen einer Zahnradverbindung entsprechen [Fischer.2016].

Der Rollradius des Planetenträger entspricht somit der Summe der Zähnezah der Sonne  $z_{S,j}$  und des Planeten  $z_{P,j}$  und es ergibt sich

$$\text{Sonne} - \text{Planeten} : z_{S,j}\omega_{S,j} - (z_{S,j} + z_{P,j})\omega_{T,j} + z_{P,j}\omega_{P,j} = 0 \quad (2.22)$$

$$\text{Planeten} - \text{Hohlrad} : z_{H,j}\omega_{H,j} - (z_{H,j} - z_{P,j})\omega_{T,j} - z_{P,j}\omega_{P,j} = 0. \quad (2.23)$$

Die Größe  $z_{H,j}$  entspricht der Zähnezah am Hohlrad im  $j$ -ten Planetensatz. Die Verschaltung der vier Planetensätze zeigt Abbildung ???. Aus den acht Wellen ergeben sich entsprechende acht FHG im des MKS. Vier weitere kommen durch die Planeten der einzelnen Planetensätze hinzu. Somit hat des freie MKS  $f_{\text{free}} = 12$  FHG. Unter Berücksichtigung der beiden Zwangsbedingungen (??) und (??) ergibt sich somit die Anzahl der FHG des beschränkten MKS zu

$$f = f_{\text{free}} - 4q = 12 - 8 = 4 \quad (2.24)$$

mit der Anzahl der ZB  $q$  in jedem Planetensatz. Weiterhin ergeben sich durch die ZB an den einzelnen Planetensätzen die Zusammenhänge

$$\text{Planetensatz 1} : z_{S,1}\omega_1 = (z_{S,1} + z_P)\omega_8 - z_{P,1}\omega_9 \quad (2.25a)$$

$$z_{H,1}\omega_4 = (z_{H,1} - z_P)\omega_8 + z_{P,1}\omega_9 \quad (2.25b)$$

$$\text{Planetensatz 2} : z_{S,2}\omega_5 = (z_{S,2} + z_P)\omega_4 - z_{P,2}\omega_{10} \quad (2.25c)$$

$$z_{H,2}\omega_3 = (z_{H,2} - z_P)\omega_4 + z_{P,2}\omega_{10} \quad (2.25d)$$

$$\text{Planetensatz 3} : z_{S,3}\omega_3 = (z_{S,3} + z_P)\omega_2 - z_{P,3}\omega_{11} \quad (2.25e)$$

$$z_{H,3}\omega_6 = (z_{H,3} - z_P)\omega_2 + z_{P,3}\omega_{11} \quad (2.25f)$$

$$\text{Planetensatz 4} : z_{S,4}\omega_3 = (z_{S,4} + z_P)\omega_1 - z_{P,4}\omega_{12} \quad (2.25g)$$

$$z_{H,4}\omega_7 = (z_{H,4} - z_P)\omega_1 + z_{P,4}\omega_{12}. \quad (2.25h)$$

Die Gangschaltung erfolgt im Getriebe über jeweils drei Lamellenkupplungen und Lamellenbremsen. Mit Hilfe der Kupplungen lassen sich die Wellen 1 und 8, 8 und 3 und 2 und 7 verkoppeln. Über die drei Bremsen können die Wellen 8, 5 und 6 gegen das Gehäuse abgestützt werden. Um einen Gang zu schalten müssen drei der Schaltelemente betätigt sein. Dadurch verbleibt nur noch ein FHG der Getriebedynamik und es ergibt sich eine eindeutige Übersetzung zwischen Eingangsdrehzahl  $\omega_1$  und Ausgangsdrehzahl  $\omega_2$ . Die sich durch die jeweiligen Schaltungen ergebenden Übersetzungen können Tabelle ?? entnommen werden.

### 2.1.3 Anwendung des Newton-Euler-Formalismus

Die Wellen und Planeten rotieren alle nur um eine Achse bzw. bewegen sich nur auf einer Kreisbahn. Daher werden die Orientierungen und Ortsvektoren des einzelnen Körper als skalare angegeben. Die Ortsvektoren werden als Zylinderkoordinaten geschrieben. Somit ergibt sich der Vektor der Orientierungen der einzelnen Wellen und der Planeten zu

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_{12} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_{12} \end{bmatrix}^T. \quad (2.26)$$

Die Ortsvektoren der Wellen 1-8 können aufgrund der nicht vorhanden translatorischen Bewegung gleich Null gesetzt werden. Lediglich die Planeten haben durch die Bewegung auf

Tabelle 2.1: Übersetzung und aktive Schaltelemente je Gang.

Gang	Übersetzung	Schaltelement					
		K81	B05	B08	K38	K27	B06
1. Gang	5,354		•		•		•
2. Gang	3,243	•			•		•
3. Gang	2,252	•	•				•
4. Gang	1,636		•			•	•
5. Gang	1,211	•	•			•	
6. Gang	1,000	•			•	•	
7. Gang	0,865		•		•	•	
8. Gang	0,717			•	•	•	
9. Gang	0,601		•	•		•	
N	—		•				•
R	-4,798		•	•			•

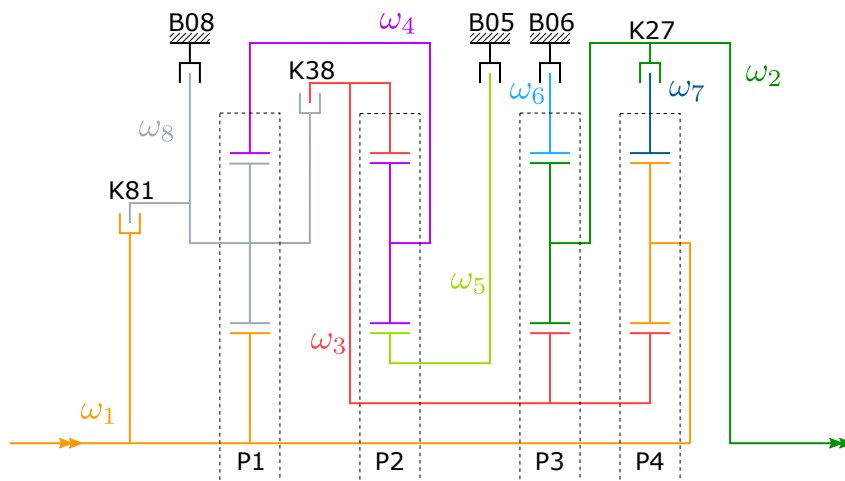


Abbildung 2.1: Schematischer Aufbau des Getriebes.

den Planetenträgern um die Drehachse einen translatorischen Anteil. Die Position der Planeten ergibt sich somit aus den entsprechenden Radien der Planetenträgern  $r_{T,j}$  und der Orientierung der Planetenträgern. Daraus ergibt sich der Orstvektor des Systems zu

$$\mathbf{r} = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_{12}]^T = [0 \ \dots \ 0 \ r_{T,1} \phi_8 \ r_{T,2} \phi_4 \ r_{T,3} \phi_2 \ r_{T,4} \phi_1]^T \quad (2.27)$$

Da das MKS  $f = 4$  FHG hat lässt sich nach [10] dieses durch verallgemeinerte Koordinaten  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^f$  beschreiben. Dabei liegt es nahe, die zu den am Getriebe gemessenen Winkelgeschwindigkeiten gehörigen Winkel  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  und  $\phi_8$  zu verwenden. Zudem wird  $\phi_3$  als weiterer FHG gewählt. Dadurch ergibt sich der Vektor der verallgemeinerten Koordinaten zu

$$\mathbf{y} = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \phi_8]^T. \quad (2.28)$$

Die Zusammenhänge in (??) gelten auch für die zugehörigen Winkel. Damit können  $\mathbf{s}$  und  $\mathbf{r}$  in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinaten angegeben werden. Die Einträge von  $\mathbf{s}(\mathbf{y})$  ergeben sich zu

$$\phi_1 = \phi_1 \quad (2.29a)$$

$$\phi_2 = \phi_2 \quad (2.29b)$$

$$\phi_3 = \phi_3 \quad (2.29c)$$

$$\phi_4 = -\frac{z_{S,1}}{z_{H,1}}\phi_1 + \left(\frac{z_{S,1}}{z_{H,1}} + 1\right)\phi_8 \quad (2.29d)$$

$$\phi_5 = \left(-\frac{z_{S,1}}{z_{H,1}} - \frac{z_{H,2}z_{S,1}}{z_{H,1}z_{S,2}}\right)\phi_1 - \frac{z_{H,2}}{z_{S,2}}\phi_3 + \left(\frac{z_{S,1}}{z_{H,1}} + \frac{z_{H,2}}{z_{S,2}} + \frac{z_{H,2}z_{S,1}}{z_{H,1}z_{S,2}} + 1\right)\phi_8 \quad (2.29e)$$

$$\phi_6 = \left(\frac{z_{S,3}}{z_{H,3}} + 1\right)\phi_2 - \frac{z_{S,3}}{z_{H,3}}\phi_3 \quad (2.29f)$$

$$\phi_7 = \left(\frac{z_{S,4}}{z_{H,4}} + 1\right)\phi_1 - \frac{z_{S,4}}{z_{H,4}}\phi_3 \quad (2.29g)$$

$$\phi_8 = \phi_8 \quad (2.29h)$$

$$\phi_9 = -\frac{z_{S,1}}{z_{P,1}}\phi_1 + \left(\frac{z_{S,1}}{z_{P,1}} + 1\right)\phi_8 \quad (2.29i)$$

$$\phi_{10} = \left(\frac{z_{H,2}z_{S,1}}{z_{H,1}z_{P,2}} + \frac{z_{S,1}}{z_{H,1}}\right)\omega_1 + \frac{z_{H,2}}{z_{P,2}}\phi_3 + \left(\frac{z_{S,1}}{z_{H,1}} - \frac{z_{H,2}}{z_{P,2}} - \frac{z_{H,2}z_{S,1}}{z_{H,1}z_{P,2}} + 1\right)\phi_8 \quad (2.29j)$$

$$\phi_{11} = \left(\frac{z_{S,3}}{z_{P,3}} + 1\right)\phi_2 - \frac{z_{S,3}}{z_{P,3}}\phi_3 \quad (2.29k)$$

$$\phi_{12} = \left(\frac{z_{S,4}}{z_{P,4}} + 1\right)\phi_1 - \frac{z_{S,4}}{z_{P,4}}\phi_3 \quad (2.29l)$$

Die Einträge von  $\mathbf{r}$  sind bis auf den Zehnten bereits in Abhängigkeit von  $\mathbf{y}$  angegeben. Der verbleibende Eintrag kann mit (??) wie folgt angegeben werden

$$r_{10}(\mathbf{y}) = r_{T,2} \phi_4 = r_{T,2} \left(-\frac{z_{S,1}}{z_{H,1}}\phi_1 + \left(\frac{z_{S,1}}{z_{H,1}} + 1\right)\phi_8\right). \quad (2.30)$$



Durch die zeitliche Ableitung von  $\mathbf{r}(\mathbf{y})$  und  $\mathbf{s}(\mathbf{y})$  gemäß (??) und ?? erhält man die Jacobi-Matrizen der Translation

$$\mathbf{J}_T = \begin{bmatrix} J_{T1} & J_{T2} & \cdots & J_{T12} \end{bmatrix}^T \quad (2.31)$$

und der Rotation

$$\mathbf{J}_R = \begin{bmatrix} J_{R1} & J_{R2} & \cdots & J_{R12} \end{bmatrix}^T, \quad (2.32)$$

welche die einzelnen Jacobi-Matrizen der Körper enthalten. Die Terme  $\bar{\mathbf{v}}$  und  $\bar{\boldsymbol{\omega}}$  verschwinden, da es sich um skleronome Bindungen handelt und die ZB (??) nicht explizit zeitabhängig sind. Auch die lokalen Beschleunigungsvektoren  $\bar{\mathbf{a}}$  und  $\bar{\boldsymbol{\omega}}$  verschwinden, da  $\mathbf{J}_T$  und  $\mathbf{J}_R$  zeitlich konstant sind. In der allgemeinen Bewegungsgleichung für holonome MKS (??) verschwinden somit die Zentrifugalkräfte in  $\mathbf{k}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t)$ . Auch die Corioliskräfte verschwinden, da für alle Körper das Inertialsystem als Referenzsystem verwendet wird. Im Vektor der verallgemeinerten Kräfte  $\mathbf{q}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t)$  werden die eingprägten Kräfte  $\mathbf{f}_i^e$  vernachlässigt da die translatorischen Bewegungen im Getriebe sehr klein gegenüber der rotatorischen Bewegungen sind. Somit reduziert sich (??) auf

$$\mathbf{M}(\mathbf{y}, t) \cdot \ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{q}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) \quad (2.33)$$

wobei die Massenmatrix mit  $\mathbf{J}_T$  und  $\mathbf{J}_R$  jetzt angegeben werden kann als

$$\mathbf{M}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{J}_T^T \cdot \text{diag}(m_i) \cdot \mathbf{J}_T + \mathbf{J}_R^T \cdot \text{diag}(I_i) \cdot \mathbf{J}_R \quad (2.34)$$

und der Vektor der verallgemeinerten Kräfte als

$$\mathbf{q}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) = \mathbf{J}_R^T \cdot \mathbf{l}^e \quad (2.35)$$

Die eingprägten Momente sind die von den Schaltelementen aufgebrachten Momente  $T_{B05}$ ,  $T_{B06}$ ,  $T_{B08}$ ,  $T_{K81}$ ,  $T_{K38}$  und  $T_{K27}$ . Des Weiteren wirken am Getriebeeingang das Moment  $T_{In}$  und am Getriebeausgang das Moment  $T_{Out}$ . Damit ergibt sich der Vektor der eingprägten Momente zu

$$\mathbf{l}^e = \begin{bmatrix} T_{In} + T_{K81} \\ -T_{K27} - T_{Out} \\ -T_{K38} \\ 0 \\ T_{B05} \\ T_{B06} \\ T_{K27} \\ T_{B08} + T_{K38} - T_{K81} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Das Eingangsmoment  $T_{In}$  wird vom Verbrennungsmotor und einem Elektromotor gestellt. Das Ausgangsmoment  $T_{Out}$  wird an die Kardanwelle übertragen. Andere eingprägte Momente, wie Schleppmomente oder Reibungen an den Lagern werden vernachlässigt. Mit Hilfe der ersten Summe von (??) können die Einträge der 4x4-Massenmatrix  $\mathbf{M}$  berechnet werden.

