Institut für Systemdynamik
Prof. Dr.-Ing. O. Sawodny

Universität Stuttgart

Masterarbeit

Schätzverfahren für adaptive Regelung von Hybridgetrieben

Estimation Procedure for Adaptive Control of Hybrid Gearboxes

vorgelegt von
Koray Karci

Studiengang
Maschinenbau

Prüfer
Prof. Dr.-Ing. Oliver Sawodny

Betreuer
M.Sc. Michel Bauer

Prüfungsdatum
30.09.2018

Institut für Systemdynamik, Universität Stuttgart, Waldburgstraße 17/19, 70563 Stuttgart

Kurzfassung

Kurzfassung

Abstract

Abstract

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungen und Formelzeichen

Abkürzungen

DOF	Freiheitsgrade (Engl.: Degrees of Freedom)
E/A	Eingang/Ausgang
IMC	Internal Model Control
MPC	Modellprädiktive Regelung (Engl.: Model Predictive Control)

Formelzeichen

Formelzeichen	Einheit	Beschreibung
I	A	Strom
U	V	Spannung
T	K	Temperatur
τ	s	Zeitkonstante
ρ_{L}	$^{\mathrm{kg}}/_{\mathrm{m}^3}$	Dichte der Luft
$\boldsymbol{u}$		Regeleingang des zu regelnden Systems
$\boldsymbol{x}$		Zustandsvektor
$\boldsymbol{y}$		Regelausgang des zu regelnden Systems

Kapitel 1

Einleitung und Motivation

Dies ist die Einleitung und Motivation. Freitag

Kapitel 2

Modellierung

In diesem Kapitel wird ein für die Simulation verwendetes detailliertes Modell des Antriebsstrangs hergeleitet. Hierfür wird ein vorhandenes, starres Modell um Elastizitäten der Seitenwellen ergänzt. Für die Herleitung wird dabei der Lagrange Formalismus verwendet, welcher daher auch kurz beschrieben wird. Im weiteren werden aus dem detaillierten Modell vereinfachte Modelle hergeleitet, welche dem Entwurf der Beobachter im Kapitel 5 dienen.

2.1 Modellierung des Antriebsstrangs

Zur Modellierung des Antriebsstranges wird zunächst die Getriebedynamik mittels der Newton-Euler Gleichungen berechnet. Dazu wird zu Beginn kurz auf die Herleitung dieser Gleichungen eingegangen. Danach wird dieses um die Elastizitäten der Seitenwellen ergänzt, woraus sich ein schwingfähiges System ergibt.

2.1.1 Beschreibung des allgemeinen Newton-Euler-Formalismus

Die Position und Orientierung von jedem Körper i eines holonomen Mehrkörpersystems mit p Körpern und f Freiheitsgraden (FHG), kann in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinaten $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^f$ angegeben werden mit

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{y}, t) \quad i = 1(1)p \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{s}_i(\boldsymbol{y}, t). \tag{2.2}$$

Durch die zeitliche Ableitung dieser ergeben sich die translatorischen und rotatorischen Geschwindigkeiten

$$\boldsymbol{v}_i = \dot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \boldsymbol{y}} \cdot \dot{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \boldsymbol{t}} = \boldsymbol{J}_{Ti}(\boldsymbol{y}, t) \cdot \dot{\boldsymbol{y}} + \overline{\boldsymbol{v}}_i(\boldsymbol{y}, t) \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{\omega}_i = \dot{\boldsymbol{s}}_i = \frac{\partial \boldsymbol{s}_i}{\partial \boldsymbol{y}} \cdot \dot{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial \boldsymbol{s}_i}{\partial \boldsymbol{t}} = \boldsymbol{J}_{Ri}(\boldsymbol{y}, t) \cdot \dot{\boldsymbol{y}} + \overline{\boldsymbol{\omega}}_i(\boldsymbol{y}, t) \tag{2.4}$$

mit der Jacobi-Matrix der Translation $\boldsymbol{J}_{Ti}$ und der Rotation $\boldsymbol{J}_{Ri}$. Die lokalen Geschwindigkeitsvektoren $\overline{\boldsymbol{v}}_i(\boldsymbol{y}, t)$ und $\overline{\boldsymbol{\omega}}_i(\boldsymbol{y}, t)$ treten nur bei Systemen mit rheonomen Bindungen auf. Nach erneuter zeitlicher Ableitung ergeben sich die Beschleunigungen

$$\boldsymbol{a}_i = \dot{\boldsymbol{v}}_i = \boldsymbol{J}_{Ti} \cdot \ddot{\boldsymbol{y}} + \dot{\boldsymbol{J}}_{Ti} \cdot \dot{\boldsymbol{y}} + \dot{\overline{\boldsymbol{v}}}_i = \boldsymbol{J}_{Ti}(\boldsymbol{y}, t) \cdot \ddot{\boldsymbol{y}} + \overline{\boldsymbol{a}}_i(\boldsymbol{y}, \dot{\boldsymbol{y}}, t) \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \boldsymbol{J}_{Ri} \cdot \ddot{\boldsymbol{y}} + \dot{\boldsymbol{J}}_{Ri} \cdot \dot{\boldsymbol{y}} + \dot{\overline{\boldsymbol{\omega}}}_i = \boldsymbol{J}_{Ri}(\boldsymbol{y}, t) \cdot \ddot{\boldsymbol{y}} + \overline{\boldsymbol{\alpha}}_i(\boldsymbol{y}, \dot{\boldsymbol{y}}, t) \tag{2.6}$$

mit den lokalen Beschleunigungsvektoren $\bar{\boldsymbol{a}}_i$ und $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_i$. Des weiteren lassen sich für die Dynamik eines Systems virtuelle Bewegungen definieren. Diese sind willkürliche, infinitesimale Bewegungen des Systems, welche mit den skleronomen und den rheonomen Bindungen verträglich sind. Für virtuelle Bewegungen an holonomen Bindungen gilt

$$\delta \boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}, \tag{2.7}$$

$$\delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}, \tag{2.8}$$

$$\delta t = 0. \tag{2.9}$$

Damit lassen sich die virtuellen Bewegungen der einzelnen Körper i definieren zu

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \boldsymbol{y}} \cdot \delta \boldsymbol{y} = \boldsymbol{J}_{Ti}(\boldsymbol{y}, t) \cdot \delta \boldsymbol{y} \tag{2.10}$$

$$\delta \boldsymbol{s}_i = \frac{\partial \boldsymbol{s}_i}{\partial \boldsymbol{y}} \cdot \delta \boldsymbol{y} = \boldsymbol{J}_{Ri}(\boldsymbol{y}, t) \cdot \delta \boldsymbol{y}. \tag{2.11}$$

Die Kinetik eines Körpers i wird durch die Newtonschen- und Eulerschen-Gleichungen beschrieben. Die Newtonschen-Gleichungen eines Körpers i lassen sich angeben als

$$m_i \boldsymbol{a}_i(t) = \boldsymbol{f}_i(t) \tag{2.12}$$

wobei m_i die Masse des Körpers angibt und $\boldsymbol{f}_i(t)$ die Summe der angreifenden Kräfte. Diese lassen sich wiederum einteilen in eingeprägte Kräfte $\boldsymbol{f}^e$ und Reaktionskräfte $\boldsymbol{f}^r$. Die Eulerschen Gleichungen lauten

$$\boldsymbol{I}_i(t) \cdot \boldsymbol{\alpha}_i(t) + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i(t) \cdot \boldsymbol{I}_i(t) \boldsymbol{\omega}_i(t) = \boldsymbol{l}_i(t) \tag{2.13}$$

mit dem Trägheitstensor $\boldsymbol{I}_i(t)$ und den äußeren Momenten $\boldsymbol{l}_i(t)$ bezogen auf den Massenmittelpunkt des Körpers i im Inertialsystem und dem schiefsymmetrische 3x3-Tensor $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i(t)$. Die äußeren Momenten $\boldsymbol{l}_i(t)$ lassen sich äquivalent zum translatorischen Fall wieder in eingeprägte Momente $\boldsymbol{l}^e$ und Reaktionsmomente $\boldsymbol{l}^r$ aufteilen. Der schiefsymmetrische 3x3-Tensor ist für ein beliebigen Vektor

$$\boldsymbol{v} = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]^T \tag{2.14}$$

definiert als

$$\tilde{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.15}$$

Darüber hinaus kann mit den virtuellen Bewegungen aus (2.10) und (2.11) die virtuelle Arbeit $\delta \boldsymbol{W}$ definiert werden. Da es, wie in (2.8) definiert, in Richtung der Bindungen keine virtuellen Bewegungen geben kann, ergibt sich für die virtuelle Arbeit der Reaktionskräfte

$$\delta \boldsymbol{W}^r = \sum_{i=1}^{p} (\boldsymbol{f}_i^r \cdot \delta \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{l}_i^r \cdot \delta \boldsymbol{s}_i) = 0. \tag{2.16}$$

