Kacper Korta,

21.03.2023

Laboratorium 03

Interpolacja

1. Treść zadań

Zadania

1. Dane są trzy węzły interpolacji (-2.9,1), (0,1.5), (2.3,3.9), proszę obliczyć wielomian interpolacyjny 2-go stopnia, wykorzystując:

   a) jednomiany

   b) wielomiany Lagrange’a

   c) wielomiany wg wzoru Newton’a

   Pokazać że trzy reprezentacje dają ten sam wielomian

2. Wyrazić następujący wielomian metodą Hornera: p(t) = 3t^3 – 7t^2 + 5t – 4

3. Ile mnożeń trzeba wykonać do ewaluacji wielomianu p(t) stopnia n-1 w danym punkcie t jeżeli wybieramy jako reprezentacje:

   a) jednomiany

   b) wielomiany Lagrange’a

   c) wielomiany Newtona

Zadania domowe

1. (a) Obliczyć wielomian interpolacyjny dla danych (0.5,5.5), (1,14.5), (1.5,32.5), (2,62.5) przy pomocy jednomianów

   (b) obliczyć wielomian interpolacyjny Lagrange’a dla tych samych danych i pokazać, że wielomian będzie ten sam co w (a)

   (c) obliczyć wielomian interpolacyjny Newtona dla tych samych danych korzystając z metody używającej trójkąta różnic i metody różnic skończonych i pokazać, że każda metoda daje ten sam wynik

2. Dowieść, że wzór używający różnic skończonych yi= f [x1, x2, ..., xj] rzeczywiście daje współczynnik j-tej funkcji

   bazowej w interpolującym wielomianie Newtona

3. Wykonać interpolację funkcji f(x) = |sin(x)| w przedziale [-4,4] przy użyciu wielomianów Lagrange'a 2-go, 5-go oraz 10-go stopnia, dla równoodległych węzłów interpolacji. Narysować wykres na papierze w kratkę oraz go zinterpretować

2. Rozwiązania zadań laboratoryjnych

Zadanie 1.

a)

Korzystając z danych otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a_0 - (2.9)a_1 + (-2.9)^2 a_2 = 1 \\ a_0 + 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 = 1.5 \\ a_0 + (2.3)a_1 + (2.3)^2 a_2 = 3.9 \end{cases}$$

Rozwiązując układ równań otrzymujemy rozwiązania:

$a_0 = 1.5, a_1 = 0.6582, a_2 = 0.167512$

Zatem wielomian jest postaci:

$W(x) = 0.167512x^2 + 0.6582x + 1.5$

b)

Podstawiając do wzoru punkty otrzymujemy:

$$W(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2 = \frac{(x-0)(x-2.3)}{(-2.9-0)(-2.9-2.3)}1 + \frac{(x+2.9)(x-2.3)}{(0+2.9)(0-2.3)}1.5 + \frac{(x+2.9)(x-0)}{(2.3+2.9)(2.3-0)}3.9 = 0.167512x^2 + 0.6582x + 1.5$$

c)

x_i	$f(x_i)$	Iloraz rzędu I	Iloraz rzędu II
-2.9	1		
		$f(x_0;x_1) = \frac{1.5-1}{0+2.9} = 0.17241$	
0	1.5		$f(x_0;x_1;x_2) = \frac{1.04378-0.17241}{2.3+2.9} = 0.16757$
		$f(x_1;x_2) = \frac{3.9-1.5}{2.3-0} = 1.04378$	
2.3	3.9		

Z powyższych obliczeń otrzymujemy równanie:

$$W(x) = 1 + 0.17241(x+2.9) + 0.16757(x+2.9)(x-0) = 0.167512x^2 + 0.6582x + 1.5$$

Wniosek: Każda z metod zwraca nam to samo równanie

Zadanie 2.

Dokonując przekształceń otrzymujemy:

$p(t) = 3t^2 + 7t^2 + 5t - 4t = t(3t^2 + 7t + 5) - 4 = t(t(3t + 7) + 5) - 4$

Zadanie 3.

a) Do ewaluacji wielomianu p(t) stopnia n – 1 w danym punkcie t jeśli jako reprezentację wybraliśmy jednomiany, musimy wykonać n – 1 mnożeń.

b) Aby obliczyć wyraz L_k musimy wykonać n – 1 mnożeń. Wyrazów jest n i dodatkow każdy z wyrazów mnożymy przez rzędną zatem musimy wykonać n * (n + 1) – n =n^2 mnożeń.

c) Obliczenie p_k zajmuje k mnożeń, a k należy do zbioru <0, n-1>, zatem ilość mnożeń jaką musimy obliczyć to:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = n^2$$

3. Rozwiązania zadania domowego

Zadanie 1.