Diese ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{(1,1)} &= J_1 + J_7 \left( \frac{z_{S,4}}{z_{H,4}} + 1 \right)^2 + J_{12} \left( \frac{z_{S,4}}{z_{P,4}} + 1 \right)^2 + J_{10} \left( \frac{z_{S,1}}{z_{H,1}} - \sigma_5 \right)^2 + J_5 \left( \frac{z_{S,1}}{z_{H,1}} + \sigma_4 \right)^2 \\
&\quad + m_{P,4} r_{T,4}^2 + \frac{J_4 z_{S,1}^2}{z_{H,1}^2} + \frac{J_9 z_{S,1}^2}{z_{P,1}^2} + \frac{m_{P,2} r_{T,2}^2 z_{S,1}^2}{z_{H,1}^2} \\
\mathbf{M}_{(1,3)} &= \frac{J_5 z_{H,2} \left( \frac{z_{S,1}}{z_{H,1}} + \sigma_4 \right)}{z_{S,2}} - \frac{J_{12} z_{S,4} \left( \frac{z_{S,4}}{z_{P,4}} + 1 \right)}{z_{P,4}} - \frac{J_{10} z_{H,2} \left( \frac{z_{S,1}}{z_{H,1}} - \sigma_5 \right)}{z_{P,2}} - \frac{J_7 z_{S,4} \left( \frac{z_{S,4}}{z_{H,4}} + 1 \right)}{z_{H,4}} \\
\mathbf{M}_{(1,4)} &= J_{10} \left( \frac{z_{S,1}}{z_{H,1}} - \sigma_5 \right) \sigma_3 - J_5 \left( \frac{z_{S,1}}{z_{H,1}} + \sigma_4 \right) \sigma_2 - \frac{J_4 z_{S,1} \left( \frac{z_{S,1}}{z_{H,1}} + 1 \right)}{z_{H,1}} \\
&\quad - \frac{J_9 z_{S,1} \left( \frac{z_{S,1}}{z_{P,1}} + 1 \right)}{z_{P,1}} - \frac{m_{P,2} r_{T,2}^2 z_{S,1} \left( \frac{z_{S,1}}{z_{H,1}} + 1 \right)}{z_{H,1}} \\
\mathbf{M}_{(2,2)} &= J_2 + J_6 \left( \frac{z_{S,3}}{z_{H,3}} + 1 \right)^2 + J_{11} \left( \frac{z_{S,3}}{z_{P,3}} + 1 \right)^2 + m_{P,3} r_{T,3}^2 \\
\mathbf{M}_{(2,3)} &= - \frac{J_6 z_{S,3} \left( \frac{z_{S,3}}{z_{H,3}} + 1 \right)}{z_{H,3}} - \frac{J_{11} z_{S,3} \left( \frac{z_{S,3}}{z_{P,3}} + 1 \right)}{z_{P,3}} \\
\mathbf{M}_{(3,1)} &= \mathbf{M}_{(1,3)} \\
\mathbf{M}_{(3,2)} &= \mathbf{M}_{(2,3)} \\
\mathbf{M}_{(3,3)} &= J_3 + \frac{J_{10} z_{H,2}^2}{z_{P,2}^2} + \frac{J_5 z_{H,2}^2}{z_{S,2}^2} + \frac{J_6 z_{S,3}^2}{z_{H,3}^2} + \frac{J_7 z_{S,4}^2}{z_{H,4}^2} + \frac{J_{11} z_{S,3}^2}{z_{P,3}^2} + \frac{J_{12} z_{S,4}^2}{z_{P,4}^2} \\
\mathbf{M}_{(3,4)} &= - \frac{J_{10} z_{H,2} \sigma_3}{z_{P,2}} - \frac{J_5 z_{H,2} \sigma_2}{z_{S,2}} \\
\mathbf{M}_{(4,1)} &= \mathbf{M}_{(1,4)} \\
\mathbf{M}_{(4,3)} &= \mathbf{M}_{(3,4)} \\
\mathbf{M}_{(4,4)} &= J_8 + J_4 \left( \frac{z_{S,1}}{z_{H,1}} + 1 \right)^2 + J_9 \left( \frac{z_{S,1}}{z_{P,1}} + 1 \right)^2 + m_{P,1} r_{T,1}^2 + J_{10} \sigma_3^2 + J_5 \sigma_2^2 \\
&\quad + m_{P,2} r_{T,2}^2 \left( \frac{z_{S,1}}{z_{H,1}} + 1 \right)^2 \\
\sigma_1 &= \left( \frac{z_{S,4}}{z_{H,4}} + 1 \right) \\
\sigma_2 &= \left( \frac{z_{S,1}}{z_{H,1}} + \frac{z_{H,2}}{z_{S,2}} + \frac{z_{H,2} z_{S,1}}{z_{H,1} z_{S,2}} + 1 \right) \\
\sigma_3 &= \left( \frac{z_{H,2}}{z_{P,2}} - \frac{z_{S,1}}{z_{H,1}} + \frac{z_{H,2} z_{S,1}}{z_{H,1} z_{P,2}} - 1 \right) \\
\sigma_5 &= \frac{z_{H,2} z_{S,1}}{z_{H,1} z_{P,2}} \\
\sigma_4 &= \frac{z_{H,2} z_{S,1}}{z_{H,1} z_{S,2}}
\end{aligned}$$

wobei  $J_{1-12}$  die Massenträgheitsmomente der entsprechenden Wellen sind und  $m_{P,1-4}$  die Gesamtmasse der Planeten eines Planetensatzes. Durch einsetzen von  $\mathbf{M}$  und (??) in (??) ergeben sich die vier Gleichungen der Getriebedynamik

$$\mathbf{M}_{(1,1)}\dot{\omega}_1 + \mathbf{M}_{(1,3)}\dot{\omega}_3 + \mathbf{M}_{(1,4)}\dot{\omega}_8 = T_{K81} + T_{in} + \sigma_1 T_{K27} - T_{B05} \left( \frac{z_{S,1}}{z_{H,1}} + \sigma_4 \right) \quad (2.37a)$$

$$\mathbf{M}_{(2,2)}\dot{\omega}_2 + \mathbf{M}_{(2,3)}\dot{\omega}_3 = T_{B06} \left( \frac{z_{S,3}}{z_{H,3}} + 1 \right) - T_{out} - T_{K27} \quad (2.37b)$$

$$\mathbf{M}_{(3,1)}\dot{\omega}_1 + \mathbf{M}_{(3,2)}\dot{\omega}_2 + \mathbf{M}_{(3,3)}\dot{\omega}_3 + \mathbf{M}_{(3,4)}\dot{\omega}_8 = -T_{K38} - \frac{z_{H,2}}{z_{S,2}} T_{B05} - \frac{z_{S,3}}{z_{H,3}} T_{B06} - \frac{z_{S,4}}{z_{H,4}} T_{K27} \quad (2.37c)$$

$$\mathbf{M}_{(4,1)}\dot{\omega}_1 + \mathbf{M}_{(4,3)}\dot{\omega}_3 + \mathbf{M}_{(4,4)}\dot{\omega}_8 = T_{B08} + T_{K38} - T_{K81} + \sigma_2 T_{B05}. \quad (2.37d)$$

Mit Hilfe der Definition des Eingangsvektors

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} T_{In} & T_{Out} & T_{K81} & T_{K38} & T_{B08} & T_{B05} & T_{B06} & T_{K27} \end{bmatrix}^T \quad (2.38)$$

lassen sich die Gleichungen (??) zusammenfassen zu

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{u}. \quad (2.39)$$

Dieses Differentialgleichungssystem kann mit der Definition des Zustands

$$\mathbf{x} = \dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_8 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

und der Invertierung von  $\mathbf{M}$  in die Zustandsraumdarstellung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{M}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{u} = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (2.41)$$

transformiert werden. In dieser Darstellung ist leicht ersichtlich, dass das System aufgrund der fehlenden Systemmatrix nicht zustandsabhängig ist.

#### 2.1.4 Erweiterung um elastische Seitenwellen

Aufgrund der relativ elastischen Seitenwellen kann es im Antriebsstrang zu erheblichen Schwingungen kommen. Um diese bei der Simulation eines Schaltvorgang mit berücksichtigen zu können, soll das in ?? hergeleitete Zustandsraummodell um die Elastizitäten erweitert werden. Die Seitenwellen werden dabei als Feder-Dämpfer-Systeme modelliert. Die Kardanwelle wird hingegen als starrer Körper betrachtet. Ein schematischen Aufbau des Antriebsstrangs zeigt Abbildung ???. Zunächst wird der Zustandsvektor um die Verdrehung der Seitenwellen  $\psi$  und die Raddrehzahl  $\omega_C$  ergänzt, sodass sich der erweiterte Zustandsvektor

$$\mathbf{x}_{ex} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_8 \\ \phi \\ \omega_C \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

ergibt. Wie in Abbildung ??? veranschaulicht, ergibt sich die  $\phi$  aus der Differenz der Verdrehung am linken Schnittufer der Seitenwellen  $\phi_{ss,p}$  und der des Rades  $\phi_C$ , am rechten Schnittufer. Unter Berücksichtigung der starren Kardanwelle ergibt sich somit für die Verdrehung der Seitenwellen

$$\phi = \frac{\phi_2}{i_D} - \phi_C \quad (2.43)$$

wobei  $i_D$  die Übersetzungen des Differentials angibt. Entsprechend gilt der Zusammenhang auch für die Winkelgeschwindigkeiten

$$\dot{\phi} = \frac{\omega_2}{i_D} - \omega_C. \quad (2.44)$$

Des weiteren kann am Rad das Momentengleichgewicht

$$I_C^{\text{eff}} \dot{\omega}_C = 2 T_{ss} - T_{\text{res}} \quad (2.45)$$

aufgestellt werden. Das effektive Massenträgheitsmomentes des Rads  $I_C^{\text{eff}}$  setzt sich wie folgt zusammen

$$I_C^{\text{eff}} = I_{ss} + m_C r_{\text{dyn}}. \quad (2.46)$$

Dabei ist  $I_{ss}$  das Massenträgheitsmoment einer Seitenwelle,  $m_C$  die Masse des Rads und  $r_{\text{dyn}}$  der dynamische Radradius. Desweiteren ist  $T_{ss}$  das von den Seitenwellen übertragene Moment und kann mit dem Steifigkeitskoeffizient  $k_{ss}$  und dem Dämpfungskoeffizient  $d_{ss}$  berechnet werden zu

$$T_{ss} = k_{ss} \left( \frac{\phi_2}{i_D} - \phi_C \right) + d_{ss} \left( \frac{\omega_2}{i_D} - \omega_C \right). \quad (2.47)$$

Das Widerstandsmoment berechnet sich als Summe der berücksichtigten äußeren Widerstände zu

$$T_{\text{res}} = r_{\text{dyn}} (F_r(v) + F_{\text{ad}}(v) + F_g). \quad (2.48)$$

Die berücksichtigten Widerstände sind der Rollwiderstand  $F_r(v)$ , der Luftwiderstand  $F_{\text{ad}}(v)$  und die Hangabtriebskraft  $F_g$  und werden wie folgt berechnet

$$F_r(v) = v \cdot f_{\text{Roll}}(v) \cdot \cos(\zeta) \cdot m_{\text{veh}} \cdot g \quad (2.49a)$$

$$F_{\text{ad}}(v) = \frac{1}{2} \cdot v^2 \cdot \rho_{\text{Air}} \cdot c_W \cdot A_{\text{front}} \quad (2.49b)$$

$$F_g = \sin(\zeta) \cdot m_{\text{veh}} \cdot g. \quad (2.49c)$$

Dabei ist  $v = \omega_C r_{\text{dyn}}$  die Fahrzeuggeschwindigkeit,  $f_{\text{Roll}}(v)$  der von der Geschwindigkeit abhängige Faktor des Rollwiderstands,  $\zeta$  die Steigung der Straße in rad,  $g$  die Erdbeschleunigung,  $\rho_{\text{Air}}$  die Luftdichte,  $c_W$  der Widerstandsbeiwert des Fahrzeugs,  $A_{\text{front}}$  die Frontfläche des Fahrzeugs und  $m_{\text{veh}}$  die Gesamtmasse des Fahrzeugs [8, S. 3ff]. Durch Einsetzen von (??) und (??) in (??) und anschließender Auflösung nach  $\dot{\omega}_C$  erhält man die Dynamik des Rades

$$\dot{\omega}_C = \left[ 2 \left( k_{ss} \left( \frac{\phi_2}{i_D} - \phi_C \right) + d_{ss} \left( \frac{\omega_2}{i_D} - \omega_C \right) \right) - r_{\text{dyn}} (F_r(v) + F_{\text{ad}}(v) + F_g) \right] / I_C^{\text{eff}}. \quad (2.50)$$

Aufgrund der starren Verbindung von Welle 2, der Kardanwelle und des Differentials, werden die Massenträgheitsmomente dieser Bauteile zusammengefasst zu

$$J_2^{\text{eff}} = J_2 + J_{\text{cs}}^{\text{eff}} + \frac{J_{\text{cs}}^{\text{eff}}}{i_D^2} \quad (2.51)$$

wobei in das effektive Massenträgheitsmoment der Kardanwelle  $J_{\text{cs}}^{\text{eff}} = J_{\text{cs}} + 0,5 J_{\text{D}}$  die eine Hälfte des Massenträgheitsmoments des Differentials miteinbezogen wird. Die andere Hälfte wird aufgrund der Drehzahldifferenz nach dem Differential mit dem Massenträgheitsmoment der zweiten Seitenwelle  $J_{\text{ss}}^{\text{eff}} = 0,5 J_{\text{D}} + J_{\text{ss}}$  zusammen gefasst. Für das erweiterte System wird  $J_2$  in  $\mathbf{M}(2, 2)$  dann durch  $J_2^{\text{eff}}$  ersetzt. Des weiteren wird in Abbildung ??? ersichtlich, dass für das Ausgangsmoment

$$T_{\text{out}} = \frac{2 T_{\text{ss}}}{i_{\text{D}}} = \frac{2}{i_{\text{D}}} \left[ k_{\text{ss}} \left( \frac{\phi_2}{i_{\text{D}}} - \phi_{\text{C}} \right) + d_{\text{ss}} \left( \frac{\omega_2}{i_{\text{D}}} - \omega_{\text{C}} \right) \right] \quad (2.52)$$

gilt und dieses in (??) dementsprechend ersetzt werden kann.

Zu beachten ist hier, dass  $v(\omega_{\text{C}})$  zustandsabhängig ist und sowohl in  $F_{\text{r}}(v)$  als auch in  $F_{\text{ad}}(v)$  nichtlinear eingeht, wodurch das gesamt System nichtlinear wird. Auch die Eingangsgröße  $\zeta(t)$  geht nichtlinear in die Widerstand ein. Damit lässt sich das erweiterte Modell mit den Gleichungen (??) und (??) in der Form

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{ex}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{\text{ex}}) + \mathbf{B}_{\text{ex,nl}} \mathbf{u}_{\text{ex,nl}} \quad (2.53)$$

schreiben.