Mit den Gleichungen 2.12, 2.13 und der beschriebenen Aufteilung der äußeren Kräfte in eingeprägte Kräfte und Reaktionskräfte, folgt aus (2.17) das d'Alembertsche Prinzip für Mehrkörpersysteme

$$\sum_{i=1}^{p} \left[(m_i \boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{f}_i^e) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i + (\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{i}} \cdot \boldsymbol{\alpha}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i - \boldsymbol{l}_i^e) \cdot \delta \boldsymbol{s}_i \right] = 0. \tag{2.17}$$

Durch einsetzten der virtuellen Bewegungen (2.10) und (2.11) ergibt sich daraus

$$\delta \boldsymbol{y} \sum_{i=1}^{p} \left[\boldsymbol{J}_{Ti}^{T} \cdot (m_i \boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{f}_i^e) + \boldsymbol{J}_{Ri}^{T} \cdot (\boldsymbol{I_i} \cdot \boldsymbol{\alpha}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i - \boldsymbol{l}_i^e) \right] = 0. \tag{2.18}$$

Das einarbeiten der kinematischen Gleichungen (2.3) – (2.6) in ... führt zur Bewegungsgleichung für holonome Mehrkörpersysteme (MKS)

$$\sum_{i=1}^{p} \left[\boldsymbol{J}_{Ti}^{T} \cdot m_i \cdot \boldsymbol{J}_{Ti} + \boldsymbol{J}_{Ri}^{T} \cdot \boldsymbol{I}_i \cdot \boldsymbol{J}_{Ri} \right] \ddot{\boldsymbol{y}} + \sum_{i=1}^{p} \left[\boldsymbol{J}_{Ti}^{T} \cdot m_i \cdot \bar{\boldsymbol{a}}_i + \boldsymbol{J}_{Ri}^{T} \cdot \boldsymbol{I}_i \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_i + \boldsymbol{J}_{Ri}^{T} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \cdot \boldsymbol{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega_i} \right] = \sum_{i=1}^{p} \left[\boldsymbol{J}_{Ti}^{T} \cdot \boldsymbol{f}_i^e + \boldsymbol{J}_{Ri}^{T} \cdot \boldsymbol{l}_i^e \right]. \tag{2.19}$$

Darin lässt sich die erste Summe zur Massenmatrix $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{y}, t)$, die zweite Summe zum Vektor der verallgemeinerten Zentrifugal– und Coriloriskräfte $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{y}, \dot{\boldsymbol{y}}, t)$ und die dritte Summe zum Vektor der verallgemeinerten Kräfte $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{y}, \dot{\boldsymbol{y}}, t)$ zusammenfassen, wodurch sich (2.19) schreiben lässt als

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{y}, t) \cdot \ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{k}(\boldsymbol{y}, \dot{\boldsymbol{y}}, t) = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{y}, \dot{\boldsymbol{y}}, t) \tag{2.20}$$

2.1.2 Beschreibung des Getriebeaufbaus

Mit der allgemeinen Bewegungsgleichung für MKS (2.20) kann die Getriebedynamik berechnet werde. Das in dieser Arbeit betrachtete Getriebe besteht im wesentlichen aus vier hintereinander liegenden Umlaufgetrieben. Der schematische Aufbau eines Umlaufgetriebes ist in Abbildung ??? zu sehen. Dieses besteht aus dem Sonnenrad in der Mitte, den darum gleichmäßig verteilten Planetenrädern, welche auf dem Planetenträger drehbar gelagert sind und dem Hohlrad. Der Zusammenhang der einzelnen Drehzahlen ist gegeben durch die beiden Zwangsbedingungen (ZB)

$$\text{Sonne} - \text{Planeten}: \quad r_{\mathrm{S},j}\omega_{\mathrm{S},j} - r_{\mathrm{T},j}\omega_{\mathrm{T},j} + r_{\mathrm{P},j}\omega_{\mathrm{P},j} = 0 \tag{2.21}$$

$$\text{Planeten} - \text{Hohlrad}: \quad r_{\mathrm{H},j}\omega_{\mathrm{H},j} - r_{\mathrm{T},j}\omega_{\mathrm{T},j} - r_{\mathrm{P},j}\omega_{\mathrm{P},j} = 0 \tag{2.22}$$

mit den Rollradien $r_{S,j}$, $r_{P,j}$, $r_{T,j}$ und $r_{H,j}$ des Sonnenrads, des Planetenrads, des Planententrägers und des Hohlrades im j-ten Planetensatz. Entsprechenden gelten die Indizes auch für die Winkelgeschwindigkeiten $\omega_{S,j}$, $\omega_{P,j}$, $\omega_{T,j}$ und $\omega_{H,j}$ Dabei gilt, dass die Verhältnisse der Rollradien denen der Zähnezahlen einer Zahnradverbindung entsprechen. Der Rollradius des Planetenträger entspricht somit der Summe der Zähnezahl der Sonne $z_{S,j}$ und des Planeten $z_{P,j}$ und es ergibt sich

$$\text{Sonne} - \text{Planeten}: \quad z_{\mathrm{S},j}\omega_{\mathrm{S}} - (z_{\mathrm{S},j} + z_{\mathrm{P},j})\omega_{\mathrm{T},j} + z_{\mathrm{P},j}\omega_{\mathrm{P},j} = 0 \tag{2.23}$$

$$\text{Planeten} - \text{Hohlrad}: \quad z_{\mathrm{H},j}\omega_{\mathrm{H},j} - (z_{\mathrm{S}} + z_{\mathrm{P},j})\omega_{\mathrm{T},j} - z_{P,j}\omega_{\mathrm{P},j} = 0. \tag{2.24}$$

Die Größe $z_{S,j}$ entspricht der Zähnezahl am Hohlrad im j-ten Planetensatz. Die Verschaltung der vier Planetensätze zeigt Abbildung ???. Aus den acht Wellen ergeben sich entsprechende acht FHG im des MKS. Vier weitere kommen durch die Planten der einzelnen Planetensätze

Tabelle 2.1: Übersetzung und aktive Schaltelemente je Gang.

		Schaltelement					
Gang	Übersetzung	K81	B05	B08	K38	K27	B06
1. Gang	5,354		•		•		•
2. Gang	3,243	•			•		•
3. Gang	2,252	•	•				•
4. Gang	1,636		•			•	•
5. Gang	1,211	•	•			•	
6. Gang	1,000	•			•	•	
7. Gang	0,865		•		•	•	
8. Gang	0,717			•	•	•	
9. Gang	0,601		•	•		•	
N	–		•				•
R	-4,798		•	•			•

hinzu. Somit hat des freie MKS $f_{\text{free}} = 12$ FHG. Unter Berücksichtigung der beiden Zwangsbedinungen (2.23) und (2.24) ergibt sich somit die Anzahl der FHG des beschränkten MKS zu

$$f = f_{\text{free}} - 4q = 12 - 8 = 4 \tag{2.25}$$

mit der Anzahl der ZB in jedem Planetensatz q. Weiterhin ergeben sich durch die ZB an den einzelnen Planetensätzen die Zusammenhänge

$$\begin{aligned}
\text{Planetensatz 1}: \quad z_{\text{S},1}\omega_1 &= (z_{\text{S},1} + z_{\text{P}})\omega_8 - z_{\text{P},1}\omega_9 && \text{(2.26a)}\\
z_{\text{H},1}\omega_4 &= (z_{\text{H},1} - z_{\text{P}})\omega_8 + z_{\text{P},1}\omega_9 && \text{(2.26b)}\\
\text{Planetensatz 2}: \quad z_{\text{S},2}\omega_5 &= (z_{\text{S},2} + z_{\text{P}})\omega_4 - z_{\text{P},2}\omega_{10} && \text{(2.26c)}\\
z_{\text{H},2}\omega_3 &= (z_{\text{H},2} - z_{\text{P}})\omega_4 + z_{\text{P},2}\omega_{10} && \text{(2.26d)}\\
\text{Planetensatz 3}: \quad z_{\text{S},3}\omega_3 &= (z_{\text{S},3} + z_{\text{P}})\omega_2 - z_{\text{P},3}\omega_{11} && \text{(2.26e)}\\
z_{\text{H},3}\omega_6 &= (z_{\text{H},3} - z_{\text{P}})\omega_2 + z_{\text{P},3}\omega_{11} && \text{(2.26f)}\\
\text{Planetensatz 4}: \quad z_{\text{S},4}\omega_3 &= (z_{\text{S},4} + z_{\text{P}})\omega_1 - z_{\text{P},4}\omega_{12} && \text{(2.26g)}\\
z_{\text{H},4}\omega_7 &= (z_{\text{H},4} - z_{\text{P}})\omega_1 + z_{\text{P},4}\omega_{12}. && \text{(2.26h)}
\end{aligned}$$