a) Korzystając z danych otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a_0 + (0.5)a_1 + (0.5)^2 a_2 + (0.5)^3 a_3 = 5.5 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 14.5 \\ a_0 + (1.5)a_1 + (1.5)^2 a_2 + (1.5)^3 a_3 = 32.5 \\ a_0 + 2a_1 + (2)^2 a_2 + (2)^3 a_3 = 62.5 \end{cases}$$

Rozwiązując układ równań otrzymujemy rozwiązania:

$a_0 = 2.5, a_1 = 2, a_2 = 6, a_3 = 4$

Zatem wielomian jest postaci:

$W(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2x + 2.5$

b)

Podstawiając do wzoru punkty otrzymujemy:

$$W(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} y_2 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3 = 4x^3 + 6x^2 + 2x + 2.5$$

c)

x_i	$f(x_i)$	Iloraz rzędu I	Iloraz rzędu II	Iloraz rzędu III
0.5	5.5			
		$f(x_0;x_1)=\frac{14.5-5.5}{1-0.5}=18$		
1	14.5		$f(x_0;x_1;x_2)=\frac{36-18}{1.5-0.5}=18$	
		$f(x_1;x_2)=\frac{32.5-14.5}{1.5-1}=36$		$f(x_0;x_1;x_2;x_3)=\frac{24-18}{2-0.5}=4$
1.5	32.5		$f(x_1;x_2;x_3)=\frac{60-36}{2-1}=24$	
		$f(x_2;x_3)=\frac{62.5-32.5}{2-1.5}=60$		
2	62.5			

Z powyższych obliczeń otrzymujemy równanie:

$$W(x)=5.5+(x-0.5)18+(x-0.5)(x-1)18+(x-0.5)(x-1)(x-1.5)4=4x^3+6x^2+2x+2.5$$

Wniosek: Każda z metod zwraca nam to samo równanie

Zadanie 2.

Interpolacyjny wielomian Newtona stopnia n ma postać:

$$W_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\ldots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

gdzie a_i to współczynniki przy kolejnych potęgach. Współczynniki a_i można obliczyć z poprzedniego za pomocą wzoru rekurencyjnego:

$$a_j=f[x_0,x_1,\ldots,x_j]-\sum_{k=0}^{j-1} f[x_0,x_1,\ldots,x_k]\prod_{i=k+1}^{j-1}(x_i-x_k)$$

Dokonując kilku przekształceń otrzymujemy:

$$a_j=f[x_0,x_1,\ldots,x_j]-\sum_{k=0}^{j-1} a_j\prod_{i=k+1}^{j-1}(x_i-x_k)$$

$$a_j=f[x_0,x_1,\ldots,x_j]-a_j\prod_{i=0}^{j-1}(x_{i+1}-x_i)$$

Gdzie wyrażenie w nawiasie to po prostu j-ta różnica skończona dla funkcji f. Zatem wzór na j-ty współczynnik a_j może być wyznaczony przy użyciu j-tej różnicy skończonej.

Zadanie 3.

a) Wielomian stopnia drugiego

Węzły: $x_0 = -4, x_1 = 0, x_2 = 4$

$$W_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2$$

Po podstawieniu otrzymujemy:

$$W_2(x) = \frac{x^2}{16}|sin4| \approx 0.0473x^2$$

b) Wielomian stopnia piątego

Węzły: $x_0 = -4, x_1 = -2.4, x_2 = -0.8, x_3 = 0.8, x_4 = 2.4, x_5 = 4$

Po uproszczeniu wzoru Lagrange'a (używając narzędzi komputerowych) otrzymujemy:

$$W_5(x) = 0.00104984x^4 - 0.0149012x^2 \ + 0.726463$$

c) Wielomian stopnia dziesiątego

Węzły:

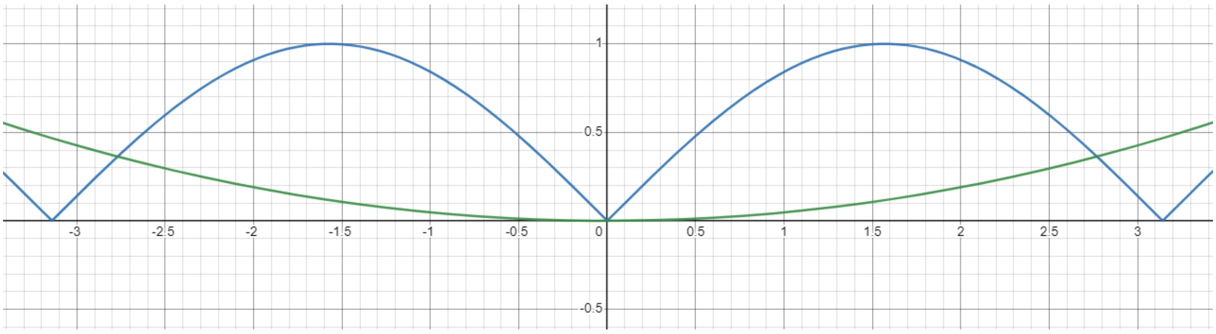
$x_0 = -4, x_1 = -3.2, x_2 = -2.4, x_3 = -1.6, x_4 = -0.8, x_5 = 0, x_6 = 0.8, x_7 = 1.6, x_8 = 2.4, x_9 = 3.2, x_{10} = 4$

