Αξιωματική θεμελίωση έργου και ενέργειας

Κώστας Κούδας

18 Μαρτίου 2025

Δίνεται η ασκημούλα συναρτησιακή εξίσωση:

$$f(x+y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f(x) + f(y) - 2f\left(\frac{x-y}{2}\right), \tag{1}$$

όπου $x, y \in \mathbb{R}$.

(α΄) Ν.δ.ο. $f(qx) = q^2 f(x)$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$ και $x \in \mathbb{R}$.

(β΄) Ν.δ.ο.:

$$f(x+y+z) + f(x) + f(y) + f(z) = f(x+y) + f(x+z) + f(y+z)$$

για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(γ΄) Έστω η συνάρτηση:

$$p(x,y) = \frac{f(x+y) - f(x) - f(y)}{2}.$$

Να δειχθεί ότι:

$$p(x_1 + x_2, y) = p(x_1, y) + p(x_2, y) \text{ και } p(x, y_1 + y_2) = p(x, y_1) + p(x, y_2)$$

για κάθε $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

(δ΄) Να λυθεί η συναρτησιακή εξίσωση (1).

1 Έργο ανεξάρτητο του χρόνου

Ας υποθέσουμε ότι το έργο μιας δύναμης εξαρτάται από τον χρόνο που αυτή ασκείται.

Ας μελετήσουμε το έργο του βάρους μιας πλαστελίνης όταν πέφτει από κάποιο ύψος. Έστω ότι αυτό είναι W. Μόλις πέσει στο έδαφος το έργο του βάρους θα αποδοθεί ως θερμική ενέργεια Q.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι κινούμαστε προς τα κάτω με κάποια σταθερή ταχύτητα v ως προς τη Γη. Όταν η πλαστελίνη πέσει στο έδαφος, το βάρος θα έχει παράγει πάλι έργο W, αφού υποθέσαμε ότι εξαρτάται μόνο από τη δύναμη που ασκείται στο σώμα (ίδια με πριν) και το χρόνο που αυτή ασκείται (ίδιος με πριν). Όμως η σύγκρουση θα παράγει την ίδια θερμική ενέργεια Q κι επίσης τότε η πλαστελίνη θα έχει κάποια κινητική ενέργεια K (αφού αυτό κινείται ως προς εμάς).

Όμως πριν είδαμε ότι το W μετασχηματίζεται ολόκληρο σε θερμική ενέργεια. Οπότε δημιουργήθηκε ενέργεια από το 0, ὅπερ ἄτοπον.

2 Κινητική ενέργεια τετραγωνική

Αν ρίξουμε ένα κομμάτι πλαστελίνης μάζας $m = m_1 + m_2$ στο πάτωμα, θα έχει θερμική ενέργεια $K(m,v) = K(m_1 + m_2, v)$. Αν ρίχναμε την πλαστελίνη χωρισμένη σε δύο κομμάτια μάζας m_1 και m_2, τότε το ένα μέρος θα είχε θερμική ενέργεια $K(m_1, v)$ και το άλλο $K(m_2, v)$. Προφανώς, θα ισχύει:

$$K(m_1 + m_2, v) = K(m_1, v) + K(m_2, v),$$

όπερ σημαίνει ότι η συνάρτηση:

$$f_v(m) = K(m, v)$$

θα είναι γραμμική, αν υποτεθεί συνεχής, αφού επαληθεύει την προσθετική συναρτησιακή εξίσωση του Cauchy.

Έστωσαν δύο ίδια κομμάτια πλαστελίνης που κατευθύνονται το ένα προς το άλλο με ταχύτητες v_1 και v_2 με $v_1 > v_2$.

Αυτά συσσωματώνονται και αποκτούν ταχύτητα $\frac{v_1 - v_2}{2}$.

Η ενέργεια που είχε αρχικά το σύστημα ήταν οι δύο κινητικές ενέργειες:

$$K(m, v_1) + K(m, v_2)$$

και μετά η εναπομείνασα κινητική ενέργεια μαζί με τη θερμική που προέκυψε από τη συσσωμάτωση:

$$K\left(2m, \frac{v_1 - v_2}{2}\right) + Q.$$

Επομένως:

$$Q = K(m, v_1) + K(m, v_2) - K\left(2m, \frac{v_1 - v_2}{2}\right).$$

Παρακολουθώντας το σύστημα με την ταχύτητα v_1 η αρχική ενέργεια φαίνεται να είναι η:

$$0 + K(m, v_1 + v_2),$$

αφού το ένα σώμα είναι πρακτικά ακίνητο για μας και το άλλο κινείται με επιπλέον ταχύτητα.