Da in den weiteren Betrachtungen die Dynamik des Getriebes während eines Gangwechsels analysiert wird, kann das Modell auf zwei Gänge reduziert werden. In dieser Arbeit sind dies die Gänge Zwei und Drei. Wie Tabelle ?? entnommen werden kann, sind die Schaltelemente B08 und K27 während beiden Gängen geöffnet daher gilt

$$T_{\text{K27}} = 0$$

$$T_{\text{B08}} = 0.$$

Des Weiteren sind in beiden Gängen die Schaltelemente K81 und B06 geschlossen. Daher gelten für beide Gänge die zusätzlichen Zwangsbedingungen

$$\omega_6 = 0 \quad (2.55a)$$

$$\omega_1 = \omega_8. \quad (2.55b)$$

Damit ergeben sich der reduzierte Zustand und der reduzierte Eingang zu

$$\mathbf{x}_{\text{ex,nl},23} = \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \phi & \omega_{\text{C}} \end{bmatrix}^T \quad (2.56)$$

und

$$\mathbf{u}_{\text{ex,nl},23} = \begin{bmatrix} T_{\text{In}} & T_{\text{K38}} & T_{\text{B05}} \end{bmatrix}^T. \quad (2.57)$$

Durch Einsetzen der Zwangsbedingungen in (??) und der Berücksichtigung des reduzierten Zustands- und Eingangsvektors ist das nichtlineare reduzierte System

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{ex},23} = \mathbf{f}_{23}(\mathbf{x}_{\text{ex},23}) + \mathbf{B}_{\text{ex,nl}23} \mathbf{u}_{\text{ex,nl}23}. \quad (2.58)$$

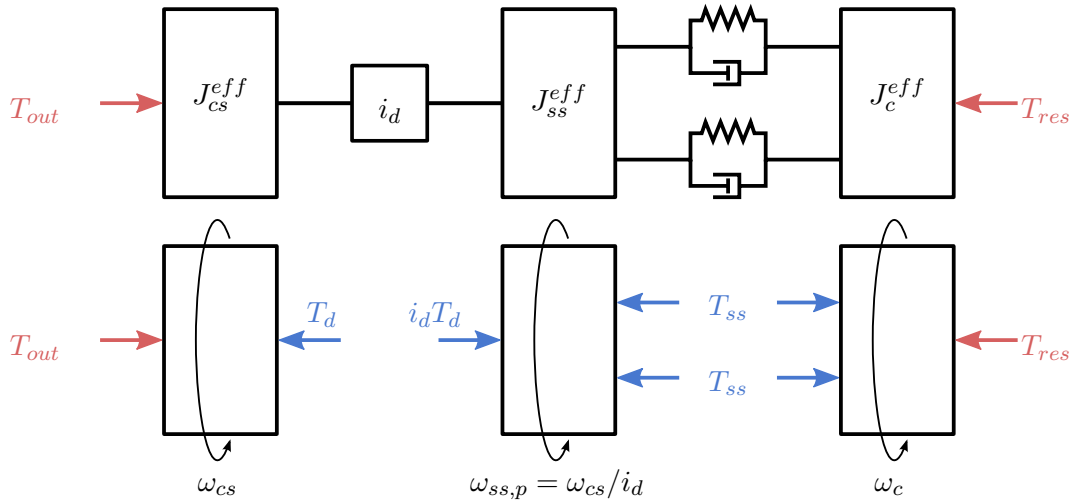


Abbildung 2.2: Schematische Darstellung des Abtriebsstrangs

## 2.2 Modellierung der Reibung an Kupplungen und Bremsen

Die im Abschnitt ?? eingeführten Momente der Schaltelemente werden über Lamellenkupplungen beziehungsweise -bremsen an den Wellen angebracht. Dabei werden die Lamellenpakete über einen hydraulischen Druck zusammengepresst, sodass zwischen den Flächen Reibkräfte wirken. Solange die aus dem Druck resultierende Normalkraft an Lamellenpaketen nicht ausreicht um die Scheiben gegeneinander abzustützen, wirkt die Reibkraft entgegen der Differenzdrehzahl  $\Delta\omega$  der drehenden Scheiben. Ist die Normalkraft groß genug entsteht eine kraftschlüssige Verbindung zwischen Innen- und Außenlamellen. In diesem Fall ist  $\Delta\omega = 0$  und der Betrag der Reibkraft entspricht dem der Reaktionskraft und wirkt dieser entgegen.

Zur Ermittlung der auf die Wellen wirkenden Reaktionsmomente bedarf es eines Reibmodells. Im Wesentlichen können diese in statische und dynamische Reibmodelle eingeteilt werden. Dynamische Reibmodelle unterscheiden sich dadurch, dass sie über mindestens einen weiteren Zustand verfügen. Dies ermöglicht die Simulation von weiteren Reibeffekten wie Hysteresen, variierende Losbrechkräfte oder nicht-gleitende Auslenkungen [11]. Im folgenden werden statische und dynamische Reibmodelle erläutert.

### 2.2.1 Statische Reibmodelle

Die einfachste Art der Reibungsmodellierung ist die Coulombsche Reibung. Dabei ist die Reibkraft proportional zur Normalkraft  $F_N$  und einem konstanten Reibungskoeffizienten  $\mu_C$ . Nach [11] ist diese definiert als

$$F_C = F_N \mu_C \operatorname{sign}(\Delta\omega) = F_N \mu_C \begin{cases} 1 & , \Delta\omega > 0 \\ 0 & , \Delta\omega = 0 \\ -1 & , \Delta\omega < 0 \end{cases} \quad (2.59)$$

Durch die Erweiterung um einen Haftreibungsbeiwert  $\mu_S$ , wird eine benötigte Losbrechkraft mit berücksichtigt. Der Haftreibungsbeiwert  $\mu_S$  ist im Normalfall größer als  $\mu_C$ , sodass eine

größere Kraft notwendig ist um einen reibungsbehafteten Körper aus der Ruhe zu bringen. Für die Haftreibung gilt

$$F_S = \begin{cases} F_A & , |F_A| < F_N \mu_S (\wedge \Delta\omega = 0) \\ F_N \mu_S \text{sign}(F_A) & , |F_A| \geq F_N \mu_S (\wedge \Delta\omega = 0) \end{cases} \quad (2.60)$$

wobei  $F_A$  die Summe der äußeren Kräfte ist. Sind die Reibflächen geschmiert, ist eine Änderung der Reibkennlinie über die  $\Delta\omega$  zu beobachten. Dieses Phänomen berücksichtigt die viskose Reibung. Diese ist definiert als

$$F_V = \nu |\Delta\omega|^{\delta_V} \text{sign}(\Delta\omega) \quad (2.61)$$

mit dem viskosen Reibungsexponenten  $\delta_V$  und dem Reibkoeffizienten  $\nu$ . Des weiteren lässt sich  $F_C$  durch die Stribeck-Funktion erweitern. Damit wird das rapide Abfallen der Reibkraft bei kleinen Geschwindigkeiten berücksichtigt. Dieser Effekt entsteht durch das Aufbrechen von Kontaktstellen und der anschließenden Bildung eines Schmierfilms [12]. Eine übliche Modellierung der Stribeck-Funktion ist

$$F_{\text{Stribeck}} = F_C + F_N (\mu_S - \mu_C) \exp \left[ - \left( \frac{|\Delta\omega|}{\omega_S} \right)^{\delta_S} \right] \quad (2.62)$$

mit der Stribeck-Geschwindigkeit  $\omega_S$  und dem Stribeck-Exponent  $\delta_S$ . Die verschiedene statischen Reibmodelle lassen sich zum "Kinetischen Reibmodell"

$$F_{\text{Kin}} = \begin{cases} F_A & , \Delta\omega = 0 \\ F_{\text{Stribeck}} \text{sign}(\Delta\omega) + F_V & , \Delta\omega \neq 0 \end{cases} \quad (2.63)$$

zusammenfassen [1].

Eine Schwäche dieses Modells ist der unstetige Verlauf der Reibkennlinie bei  $\Delta\omega = 0$ . Diese Schwäche kann durch die Annäherung der Reibkennlinie über eine stetige atan-Funktion behoben werden. Dennoch bedarf es weiterhin der Unterscheidung zwischen Haft- und Gleitbereich. Hierfür ist entweder eine variable Zeitschrittweite des Solvers notwendig oder die Definition eines Geschwindigkeitsbandes um  $\Delta\omega = 0$ . Des weiteren ist die Reibkraft im Haftbereich von den äußeren Kräften abhängig, welche hier nicht bekannt sind und durch das Modell berechnet werden sollen. Aus diesen Gründen werden im Folgenden dynamische Reibmodelle betrachtet, welche diese Schwächen nicht aufweisen.

### 2.2.2 Dynamische Reibmodelle

Um die dynamischen Reibeffekte vorallem um  $\Delta\omega = 0$  mit berücksichtigen zu können werden dynamische Reibmodelle benötigt. Einen ersten Ansatz dazu liefert das Reibmodell von Dahl. Dieses beschreibt die dynamischen Reibeffekte für kleine Auslenkungen mit kleinen Federn in den Kontaktbereichen von Körpern und geht anschließend in die Coulombschen-Reibung über [11]. Die Reibdynamik des Dahlschen-Modells wird definiert durch die Differentialgleichung

$$F_{R,Dahl} = \left[ \sigma_0 \left| 1 - \frac{F_{R,Dahl}}{F_C} \text{sign}(\Delta\omega) \right|^\beta \text{sign} \left( 1 - \frac{F_{R,Dahl}}{F_C} \text{sign}(\Delta\omega) \right) \right] \Delta\omega \quad (2.64)$$

mit der zuvor definierten Coulombschen-Reibkraft  $F_C$ , der Federsteifigkeit  $\sigma_0$  und dem Formparameter der Hysterese  $\beta$ . Das Lund-Grenoble (LuGre) Reibmodell erweitert das Modell von Dahl um einen Dämpfungsanteil und ersetzt die Coulombsche-Kraft durch eine beliebige Reibkraftkennlinie  $F_{SS}$ . Die Kontaktstellen der Reibflächen werden dabei als "Borsten" modelliert, welche die Borstensteifigkeit  $\sigma_0$  und die Borstendämpfung  $\sigma_1$  besitzen. Mit der Borstenauslenkung  $z$  lässt sich die LuGre-Reibkraft angeben als

$$F_{R,LuGre} = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 \Delta\omega \quad \text{mit } \dot{z} = \Delta\omega \left(1 - \frac{\sigma_0 z}{F_{SS}}\right) \quad (2.65)$$

wobei  $\sigma_2$  der Steigungskoeffizienten der viskosen Reibung ist und  $z_{SS} = F_{SS}/\sigma_0$  die maximale Borstenauslenkung [Quelle aus Mahl ???]. Jedoch wird in [3] gezeigt, dass dieses Modell kein elasto-plastisches Presliding abbilden kann. Daher führt jede nichtkonstante Reibkraft zu einem sogenannten plastischen Presliding von  $z$  wodurch es besonders bei periodischen Kräften zu einem physikalisch nicht existierenden Drift kommt. Das Elasto-Plastische Modell erweitert das LuGre-Modell um einen elastischen Bereich für kleine  $z$ . Nach [2] ergibt sich die Dynamik der Auslenkung zu

$$\dot{z} = \Delta\omega \left(1 - \alpha(z, \Delta\omega) \frac{\sigma_0 z}{F_{SS}}\right)^i, \quad i \in \mathbb{Z} \quad (2.66)$$

wobei  $i = 1$  gesetzt wird und die Funktion  $\alpha(z) \in [0, 1]$  ein elastische Bereich für kleine  $z$  erzeugt.

Aufgrund der erläuterten Vorteile wird das Elasto-Plastische-Modell für das Simulationsmodell verwendet. Dabei wird der viskose Reibungsanteil vernachlässigt ( $\sigma_2 = 0$ ). Mit dem mittleren Radius  $r_m$  der Kupplungs- und Bremsscheiben und der Anzahl der Scheiben pro Schaltelement  $N_{disc}$  lassen sich die oben beschriebenen Kräfte in Momente umrechnen. Letztendlich ergibt sich das an der Welle angreifende Reibmoment des Schaltelements  $k$  zu

$$T_{Cl,k} = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} \quad (2.67)$$

mit

$$\dot{z} = \Delta\omega \left(1 - \alpha \frac{\sigma_0 z}{T_{Cl,ss}}\right) \quad (2.68)$$

$$T_{Cl,SS} = k_{sign}(\Delta\omega, z) 2 N_{Disc,k} r_{m,k} \mu(p_N, T_{Oil}, \Delta\omega) F_N. \quad (2.69)$$

Der Reibwert  $\mu(p_N, T_{Oil}, \Delta\omega)$  wird aus einem Kennfeld in Abhängigkeit der des Drucks an den Scheiben  $p_N$ , der Öltemperatur  $T_{Oil}$  und  $\Delta\omega$  gewonnen. Die Größe  $k_{sign}(\Delta\omega, z)$  definiert das Vorzeichen der Reibkraft. Zur Optimierung des numerischen Verhaltens des Simulationsmodells bei geschlossener Kupplung d.h.  $\Delta\omega = 0$  wird dieser definiert zu

$$k_{sign}(\Delta\omega, z) = \begin{cases} \text{sign}(z) & , z \neq 0 \\ \text{sign}(\Delta\omega) & , z = 0 \end{cases}. \quad (2.70)$$

Die Normalkraft  $F_N$  ergibt sich aus  $p_N$  und der Fläche der Scheiben  $A_{Disc}$  und wird im Simulationsmodell vorgegeben.

Mit  $z_{SS} = T_{Cl,SS}/\sigma_0$  und  $\lim_{z \rightarrow z_{SS}} \alpha(z) = 1$  konvergiert (??) im Gleitbereich ( $\Delta\omega \neq 0$ ) gegen  $T_{Cl,SS}$ .



# Kapitel 3

## Sensitivitätsanalyse

In diesem Kapitel wird das in Kapitel ?? hergeleitete nichtlineare Modell des Antriebss-trangs auf die Sensitivität verschiedener Parameter und Eingänge untersucht. Damit soll die Relevanz für eine Parameter- und Eingangsschätzung im folgenden Kapitel belegt und unterstrichen werden. Eine mögliche Definition für eine Sensitivitätsanalyse ist die folgende: *The study of how uncertainty in the output of a model (numerical or otherwise) can be ap-portioned to different sources of uncertainty in the model input* [9]. Für die Analyse gibt es verschiedene Methoden. Dabei ist die OAT(one-at-a-time)-Methode wohl die einfachste. Hier wird pro Simulationsdurchlauf lediglich eine Eingangsgröße geändert während alle anderen auf den nominal Werten gehalten werden. Die Methode liefert aber nur eine sehr beschränkte Aussage über den gesamten Eingangsraum. Jedoch kann sie für die Abschätzung einer ersten Untergruppe an relevanten Eingängen hilfreich sein.

Die in der Literatur am häufigsten diskutierten Ansätze basieren auf partiellen Ableitungen der Art  $\partial y_i / \partial x_i$  wobei  $y$  ein beliebiger Ausgang und  $x_i$  ein beliebiger Eingang des Systems ist. Ein Eingang kann hierbei auch ein variierender Parameter sein. Dieses Vorgehen wird vor allem bei relativ einfachen, mathematisch wohlbestimmten und stetigen Modellen verwendet. Der Vorteil dabei ist, dass die Sensitivitätsfunktionen sobald sie einmal berechnet sind leicht an Veränderungen anpassbar sind und auch für ähnliche Systeme verwendet werden können [6]. Jedoch werden die partiellen Ableitung immer in einem bestimmen Arbeitspunkt berechnet d.h. die Aussagen der Sensitivitätsfunktionen gelten für nichtlineare Systeme nur lokal um diesen den Arbeitspunkt. Des weiteren ist es oft sehr schwer oder gar unmöglich die benötigten Ableitungen für komplexe Modelle zu berechnen.

Eine Alternative zur Berechnung der partiellen Ableitungen sind globale Methoden. Hierbei werden die Modelleingänge stochistisch variiert, woraus sich nach vielen Simulationen eine Stichprobe für die Modellausgänge ergibt. Dieses Methode der mehrfachen Simulation wird auch Monte-Carlo-Methode genannt. Wie der Name schon sagt ist der grundlegende Vorteil dabei, dass durch eine genügend große Stichprobe eine globale Aussage zur Sensitivität gegeben werden kann. Des weiteren erlaubt die Methode auch Aussagen über die verkoppelte Wirkung von Eingangsänderungen ohne spezielles Vorwissen über die Struktur des Modells. Der entscheidende Nachteil liegt je nach Stichprobengröße und Komplexität des Modells in der Rechenzeit.