Die Gangschaltung erfolgt im Getriebe über jeweils drei Lamellenkupplungen und Lamellenbremsen. Mit Hilfe der Kupplungen lassen sich die Wellen 1 und 8, 8 und 3 und 2 und 7 verkoppeln. Über die drei Bremsen können die Wellen 8, 5 und 6 gegen das Gehäuse abgestützt werden. Um einen Gang zu schalten müssen drei der Schaltelemente betätigt sein. Dadurch verbleibt nur noch ein FHG der Getriebedynamik und es ergibt sich eine eindeutige Übersetzung zwischen Eingangsdrehzahl ω_1 und Ausgangsdrehzahl ω_2. Die sich durch die jeweiligen Schaltungen ergebenden Übersetzungen können Tabelle ??? entnommen werden.

2.1.3 Anwendung des Newton-Euler-Formalismus

Die Wellen und Planeten rotieren alle nur um eine Achse bzw. bewegen sich nur auf einer Kreisbahn. Daher werden die Orientierungen und Ortsvektoren des einzelnen Körper als skalare angegeben. Die Ortsvektoren werden als Zylinderkoordinaten geschrieben. Somit ergibt sich der Vektor der Orientierungen der einzelnen Wellen und der Planeten zu

$$\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_{12} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_{12} \end{bmatrix}^T . \tag{2.27}$$

Die Ortsvektoren der Wellen 1-8 können aufgrund der nicht vorhanden translatorischen Bewegung gleich Null gesetzt werden. Lediglich die Planeten haben durch die Bewegung auf den Planetenträgern um die Drehachse der Wellen 1-8 einen translatorischen Anteil. Die Position der Planeten ergibt sich somit aus den entsprechenden Radien der Planetenträgern $r_{T,j}$ und der Orientierung der Planetenträgern. Daraus ergibt sich der Orstvektor des Systems zu

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} r_1 \; r_2 \; \dots \; r_{12} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 \; \dots \; 0 & r_{T,1}\,\phi_8 & r_{T,2}\,\phi_4 & r_{T,3}\,\phi_2 & r_{T,4}\,\phi_1 \end{bmatrix}^T \tag{2.28}$$

Da das MKS $f = 4$ FHG hat lässt sich nach [**Schiehlen.2017**] dieses durch verallgemeinerte Koordinaten $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^f$ beschreiben. Dabei liegt es nahe, die zu den am Getriebe gemessenen Winkelgeschwindigkeiten gehörigen Winkel ϕ_1, ϕ_2 und ϕ_8 zu verwenden. Zusätzlich soll dazu ϕ_3 verwendet werden. Dadurch ergibt sich der Vektor der verallgemeinerten Koordinaten zu

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_8 \end{bmatrix}^T . \tag{2.29}$$

Die Zusammenhänge in (2.26) gelten auch für die zugehörigen Winkel. Damit können $\boldsymbol{s}$ und $\boldsymbol{r}$ in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinaten angegeben werden. Die Einträge von

$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{y})$ ergeben sich zu

$$\phi_1 = \phi_1 \tag{2.30a}$$

$$\phi_2 = \phi_2 \tag{2.30b}$$

$$\phi_3 = \phi_3 \tag{2.30c}$$

$$\phi_4 = -\frac{z_{\mathrm{S},1}}{z_{\mathrm{H},1}}\phi_1 + \left(\frac{z_{\mathrm{S},1}}{z_{\mathrm{H},1}} + 1\right)\phi_8 \tag{2.30d}$$

$$\phi_5 = \left(-\frac{z_{\mathrm{S},1}}{z_{\mathrm{H},1}} - \frac{z_{\mathrm{H},2}z_{\mathrm{S},1}}{z_{\mathrm{H},1}z_{\mathrm{S},2}}\right)\phi_1 - \frac{z_{\mathrm{H},2}}{z_{\mathrm{S},2}}\phi_3 + \left(\frac{z_{\mathrm{S},1}}{z_{\mathrm{H},1}} + \frac{z_{\mathrm{H},2}}{z_{\mathrm{S},2}} + \frac{z_{\mathrm{H},2}z_{\mathrm{S},1}}{z_{\mathrm{H},1}z_{\mathrm{S},2}} + 1\right)\phi_8 \tag{2.30e}$$

$$\phi_6 = \left(\frac{z_{\mathrm{S},3}}{z_{\mathrm{H},3}} + 1\right)\phi_2 - \frac{z_{\mathrm{S},3}}{z_{\mathrm{H},3}}\phi_3 \tag{2.30f}$$

$$\phi_7 = \left(\frac{z_{\mathrm{S},4}}{z_{\mathrm{H},4}} + 1\right)\phi_1 - \frac{z_{\mathrm{S},4}}{z_{\mathrm{H},4}}\phi_3 \tag{2.30g}$$

$$\phi_8 = \phi_8 \tag{2.30h}$$

$$\phi_9 = -\frac{z_{\mathrm{S},1}}{z_{\mathrm{P},1}}\phi_1 + \left(\frac{z_{\mathrm{S},1}}{z_{\mathrm{P},1}} + 1\right)\phi_8 \tag{2.30i}$$

$$\phi_{10} = \left(\frac{z_{\mathrm{H},2}z_{\mathrm{S},1}}{z_{\mathrm{H},1}z_{\mathrm{P},2}} + \frac{z_{\mathrm{S},1}}{z_{\mathrm{H},1}}\right)\omega_1 + \frac{z_{\mathrm{H},2}}{z_{\mathrm{P},2}}\phi_3 + \left(\frac{z_{\mathrm{S},1}}{z_{\mathrm{H},1}} - \frac{z_{\mathrm{H},2}}{z_{\mathrm{P},2}} - \frac{z_{\mathrm{H},2}z_{\mathrm{S},1}}{z_{\mathrm{H},1}z_{\mathrm{P},2}} + 1\right)\phi_8 \tag{2.30j}$$

$$\phi_{11} = \left(\frac{z_{\mathrm{S},3}}{z_{\mathrm{P},3}} + 1\right)\phi_2 - \frac{z_{\mathrm{S},3}}{z_{\mathrm{P},3}}\phi_3 \tag{2.30k}$$

$$\phi_{12} = \left(\frac{z_{\mathrm{S},4}}{z_{\mathrm{P},4}} + 1\right)\phi_1 - \frac{z_{\mathrm{S},4}}{z_{\mathrm{P},4}}\phi_3 \tag{2.30l}$$

Die Einträge von $\boldsymbol{r}$ sind bis auf den Zehnten bereits in Abhängigkeit von $\boldsymbol{y}$ angegeben. Der verbleibende Eintrag kann mit (2.30d) wie folgt angegeben werden

$$r_{10}(\boldsymbol{y}) = r_{T,2}\,\phi_4 = r_{T,2}\left(-\frac{z_{\mathrm{S},1}}{z_{\mathrm{H},1}}\phi_1 + \left(\frac{z_{\mathrm{S},1}}{z_{\mathrm{H},1}} + 1\right)\phi_8\right). \tag{2.31}$$

Durch die zeitliche Ableitung von $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{y})$ und $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{y})$ gemäß (2.3) und 2.4 erhält man die Jacobi-Matrizen der Translation

