Kacper Korta,

28.03.2023

Laboratorium 04

Aproksymacja

1. Treść zadań

Zadania

1. Aproksymować funkcję f(x) = 1+ x3 w przedziale [0,1] wielomianem pierwszego stopnia metodą średniokwadratową ciągłą dla w(x)=1.
2. Aproksymować funkcję f(x) = 1+ x3 w przedziale [0,1] wielomianem stopnia drugiego przy użyciu wielomianów Legendre'a.

Zadania domowe

1. Napisz procedurę realizującą metodę aproksymacji punktowej za pomocą wielomianów drugiego stopnia

2. Oblicz wartości funkcji f(x)= 1-x2 w dyskretnych punktach xi: xi=-1+ 0.5*i, i=0,1..4, a następnie aproksymuj funkcję wielomianami Grama stopnia trzeciego

2. Rozwiązania zadań laboratoryjnych

1. Mamy:

$$f(x) = 1 + x^3, w(x) = 1, \varphi_0(x) = x^0 = 1, \varphi_1(x) = x^1 = x$$

Następnie obliczamy całki:

$$\int_0^1 w(x)\varphi_0(x)\varphi_0(x)dx = \int_0^1 dx = 1$$
$$\int_0^1 w(x)\varphi_0(x)\varphi_1(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$$
$$\int_0^1 w(x)\varphi_1(x)\varphi_1(x)dx = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$$
$$\int_0^1 w(x)f(x)\varphi_0(x)dx = \int_0^1 (1 + x^3)dx = \frac{5}{4}$$

Z poprzednich obliczeń otrzymujemy układ równań:

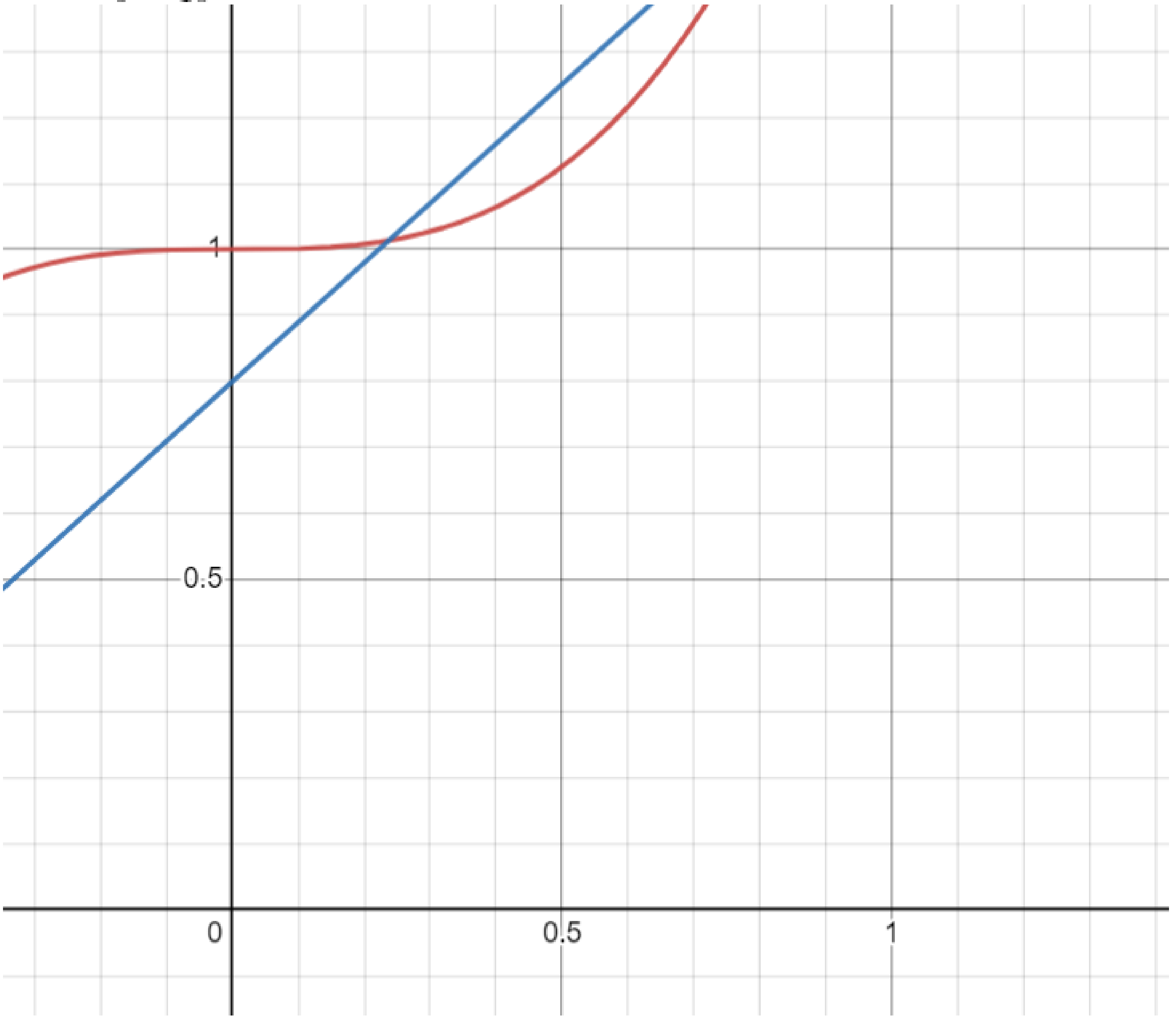
$$\begin{cases} c_0 + \frac{c_1}{2} = \frac{5}{4} \\ \frac{c_0}{2} + \frac{c_1}{3} = \frac{7}{10} \end{cases}$$