Aufgrund stetigen Charakters von (??) werden für diese Arbeit die partiellen Ableitungen für die Sensitivitätsanalyse verwendet. Hierfür wird zuerst ein idealer Schaltvorgang beschrieben um die Sensitivitätsfunktionen in verschiedenen Schaltphasen auswerten zu können.

Des weiteren werden die Ergebnisse der Sensitivitätsanalyse für die Berechnung der Fisher-Informationsmatrix genutzt. Diese liefert eine Abschätzung für die erreichbare Genauigkeit einer Parameterschätzung.

### 3.1 Beschreibung eines Gangwechsels

Bei einem Gangwechsel wird durch die Betätigung von Schaltelementen die Übersetzung des Getriebes geändert. Dies soll zum einen in jedem Fall möglichst ohne für den Fahrer spürbare unerwünschte Beschleunigungen am Getriebeabtrieb passieren. Zum anderen soll der Gangwechsel aber auch so schnell wie möglich und ohne Momentenunterbrechung vollzogen werden. Es besteht also ein Zielkonflikt zwischen den Komfortansprüchen des Fahrers und der Dauer eines Schaltvorgangs.

Grundsätzlich wird ein Gangwechsel auf zwei Ebenen unterschieden. Zum einen die Richtung der Übersetzung  $i_{\text{Gang}}$ . Bei einer Hochschaltung wird  $i_{\text{Gang}}$  kleiner und entsprechend bei einer Rückschaltung größer. Zum anderen die Richtung des Antriebsmoments am Getriebeeingang. Ist dieses positiv spricht man von einer Zugschaltung bei negativem Antriebsmoment von einer Schubschaltung [Fischer.2016]. In dieser Arbeit werden die Betrachtungen auf eine Zug-Hoch-Schaltung zwischen dem zweiten und dem dritten Gang reduziert. Dies hat zum einen den Grund, dass in diesen Gängen der Drehmomentenwandler überbrückt und die Trennkupplung geschlossen ist, sodass deren Dynamik vernachlässigt werden kann. Zum anderen ist dies eine häufige Schaltung im Fahrzeugbetrieb. Die Erkenntnisse können jedoch auch auf andere Gangwechsel übertragen werden.

Bei dem in dieser Arbeit betrachteten Getriebe wird ein Gangwechsel mittels der Schließung und der simultanen Öffnung einer Bremse bzw. Kupplung realisiert. Bei der Schaltung zwischen dem zweiten und dritten Gang sind dies die Bremse  $B_{05}$  und die Kupplung  $K_{38}$ . Der Gangwechsel wird in die vier Phasen 2. Gang, Momentenübergabe, Drehzahlsynchronisation und 3. Gang eingeteilt. Die Abbildungen ??-?? zeigen die vier Phasen des Gangwechsels der zur Auswertung der Sensitivitäten im Folgenden verwendet wird.

Im 2. Gang ist die Kupplung  $K_{38}$  geschlossen und überträgt das volle Antriebsmoment. Die Differenzdrehzahl  $\Delta\omega_{38}$  der Wellen 3 und 8 ist somit gleich Null. Die Bremse  $B_{05}$  ist geöffnet und überträgt kein Drehmoment. Vor dem Gangwechsel wird die Kupplung  $K_{38}$  durch eine Reduzierung des anliegenden Drucks ins Schleifen gebracht, sodass sich an der Kupplung eine minimale Drehzahldifferenz ergibt. Dadurch wirkt an den Scheiben der Kupplung die Gleitreibung, welche somit der Reaktionskraft an den Kupplungen entspricht. Der Betrag der Gleitreibung kann, wie in ?? beschrieben, mit dem Reibungskoeffizient und der Normalkraft berechnet werden.

Somit kann während der Momentenübergabe das Drehmoment an  $K_{38}$  abgesenkt werden, während gleichzeitig  $B_{05}$  mit Hilfe einer Vorsteuerung derart geschlossen wird, dass stets das volle Antriebsmoment übertragen wird und  $K_{38}$  im Schleifen gehalten wird. Die Herleitung einer derartigen Vorsteuerung kann [Weber.2018] entnommen werden.

Wenn  $K_{38}$  vollständig geöffnet ist d.h. kein Drehmoment mehr übertragen wird beginnt die Drehzahlsynchronisation. Diese kann auf zwei Arten vollzogen werden. Zum einen kann das Drehmoment an  $B_{05}$  überhöht werden, wodurch die Differenzdrehzahl  $\Delta\omega_{05}$  auf Null gebracht wird und die Antriebsdrehzahl abgesenkt wird. Eine weitere Möglichkeit, die sich besonders

bei Hybridgetrieben anbietet, ist die Drehzahlsynchronisation mittels einer Absenkung des Antriebsmomentes herzustellen. Mit einer E-Maschine kann die Absetzung dabei schneller und genauer vollzogen werden, als mit einem Verbrennungsmotor. Bei dem in dieser Arbeit betrachteten Gangwechsel werden beide Möglichkeiten gleichzeitig genutzt.

Am Ende der Drehzahlsynchronisation ist  $\Delta\omega_{05} = 0$  und die Getriebeübersetzung  $i_{\text{Gang}}$  in ?? liegt auf dem Niveau des dritten Gangs.

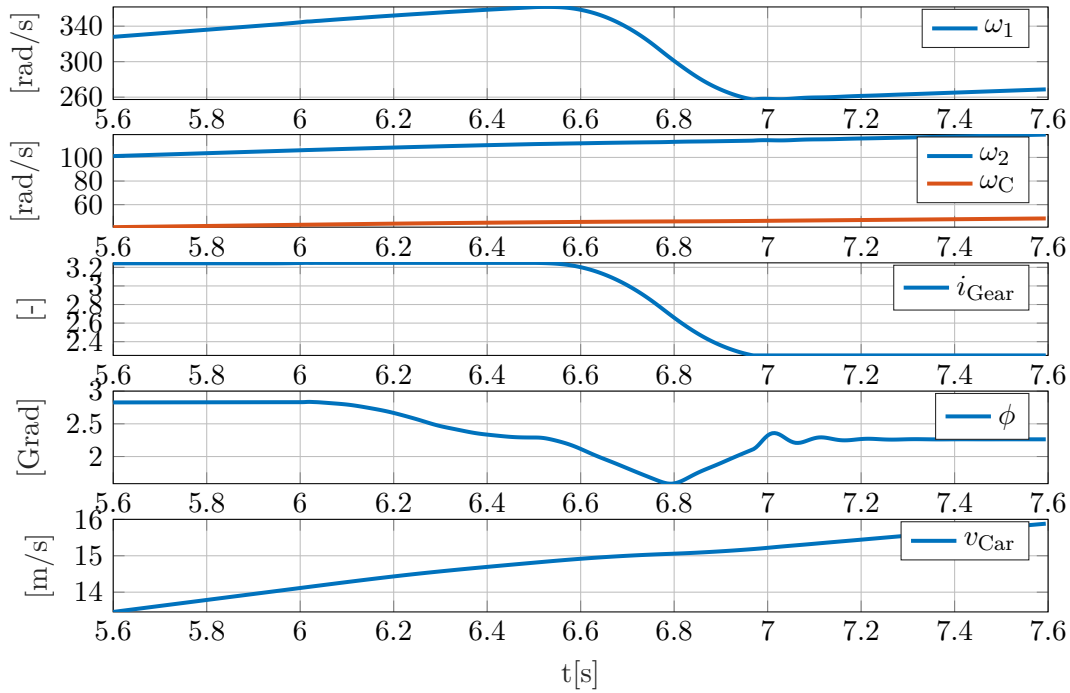


Abbildung 3.1: Zeitlicher Verlauf der Drehzahlen und Verdrehung der Seitenwellen beim Gangwechsel

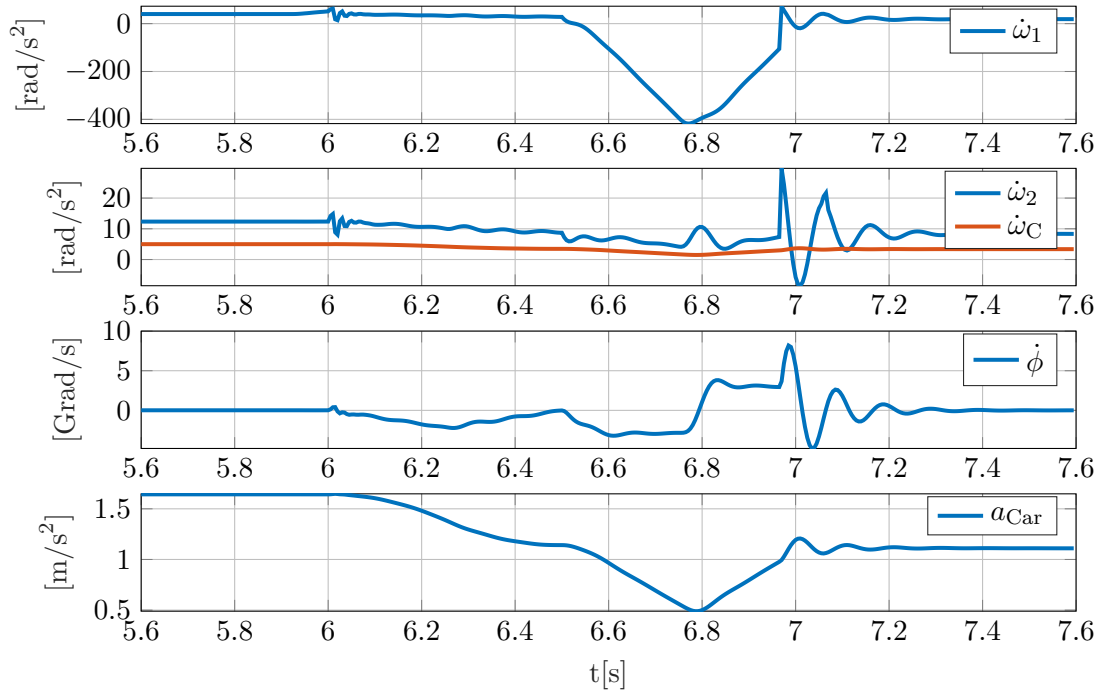


Abbildung 3.2: Zeitlicher Verlauf der Beschleunigungen und Verdrehungsgeschwindigkeit der Seitenwellen beim Gangwechsel

### 3.2 Anwendung der Parametersitivitätsanalyse

Wie einleitend erläutert werden die Sensitivitäten in dieser Arbeit mittels partiellen Differentialen berechnet. Nach [5] ist für ein nichtlineares System erster Ordnung

$$dx_i/dt = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

mit dem Zustandsvektor  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ , dem Parametervektor  $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_m]^T$ , dem Eingangsvektor  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, p_l]^T$  und der differenzierbaren Funktion  $f_i$  die absolute Parametersensitivitätsfunktion definiert als

$$S_{ij} = \partial x_i / \partial p_j \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.2)$$

Die entsprechende normalisierte Parametersensitivitätsfunktion ist

$$S_{N,ij} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} \frac{p_{j0}}{x_{i0}} = \frac{\partial x_{N,i}}{\partial p_{N,j}} \quad (3.3)$$

mit den normalisierten Zuständen  $x_{N,i}$  und Parametern  $p_{N,j}$ , dem Nominalwert  $p_{j0}$  des Parametern  $p_j$  und dem Nominalwert  $x_{i0}$  des Zustandes  $x_i$ , welcher definiert wird als

$$x_{i0} = \max(|x_i(t)|), \quad t_{\text{Start}} \leq t \leq t_{\text{End}} \quad (3.4)$$

wobei  $t_{\text{Start}}$  bis  $t_{\text{End}}$  das ausgewertete Zeitfenster ist. Die normalisierte Parametersensitivitätsfunktion  $S_{N,ij}$  kann interpretiert werden, als approximierte prozentuale Änderung des Zustandes  $x_i$  für eine 1%-ige Änderung des Parameters  $p_j$ . Das Modell des Antriebsstrangs ist mit (??) in der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{p}), \mathbf{p}) + \mathbf{B}(\mathbf{p})\mathbf{u}(t) \quad (3.5)$$

gegeben. Wendet man (??) auf diese Gleichung an erhält man

$$\partial \dot{\mathbf{x}} / \partial p_j = \partial / \partial p_j (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{p}), \mathbf{p}) + \mathbf{B}(\mathbf{p}) \mathbf{u}(t)) \quad (3.6)$$

und unter Berücksichtigung der Kettenregel

$$d\mathbf{x}/dt \partial / \partial p_j = \dot{\mathbf{S}}_j = \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{p}), \mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{S}_j + \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{p}), \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{u}(t). \quad (3.7)$$

Die Gleichung (??) kann auch als implizite Berechnung der Sensitivität der zeitlichen Ableitung von  $\mathbf{x}$  angesehen werden. Da für die Bewertung des Gangwechsels vor allem die Drehzahlbeschleunigungen betrachtet werden, wird im Folgenden auch der zeitliche Verlauf von  $\dot{\mathbf{S}}_j$  interpretiert. Dafür werden die Parametersensitivitätsfunktion anhand (??) für  $m_{\text{veh}}$ ,  $k_{\text{ss}}$ ,  $d_{\text{ss}}$ ,  $\mu_{38}$  und  $\zeta$  gebildet und für den in ?? definierten Schaltvorgang berechnet. Dabei ist der erste Term in (??) unabhängig vom betrachteten Parameter und kann daher pauschal für alle Parameter angegeben werden zu

$$\frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{p}), \mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -0,799 d_{\text{ss}} & -1,97 k_{\text{ss}} & 1,97 d_{\text{ss}} \\ 0 & -0,248 d_{\text{ss}} & -0,612 k_{\text{ss}} & 0,612 d_{\text{ss}} \\ 0 & 0,405 & 0 & -1,0 \\ 0 & \frac{42,6 d_{\text{ss}}}{5,69 m_{\text{veh}} + 337} & \frac{105 k_{\text{ss}}}{569 m_{\text{veh}} + 337} & -\frac{1052 d_{\text{ss}} + 14,7 \omega_C + 558 \partial f_{\text{Roll}} / \partial \omega_C m_{\text{veh}} \cos(\zeta)}{56,9 m_{\text{veh}} + 3370} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

### 3.2.1 Sensitivität des Zustandes $\mathbf{x}$ von $k_{\text{ss}}$

Die Sensitivität von (??) zum Parameter  $k_{\text{ss}}$  ergibt sich mit (??) zu

$$\dot{\mathbf{S}}_{k_{\text{ss}}} = \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{p}), \mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{S}_{k_{\text{ss}}} + \begin{bmatrix} -1,97 \phi \\ -0,612 \phi \\ 0 \\ \frac{105 \phi}{5,69 m_{\text{veh}} + 337} \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

### 3.2.2 Sensitivität des Zustandes $\mathbf{x}$ von $d_{\text{ss}}$

Die Sensitivität von (??) vom Parameter  $d_{\text{ss}}$  ergibt sich mit (??) zu

$$\dot{\mathbf{S}}_{d_{\text{ss}}} = \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{p}), \mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{S}_{d_{\text{ss}}} + \begin{bmatrix} 1,97 \omega_C - 0,799 \omega_2 \\ 0,612 \omega_C - 0,248 \omega_2 \\ 0 \\ \frac{1052 d_{\text{ss}}}{56,9 m_{\text{veh}} + 3370} \omega_C \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