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} J_{\mathrm{T1}} & J_{\mathrm{T2}} & \cdots & J_{\mathrm{T12}} \end{bmatrix}^T \tag{2.32}$$

und der Rotation

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{R}} = \begin{bmatrix} J_{\mathrm{R1}} & J_{\mathrm{R2}} & \cdots & J_{\mathrm{R12}} \end{bmatrix}^T, \tag{2.33}$$

welche die einzelnen Jacobi-Matrizen der Körper enthalten. Die Terme $\overline{\boldsymbol{v}}$ und $\overline{\boldsymbol{\omega}}$ verschwinden, da es sich um skleronome Bindungen handelt und die ZB (2.26) nicht explizit zeitabhängig sind. Auch die lokalen Beschleunigungsvektoren $\overline{\boldsymbol{a}}$ und $\overline{\boldsymbol{\omega}}$ verschwinden, da $\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}}$ und $\boldsymbol{J}_{\mathrm{R}}$ zeitlich konstant sind. In der allgemeinen Bewegungsgleichung für holonome MKS (2.20) verschwinden somit die Zentrifugalkräfte in $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{y}, \dot{\boldsymbol{y}}, t)$. Auch die Corioliskräfte verschwinden, da für alle Körper das Inertialsystem als Referenzsystem verwendet wird.Im Vektor der verallgemeinerten Kräfte $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{y}, \dot{\boldsymbol{y}}, t)$ werden die eingeprägten Kräfte $\boldsymbol{f}_i^e$ vernachlässigt da die translatorischen Bewegungen im Getriebe sehr klein gegenüber der rotatorischen Bewegungen sind. Somit reduziert sich (2.20) auf

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{y}, t) \cdot \ddot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{y}, \dot{\boldsymbol{y}}, t) \tag{2.34}$$

wobei die Massenmatrix mit $\boldsymbol{J}_\mathrm{T}$ und $\boldsymbol{J}_\mathrm{R}$ jetzt angegeben werden kann als

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{y}, t) = \boldsymbol{J}_\mathrm{T}^T \cdot \mathrm{diag}(m_i) \cdot \boldsymbol{J}_\mathrm{T} + \boldsymbol{J}_\mathrm{R}^T \cdot \mathrm{diag}(I_i) \cdot \boldsymbol{J}_\mathrm{R} \tag{2.35}$$

und der Vektor der verallgemeinerten Kräfte als

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{y}, \dot{\boldsymbol{y}}, t) = \boldsymbol{J}_\mathrm{R}^T \cdot \boldsymbol{l}^e \tag{2.36}$$

Die eingeprägten Momente sind die von den Schaltelementen aufgebrachten Momente T_B05, T_B06, T_B08, T_K81, T_K38 und T_K27. Desweitern wirken am Getriebeeingang T_In und am Getriebeausgang T_Out. Damit ergibt sich der Vektor der eingeprägten Momente zu

$$\boldsymbol{l}^e = \begin{bmatrix} \mathrm{T}_\mathrm{In} + \mathrm{T}_\mathrm{K81} \\ -\mathrm{T}_\mathrm{K27} - \mathrm{T}_\mathrm{Out} \\ -\mathrm{T}_\mathrm{K38} \\ 0 \\ \mathrm{T}_\mathrm{B05} \\ \mathrm{T}_\mathrm{B06} \\ \mathrm{T}_\mathrm{K27} \\ \mathrm{T}_\mathrm{B08} + \mathrm{T}_\mathrm{K38} - \mathrm{T}_\mathrm{K81} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.37}$$

Das Eingangsmoment T_In wird vom Verbrennungsmotor und einem Elektromotor gestellt. Das Ausgangssmoment T_Out wird an die Kardanwelle übertragen. Andere eingeprägte Momente, wie Schleppmomente oder Reibungen an den Lagern werden vernachlässigt. Mit Hilfe der ersten Summe von (2.19) können die Einträge der 4x4-Massenmatrix $\boldsymbol{M}$ berechnet werden.

Diese ergeben sich zu

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_{(1,1)} &= J_1 + J_7 \left(\frac{z_{\mathrm{S},4}}{z_{\mathrm{H},4}} + 1\right)^2 + J_{12} \left(\frac{z_{\mathrm{S},4}}{z_{\mathrm{P},4}} + 1\right)^2 + J_{10} \left(\frac{z_{\mathrm{S},1}}{z_{\mathrm{H},1}} - \sigma_5\right)^2 + J_5 \left(\frac{z_{\mathrm{S},1}}{z_{\mathrm{H},1}} + \sigma_4\right)^2 \\
&\quad + m_{\mathrm{P},4} {r_{\mathrm{T},4}}^2 + \frac{J_4 {z_{\mathrm{S},1}}^2}{{z_{\mathrm{H},1}}^2} + \frac{J_9 {z_{\mathrm{S},1}}^2}{{z_{\mathrm{P},1}}^2} + \frac{m_{\mathrm{P},2} {r_{\mathrm{T},2}}^2 {z_{\mathrm{S},1}}^2}{{z_{\mathrm{H},1}}^2} \\
\boldsymbol{M}_{(1,3)} &= \frac{J_5 z_{\mathrm{H},2} \left(\frac{z_{\mathrm{S},1}}{z_{\mathrm{H},1}} + \sigma_4\right)}{z_{\mathrm{S},2}} - \frac{J_{12} z_{\mathrm{S},4} \left(\frac{z_{\mathrm{S},4}}{z_{\mathrm{P},4}} + 1\right)}{z_{\mathrm{P},4}} - \frac{J_{10} z_{\mathrm{H},2} \left(\frac{z_{\mathrm{S},1}}{z_{\mathrm{H},1}} - \sigma_5\right)}{z_{\mathrm{P},2}} - \frac{J_7 z_{\mathrm{S},4} \left(\frac{z_{\mathrm{S},4}}{z_{\mathrm{H},4}} + 1\right)}{z_{\mathrm{H},4}} \\
\boldsymbol{M}_{(1,4)} &= J_{10} \left(\frac{z_{\mathrm{S},1}}{z_{\mathrm{H},1}} - \sigma_5\right) \sigma_3 - J_5 \left(\frac{z_{\mathrm{S},1}}{z_{\mathrm{H},1}} + \sigma_4\right) \sigma_2 - \frac{J_4 z_{\mathrm{S},1} \left(\frac{z_{\mathrm{S},1}}{z_{\mathrm{H},1}} + 1\right)}{z_{\mathrm{H},1}} \\
&\quad - \frac{J_9 z_{\mathrm{S},1} \left(\frac{z_{\mathrm{S},1}}{z_{\mathrm{P},1}} + 1\right)}{z_{\mathrm{P},1}} - \frac{m_{\mathrm{P},2} {r_{\mathrm{T},2}}^2 z_{\mathrm{S},1} \left(\frac{z_{\mathrm{S},1}}{z_{\mathrm{H},1}} + 1\right)}{z_{\mathrm{H},1}} \\
\boldsymbol{M}_{(2,2)} &= J_2 + J_6 \left(\frac{z_{\mathrm{S},3}}{z_{\mathrm{H},3}} + 1\right)^2 + J_{11} \left(\frac{z_{\mathrm{S},3}}{z_{\mathrm{P},3}} + 1\right)^2 + m_{\mathrm{P},3} {r_{\mathrm{T},3}}^2 \\
\boldsymbol{M}_{(2,3)} &= -\frac{J_6 z_{\mathrm{S},3} \left(\frac{z_{\mathrm{S},3}}{z_{\mathrm{H},3}} + 1\right)}{z_{\mathrm{H},3}} - \frac{J_{11} z_{\mathrm{S},3} \left(\frac{z_{\mathrm{S},3}}{z_{\mathrm{P},3}} + 1\right)}{z_{\mathrm{P},3}} \\
\boldsymbol{M}_{(3,1)} &= \boldsymbol{M}_{(1,3)} \\
\boldsymbol{M}_{(3,2)} &= \boldsymbol{M}_{(2,3)} \\
\boldsymbol{M}_{(3,3)} &= J_3 + \frac{J_{10} {z_{\mathrm{H},2}}^2}{{z_{\mathrm{P},2}}^2} + \frac{J_5 {z_{\mathrm{H},2}}^2}{{z_{\mathrm{S},2}}^2} + \frac{J_6 {z_{\mathrm{S},3}}^2}{{z_{\mathrm{H},3}}^2} + \frac{J_7 {z_{\mathrm{S},4}}^2}{{z_{\mathrm{H},4}}^2} + \frac{J_{11} {z_{\mathrm{S},3}}^2}{{z_{\mathrm{P},3}}^2} + \frac{J_{12} {z_{\mathrm{S},4}}^2}{{z_{\mathrm{P},4}}^2} \\
\boldsymbol{M}_{(3,4)} &= -\frac{J_{10} z_{\mathrm{H},2} \sigma_3}{z_{\mathrm{P},2}} - \frac{J_5 z_{\mathrm{H},2} \sigma_2}{z_{\mathrm{S},2}} \\
\boldsymbol{M}_{(4,1)} &= \boldsymbol{M}_{(1,4)} \\
\boldsymbol{M}_{(4,3)} &= \boldsymbol{M}_{(3,4)} \\
\boldsymbol{M}_{(4,4)} &= J_8 + J_4 \left(\frac{z_{\mathrm{S},1}}{z_{\mathrm{H},1}} + 1\right)^2 + J_9 \left(\frac{z_{\mathrm{S},1}}{z_{\mathrm{P},1}} + 1\right)^2 + m_{\mathrm{P},1} {r_{\mathrm{T},1}}^2 + J_{10} \sigma_3^2 + J_5 \sigma_2^2 \\
&\quad + m_{\mathrm{P},2} {r_{\mathrm{T},2}}^2 \left(\frac{z_{\mathrm{S},1}}{z_{\mathrm{H},1}} + 1\right)^2 \\
\sigma_1 &= \left(\frac{z_{\mathrm{S},4}}{z_{\mathrm{H},4}} + 1\right) \\
\sigma_2 &= \left(\frac{z_{\mathrm{S},1}}{z_{\mathrm{H},1}} + \frac{z_{\mathrm{H},2}}{z_{\mathrm{S},2}} + \frac{z_{\mathrm{H},2} z_{\mathrm{S},1}}{z_{\mathrm{H},1} z_{\mathrm{S},2}} + 1\right) \\
\sigma_3 &= \left(\frac{z_{\mathrm{H},2}}{z_{\mathrm{P},2}} - \frac{z_{\mathrm{S},1}}{z_{\mathrm{H},1}} + \frac{z_{\mathrm{H},2} z_{\mathrm{S},1}}{z_{\mathrm{H},1} z_{\mathrm{P},2}} - 1\right) \\
\sigma_5 &= \frac{z_{\mathrm{H},2} z_{\mathrm{S},1}}{z_{\mathrm{H},1} z_{\mathrm{P},2}} \\
\sigma_4 &= \frac{z_{\mathrm{H},2} z_{\mathrm{S},1}}{z_{\mathrm{H},1} z_{\mathrm{S},2}}
\end{aligned}
$$