Zatem rozwiązaniem układu równań jest:

$$\begin{cases} c_0 = \frac{4}{5} \\ c_1 = \frac{9}{10} \end{cases}$$

A postać wielomianu aproksymującego przyjmuję postać:

$$q(x) = \frac{4}{5} + \frac{9}{10}x$$



Kolorem czerwonym zaznaczona jest f(x) = 1 + x^3 zaś niebieskim nasze q(x)

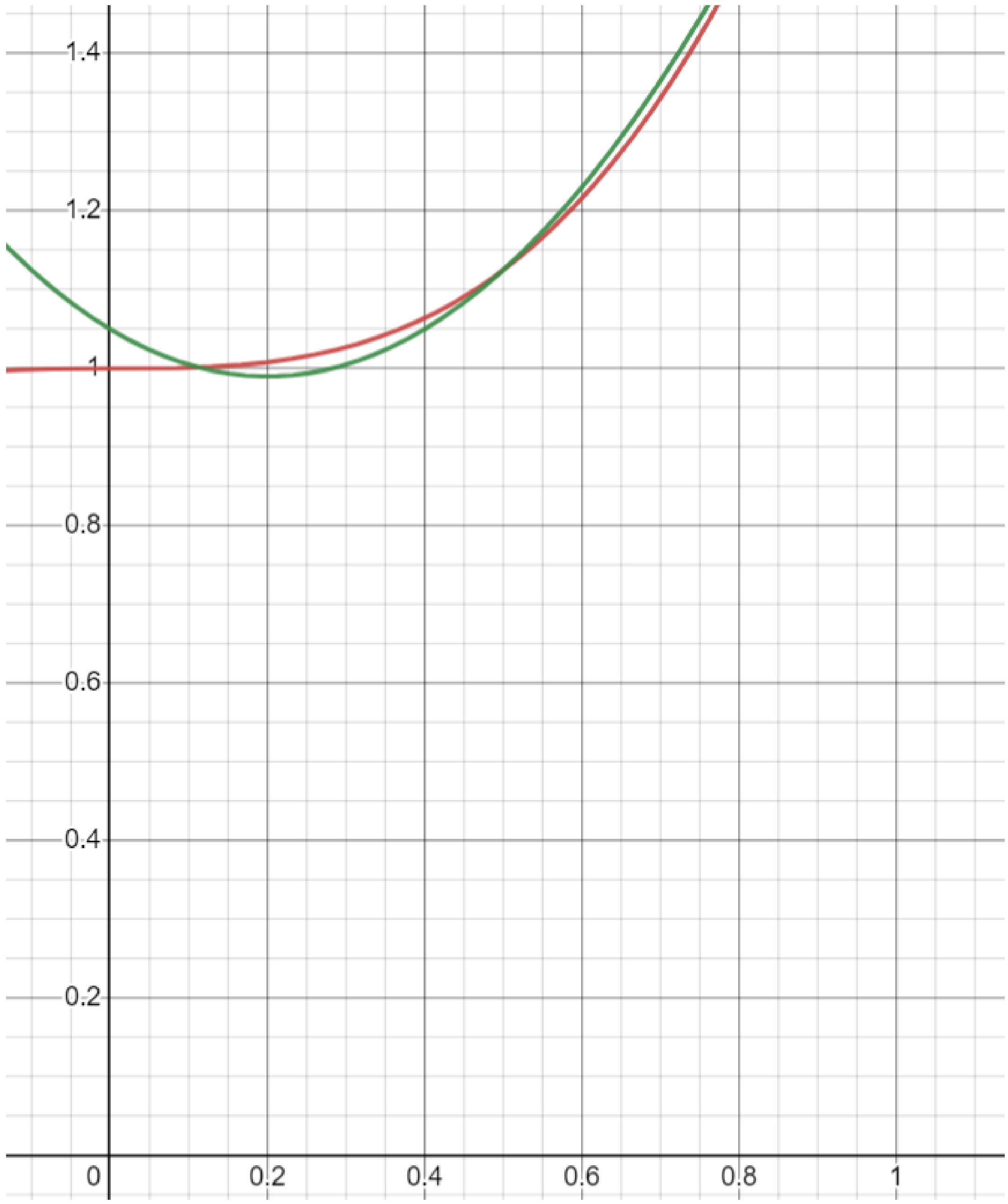
Wniosek: Możemy zauważyć, że funkcja nie jest dobrze przybliżona na naszym przedziale.

