Kacper Korta,

04.04.2023

Laboratorium 05

Całkowanie numeryczne

1. Treść zadań

Zadania

1. Obliczyć I = 0∫1 1/(1+x) dx wg wzoru prostokątów, trapezów i wzoru Simpsona (zwykłego i złożonego n=3, 5). Porównać wyniki i błędy.
2. Obliczyć całkę I = -1∫1 1/(1+x2) dx korzystając z wielomianów ortogonalnych (np. Legendre'a) dla n=8.

Zadanie domowe

1 Obliczyć całkę 0∫1 1/(1+x2) dx korzystając ze wzoru prostokątów, trapezów i wzoru Simpsona dla h=0.10

2 Metodą Gaussa obliczyć następującą całkę 0∫1 1/(x+3) dx dla n=4. Oszacować resztę kwadratury

2. Rozwiązanie zadań laboratoryjnych

Zadanie 1.

$$S(f) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = ln2 \approx 0.69314718$$

a) Korzystajc z metody prostokątów wartość funkcji ma postać:

$$S(f) = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + \frac{1}{2}\cdot\frac{b-a}{n})$$

Jako, iż nasze a = 0 i b = 1 otrzymujemy wzór:

$$S(f) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + \frac{1}{2n})$$

Korzystając z powyższego wzoru obliczamy wartości dla n = 3 oraz n = 5

Dla n = 3:

$S(f) = 0.68975468975468 97$

$\Delta = 0.00339249080525561$

Dla n = 5:

$S(f) = 0.6919078857159353$

$\Delta = 0.001239294844009975$

b) Metoda prostokątów:

Nasza funkcja jest postaci:

$$S(f) = \int_a^b f(x)dx = \frac{1(b-a)}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

W naszym przypadku a = 0, b = 1 stąd otrzymujemy wyniki:

Dla n = 3

$S(f) = 0.7$

$\Delta = 0.006852819440054669$

Dla n = 5:

$S(f) = 0.6956349206349206$

$\Delta = 0.006852819440054669$

c) Metoda Simpsona (parabol)

Nasza funkcja jest postaci:

$$S(f) = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}[f(x_{2*i-2}) + 4f(x_{2*i-1}) + f(x_{2*i})]$$

W naszym przypadku a = 0, b = 1 zaś h = (b-a)/n, a n = n + 1, ponieważ n musi być liczbą parzystą. Stąd otrzymujemy wyniki:

Dla n = 3

$S(f) = 0.6932539682539682$

$\Delta = 0.00010678769402294\!73$

Dla n = 5:

$S(f) = 0.6931697931697932$

$\Delta = 0.000022612609847927345$

Wnioski: Wyniki najbardziej zbliżone daje nam metoda Simpsona. W pozostałych metodach oszacowanie jest nieco gorsze, ale widać, że im większe n tym lepszy wynik.

Zadanie 2.

Obliczając dokładną wartość całki otrzymujemy:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = arctan1 - arctan(-1) = pi/2 \approx 1.570796326794$$

Dla N = 8 aproksymujemy wartość całki jako:

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \sum_{k=1}^{8} w_k f(t_k)$$

Podstawiając otrzymujemy:

k	w_k	t_k
1	0.3626837833783620	-0.1834346424956498
2	0.3626837833783620	0.1834346424956498
3	0.3137066458778873	-0.5255324099163290
4	0.3137066458778873	0.5255324099163290
5	0.2223810344533745	-0.7966664774136267
6	0.2223810344533745	0.7966664774136267
7	0.1012285362903763	-0.9602898564975363
8	0.1012285362903763	0.9602898564975363

Korzystając z tabelki oraz podstawiając do wzoru otrzymujemy że:

$S(f) = 1.5707944125460624$

Oraz błąd bezwzględny: 0.00000191424883.

3. Rozwiązanie zadania domowego

Zadanie 1.

Wartość całki wynosi:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = arctan1 = \frac{pi}{4} \approx 0.785398163397$$

a) Metoda prostokątów:
   $S(f) = 0.7856064962502743$
   $\Delta = 0.00020833285286065 28$
b) Metoda trapezów:
   $S(f) = 0.7849814972267897$
   $\Delta = 0.00041666617065860834$
c) Metoda Simpsona
   $S(f) = 0.7854981534848038$
   $\Delta = 0.0000000000991264448302$

Wnioski: Tak jak we wcześniejszym zadaniu największą dokładność otrzymaliśmy dla metody Simpsona. Dodatkowo mimo małej liczby przedziałów wynik różni się o niedużą wartość.

Zadanie 2.

Obliczamy dokładną wartość całki:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{x+3}dx = ln(4) - ln(3) \approx 0.28768207245178$$

Dokonując przekształcenia przedziału z (0, 1) na (-1, 1) otrzymujemy wzór:

$$\int_0^1 f(t) \approx \frac{1-0}{2}\int_{-1}^1 g(x)dx$$

$$g(x) = (f(\frac{1-0}{2}x + \frac{1+0}{2})) = f(\frac{x}{2} + \frac{1}{2})$$

$$S(f) = \sum_{k=1}^{4} w_k g(t_k)$$

Dla k = 1

W_k= 0.6521451548625461

T_k = -0.3399810435848563

Dla k = 2

W_k= 0.6521451548625461

T_k = 0.3399810435848563

Dla k = 3

W_k= 0.3478548451374538

T_k = -0.8611363115940526

Dla k = 4

W_k= 0.3478548451374538

T_k = 0.8611363115940526

Po wstawieniu wartości otrzymujemy S(f)=0.2876820721506314,

A błąd bezwzględny: 0.000000000301149327697

Wnioski: dla n=4 błąd naszego przybliżenia jest naprawdę mały

4. Bibliografia

https://www.wolframalpha.com/calculators/integral-calculator/
https://home.agh.edu.pl/~funika/mownit/lab5/calkowanie.pdf
https://home.agh.edu.pl/~funika/mownit/lab5/what_is_gauss.html
Wykład