wobei J_{1-12} die Massenträgheitsmomente der entsprechenden Wellen sind und $m_{\mathrm{P},1-4}$ die gesamt Masse der Planeten eines Planetensatzes. Durch einsetzten von $\boldsymbol{M}$ und (2.37) in (2.19) ergeben sich die vier Gleichungen der Getriebedynamik

$$\boldsymbol{M}_{(1,1)}\dot{\omega}_1 + \vec{M}_{(1,3)}\dot{\omega}_3 + \boldsymbol{M}_{(1,4)}\dot{\omega}_8 = T_{\mathrm{K81}} + T_{\mathrm{in}} + \sigma_1 T_{\mathrm{K27}} - T_{\mathrm{B05}}\left(\frac{z_{\mathrm{S},1}}{z_{\mathrm{H},1}} + \sigma_4\right) \tag{2.38a}$$

$$\boldsymbol{M}_{(2,2)}\dot{\omega}_2 + \boldsymbol{M}_{(2,3)}\dot{\omega}_3 = T_{\mathrm{B06}}\left(\frac{z_{\mathrm{S},3}}{z_{\mathrm{H},3}} + 1\right) - T_{\mathrm{out}} - T_{\mathrm{K27}} \tag{2.38b}$$

$$\boldsymbol{M}_{(3,1)}\dot{\omega}_1 + \boldsymbol{M}_{(3,2)}\dot{\omega}_2 + \boldsymbol{M}_{(3,3)}\dot{\omega}_3 + \boldsymbol{M}_{(3,4)}\dot{\omega}_8 = -T_{\mathrm{K38}} - \frac{z_{\mathrm{H},2}}{z_{\mathrm{S},2}}T_{\mathrm{B05}} - \frac{z_{\mathrm{S},3}}{z_{\mathrm{H},3}}T_{\mathrm{B06}} - \frac{z_{\mathrm{S},4}}{z_{\mathrm{H},4}}T_{\mathrm{K27}} \tag{2.38c}$$

$$\boldsymbol{M}_{(4,1)}\dot{\omega}_1 + \boldsymbol{M}_{(4,3)}\dot{\omega}_3 + \boldsymbol{M}_{(4,4)}\dot{\omega}_8 = T_{\mathrm{B08}} + T_{\mathrm{K38}} - T_{\mathrm{K81}} + \sigma_2 T_{\mathrm{B05}}. \tag{2.38d}$$

Mit Hilfe der Definition des Eingangsvektors

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix}\mathrm{T_{In}} & \mathrm{T_{Out}} & \mathrm{T_{K81}} & \mathrm{T_{K38}} & \mathrm{T_{B08}} & \mathrm{T_{B05}} & \mathrm{T_{B06}} & \mathrm{T_{K27}}\end{bmatrix}^T \tag{2.39}$$

lassen sich die Gleichungen (2.38) schreiben als

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{y}} = \tilde{\boldsymbol{B}}\,\boldsymbol{u}. \tag{2.40}$$

Dieses Differentialgleichungssystem kann mit der Definition des Zustands

$$\boldsymbol{x} = \dot{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\\ \omega_8\end{bmatrix} \tag{2.41}$$

und der Invertierung von $\boldsymbol{M}$ in die Zustandsraumdarstellung

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{M}^{-1}\tilde{\boldsymbol{B}}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u} \tag{2.42}$$

transformiert werden. In dieser Darstellung ist leicht ersichtlich, dass das System aufgrund der fehlenden Systemmatrix zustandsunabhängig ist.

2.1.4 Erweiterung um elastische Seitenwellen

Aufgrund der relativ elastischen Seitenwellen kann es im Antriebsstrang zu erheblichen Schwingungen kommen. Um diese bei der Simulation eines Schaltvorgang mit berücksichtigen zu können, soll das in 2.1.3 hergeleitete Zustandsraummodell um die Elastizitäten erweitert werden. Die Seitenwellen werden dabei als Feder-Dämpfer-Systeme modelliert. Die Kardanwelle wird hingegen als starrer Körper betrachtet. Ein schematischen Aufbau des Antriebsstrangs zeigt Abbildung ???. Zunächst wird der Zustandsvektor um die Verdrehung der Seitenwellen ψ und die Raddrehzahl ω_{C} ergänzt, sodass sich der erweiterte Zustandsvektor

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{ex}} = \begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\\ \omega_8\\ \phi\\ \omega_{\mathrm{C}}\end{bmatrix} \tag{2.43}$$

ergibt. Wie in Abbildung ??? veranschaulicht, ergibt sich die ϕ aus der Differenz der Verdrehung am linken Schnittufer der Seitenweillen $\phi_{\mathrm{ss,p}}$ und der des Rades ϕ_{C}, am rechten Schnittufer. Unter Berücksichtigung der starren Kardanwelle ergibt sich somit für die Verdrehung der Seitenwellen

$$\phi = \frac{\phi_2}{i_{\mathrm{D}}} - \phi_{\mathrm{C}} \tag{2.44}$$

wobei i_{D} die Übersetzungen des Differentials angibt. Entsprechend gilt der Zusammenhang auch für die Winkelgeschwindigkeiten

$$\dot{\phi} = \frac{\omega_2}{i_{\mathrm{D}}} - \omega_{\mathrm{C}}. \tag{2.45}$$