### 3.2.3 Sensitivität des Zustandes $\mathbf{x}$ von $m_{\text{veh}}$

Die Sensitivität von (??) vom Parameter  $m_{\text{veh}}$  ergibt sich mit (??) zu

$$\dot{\mathbf{S}}_{m_{\text{veh}}} = \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{p}), \mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{S}_{m_{\text{veh}}} \quad (3.11)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{5,72 \cdot 10^{-6} \sin(\zeta) + 5,99 \cdot 10^{-8} \phi k_{\text{ss}} + 2,42 \cdot 10^{-8} d_{\text{ss}} \omega_2 - 5,99 \cdot 10^{-8} \omega_{\text{C}} - 4,18 \cdot 10^{-10} \omega_{\text{C}}^2 + 1,88 \cdot 10^{-6} f_{\text{Roll}} \omega_{\text{C}} \cos(\zeta)}{(5,69 m_{\text{veh}} + 337)^2} \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

### 3.2.4 Sensitivität des Zustandes $\mathbf{x}$ von $\zeta$

Die Sensitivität von (??) vom Parameter  $\zeta$  ergibt sich mit (??) zu

$$\dot{\mathbf{S}}_{\zeta} = \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{p}), \mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{S}_{\zeta} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-m_{\text{veh}} (170 \cos(\zeta) - 55,8 f_{\text{Roll}} \omega_{\text{C}} \sin(\zeta))}{5,69 m_{\text{veh}} + 337} \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

### 3.2.5 Sensitivität des Zustandes $\mathbf{x}$ von $\mu_{38}$

Wie in ?? beschrieben konvergiert (??) im Gleitbereich gegen das statische Reibmoment (?). Somit kann  $T_{38}$  in (??) ersetzt werden durch

$$T_{\text{Cl,SS},38} = k_{\text{sign}}(\Delta\omega_{38}, z_{38}) 2 N_{\text{Disc},38} r_{\text{m},38} \mu(p_{\text{N},38}, T_{\text{Oil}}, \Delta\omega_{38}) F_{\text{N},38}. \quad (3.14)$$

und dann wie oben die Sensitivitätsdifferentialgleichung (SDG) bezüglich des Parameters  $\mu_{38}$  berechnet werden. Da die Richtung der Reibkraft bekannt ist wird dabei  $k_{\text{sign}}(\Delta\omega_{38}, z_{38})$  vernachlässigt. Damit ergibt sich die SDG zu

$$\dot{\mathbf{S}}_{\mu_{38}} = \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{p}), \mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{S}_{\mu_{38}} + \begin{bmatrix} -5,58 N_{\text{disc},38} r_{\text{m},38} \\ 0,0270 N_{\text{disc},38} r_{\text{m},38} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_{\text{N},38}. \quad (3.15)$$

wobei diese Gleichung wie oben beschrieben nur im Gleitbereich mit  $\Delta\omega_{38} \neq 0$  gültig ist.

## 3.3 Fisher-Informationsmatrix

Im Abschnitt ?? wurde gezeigt welche Auswirkung Ungenauigkeiten der Parameter auf die Systemzustände haben. Die Fisher-Informationsmatrix liefert mit Hilfe der Sensitivitäten und

der Varianz der Messgrößen eine obere Schranke für die Genauigkeit eines Parameterschätzverfahrens. Außerdem können nicht-sensitive Parameter und linear abhängige Gradientenverläufe für bestimmte Parameterkombinationen bestimmt werden [7]. Aus diesem Grund wird im Folgenden die Fisher-Informationsmatrix für einen Gangwechsel berechnet um so die Schätzbarkeit der Parameter mit den vorhandenen Messgrößen zu überprüfen. Das Vorgehen orientiert sich an [7]. Dabei wird angenommen, dass die Messdaten der  $N$  Zeitpunkte um den stochastischen Anteil  $\epsilon_i(t_k)$  von den  $n$  Systemausgängen abweichen, sodass diese angegeben werden können als

$$z_{ik} = y_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}, \mathbf{p}^*, t_k) + \epsilon_i(t_k). \quad (3.16)$$

Dabei ist  $z_{ik}$  der  $i$ -te gemessene Ausgang zum Zeitpunkt  $t_k$  und  $y_i$  die  $i$ -te Messgröße in Abhängigkeit des Anfangszustands  $\mathbf{x}_0$ , des Eingangs  $\mathbf{u}$ , dem exakten Parametervektor  $\mathbf{p}^*$  zum Zeitpunkt  $t_k$ . Stochastische Systemstörungen und Messfehler der Eingangsgrößen werden vernachlässigt, sodass  $\epsilon_i(t_k)$  nur nicht-modellierte Effekte und Meßfehler berücksichtigt. Des Weiteren wird angenommen, dass die Fehler  $\epsilon_i(t_k) = \epsilon_{ik}$  statistisch unabhängig sind, eine Normalverteilung mit dem Mittelwert Null vorliegt und der Fehler einer Messgröße zum Zeitpunkt  $t_k$  unabhängig vom Fehler am Zeitpunkt  $t_{k+1}$  ist. Damit lässt sich die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für die Fehler  $\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_1^T, \dots, \epsilon_N^T]^T$  und  $\boldsymbol{\epsilon}_k = [\epsilon_{1k}, \dots, \epsilon_{nk}]^T$  berechnen zu

$$P(\boldsymbol{\epsilon}) = (2\pi)^{-\frac{nN}{2}} \prod_{k=1}^N (\det \mathbf{C}(t_k))^{-1/2} \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon_{ik}^2}{\sigma_{ik}^2} \right). \quad (3.17)$$

Die Matrix  $\mathbf{C}(t_k)$  ist die Kovarianzmatrix der Fehler  $\epsilon_{ik}$ . Aufgrund der Unabhängigkeit der Fehler ist diese eine Diagonalmatrix mit den Varianzen der Fehler  $\sigma_{ik}$  auf der Hauptdiagonalen. Mit dem Zusammenhang (??) lässt sich (??) in Abhängigkeit der geschätzten Parameter  $\mathbf{p}$  wie folgt angeben

$$P(\mathbf{p}) = (2\pi)^{-\frac{nN}{2}} \prod_{k=1}^N (\det \mathbf{C}(t_k))^{-1/2} \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^n \frac{(y_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}, \mathbf{p}, t_k) - z_{ik})^2}{\sigma_{ik}^2} \right). \quad (3.18)$$

Unter der Annahme, dass der Erwartungswert des Parameter  $\mathbf{p}$  gleich  $\mathbf{p}^*$  ist, d.h.

$$E\{\mathbf{p}\} = \mathbf{p}^* \quad (3.19)$$

ist die Fisher-Informationsmatrix definiert als

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}^*) = E \left\{ \left. \frac{\partial \ln P(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\mathbf{p}^*, t_k} \left. \frac{\partial \ln P(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\mathbf{p}^*, t_k}^T \right\}. \quad (3.20)$$

Der Satz von Cramér-Rao zeigt [4], dass die Inverse von (??) eine obere Schranke für die Parameterschätzfehler-Kovarianzmatrix

$$\mathbf{C}_p = E\{(\mathbf{p} - \mathbf{p}^*)(\mathbf{p} - \mathbf{p}^*)^T\} \quad (3.21)$$

ist. Damit gilt

$$\mathbf{C}_p \geq \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{p}^*) \quad (3.22)$$

und für die Elemente der Matrizen, welche die Varianzen bzw. Korrelationen der einzelnen Parameterabweichungen sind

$$\sigma_{ijp} \geq s_{ij}. \quad (3.23)$$

Das partielle Differential  $\frac{\partial \ln P(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}$  lässt sich mit (??) berechnen zu

$$\frac{\partial \ln P(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} = - \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^n \frac{(y_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}, \mathbf{p}, t_k) - z_{ik})^2}{\sigma_{ik}^2} \frac{\partial y_i}{\partial \mathbf{p}} \Big|_{t_k} \quad (3.24)$$

womit sich, eingesetzt in (??) und mit den Annahmen der statistischen Unabhängigkeit von  $\epsilon_{ik}$ , der Normalverteilung von  $\epsilon_{ik}$  mit dem Mittelwert Null und der Unabhängigkeit der Fehler in  $t_k$  und  $t_{k+1}$  die Fisher-Informationmatrix umschreiben lässt zu

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}^*) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial y_i}{\partial \mathbf{p}} \Big|_{\mathbf{p}^*, t_k}^T \mathbf{C}(t_k)^{-1} \frac{\partial y_i}{\partial \mathbf{p}} \Big|_{\mathbf{p}^*, t_k}. \quad (3.25)$$

Dabei ist  $\frac{\partial y_i}{\partial \mathbf{p}} \Big|_{\mathbf{p}^*, t_k}$  der Vektor der Sensitivitäten aus (??) zu den exakten Parameterwerten  $\mathbf{p}^*$  zum Zeitpunkt  $t_k$ . Für die Diagonalelemente von  $\mathbf{C}(t_k)$ , sprich die Varianzen von  $\epsilon_{ik}$ , liegen für diese Arbeit keine Messdaten vor. Daher werden diese über eine konservative Abschätzung, wie in [7] vorgeschlagen, mit

$$\sigma_{ii}(t_k) = r_i^2 \cdot \left( \max \left( y_i(t_k), x_i^{\min} \right) \right)^2 \quad (3.26)$$

berechnet. Dabei ist  $r_i$  der relative Fehler und  $y_i^{\min}$  der kleinste absolute Fehler, welcher festgelegt wird auf 1% des maximalen Messdatenwertes  $z_{ik}^{\max}$ .

Um bewerten zu können ob eine bestimmte Parameterkombination während eines Zeitbereichs genügend genau geschätzt werden kann, wird eine maximal zulässige normierte Streuung definiert. Diese berechnet sich aus der normierten Grenzvarianz des  $j$ -ten Parameters  $\sigma_{jj,m}$  zu

$$\gamma_{j,m} = \sqrt{\sigma_{jj,m}} / p_j. \quad (3.27)$$

Liefert die Fisher-Informationmatrix für eine bestimmte Parameterkombination größere Varianzen oder ist sogar singulär muss ein Parameter aus dem Schätzverfahren eliminiert werden. Um zu analysieren, welcher Parameter die große Streuung verursacht, wird  $\mathbf{F}$  über die Hauptachsentransformation

$$\mathbf{D} = \mathbf{V}^T \mathbf{F} \mathbf{V} \quad (3.28)$$

in Diagonalform gebracht. Dabei besteht  $\mathbf{V}$  aus den Eigenvektoren zu den jeweiligen Eigenwerten  $\lambda_j$  von  $\mathbf{F}$ , welche sich auf der Diagonalen von  $\mathbf{D}$  befinden. Die Kehrwerte der Eigenwerte sind untere Schranken für die Varianzen  $\sigma_{j,t}$  der unkorrelierten transformierten Parameter und es gilt der Zusammenhang

$$\frac{1}{\lambda_j} \leq \sigma_{j,t}. \quad (3.29)$$

Der Vektor der transformierten Varianz setzt sich im untransformierten Raum aus den Varianzen in Richtung der Parameter zusammen, was ausgedrückt werden kann durch

$$\sigma_{j,t} \mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^m \sigma_{ij,t} \mathbf{e}_i \quad (3.30)$$

mit  $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_m]$  und den Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_i$ . Mit (??) kann man die Beeinflussung der Varianzen der transformierten Parameter durch die der untransformierten Parameter gut erkennen und dementsprechend den Einflussreichsten Parameter streichen. Auf diese Weise



wird im Folgenden für die einzelnen Schaltphasen die Parameterkombination soweit reduziert bis die Streuung von jedem Parameter kleiner ist als die Grenzstreuung. Der Vektor der Messgrößen ist dabei definiert als

$$\mathbf{y}_{ex,23} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_M} \mathbf{x}_{ex,23}. \quad (3.31)$$

Des Weiteren wird durch die zusätzliche Berechnung der Fisher-Informationsmatrix unter Berücksichtigung eines erweiterten Messgrößenvektors

$$\mathbf{y}_{ex,23a} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{ex,23} \\ \dot{w}_C \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

geschaut wie sich die zusätzliche Messgröße auf den Betrag der Streuungen auswirkt. Für die Radbeschleunigung  $\dot{w}_C$  wird jedoch eine deutlich höhere Messungenauigkeit angenommen.

### 3.3.1 Berechnung der Fisher-Informationsmatrix im 2. Gang

(5,5 s ≤ t < 6,0 s)

Die Parameter  $k_{ss}$ ,  $d_{ss}$  und  $\mu_{38}$  werden bei der Betrachtung im zweiten Gang von Anfang an vernachlässigt, da aus den Abbildungen ??, ?? und ?? ersichtlich ist, dass die Messgrößen in diesem Zustand nicht sensitiv sind für Änderungen dieser Parameter. Daraus folgt direkt, dass diese Parameter mit den gegebenen Messgrößen in diesem Zustand nicht identifizierbar sind.