Η τελική ενέργεια είναι:

$$K\left(2m, \frac{v_1 + v_2}{2}\right) + Q = K\left(2m, \frac{v_1 + v_2}{2}\right) + K(m, v_1) + K(m, v_2) - K\left(2m, \frac{v_1 - v_2}{2}\right).$$

Επομένως:

$$K(m, v_1 + v_2) = K\left(2m, \frac{v_1 + v_2}{2}\right) + K(m, v_1) + K(m, v_2) - K\left(2m, \frac{v_1 - v_2}{2}\right).$$

Δεδομένου ότι η K είναι γραμμική ως προς τη μάζα m, έχουμε να λύσουμε τη συναρτησιακή εξίσωση:

$$f_m(v_1 + v_2) = 2f_m\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right) + f_m(v_1) + f_m(v_2) - 2f_m\left(\frac{v_1 - v_2}{2}\right).$$

Για $v_1 = v_2 = v$ έχουμε:

$$f_m(2v) = 2f_m(v) + f_m(v) + f_m(v) - 2f_m(0) \Leftrightarrow f_m(2v) = 4f_m(v).$$

Για $v_1 = 2v$ και $v_2 = 2v$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f_m(4v) &= 2f_m(2v) + f_m(2v) + f_m(2v) - 2f_m(0) \\ &= 2 \cdot 4f_m(v) + 4f_m(v) + 4f_m(v) - 0 \\ &= 16f_m(v). \end{aligned}$$

Για $v_1 = 3v$ και $v_2 = v$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f_m(4v) &= 2f_m(2v) + f_m(3v) + f_m(v) - 2f_m(v) \Leftrightarrow \\ 16f_m(v) &= 2 \cdot 4f_m(v) + f_m(3v) + f_m(v) - 2f_m(v) \Leftrightarrow \\ & f_m(3v) = 9f_m(v). \end{aligned}$$

Επαγωγή:

Έστω ότι ισχύει για $n = 2\mu$.
Για $v_1 = 2\mu v$ και $v_2 = 2v$
Για $v_1 = 2\mu v + v$ και $v_2 = v$
Αν $n = 2\mu + v$
Για $v_1 = 2\mu v$ και $v_2 = 2v$
Άρα $f_m(nv) = n^2 f_m(v)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Επίσης:

$$f_m\left(n \cdot \frac{1}{n} \cdot v\right) = f_m(v) \text{ και } f_m\left(n \cdot \frac{1}{n} \cdot v\right) = n^2 f_m\left(\frac{1}{n} \cdot v\right),$$

άρα:

$$f_m\left(\frac{1}{n} \cdot v\right) = \frac{1}{n^2} f_m(v)$$

Επομένως:

$$f_m(qv) = q^2 f_m(v)$$

για κάθε $q \in \mathbb{Q}$.

3 Λογιστική συνάρτηση

Στην παρούσα ενότητα θα προσπαθήσουμε να φτιάξουμε μια συναρτησιακή εξίσωση που να περιγράφει τη φιλοσοφία της λογιστικής εξίσωσης και να καταλήγει στη λογιστική συνάρτηση. Θα προσπαθήσουμε να μην αρκεστούμε στη συνεχή λύση, που είναι η λογιστική συνάρτηση, ώστε να δώσουμε έναν χαρακτήρα γενίκευσης, όπως υπόσχεται το παρόν κεφάλαιο.

Έστω $f(t)$ η τιμή ενός μεγέθους τη χρονική στιγμή t. Ας εξετάσουμε τις ποσότητες:

$$f(t_1 + t_2) - f(t_1) \;\text{ και }\; f(t_1 + t_2) - f(t_2).$$

Σύμφωνα με όσα έχουμε πει, θέλουμε να υπερέχει η διαφορά $f(t_1 + t_2) - f(t_j)$ στην περίπτωση που το $f(t_j)$ είναι πιο κοντά στο σημείο καμπής ($S/2$) και να υστερεί αυτή όταν το $f(t_j)$ είναι κοντά στα σημεία 0 και S που σταθεροποιείται. Με περισσότερα λόγια, η $f(t_1 + t_2) - f(t_1)$ είναι τόσο <u>μεγαλύτερη</u> από την ποσότητα $f(t_1 + t_2) - f(t_2)$:

- όσο <u>μεγαλύτερη</u> είναι η απόσταση του $f(t_1)$ από το 0 σε σχέση με την απόσταση του $f(t_2)$ από το 0,
- όσο <u>μεγαλύτερη</u> είναι η απόσταση του $f(t_1)$ από το S σε σχέση με την απόσταση του $f(t_2)$ από το S,
- όσο <u>μικρότερη</u> είναι η απόσταση του $f(t_1)$ από το $S/2$ σε σχέση με την απόσταση του $f(t_2)$ από το $S/2$.