Des weiteren kann am Rad das Momentengleichgewicht

$$I_{\mathrm{C}}^{\mathrm{eff}}\,\dot{\omega}_{\mathrm{C}} = 2\,T_{\mathrm{ss}} - T_{\mathrm{res}} \tag{2.46}$$

aufgestellt werden. Das effektive Massenträgheitsmomentes des Rads $I_{\mathrm{C}}^{\mathrm{eff}}$ setzt sich wie folgt zusammen

$$I_{\mathrm{C}}^{\mathrm{eff}} = I_{\mathrm{ss}} + m_{\mathrm{C}}\,r_{\mathrm{dyn}}. \tag{2.47}$$

Dabei ist I_{ss} das Massenträgheitsmoment einer Seitenwelle, m_{C} die Masse des Rads und r_{dyn} der dynamische Radradius. Desweiteren ist T_{ss} das von den Seitenwellen übertragene Moment und kann mit dem Steifigkeitskoeffizient k_{ss} und dem Dämpfungskoeffizient d_{ss} berechnet werden zu

$$T_{\mathrm{ss}} = k_{\mathrm{ss}}\left(\frac{\phi_2}{i_{\mathrm{D}}} - \phi_{\mathrm{C}}\right) + d_{\mathrm{ss}}\left(\frac{\omega_2}{i_{\mathrm{D}}} - \omega_{\mathrm{C}}\right). \tag{2.48}$$

Das Widerstandsmoment berechnet sich als Summe der berücksichtigten äußeren Widerstände zu

$$T_{\mathrm{res}} = r_{\mathrm{dyn}}\left(F_{\mathrm{r}}(v) + F_{\mathrm{ad}}(v) + F_{\mathrm{g}}\right). \tag{2.49}$$

Die berücksichtigten Widerstände sind der Rollwiderstand $F_{\mathrm{r}}(v)$, der Luftwiderstand $F_{\mathrm{ad}}(v)$ und die Hangabtriebskraft F_{g} und werden wie folgt berechnet

$$F_{\mathrm{r}}(v) = v \cdot f_{\mathrm{Roll}}(v) \cdot \cos\left(\zeta(t)\right) \cdot m_{\mathrm{veh}} \cdot g \tag{2.50a}$$

$$F_{\mathrm{ad}}(v) = \frac{1}{2} \cdot v^2 \cdot \rho_{\mathrm{Air}} \cdot c_{\mathrm{W}} \cdot A_{\mathrm{front}} \tag{2.50b}$$

$$F_{\mathrm{g}} = \sin\left(\zeta(t)\right) \cdot m_{\mathrm{veh}} \cdot g. \tag{2.50c}$$

Dabei ist $v = \omega_{\mathrm{C}}\,r_{\mathrm{dyn}}$ die Fahrzeuggeschwindigkeit, $f_{\mathrm{Roll}}(v)$ der von der Geschwindigkeit abhängige Faktor des Rollwiderstands, ζ die Steigung der Straße in rad, g die Erdbeschleunigung, ρ_{Air} die Luftdichte, c_{W} der Widerstandsbeiwert des Fahrzeugs, A_{front} die Frontfläche des Fahrzeugs und m_{veh} die Gesamtmasse des Fahrzeugs [**Naunheimer.2007**]. Durch Einsetzten von (2.48) und (2.49) in (2.46) und anschließender Auflösung nach $\dot{\omega}_{\mathrm{C}}$ erhält man die Dynamik des Rades

$$\dot{\omega}_{\mathrm{C}} = \left[2\left(k_{\mathrm{ss}}\left(\frac{\phi_2}{i_{\mathrm{D}}} - \phi_{\mathrm{C}}\right) + d_{\mathrm{ss}}\left(\frac{\omega_2}{i_{\mathrm{D}}} - \omega_{\mathrm{C}}\right)\right) - r_{\mathrm{dyn}}\left(F_{\mathrm{r}}(v) + F_{\mathrm{ad}}(v) + F_{\mathrm{g}}\right)\right] / I_{\mathrm{C}}^{\mathrm{eff}}. \tag{2.51}$$

Aufgrund der starren Verbindung von Welle 2, der Kardanwelle und des Differentials, werden die Massenträgheitsmomente dieser Bauteile zusammengefasst zu

$$J_2^{\mathrm{eff}} = J_2 + J_{\mathrm{cs}}^{\mathrm{eff}} + \frac{J_{\mathrm{cs}}^{\mathrm{eff}}}{i_{\mathrm{D}}^2} \tag{2.52}$$

wobei in das effektive Massenträgheitsmoment der Kardanwelle $J_{\mathrm{cs}}^{\mathrm{eff}} = J_{\mathrm{cs}} + 0,5\,J_{\mathrm{D}}$ die eine Hälfte des Massenträgheitsmoments des Differentials miteinbezogen wird. Die andere Hälfte wird aufgrund der Drehzahldifferenz nach dem Differential mit dem Massenträgheitsmoment der zweiten Seitenwelle $J_{\mathrm{ss}}^{\mathrm{eff}} = 0,5\,J_{\mathrm{D}} + J_{\mathrm{ss}}$ zusammen gefasst. Für das erweiterte System wird J_2 in $\boldsymbol{M}_(2,2)$ dann durch J_2^{eff} ersetzt. Des weiteren wird in Abbildung ??? ersichtlich, dass für das Ausgangsmoment

$$T_{\mathrm{out}} = \frac{2\,T_{\mathrm{ss}}}{i_{\mathrm{D}}} = \frac{2}{i_{\mathrm{D}}}\left[k_{\mathrm{ss}}\left(\frac{\phi_2}{i_{\mathrm{D}}} - \phi_{\mathrm{C}}\right) + d_{\mathrm{ss}}\left(\frac{\omega_2}{i_{\mathrm{D}}} - \omega_{\mathrm{C}}\right)\right] \tag{2.53}$$

gilt und dieses in (2.37) dementsprechend ersetzt werden kann.

Zu beachten ist hier, dass $v(\omega_{\mathrm{C}})$ zustandsabhängig ist und sowohl in $F_{\mathrm{r}}(v)$ als auch in $F_{\mathrm{ad}}(v)$ nichtlinear eingeht, wodurch das gesamt System nichtlinear wird. Auch die Eingangsgröße $\zeta(t)$ geht nichtlinear in die Widerstand ein. Da Fahrbahnen im Straßenverkehr auf maximal 20° beschränkt sind werden hier die Vereinfachungen

$$\sin(\zeta) = \zeta \quad \text{und} \quad \cos(\zeta) = 1 \tag{2.54}$$

getroffen. Damit lässt sich das erweiterte Modell mit dem ergänzten Eingangsvektor

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{ex,nl}} = \begin{bmatrix}\mathrm{T_{In}} & \mathrm{T_{K81}} & \mathrm{T_{K38}} & \mathrm{T_{B08}} & \mathrm{T_{B05}} & \mathrm{T_{B06}} & \mathrm{T_{K27}} & \zeta\end{bmatrix}^T, \tag{2.55}$$

den Gleichungen (2.45) und (2.51) in der Form

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{ex}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{ex}}) + \boldsymbol{B}_{\mathrm{ex,nl}}\,\boldsymbol{u}_{\mathrm{ex,nl}} \tag{2.56}$$

schreiben.

Des weiteren kann durch die Betrachtung der Widerstandskräfte $F_{\mathrm{r}}(v)$ und $F_{\mathrm{ad}}(v)$ als Eingangsgrößen, das System weiterhin in lineare Form

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{ex}} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{ex}}\,\boldsymbol{x}_{\mathrm{ex}} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{ex}}\,\boldsymbol{u}_{\mathrm{ex}} \tag{2.57}$$

angegeben werden. Hierfür werden die beiden Widerstandskräfte in (2.51) durch T_{res}^{*} ersetzt, sodass sich

$$\dot{\omega}_{\mathrm{C}} = \left[2\left(k_{\mathrm{ss}}\left(\frac{\phi_2}{i_{\mathrm{D}}} - \phi_{\mathrm{C}}\right) + d_{\mathrm{ss}}\left(\frac{\omega_2}{i_{\mathrm{D}}} - \omega_{\mathrm{C}}\right)\right) - T_{\mathrm{res}}^{*} - r_{\mathrm{dyn}}\,F_{\mathrm{g}}\right]/I_{\mathrm{C}}^{\mathrm{eff}}. \tag{2.58}$$

ergibt. Der Eingangsvektor des linearen Systems ist dann definiert als

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{ex}} = \begin{bmatrix}\mathrm{T_{In}} & T_{\mathrm{res}}^{*} & \mathrm{T_{K81}} & \mathrm{T_{K38}} & \mathrm{T_{B08}} & \mathrm{T_{B05}} & \mathrm{T_{B06}} & \mathrm{T_{K27}} & \zeta\end{bmatrix}^T. \tag{2.59}$$

Die Funktion $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{ex}})$ und die Eingangmatrix $\boldsymbol{B}_{\mathrm{ex,nl}}$ des nichtlinearen Systems, sowie die Systemmatrix $\boldsymbol{A}_{\mathrm{ex}}$ und die Eingangmatrix $\boldsymbol{B}_{\mathrm{ex}}$ des linearen Systems sind im Anhang mit numerischen Werten für die Zähnezahlen der Zahnräder und der Massenträgheitsmomente angegeben.