2. Aproksymacja przy użyciu wielomianów Legendre'a.
   Wielomian drugiego stopnia przy użyciu wielomianów Legendre'a dla wagi p(x)=1
   Baza ma postać:
   $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2} \cdot (3x^2 - 1)$
   Zaś postać wielomianu to:
   $q(x) = c_0 + c_1 \cdot x + \frac{c_2}{2} \cdot (3x^2 - 1)$
   Wielomiany nie są ortogonalne na zadanym przedziale, zatem:
   $$\int_0^1 P_0(x) \cdot P_0(x)dx = \int_0^1 1dx = 1$$
   $$\int_0^1 P_0(x) \cdot P_1(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 P_0(x) \cdot P_2(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(3x^2 - 1) dx = 0$$
$$\int_0^1 P_1(x) \cdot P_1(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$
$$\int_0^1 P_1(x) \cdot P_2(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x(3x^2 - 1) = \frac{1}{8}$$
$$\int_0^1 P_2(x) \cdot P_2(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{4}(3x^2 - 1)^2 = \frac{1}{5}$$
$$\int_0^1 P_0(x) \cdot (1 + x^3) dx = \int_0^1 1 + x^3 dx = \frac{5}{4}$$
$$\int_0^1 P_1(x) \cdot (1 + x^3) dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(3x^2 - 1)(1 + x^3) dx = \frac{1}{8}$$

Z powyższych obliczeń otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} c_0 + \frac{c_1}{2} = \frac{5}{4} \\ \frac{c_0}{2} + \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{8} = \frac{7}{10} \\ \frac{c_1}{8} + \frac{c_2}{5} = \frac{1}{8} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_0 = \frac{31}{20} \\ c_1 = -\frac{3}{5} \\ c_2 = 1 \end{cases}$$
$$q(x) = \frac{31}{20} - \frac{3}{5}x + \frac{1}{2}(3x^2 - 1) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{21}{20}$$



Kolorem czerwonym zaznaczona jest $f(x) = 1 + x^3$ zaś niebieskim nasze $q(x)$

Wniosek: Wykres funkcji $f(x)$ aproksymowanej za pomocą wielomianów Legendre'a

3. Rozwiązania zadania domowego

1.

a) Załaduj dane o znanych punktach x_i i wartościach funkcji aproksymowanej $f(x_i)$

b) Rozwiąż równanie zapisane w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{1} 1 & \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_1^2 \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_1^2 & \sum_{i=0}^{n} x_1^3 \\ \sum_{i=0}^{n} x_1^2 & \sum_{i=0}^{n} x_1^3 & \sum_{i=0}^{n} x_1^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \\ \sum_{i=0}^{n} x_i f(x_i) \\ \sum_{i=0}^{n} x_i^2 f(x_i) \end{bmatrix}$$

c) Naszym rozwiązaniem jest $g(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0$

2.

i	0	1	2	3	4
x_i	-1	-0.5	0	0.5	1
f(x)	0	¾	1	¾	0

Początkowe wielomiany Grama dla n = 3:

$F_{0,4} = 1$

$F_{1,4} = -x$

$F_{2,4} = 2x^2 - 1$

$F_{3,4} = -\frac{20}{3}x^3 + \frac{17}{3}x$

Następnie stosujemy podstawienie

$q = \frac{x - x_0}{h} = 2(x+1)$

Rozwiązując układ równań otrzymujemy

$$\begin{cases} c_0 = \frac{1}{2} \\ c_1 = 0 \\ c_2 = -\frac{1}{2} \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

Podstawiając do wzoru na funkcję aproksymującą otrzymujemy:

$$g(x) = \sum_{i=0}^{4} c_i F_{i,4} = 1 - x^2$$

Wnioski: Aproksymacja funkcji wielomianami wyższego stopnia może w rezultacie zwrócić ten sam wynik.

4. Bibliografia

https://www.mimuw.edu.pl/~kmoszyns/cc.pdf

https://home.agh.edu.pl/~funika/mownit/lab4/wielomianygrama.pdf

https://www.desmos.com/calculator?lang=pl

Wykład