Σε μαθηματικό φορμαλισμό τα παραπάνω έχουν ως εξής:

$$\frac{f(t_1 + t_2) - f(t_1)}{f(t_1 + t_2) - f(t_2)} = \frac{f(t_1)}{f(t_2)} \cdot \frac{S - f(t_1)}{S - f(t_2)} \cdot \frac{f(t_2) - S/2}{f(t_1) - S/2}, \tag{2}$$

όπου $f : \mathbb{R} \to (0, S)$.

Λύνοντας ως προς $f(t_1 + t_2)$ έχουμε την (ομολογουμένως όχι και πολύ ωραία) συναρτησιακή εξίσωση:

$$f(t_1 + t_2) = \frac{S f(t_1) f(t_2)}{S^2 - S f(t_1) - S f(t_2) + 2 f(t_1) f(t_2)},$$

από την οποία συνάγουμε ότι:

$$\begin{aligned}
f(t_1+t_2)-\frac{S}{2} &= \frac{S^2\left(f(t_1)+f(t_2)-S\right)}{2\left(S^2-Sf(t_1)-Sf(t_2)+2f(t_1)f(t_2)\right)}\\
&= \frac{S^2\left(f(t_1)+f(t_2)-S\right)}{4\left(\frac{S^2}{2}-\frac{S}{2}f(t_1)-\frac{S}{2}f(t_2)+f(t_1)f(t_2)\right)}\\
&= \frac{S^2\left(f(t_1)+f(t_2)-S\right)}{4\left(\frac{S^2}{4}+\frac{S^2}{4}-\frac{S}{2}f(t_1)-\frac{S}{2}f(t_2)+f(t_1)f(t_2)\right)}\\
&= \frac{S^2\left(f(t_1)+f(t_2)-S\right)}{4\left(\frac{S^2}{4}+\left(f(t_1)-\frac{S}{2}\right)\left(f(t_2)-\frac{S}{2}\right)\right)}\\
&= \frac{\left(f(t_1)-\frac{S}{2}\right)+\left(f(t_2)-\frac{S}{2}\right)}{1+\frac{4}{S^2}\left(f(t_1)-\frac{S}{2}\right)\left(f(t_2)-\frac{S}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας τα μέλη της ισότητας που φτιάξαμε με $2/S$ και θέτοντας $g(t)=\frac{2}{S}\left(f(t)-\frac{S}{2}\right)$ έχουμε την ισότητα:

$$g(t_1+t_2)=\frac{g(t_1)+g(t_2)}{1+g(t_1)g(t_2)}.$$

Γνωρίζουμε ότι για την υπερβολική εφαπτομένη ισχύει η σχέση:

$$\tanh(x+y)=\frac{\tanh(x)+\tanh(y)}{1+\tanh(x)\tanh(y)}.$$

Επομένως, θέτοντας $x=\operatorname{arctanh}u$ και $y=\operatorname{arctanh}v$ καταλήγουμε στην ταυτότητα:

$$\operatorname{arctanh}\frac{u+v}{1+uv}=\operatorname{arctanh}u+\operatorname{arctanh}v.$$

Έτσι, καθόσον $0<f(x)<S$, θα είναι $-1<g(x)<1$, άρα και $-1<\frac{g(t_1)+g(t_2)}{1+g(t_1)g(t_2)}<1$, αφού επί παραδείγματι:

$$\frac{g(t_1)+g(t_2)}{1+g(t_1)g(t_2)}<1 \Leftrightarrow \frac{\left(g(t_1)-1\right)\left(1-g(t_2)\right)}{1+g(t_1)g(t_2)}<0,$$

το οποίο ισχύει. Επομένως:

$$\operatorname{arctanh}g(t_1+t_2)=\operatorname{arctanh}g(t_1)+\operatorname{arctanh}g(t_2),$$

οπότε θέτοντας $h(t)=\operatorname{arctanh}g(t)$ καταλήγουμε στην προσθετική συναρτησιακή εξίσωση του Cauchy:

$$h(t_1+t_2)=h(t_1)+h(t_2), \tag{3}$$

της οποίας οι συνεχείς λύσεις είναι οι $h(x)=cx$, όπου c αυθαίρετη πραγματική σταθερά (βλ. [**;**] σελ. 32).