2.2 Modellierung der Reibung an Kupplungen und Bremsen

Die im Abschnitt 2.1.3 eingeführten Momente der Schaltelemente werden über Lamellenkupplungen beziehungsweise -bremsen an den Wellen angebracht. Dabei werden die Lamellenpakete über einen hydraulischen Druck zusammengepresst, sodass zwischen den Flächen Reibkräfte wirken. Solang die aus dem Druck resultierende Normalkraft an Lamellenpaketen nicht ausreicht um die Scheiben gegeneinander abzustützen, wirkt die Reibkraft entgegen der Differnzdrehzahl $\Delta\omega$ der drehenden Scheiben. Ist die Normalkraft groß genug entsteht eine kraftschlüssige Verbindung zwischen Innen- und Außenlamellen. In diesem Fall ist $\Delta\omega = 0$ und der Betrag der Reibkraft entspricht dem der Reaktionskraft und wirkt dieser entgegen.

Zur Ermittlung der auf die Wellen wirkenden Reaktionsmomente bedarf es eines Reibmodells. Im Wesentlichen können diese in statische und dynamische Reibmodelle eingeteilt werden. Dynamische Reibmodelle unterscheiden sich dadurch, dass sie über mindestens einen weiteren Zustand verfügen. Dies ermöglicht die Simulation von weiteren Reibeffekten wie Hysteresen, variierende Losbrechkräfte oder nicht-gleitende Auslenkungen [**Schroeder.2015**]. Im folgenden werden statische und dynamische Reibmodelle erläutert.

2.2.1 Statische Reibmodelle

Die einfachste Art der Reibungsmodellierung ist die Coulombsche Reibung. Dabei ist die Reibkraft proportional zur Normalkraft F_N und einem konstanten Reibungskoeffizienten μ_C. Nach [**Schroeder.2015**] ist diese definiert als

$$F_\mathrm{C} = F_\mathrm{N}\,\mu_\mathrm{C}\,\mathrm{sign}(\Delta\omega) = F_\mathrm{N}\,\mu_\mathrm{C}\begin{cases} 1 & ,\Delta\omega > 0 \\ 0 & ,\Delta\omega = 0 \\ -1 & ,\Delta\omega < 0 \end{cases} \tag{2.60}$$

Durch die Erweiterung um einen Haftreibungsbeiwert μ_S, wird eine benötigte Losbrechkraft mit berücksichtigt. Der Haftreibungsbeiwert μ_S ist im Normalfall größer als μ_C, sodass eine größere Kraft notwendig ist um einen reibungsbehafteten Körper aus der ruhe zu bringen. Für die Haftreibung gilt

$$F_\mathrm{S} = \begin{cases} F_\mathrm{A} & ,|F_\mathrm{A}| < F_\mathrm{N}\,\mu_\mathrm{S}(\wedge\Delta\omega = 0) \\ F_\mathrm{N}\,\mu_\mathrm{S}\,\mathrm{sign}(F_\mathrm{A}) & ,|F_\mathrm{A}| \geq F_\mathrm{N}\,\mu_\mathrm{S}(\wedge\Delta\omega = 0) \end{cases} \tag{2.61}$$

wobei F_A die Summe der äußeren Kräfte ist. Sind die Reibflächen geschmiert, ist eine Änderung der Reibkennlinie über die $\Delta\omega$ zu beobachten. Dieses Phänomen berücksichtigt die viskose Reibung. Diese ist definiert als

$$F_\mathrm{V} = \nu|\Delta\omega|^{\delta_\mathrm{V}}\mathrm{sign}(\Delta\omega) \tag{2.62}$$

mit dem viskosen Reibungsexponenten δ_V und dem Reibkoeffizienten ν. Des weiteren lässt sich F_C durch die Stribeck-Funktion erweitern. Damit wird das rapide Abfallen der Reibkraft bei kleinen Geschwindigkeiten berücksichtigt. Dieser Effekt entsteht durch das Aufbrechen von Kontaktstellen und der anschließenden Bildung eines Schmierfilms [**Stribeck.1903**]. Eine übliche Modellierung der Stribeck-Funktion ist

$$F_\mathrm{Stribeck} = F_\mathrm{C} + F_\mathrm{N}(\mu_\mathrm{S} - \mu_\mathrm{C})\exp\left[-\left(\frac{|\Delta\omega|}{\omega_\mathrm{S}}\right)^{\delta_\mathrm{S}}\right] \tag{2.63}$$

mit der Stribeck-Geschwindigkeit ω_S und dem Stribeck-Exponent δ_S. Die verschiedene statischen Reibmodelle lassen sich zum "Kinetischen Reibmodell"

$$F_\mathrm{Kin} = \begin{cases} F_\mathrm{A} & , \Delta\omega = 0 \\ F_\mathrm{Stribeck}\,\mathrm{sign}(\Delta\omega) + F_\mathrm{V} & , \Delta\omega \neq 0 \end{cases} \tag{2.64}$$

zusammenfassen [**Altpeter.1999**].

Eine Schwäche dieses Modells ist der unstetige Verlauf der Reibkennlinie bei $\Delta\omega = 0$. Diese Schwäche kann durch die Annäherung der Reibkennlinie über eine stetige atan-Funktion behoben werden. Dennoch bedarf es weiterhin der Unterscheidung zwischen Haft- und Gleitbereich. Hierfür ist entweder eine variable Zeitschrittweite des Solvers notwendig oder die Definition eines Geschwindigkeitbandes um $\Delta\omega = 0$. Des weiteren ist die Reibkraft im Haftbereich von den äußeren Kräften abhängig, welche hier nicht bekannt sind und durch das Modell berechnet werden sollen. Aus diesen Gründen werden im Folgenden dynamische Reibmodelle betrachtet, welche diese Schwächen nicht aufweisen.

2.2.2 Dynamische Reibmodelle

Um die dynamischen Reibeffekte vorallem um $\Delta\omega = 0$ mit berücksichtigen zu können werden dynamische Reibmodelle benötigt. Einen ersten Ansatz dazu liefert das Reibmodell von Dahl. Dieses beschreibt die dynamischen Reibeffekte für kleine Auslenkungen mit kleinen Federn in den Kontaktbereichen von Körpern und geht anschließend in die Coulombschen-Reibung über[**Schroeder.2015**]. Die Reibdynamik des Dahlschen-Modells wird definiert durch die Differentialgleichung

$$F_\mathrm{R,Dahl} = \left[\sigma_0 |1 - \frac{F_\mathrm{R,Dahl}}{F_\mathrm{C}} \mathrm{sign}(\Delta\omega)|^\beta\ \mathrm{sign}\left(1 - \frac{F_\mathrm{R,Dahl}}{F_\mathrm{C}}\mathrm{sign}(\Delta\omega)\right)\right] \Delta\omega \tag{2.65}$$

mit der zuvor definierten Coulomschen-Reibkraft F_C, der Federsteifigkeit σ_0 und dem Formparameter der Hysterese β. Das Lund-Grenoble (LuGre) Reibmodell erweitert das Modell von Dahl um einen Dämpfungsanteil und ersetzt die Coulombsche-Kraft durch einen beliebige Reibkraftkennlinie F_SS. Die Kontaktstellen der Reibflächen werden dabei als "Borsten"modelliert, welche die Borstensteifigkeit σ_0 und die Borstendämpfung $sigma_1$ besitzen. Mit der Borstenauslenkung z lässt sich die LuGre-Reibkraft angeben als

$$F_\mathrm{R,LuGre} = \sigma_0\, z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2\, \Delta\omega \quad \text{mit } \dot{z} = \Delta\omega \left(1 - \frac{\sigma_0 z}{F_\mathrm{SS}}\right) \tag{2.66}$$

wobei σ_2 der Steigungskoeffizienten der viskosen Reibung ist [Quelle aus Mahl ???]. Jedoch wird in [**Dupont.2002**] gezeigt, dass dieses Modell kein elasto-plastisches Presliding abbilden kann. Daher führt jede nichtkonstante Reibkraft zu einem sogenannten plastischen Presliding von z wodurch es besonders bei periodischen Kräften zu einem physikalisch nicht existierenden Drift kommt. Das Elasto-Plastische Modell erweitert das LuGre-Modell um einen elastischen Bereich für kleine z. Nach [**Dupont.2000**] ergibt sich die Dynamik der Auslenkung zu

$$\dot{z} = \Delta\omega \left(1 - \alpha(z, \Delta\omega)\frac{\sigma_0\, z}{F_\mathrm{SS}}\right)^i, \quad i \in \mathbb{Z} \tag{2.67}$$

wobei $i = 1$ gesetzt wird und die Funktion $\alpha(z, \Delta\omega)$ ein elastische Bereich für kleine z erzeugt.