Po uproszczeniu wzoru Lagrange'a (używając narzędzi komputerowych) otrzymujemy:

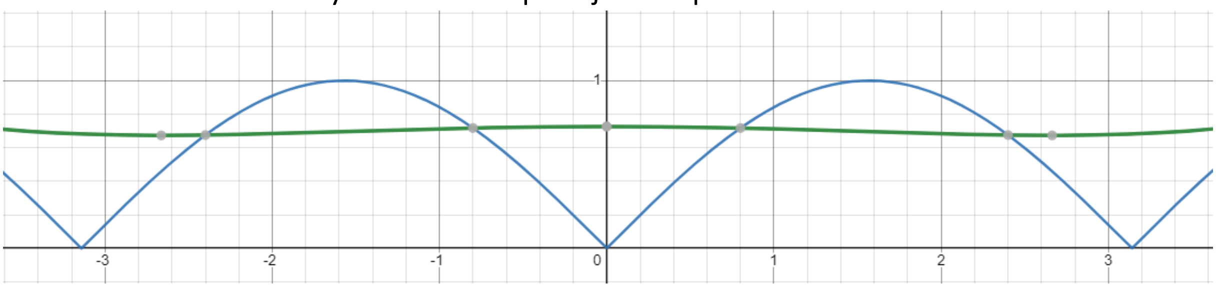
$$W_{10}(x) \approx 0.000314469x^{10} - 0.0112205^8 + 0.139228x^6 - 0.736444x^4 + 1.53805x^2$$

Wykresy przy użyciu programu desmos:

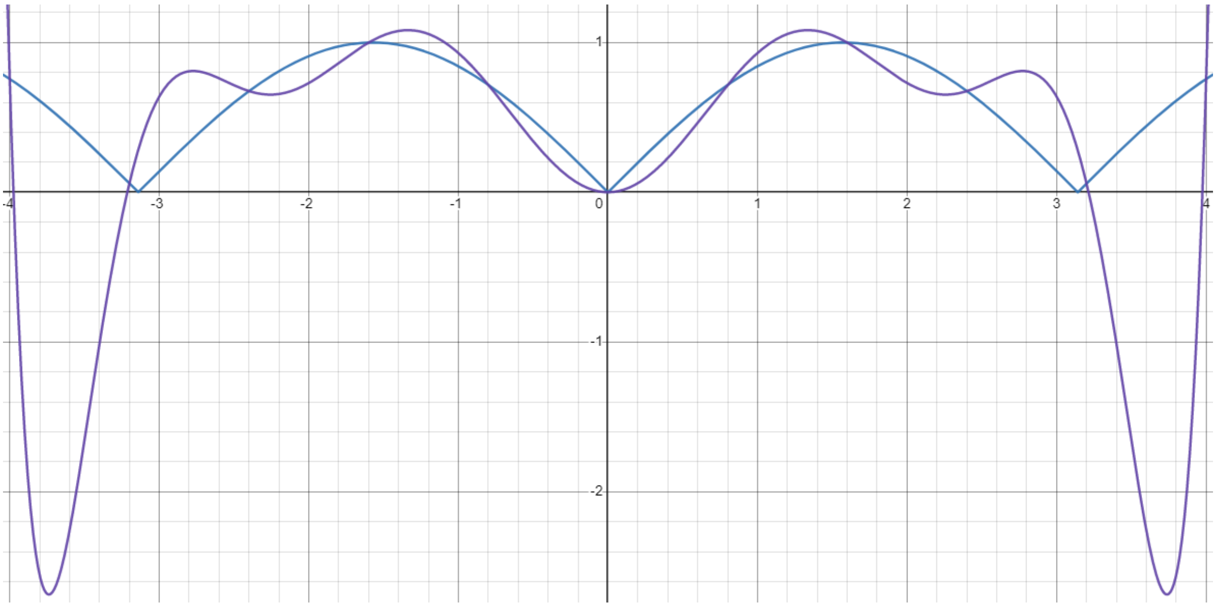
Kolorem niebieskim funkcja |sinx| a zielonym wykres wielomianów interpolujących



Rysunek 1: Interpolacja dla 2 punktów



Rysunek 1: Interpolacja dla 2 punktów



Rysunek 1: Interpolacja dla 2 punktów

Wniosek: Im więcej punktów tym bardziej wykres interpolacji przypomina oryginalny wykres

4. Bibliografia

https://home.agh.edu.pl/~byrska/src/MN_2020/3_Interpolacja.pdf
https://home.agh.edu.pl/~funika/mownit/lab3/int_fun.pdf
https://www.wolframalpha.com/
https://www.desmos.com/calculator?lang=pl
wykład