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τους ορισμούς συναρτήσεων, στους οποίους προβήκαμε, έχουμε ότι:

$$\operatorname{arctanh}\frac{2}{S}\left(f(t)-\frac{S}{2}\right)=ct \Leftrightarrow f(t)=\frac{S}{2}\tanh(ct)+\frac{S}{2}.$$

Έτσι, σύμφωνα με τη σχέση (**;;**) έχουμε ότι η f είναι η λογιστική συνάρτηση με φέρουσα ικανότητα S, αρχική τιμή $l_0=S/2$ και σταθερά $\kappa=2c/S$, όπως κι επιθυμούσαμε. Συμβολικά:

$$f(t) = \mathrm{lgc}_{S, S/2, 2c/S}(t).$$

Το πλεονέκτημα της (3) είναι ότι μπορεί να δώσει λύσεις και πέραν των απλών γραμμικών, άρα αυτό συνιστά μια δυνατότητα γενίκευσης. Προς τούτο θα χρειαστούμε αρχικά την έννοια της βάσης Hamel (βλ. [;] σελ. 9).

Ορισμός 1. *Έστω διανυσματικός χώρος V (όχι απαραιτήτως πεπερασμένης διάστασης). Ένα σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{H}$ καλείται* ***βάση Hamel*** *για τον V, αν:*

- *κάθε διάνυσμα $v \in V$ γράφεται ως πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων του $\mathcal{H}$,*
- *κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathcal{H}$ συνίσταται από γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα.*

Έστω, λοιπόν, $\mathcal{H}$ μία βάση Hamel του $\mathbb{R}$. Τότε, η πιο γενική λύση της προσθετικής συναρτησιακής εξίσωσης του Cauchy-(3) (βλ. [;] σελ. 35-36) κατασκευάζεται διαλέγοντας αυθαίρετες τιμές για τα στοιχεία της βάσης $\mathcal{H}$ και ακολούθως ορίζοντας την h για κάθε $t \in \mathbb{R}$, με:

$$t = t_1 \mathfrak{b}_1 + \cdots + t_n \mathfrak{b}_n,$$

όπου $t_j \in \mathbb{Q}$ και $\mathfrak{b}_j \in \mathcal{H}$, ως:

$$h(t) = t_1 h(\mathfrak{b}_1) + \cdots + t_n h(\mathfrak{b}_n).$$

Έτσι, η πιο γενική λύση της λογιστικής συναρτησιακής εξίσωσης-(2) είναι η f, για την οποία ισχύει:

$$\operatorname{arctanh} \frac{2}{S}\left(f(t) - \frac{S}{2}\right) = h(t) \Leftrightarrow f(t) = \frac{S}{2}\tanh\left(h(t)\right) + \frac{S}{2}.$$

Δίνεται η ασκημούλα συναρτησιακή εξίσωση:

$$f(x+y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f(x) + f(y) - 2f\left(\frac{x-y}{2}\right), \tag{4}$$

όπου $x, y \in \mathbb{R}$.

(α΄) Ν.δ.ο. $f(qx) = q^2 f(x)$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$ και $x \in \mathbb{R}$.

(β΄) Ν.δ.ο.:

$$f(x+y+z) + f(x) + f(y) + f(z) = f(x+y) + f(x+z) + f(y+z)$$

για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(γ΄) Έστω η συνάρτηση:

$$p(x,y) = \frac{f(x+y) - f(x) - f(y)}{2}.$$

Να δειχθεί ότι:

$$p(x_1 + x_2, y) = p(x_1, y) + p(x_2, y) \text{ και } p(x, y_1 + y_2) = p(x, y_1) + p(x, y_2)$$

για κάθε $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

(δ΄) Να λυθεί η συναρτησιακή εξίσωση (4).

Για το β έχουμε:

$$f(x-y+z) + f(x-y-z) = 2f(x-y) + 2f(z)$$

άρα, αφού είναι άρτια

$$f(x-y+z) + f(-x+y+z) = 4f(x) + 4f(y) - 2f(x+y) + 2f(z)$$

Οπότε έχω 3 εξισώσεις με αγνώστους τα

$$f(x-y+z), f(x+y-z), f(-x+y+z)$$

Μετά

$$f(x+y+z) + f(x+y-z) = 2f(x+y) + 2f(z)...$$

Αναφορές

[1] J. Aczél και J. Dhombres. *Functional equations in several variables*. Cambridge University Press, 2008.

[2] Herman Athen. *The Teaching of Vectors in the German Gymnasium I*. *The Mathematics Teacher*. 59(4), 382-393, 1966.

[3] J. Cable. *What Is a Vector?* *The Mathematical Gazette*. 48(363), 34-36, 1964.

[4] Marc Lange. *A Tale of Two Vectors*. *Dialectica*. 63(4), 397-431, 2009.