Aufgrund der erläuterten Vorteile wird das Elasto-Plastische-Modell für das Simulationsmodell verwendet. Mit dem mittleren Radius r_m der Kupplungs- und Bremsscheiben und der Anzahl der Scheiben pro Schaltelement N_disc lassen sich die oben beschrieben Kräfte in Momente umrechnen. Letztendlich ergibt sich das an der Welle angreifende Reibmoment des Schaltelements k zu

$$T_{\mathrm{Cl},k} = \sigma_0\, z + \sigma_1\, \dot{z} + \sigma_2 \Delta\omega \tag{2.68}$$

mit

$$\dot{z} = \Delta\omega \left(1 - \alpha \frac{\sigma_0\, z}{T_\mathrm{Cl,ss}}\right) \tag{2.69}$$

$$T_\mathrm{Cl,ss} = 2\, N_{\mathrm{Disc},k}\, r_{\mathrm{m},k}\, F_\mathrm{Stribeck}. \tag{2.70}$$

Die Reibwerte μ_S und μ_C werden aus Kennfeldern in Abhängigkeit der des Drucks an den Scheiben p_N, der Öltemperatur T_Oil und $\Delta\omega$ gewonnen. Die Normalkraft F_N ergibt sich aus p_N und der Fläche der Scheiben A_Disc und wird vorgegeben.

Kapitel 3

Sensitivitätsanalyse

In diesem Kapitel wird das in Kapitel [**ch:ch3**] hergeleitete lineare Modell des Antriebsstrangs auf die Sensitivität verschiedener Parameter und Eingänge untersucht. Damit soll die Relevanz für eine Parameter- und Eingangsschätzung im folgenden Kapitel belegt und unterstrichen werden. Eine mögliche Definition für eine Sensitivitätsanalyse ist die folgende: *The study of how uncertainty in the output of a model (numerical or otherwise) can be apportioned to different sources of uncertainty in the model input* [**Saltelli.2004**]. Für die Analyse gibt es verschiedene Methoden. Dabei ist die OAT(one-at-a-time)-Methode wohl die einfachste. Dabei wird pro Simulationsdurchlauf lediglich eine Eingangsgröße geändert während alle anderen auf den nominal Werten gehalten werden. Die Methode liefert aber nur eine sehr beschränkte Aussage über den gesamten Eingangsraum. Jedoch kann sie für die Abschätzung einer ersten Untergruppe an relevanten Eingängen hilfreich sein.

Die in der Literatur am häufigsten diskutierten Ansätze basieren auf partiellen Ableitungen der Art $\partial y_i / \partial x_i$ wobei y ein beliebiger Ausgang und x_i ein beliebiger Eingang des Systems ist. Ein Eingang kann hierbei auch ein variierender Parameter sein. Dieses Vorgehen wird vor allem bei relativ einfachen, mathematisch wohlbestimmten und stetigen Modellen verwendet. Der Vorteil dabei ist, dass die Sensitvitätsfunktionen sobald sie einmal berechnet sind leicht an Veränderungen anpassbar sind und auch für ähnliche Systeme verwendet werden können [**Karnavas.1993**]. Jedoch werden die partiellen Ableitung immer in einem bestimmen Arbeitspunkt berechnet d.h. die Aussagen der Sensitvitätsfunktionen gelten für nichtlineare Systeme nur lokal um diesen den Arbeitspunkt. Des weiteren ist es oft sehr schwer oder gar unmöglich die benötigten Ableitungen für komplexe Modelle zu berechnen.

Eine Alternative zur Berechnung der partiellen Ableitungen sind globale Methoden. Hierbei werden die Modelleingänge stochstisch varriert, woraus sich nach vielen Simulationen eine Strichprobe für die Modellausgänge ergibt. Dieses Methode der mehrfachen Simulation wird auch Monte-Carlo-Methode genannt. Wie der Name schon sagt ist der grundlegende Vorteil dabei, dass durch eine genügend große Stichprobe eine globale Aussage zur Sensitivität gegeben werden kann. Des weiteren erlaubt die Methode auch Aussagen über die verkoppelte Wirkung von Eingangsänderungen ohne spezielles Vorwissen über die Struktur des Modells. Der entscheidende Nachteil liegt je nach Stichprobengröße und Komplexität des Modells in der Rechenzeit.

Aufgrund des linearen und stetigen Charakters von (2.57) werden für diese Arbeit die partiellen Ableitungen für die Sensitivitätsanalyse verwendet. Hierfür wird zuerst ein idealer Schaltvorgang beschrieben um die Sensitivitätsfunktionen in verschieden Schaltphasen auswerten zukönnen. Des weiteren wird mit der Berechnung der Fisher-Informationsmatrix eine Abschätzung für die erreichbare Genauigkeit der Schätzungen geliefert.

3.1 Beschreibung eines Gangwechsels

Bei einem Gangwechsel wird durch die Betätigung von Schaltelementen die Übersetzung des Getriebes geändert. Dies soll zum einen in jedem Fall möglichst ohne für den Fahrer spürbare unerwünschte Beschleunigungen am Getriebeabtrieb passieren. Zum anderen soll der Gangwechsel aber auch so schnell wie möglich und ohne Momentenunterbrechung vollzogen werden. Es besteht also eine Zielkonflikt zwischen den Komfortansprüchen des Fahrers und der Dauer eines Schaltvorgangs. Grundsätzlich wird zwischen vier verschieden Schaltvorgängen unterschieden. Bei dem in dieser Arbeit betrachteten Getriebe geschieht ein Gangwechsel mittels der Schließung und der simultanen Öffnung einer Bremse bzw. Kupplung. In der

3.2 Anwendung der Paramater- und Eingangssensitivitätsanalyse

3.3 Fisher-Informationsmatrix

Kapitel 4

Beobachterentwurf

4.1 Kalman-Filter

4.2 Extented Kalman-Filter

4.3 Unknown Input Observer

4.4 Extended Unknown Input Observers

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung und Ausblick werden hier beschrieben.

Anhang A

Anhang

Im Anhang werden Ergebnisse aufgeführt, die zwar im Kontext der Arbeit wesentlich, jedoch nicht für das Verständnis der Arbeit notwendig sind. Beispielsweise sind dies detailliertere Messergebnisse, Herleitungen oder Datenblätter.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Erklärung des Autors

der Masterarbeit mit dem Titel

Schätzverfahren für adaptive Regelung von Hybridgetrieben

Hiermit versichere ich,

1. dass ich meine Arbeit bzw. bei einer Gruppenarbeit den entsprechend gekennzeichneten Anteil der Arbeit selbständig verfasst habe,
2. dass ich keine anderen als die angegebenen Quellen benutzt und alle wörtlich oder sinngemäß aus anderen Werken übernommenen Aussagen als solche gekennzeichnet habe,
3. dass die eingereichte Arbeit weder vollständig noch in wesentlichen Teilen Gegenstand eines anderen Prüfungsverfahrens gewesen ist,
4. dass ich die Arbeit weder vollständig noch in Teilen bereits veröffentlicht habe und
5. dass das elektronische Exemplar mit den anderen Exemplaren übereinstimmt.

Stuttgart, den 30.09.2018

Koray Karci