Kacper Korta,

18.04.2023

Laboratorium 06

Całkowanie numeryczne II

1. Treść zadań

Obliczyć przybliżoną wartość całki:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(x) dx$$

a) przy pomocy złożonych kwadratur (prostokątów, trapezów, Simpsona),

b) przy pomocy całkowania adaptacyjnego,

c) przy pomocy kwadratury Gaussa-Hermite'a, obliczając wartości węzłów i wag.

Porównać wydajność dla zadanej dokładności.

2. Rozwiązania

Dokładna wartość liczonej całki wynosi:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} cosx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{e^{\frac{1}{4}}} \approx 1.380388447043143$$

a) Kwadratury złożone

Zauważmy że funkcja podcałkowa jest funkcją parzystą, zatem wynik możemy zapisać w postaci:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} cosx dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} cosx dx$$

Zakładając, że nasz górny przedział całkowania wynosi 10^5, ponieważ wartości naszej funkcji dla większych x są bardzo małe. W naszym przypadku, a = 0 a b = 10^5.

1. Metoda prostokątów.

$$S(f) = 2\int_{a}^{b} f(x)dx = 2\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + \frac{b-a}{2n})$$

Podstawiając otrzymujemy:

$$S(f) = \frac{2 \cdot 10^5}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + \frac{1}{2n})$$

n	S(f)	Błąd bezwzględny
10^5	1.378733160427268	0.0016552866158749957
10^6	1.3803884470431436	6.661338147750939e-16
10^7	1.380388447043143	0

2. Metoda trapezów.

$$S(f) = 2\int_a^b f(x)dx \approx 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

Podstawiając otrzymujemy:

$$S(f) = \frac{10^5}{n} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

n	S(f)	Błąd bezwzględny
10^5	1.3820437336590288	0.0016552866158858759
10^6	1.3803884470431431	2.220446049250313-16
10^7	1.3803884470431436	6.661338147750939e-16

3. Metoda Simpsona.

$$S(f) = 2\int_a^b f(x)dx = \frac{2h}{3} \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} [f(x_{2i-2} + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i}))]$$

n	S(f)	Błąd bezwzględny
10^5	1.1862394994844354	0.19414894755870749
10^6	1.3803898274315898	1.3803884468810423e-06
10^7	1.3803885850819881	1.3803884524321575e-07

b) Całkowanie adaptacyjne

Algorytm postępowania metody adaptacyjnej:

1. Określ przedział całkowania [a, b], a także zadana dokładność całkowania epsilon.
2. Podziel przedział [a, b] na równe podprzedziały o długości h = (b - a)/n, gdzie n to liczba podprzedziałów.
3. Oblicz wartości całki na końcach przedziałów oraz w środkach każdego z podprzedziałów. Można do tego celu wykorzystać metodę prostokątów, trapezów lub Simpsona.
4. Porównaj wyniki otrzymane dla każdego podprzedziału i określ, które z nich mogą wymagać dalszego podzielenia. Wymagają go te podprzedziały, dla których różnica

pomiędzy wynikami otrzymanymi dla końców i środka podprzedziału jest większa niż epsilon.

5. Podziel wybrane podprzedziały na dwa równe podprzedziały i oblicz wartości całki dla każdego z nich.
6. Powtórz kroki 4 i 5 aż do momentu, gdy dla każdego podprzedziału różnica pomiędzy wynikami otrzymanymi dla końców i środka podprzedziału będzie mniejsza niż epsilon.
7. Zsumuj wartości całki otrzymane dla każdego z podprzedziałów, aby otrzymać przybliżona wartość całki dla przedziału [a, b].

tolerancja	S(f)	Błąd bezwzględny
10^5	1.3803884470269756	1.6167289729196455e-11
10^6	1.3803884470431416	1.3322676295501878e-15
10^7	1.380388447043143	0

c) Kwadratura Gaussa-Hermite'a

Korzystamy ze wzoru:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-x^2} \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} w_i cos(x_i)$$

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

Gdzie wzór rekurencyjny to:

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x)$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

Obliczamy węzły dla n = 4:

X_1=-1.6507

X_2=-0.5246

X_3=-0.5246

X_4=-1.6507

Korzystając ze wzoru liczymy wagi:

$$w_i = \frac{2^{n-1} \cdot n! \cdot \sqrt{\pi}}{n^2 \cdot [H_{n-1}(x_i)]^2}$$

W_1=w_4=0.0813128354

W_2=w_3=0.8048140900

S(f)	Błąd bezwzględny
1.38036493557849460	2.35112581969954e-05

3. Bibliografia

Wykład

https://www.wolframalpha.com/

https://en.wikipedia.org/wiki/Gauss%E2%80%93Hermite_quadrature