### 3.3.2 Berechnung der Fisher-Informationsmatrix während der Momentenübergabe

### 3.3.3 Berechnung der Fisher-Informationsmatrix während der Synchronisation

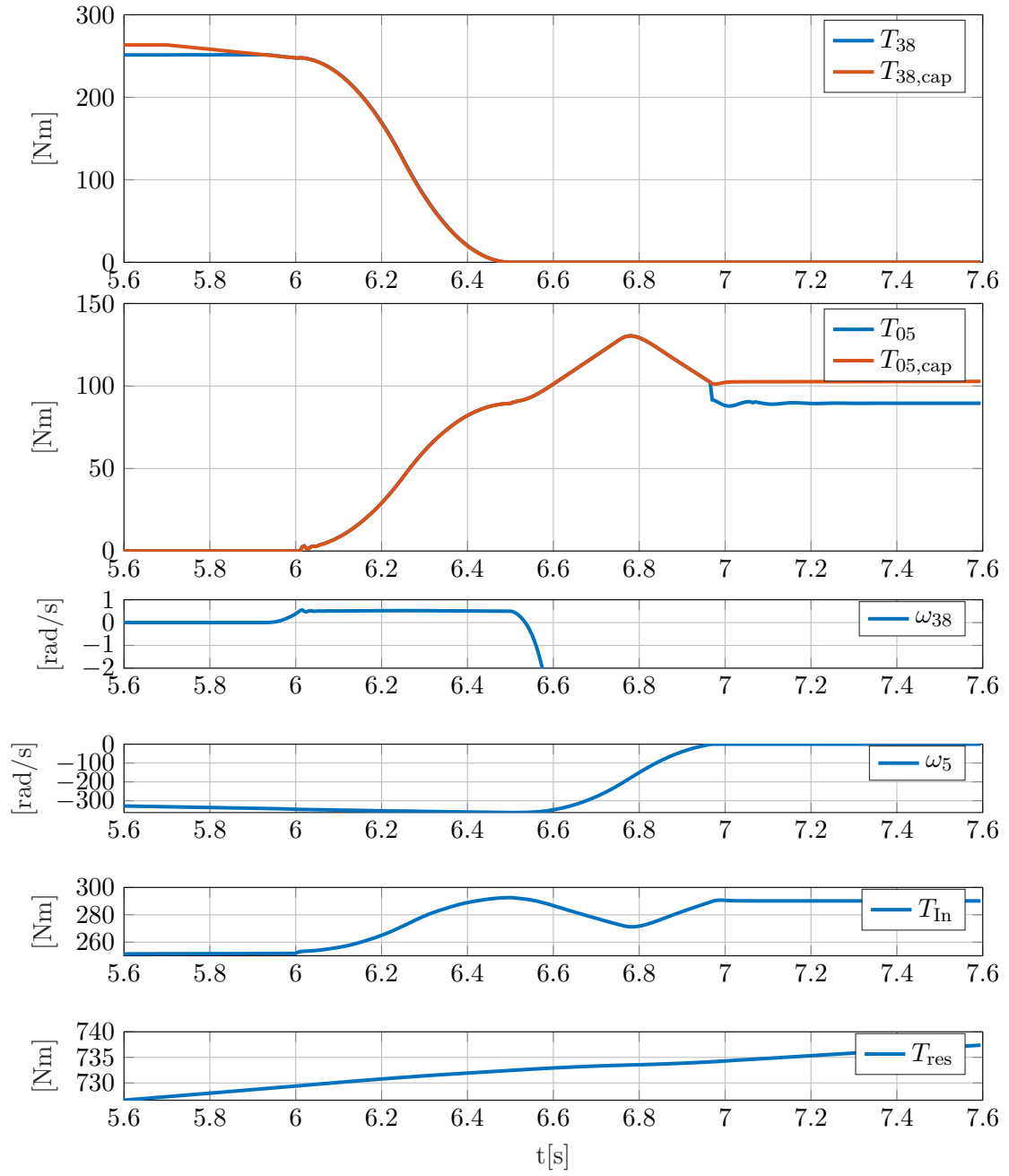
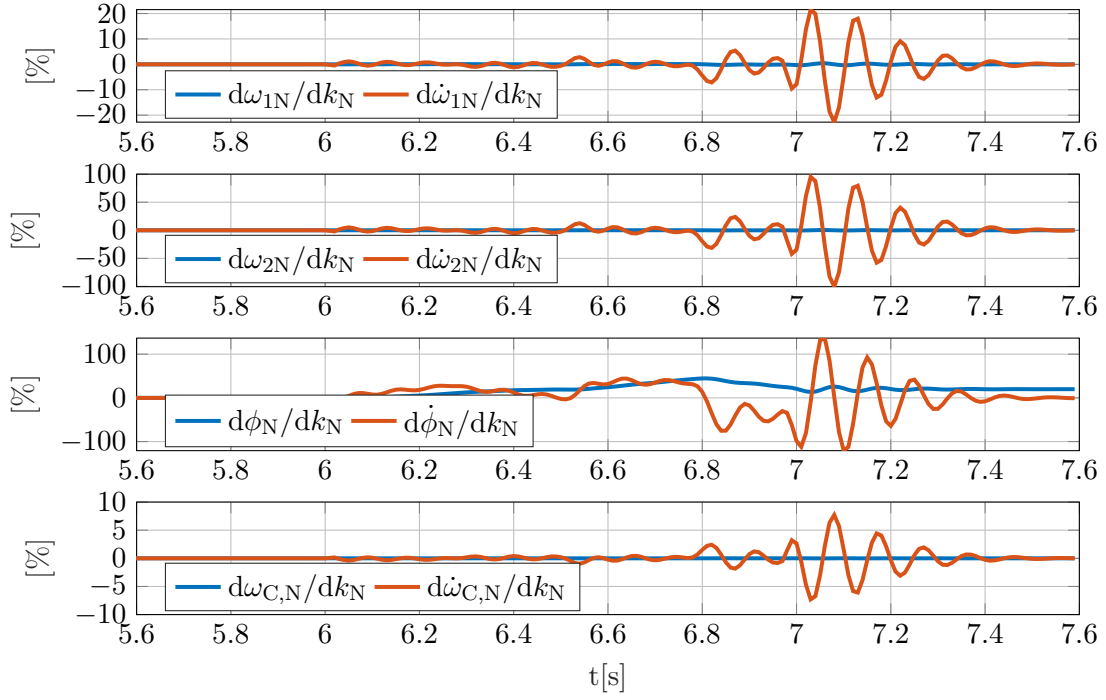
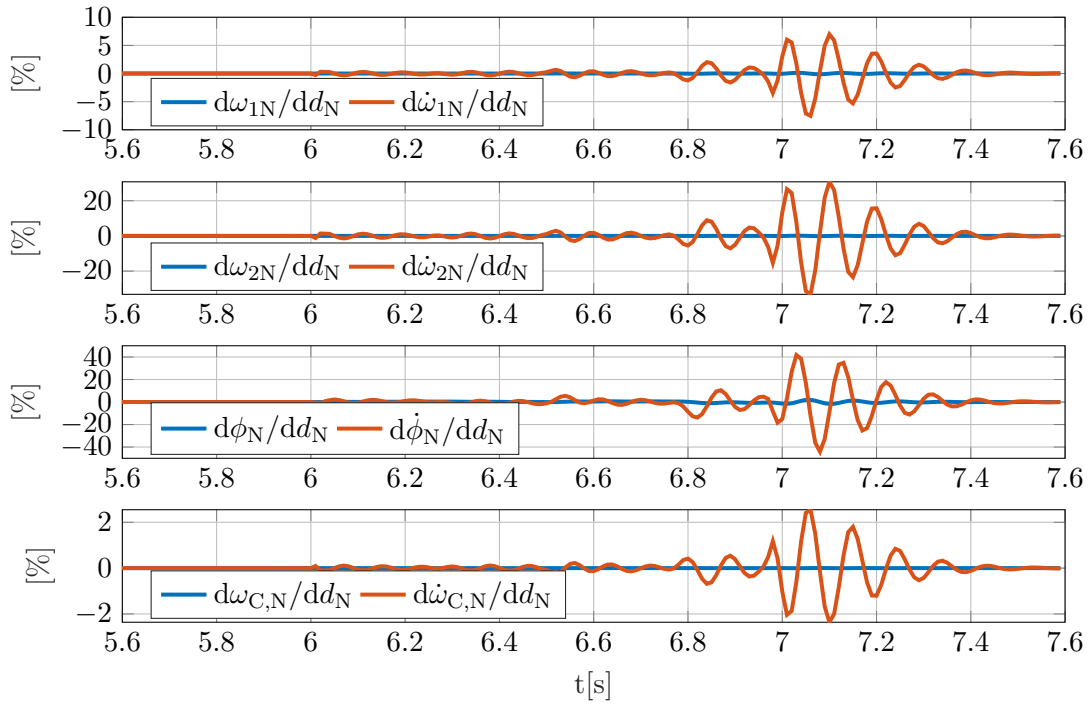


Abbildung 3.3: Zeitlicher Verlauf der übertragenen Drehmomenten und der Differenzgeschwindigkeiten an  $K_{38}$  und  $B_{05}$ , des Eingangsmoments  $T_{\text{In}}$  und des Widerstandsmoments  $T_{\text{res}}$  beim Gangwechsel.

Abbildung 3.4: Normierte Sensitivitäten der Zustände und deren Ableitungen von  $k_{ss}$ Abbildung 3.5: Normierte Sensitivitäten der Zustände und deren Ableitungen von  $d_{ss}$

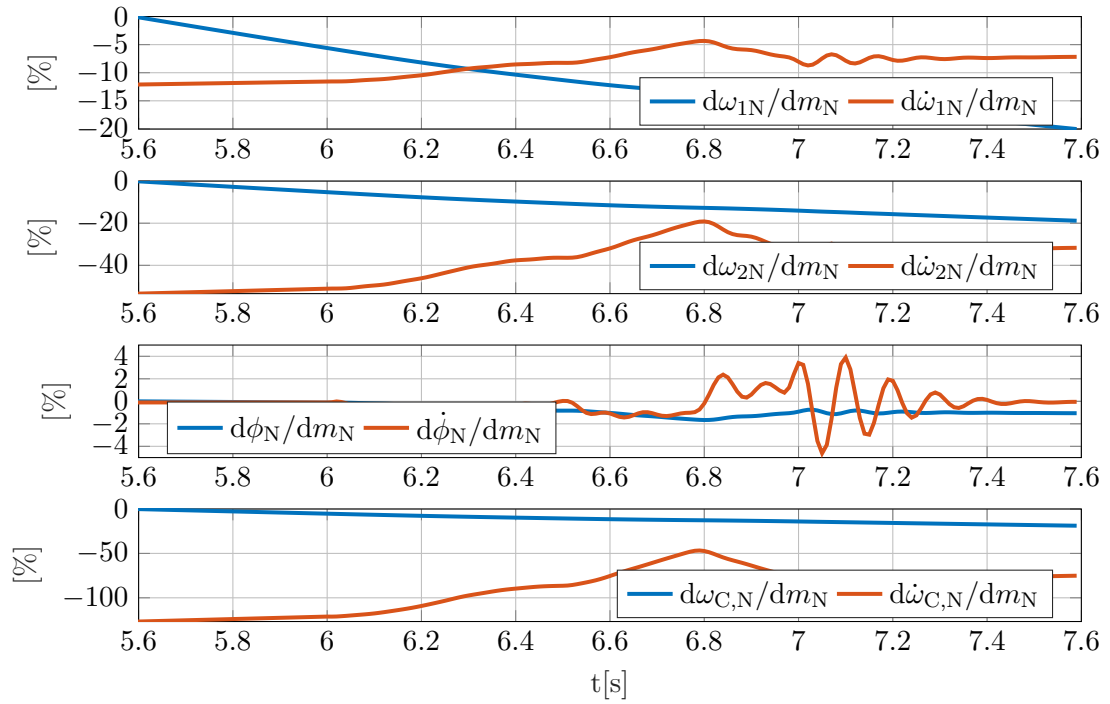


Abbildung 3.6: Normierte Sensitivitäten der Zustände und deren Ableitungen von  $m_{\text{veh}}$

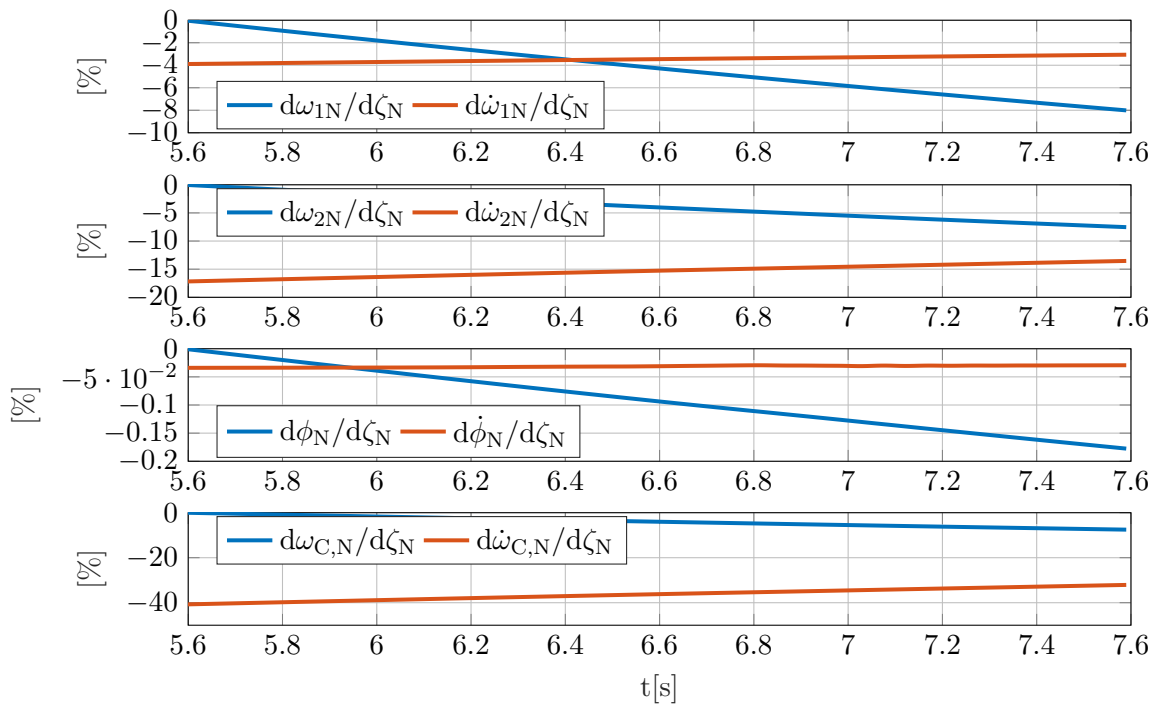
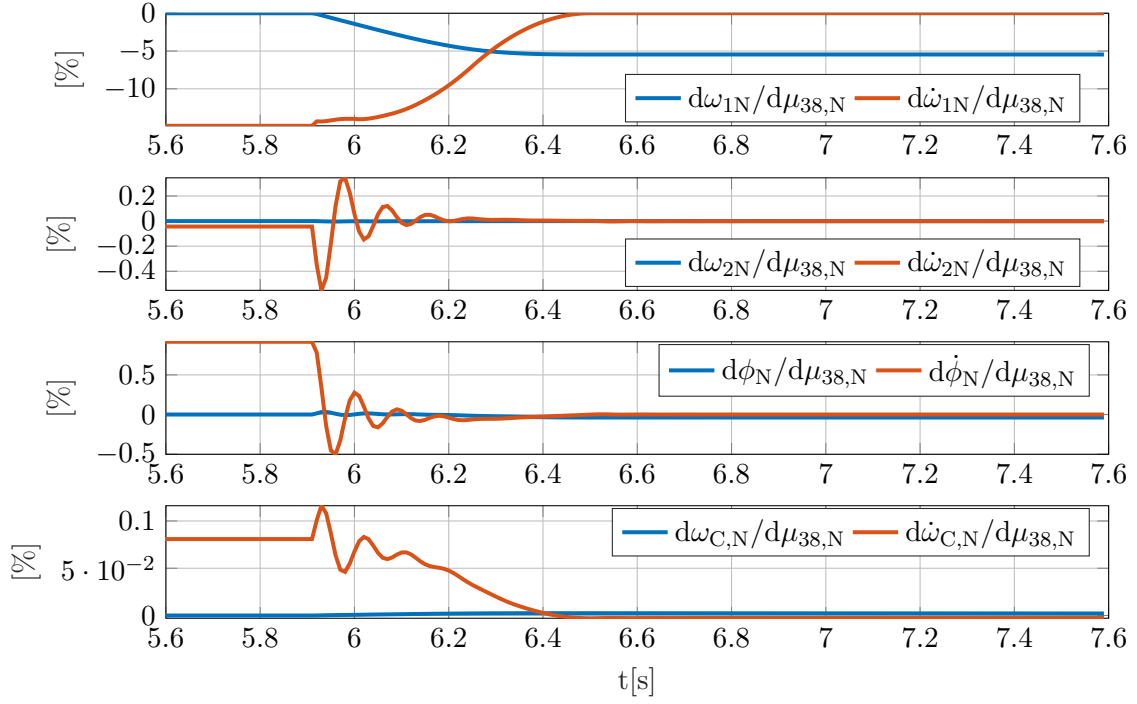
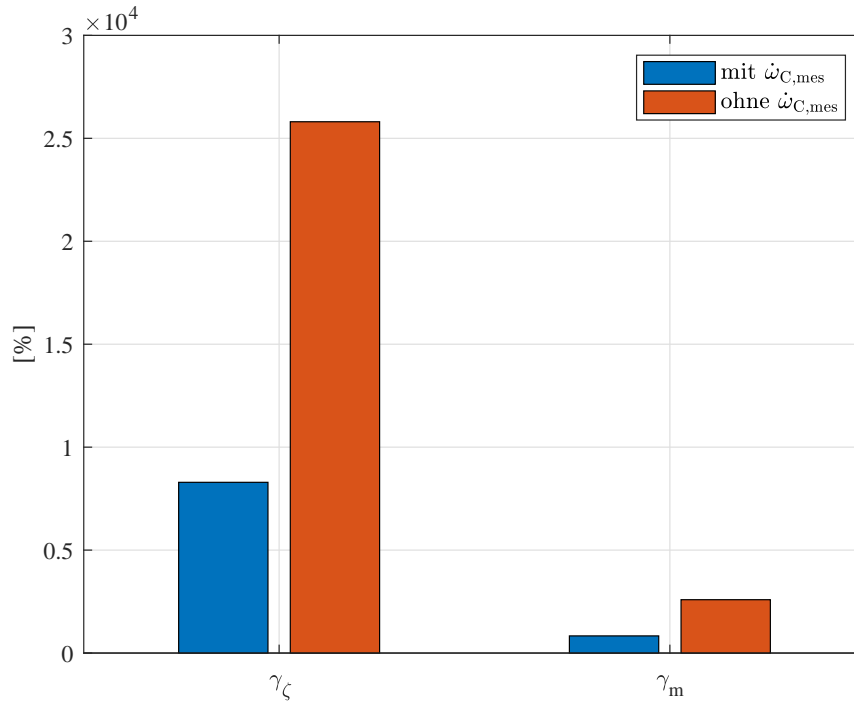


Abbildung 3.7: Normierte Sensitivitäten der Zustände und deren Ableitungen von  $\zeta$

Abbildung 3.8: Normierte Sensitivitäten der Zustände und deren Ableitungen von  $\mu_{38}$ Abbildung 3.9: Streuungen der Fisher-Informationsmatrix für die simultane Schätzung von  $m$  und  $\zeta$  im 2. Gang mit  $\dot{\omega}_{C,mes}$  als Messgröße und ohne.

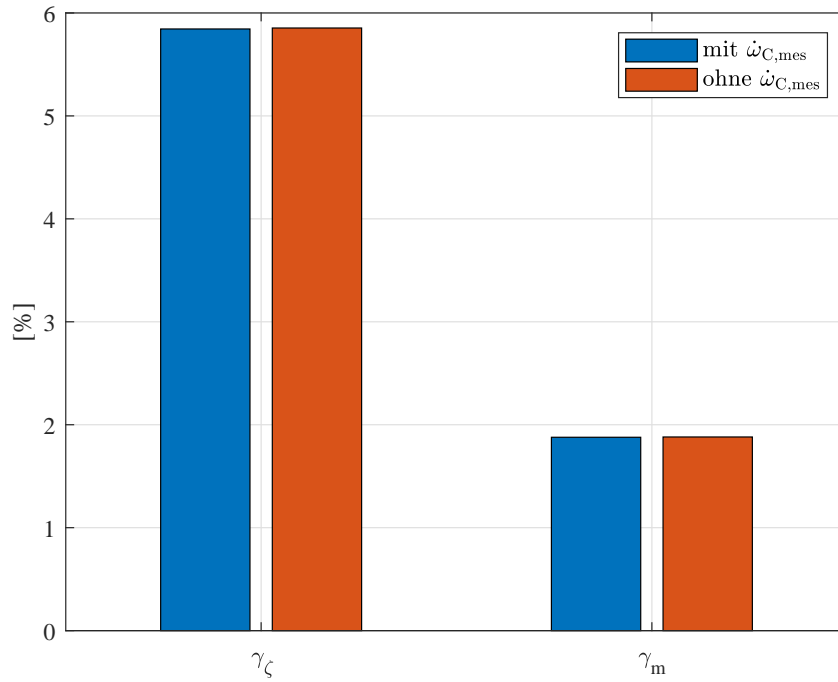


Abbildung 3.10: Streuungen der Fisher-Informationsmatrix für die einzelne Schätzung von  $m$  und  $\zeta$  im 2. Gang mit  $\dot{\omega}_{C,mes}$  als Messgröße und ohne.

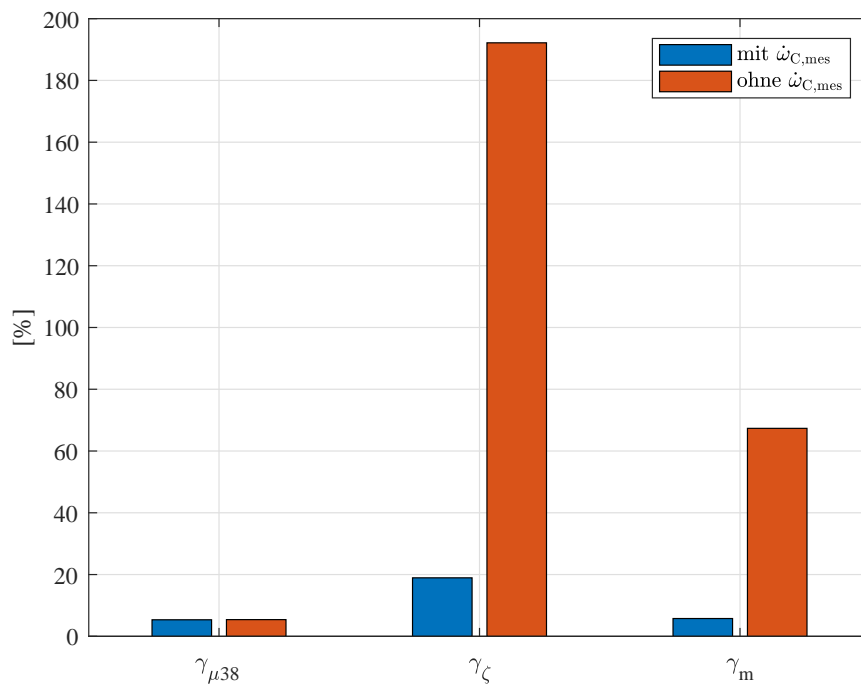


Abbildung 3.11: Streuungen der Fisher-Informationsmatrix für die simultane Schätzung von  $m$ ,  $\mu_{38}$  und  $\zeta$  während der Momentenübergabe mit  $\dot{\omega}_{C,mes}$  als Messgröße und ohne.

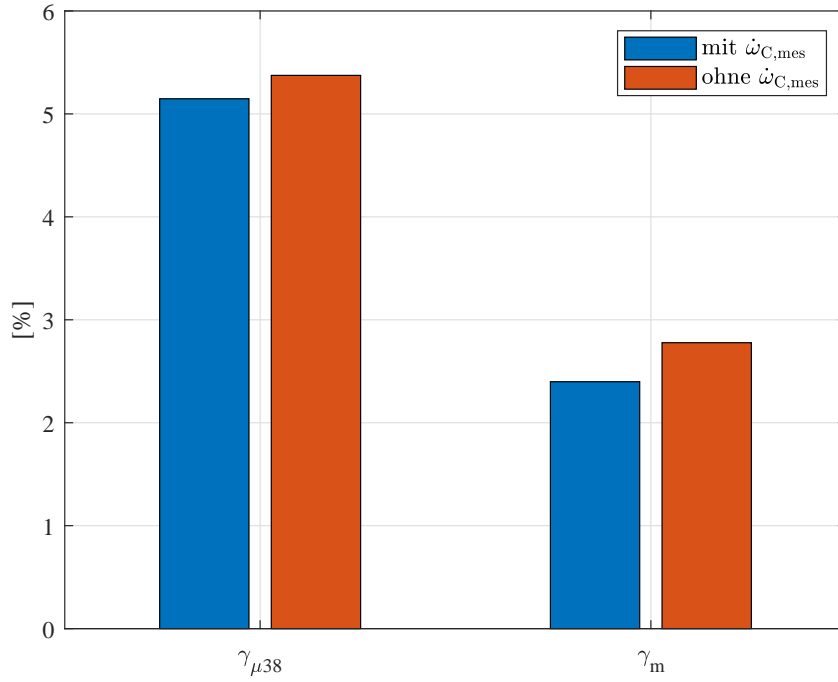


Abbildung 3.12: Streuungen der Fisher-Informationsmatrix für die simultane Schätzung von  $m$ ,  $\mu_{38}$  während der Momentenübergabe mit  $\dot{\omega}_{C,mes}$  als Messgröße und ohne.

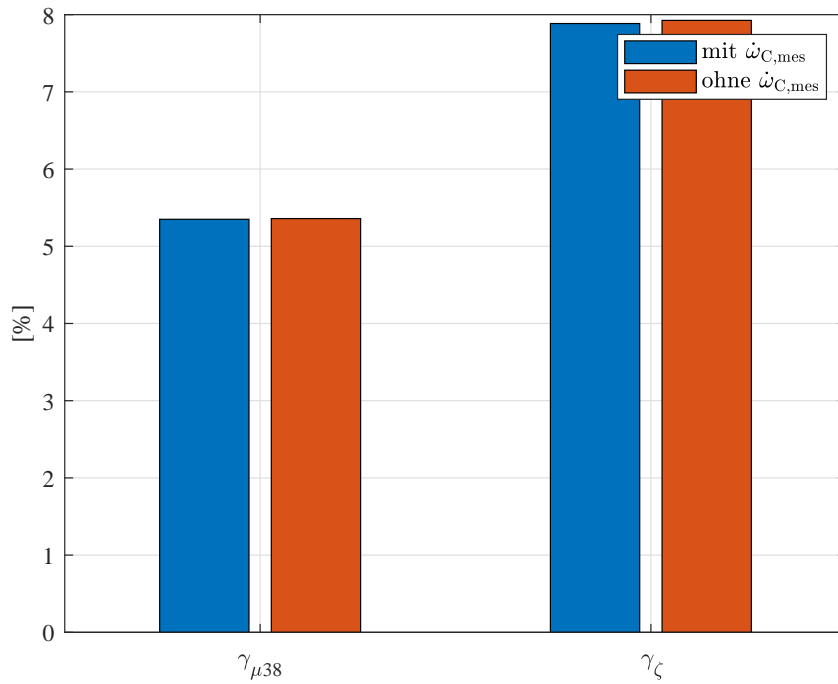


Abbildung 3.13: Streuungen der Fisher-Informationsmatrix für die simultane Schätzung von  $\mu_{38}$  und  $\zeta$  während der Momentenübergabe mit  $\dot{\omega}_{C,mes}$  als Messgröße und ohne.

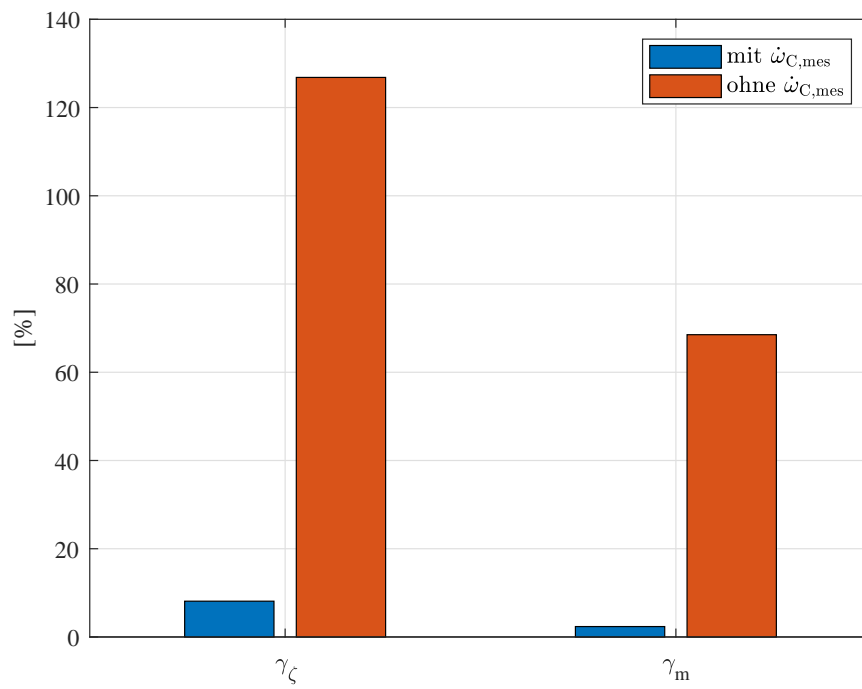


Abbildung 3.14: Streuungen der Fisher-Informationsmatrix für die simultane Schätzung von  $m$  und  $\zeta$  während der Synchronisation mit  $\dot{\omega}_{C,mes}$  als Messgröße und ohne.



# Kapitel 4

## Schätzverfahren

Im vorherigen Kapitel wurde mit der Fisher-Informationsmatrix die Identifizierbarkeit der Parameter in Abhängigkeit der Messinformationen analysiert. Im Gegensatz dazu wird in diesem Kapitel im ersten Schritt die strukturelle Identifizierbarkeit der Parameter nachgewiesen. Dieser Nachweis ist unabhängig von Messinformationen und wird mit Hilfe der Überprüfung Beobachtbarkeit des im Zustandsvektor um die Parameter erweiterten Systems (??) durchgeführt.

### 4.1 Nachweis der strukturellen Identifizierbarkeit

Um die strukturelle Identifizierbarkeit der Parameter zu zeigen wird der Zustandsvektor des Modells (??) um den Parametervektor  $\mathbf{p} = [m_{\text{veh}} \mu_{38} \mu_{05} \zeta]^T$  wie in [Bohn.2016] beschrieben erweitert und auf Beobachtbarkeit überprüft. Unter zusätzlicher Berücksichtigung der Ausgangsgrößen (???) unter Vernachlässigung der Messunsicherheiten  $\epsilon(t)$  kann das erweiterte Modell somit geschrieben werden als

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{\text{ex},23} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}_{23p}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{f}_{23}(\mathbf{x}_{\text{ex},23}, \mathbf{p}) \\ \mathbf{w}_p(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_{23p}(\mathbf{x}_{23p})} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\text{ex},\text{nl}23}(\mathbf{p}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{23p}(\mathbf{x}_{23p})} \mathbf{u}_{\text{ex},\text{nl}23} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{y}_{\text{ex},23} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_M & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{M,p}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{ex},23} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{23p}}$$

wobei  $\mathbf{w}_p(t) = [w_{p,1}(t) \dots w_{p,m}(t)]$  das Prozessrauschen der Parameter berücksichtigt. Mit  $w_{p,j}(t) \neq 0$  wird der entsprechende Parameter als nicht konstante Größe angesehen, wobei die Dynamik als Brownsche Bewegung (Random Walk) modelliert wird [Bohn.2016]. Dieses System mit dem soll nun auf Beobachtbarkeit überprüft werden. Die Beobachtbarkeit eines allgemeinen nichtlinearen System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), & \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

mit  $\mathbf{x} \in D_{\mathbf{x}} \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u} \in C_{\mathbf{u}} \subseteq C^{n-1}$  und  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^r$  ist in [Adamy.2018] wie folgt definiert: Sind dann alle Anfangsvektoren  $\mathbf{x}_0 \in D_{\mathbf{x}}$  aus der Kenntnis von  $\mathbf{u}(t)$  und  $\mathbf{y}(t)$  in einem Zeitintervall  $[t_0, t_1 < \infty]$  für alle  $\mathbf{u} \in C_{\mathbf{u}}$  eindeutig bestimmbar, so heißt das System beobachtbar. Des

Weiteren wird das schwächere Kriterium, die schwache Beobachtbarkeit, definiert als: Sind dann alle Anfangsvektoren  $\mathbf{x}_0 \in D_{\mathbf{x}}$  in einer Umgebung

$$U = \{\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_A\| < \rho\} \quad (4.3)$$

eines Punktes  $\mathbf{x}_A \in D_{\mathbf{x}}$  aus der Kenntnis von  $\mathbf{u}(t)$  und  $\mathbf{y}(t)$  in einem Zeitintervall  $[t_0, t_1 < \infty]$  für alle  $\mathbf{u} \in C_{\mathbf{u}}$  eindeutig bestimmbar, so heißt das System schwach beobachtbar, wenn dies für alle  $\mathbf{x}_A \in D_{\mathbf{x}}$  möglich ist. Diese beiden Eigenschaften werden, wie in [Adamy.2018] beschrieben, mit Hilfe der  $n - 1$  totalen Ableitungen des Ausgangsvektors  $\mathbf{y}$  überprüft. Diese lassen sich berechnen zu

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{h}_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) \\ \ddot{\mathbf{y}} &= \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{h}_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}) \\ \ddot{\mathbf{y}} &= \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \ddot{\mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \ddot{\mathbf{u}}} \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{h}_3(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}) \\ &\vdots \\ \mathbf{y}^{(n-1)} &= \frac{\partial \mathbf{h}_{n-2}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \mathbf{h}_{n-2}}{\partial \mathbf{u}^{(i-1)}} \mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{h}_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(n-1)}) \end{aligned}$$

und können zur Abbildung

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} \\ \ddot{\mathbf{y}} \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{h}_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) \\ \mathbf{h}_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}) \\ \vdots \\ \mathbf{h}_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(n-1)}) \end{bmatrix} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(n-1)}) \quad (4.4)$$

zusammengefasst werden. Ist weiterhin (??) eindeutig nach  $\mathbf{x}$  auflösbar, sodass

$$\mathbf{x} = \mathbf{q}^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(n-1)}) \quad (4.5)$$

existiert, dann ist (??) beobachtbar. Ist die inverse Abbildung (??) nicht oder nur sehr schwer berechenbar, kann die schwache Beobachtbarkeit mit Hilfe der Entwicklung der Taylor-Reihe

$$\mathbf{z} = \mathbf{q}(\mathbf{x}_A) + \left. \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_A) + \text{Restglied} \quad (4.6)$$

um den Arbeitspunkt  $\mathbf{x}_A$  gezeigt werden [Adamy.2018]. Unter Vernachlässigung des Restglieds in (??) ist die Gleichung genau dann nach  $\mathbf{x}$  auflösbar, wenn die Jacobi-Matrix

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}_A) = \left. \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial \mathbf{h}_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial \mathbf{h}_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}})}{\partial \mathbf{x}} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{h}_{(n-1)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(n-1)})}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_A} \quad (4.7)$$

den Rang  $n$  hat. In diesem Fall kann die Beobachtbarkeit in der Umgebung (??) gezeigt werden und somit die schwache Beobachtbarkeit von (??).

Da die Berechnung der inversen Abbildung (??) für das erweiterte System (??) sehr schwer ist, wird hier lediglich die schwache Beobachtbarkeit nachgewiesen. Aufgrund der schwachen Nichtlinearitäten und der geringen Änderung von  $\mathbf{x}_{23p}$  während des Beobachtungszeitraums, genügt diese den Anforderungen in dieser Arbeit.

Die ersten drei Einträge von  $\mathbf{q}$  berechnen sich für das System (??) zu

$$\mathbf{q}_1(\mathbf{x}_{23p}) = \mathbf{C}_{23p} \mathbf{x}_{23p} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{q}_2(\mathbf{x}_{23p}) = \mathbf{C}_{23p} \mathbf{f}_{23p}(\mathbf{x}_{23p}) + \mathbf{C}_{23p} \mathbf{B}_{23p}(\mathbf{x}_{23p}) \mathbf{u}_{\text{ex,nl23}} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_3(\mathbf{x}_{23p}) = & \frac{\partial [\mathbf{C}_{23p} \mathbf{f}_{23p}(\mathbf{x}_{23p}) + \mathbf{C}_{23p} \mathbf{B}_{23p}(\mathbf{x}_{23p}) \mathbf{u}_{\text{ex,nl23}}]}{\partial \mathbf{x}_{23p}} [\mathbf{f}_{23p}(\mathbf{x}_{23p}) + \mathbf{B}_{23p}(\mathbf{x}_{23p}) \mathbf{u}_{\text{ex,nl23}}] \\ & + \mathbf{C}_{23p} \mathbf{B}_{23p}(\mathbf{x}_{23p}) \mathbf{u}_{\text{ex,nl23}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

und können in dem Vektor

$$\mathbf{q}_{123}(\mathbf{x}_{23p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1(\mathbf{x}_{23p}) \\ \mathbf{q}_2(\mathbf{x}_{23p}) \\ \mathbf{q}_3(\mathbf{x}_{23p}) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

zusammengefasst werden. Nun kann gezeigt werden, dass für alle Arbeitspunkte  $\mathbf{x}_{23p,A}$  und Eingänge  $\mathbf{u}_{\text{ex,nl23}}$  gilt

$$\text{rang}(\mathbf{Q}_{123}(\mathbf{x}_{23p,A})) = \text{rang} \left( \left. \frac{\partial \mathbf{q}_{123}(\mathbf{x}_{23p,A})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_A} \right) = 8. \quad (4.12)$$

Da  $\mathbf{q}_{123}(\mathbf{x}_{23p})$  ein Untervektorraum von  $\mathbf{q}(\mathbf{x}_{23p})$  bildet, folgt

$$\text{rang}(\mathbf{q}(\mathbf{x}_{23p})) \geq \text{rang}(\mathbf{q}_{123}(\mathbf{x}_{23p})) \quad (4.13)$$

und somit die schwache Beobachtbarkeit von (??) um jeden Arbeitspunkt  $\mathbf{x}_{23p,A}$ .

## 4.2 Beschreibung und Anwendung von Schätzverfahren

### 4.3 Extended Kalman-Filter

Wie oben beschrieben soll aufgrund der zeitvariablen Parameter und der nichtlinearen Regelstrecke ein erweitertes Kalman-Filter (EKF) zur Schätzung der Parameter verwendet werden. Zu diesem Zweck wird das EKF als Beobachter der Zustände des erweiterten Systems (??) eingesetzt. Zur Implementierung der Gleichungen auf den digitalen Steuergeräten des Fahrzeugs ist es notwendig, die Beschreibung des Systems im diskreten Zeitbereich darzustellen.

### 4.4 Unknown Input Observer

### 4.5 Extended Unknown Input Observers



# Kapitel 5

## Zusammenfassung und Ausblick

Im nächsten Schritt werden zwei verschiedene Online-Parameterschätzverfahren beschrieben und die dazugehörigen Simulationsergebnisse diskutiert. Die Parameter werden dabei in den verschiedenen Schaltphasen geschätzt.

Des weiteren kann durch die Betrachtung der Widerstandskräfte  $F_r(v)$  und  $F_{ad}(v)$  als Eingangsgrößen, das System weiterhin in lineare Form

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{ex}} = \mathbf{A}_{\text{ex}} \mathbf{x}_{\text{ex}} + \mathbf{B}_{\text{ex}} \mathbf{u}_{\text{ex}} \quad (5.1)$$

angegeben werden. Hierfür werden die beiden Widerstandskräfte in (??) durch  $T_{\text{res}}^*$  ersetzt, sodass sich

$$\dot{\omega}_C = \left[ 2 \left( k_{\text{ss}} \left( \frac{\phi_2}{i_D} - \phi_C \right) + d_{\text{ss}} \left( \frac{\omega_2}{i_D} - \omega_C \right) \right) - T_{\text{res}}^* - r_{\text{dyn}} F_g \right] / I_C^{\text{eff}}. \quad (5.2)$$

ergibt. Der Eingangsvektor des linearen Systems ist dann definiert als

$$\mathbf{u}_{\text{ex}} = \left[ T_{\text{In}} \quad T_{\text{res}}^* \quad T_{\text{K81}} \quad T_{\text{K38}} \quad T_{\text{B08}} \quad T_{\text{B05}} \quad T_{\text{B06}} \quad T_{\text{K27}} \quad \zeta \right]^T. \quad (5.3)$$

Die Funktion  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_{\text{ex}})$  und die Eingangsmatrix  $\mathbf{B}_{\text{ex, nl}}$  des nichtlinearen Systems, sowie die Systemmatrix  $\mathbf{A}_{\text{ex}}$  und die Eingangsmatrix  $\mathbf{B}_{\text{ex}}$  des linearen Systems sind im Anhang mit numerischen Werten für die Zähnezahlen der Zahnräder und der Massenträgheitsmomente angegeben.

Mit den eingesetzten numerischen Werten der Zahnräder, der Massenträgheitsmomente, der Übersetzung der Differentials und dem dynamischen Radius der Räder ergeben sich die Systemmatrizen zu

$$\mathbf{A}_{\text{ex}, 23} = \begin{bmatrix} 0 & -0,799 d_{\text{ss}} & -1,97 k_{\text{ss}} & 1,97 d_{\text{ss}} \\ 0 & -0,248 d_{\text{ss}} & -0,612 k_{\text{ss}} & 0,612 d_{\text{ss}} \\ 0 & 0,405 & 0 & -1,0 \\ 0 & \frac{0,81 d_{\text{ss}}}{m_{\text{veh}} 0,108+6,4} & \frac{2,0 k_{\text{ss}}}{m_{\text{veh}} 0,108+6,4} & \frac{-2,0 d_{\text{ss}}}{m_{\text{veh}} 0,108+6,4} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$$\mathbf{B}_{\text{ex}, 23} = \begin{bmatrix} 10,7 & -2,79 & -17,0 & 0 & 0 \\ 2,44 & 0,0135 & -2,41 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{0,108 m_{\text{veh}}+6,4} & \frac{-3,22 m_{\text{veh}}}{0,108 m_{\text{veh}}+6,4} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$



# Anhang A

## Anhang

Im Anhang werden Ergebnisse aufgeführt, die zwar im Kontext der Arbeit wesentlich, jedoch nicht für das Verständnis der Arbeit notwendig sind. Beispielsweise sind dies detailliertere Messergebnisse, Herleitungen oder Datenblätter.





# Abbildungsverzeichnis



# Tabellenverzeichnis



# Literatur

- [1] Friedhelm Altpeter. „Friction modeling, identification and compensation“. In: (1999), S. 166.
- [2] P. Dupont, B. Armstrong und V. Hayward. „Elasto-plastic friction model: contact compliance and stiction“. In: 2 (2000), 1072–1077 vol.2. ISSN: 0743-1619. DOI: 10.1109/ACC.2000.876665.
- [3] P. Dupont, V. Hayward, B. Armstrong und F. Altpeter. „Single state elastoplastic friction models“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 47.5 (2002), S. 787–792. ISSN: 0018-9286. DOI: 10.1109/TAC.2002.1000274.
- [4] Graham C. Goodwin und Robert L. Payne. *Dynamic system identification: experiment design and data analysis*. Englisch. Mathematics in science and engineering ; 136. UB Stadtmitte. New York [u.a.]: Acad. Pr., 1977, X, 291 Seiten. ISBN: 0-12-289750-1.
- [5] J.W. Hearne. „Sensitivity analysis of parameter combinations“. In: *Applied Mathematical Modelling* 9.2 (1985), S. 106 –108. ISSN: 0307-904X. DOI: [https://doi.org/10.1016/0307-904X\(85\)90121-0](https://doi.org/10.1016/0307-904X(85)90121-0). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0307904X85901210>.
- [6] W. J. Karnavas, P. J. Sanchez und A. T. Bahill. „Sensitivity analyses of continuous and discrete systems in the time and frequency domains“. In: *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 23.2 (1993), S. 488–501. ISSN: 0018-9472. DOI: 10.1109/21.229461.
- [7] Clemens Philipp Majer. „Parameterschuetzung, Versuchsplanung und Trajektorienoptimierung fuer verfahrenstechnische Prozesse“. Deutsch. UB Stadtmitte. Hochschulschrift. Duesseldorf, 1998, X, 152 Seiten. ISBN: 3-18-353803-2.
- [8] Harald Naunheimer, Bernd Bertsche, Gisbert Lechner und Joachim Ryborz. *Fahrzeuggetriebe: Grundlagen, Auswahl, Auslegung und Konstruktion*. 2., bearb. und erw. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. ISBN: 978-3-540-30625-2. DOI: 10.1007/978-3-540-30670-2. URL: <http://site.ebrary.com/lib/alltitles/docDetail.action?docID=10189346>.
- [9] Andrea Saltelli, Stefano Tarantola, Francesca Campolongo und M Ratto. „Sensitivity Analysis in Practice: A Guide to Assessing Scientific Models“. In: (Juni 2004).
- [10] Werner Schiehlen. *Technische Dynamik*. Deutsch. Hrsg. von Peter Eberhard. 5. Aufl. 2017. SpringerLink : Buecher. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2017, Online-Ressource (IX, 213 Seiten 73 Abb., 3 Abb. in Farbe, online resource). ISBN: 978-3-658-18457-5. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-658-18457-5>.
- [11] Dierk Schröder. *Elektrische Antriebe - Regelung von Antriebssystemen*. Deutsch. 4. Aufl. 2015. SpringerLink : Buecher. Berlin, Heidelberg: Springer Vieweg, 2015, Online-Ressource (XXXII, 1879 Seiten 200 Abb. in Farbe, online resource). ISBN: 978-3-642-30096-7. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-30096-7>.

- [12] R. Stribeck, M. Schrueter und L. Austin. *Die wesentlichen Eigenschaften der Gleit- und Rollenlager*. Deutsch. Mitteilungen ueber Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, insbesondere aus den Laboratorien der technischen Hochschulen ; 7. UB Stadtmitte. Berlin: Springer, 1903, 86 Seiten , 1 gef. Blatt.

## **Erklärung des Autors**

der Masterarbeit mit dem Titel

### **Schätzverfahren für adaptive Regelung von Hybridgetrieben**

Hiermit versichere ich,

1. dass ich meine Arbeit bzw. bei einer Gruppenarbeit den entsprechend gekennzeichneten Anteil der Arbeit selbständig verfasst habe,
2. dass ich keine anderen als die angegebenen Quellen benutzt und alle wörtlich oder sinngemäß aus anderen Werken übernommenen Aussagen als solche gekennzeichnet habe,
3. dass die eingereichte Arbeit weder vollständig noch in wesentlichen Teilen Gegenstand eines anderen Prüfungsverfahrens gewesen ist,
4. dass ich die Arbeit weder vollständig noch in Teilen bereits veröffentlicht habe und
5. dass das elektronische Exemplar mit den anderen Exemplaren übereinstimmt.

Stuttgart, den 30.09.2018

Koray Karci