Εξίσωση κύματος ($\partial_{tt}u - c^2\nabla^2 u = 0$)

```
Clear["Global`*"]
PDE = D[u[x, t], {t, 2}] - c^2 D[u[x, t], {x, 2}] == 0
```

Out[∘]=

$u^{(0,2)}[x, t] - c^2 u^{(2,0)}[x, t] == 0$

Αντικατάσταση $u = X \cdot T$.

```
u[x, t] = X[x] * T[t]
PDE = D[u[x, t], {t, 2}] - c^2 D[u[x, t], {x, 2}] == 0
```

Out[∘]=

T[t] X[x]

Out[∘]=

$X[x]\, T''[t] - c^2\, T[t]\, X''[x] == 0$

Αρχικές συνθήκες:

```
init1 = u[x, 0] == f[x]
init2 = Derivative[0, 1][u][x, 0] == g[x]
```

Out[∘]=

u[x, 0] == f[x]

Out[∘]=

$u^{(0,1)}[x, 0] == g[x]$

Συνωριακές συνθήκες:

```
bound1 = u[0, t] == 0
bound2 = u[L, t] == 0
```

Out[∘]=

u[0, t] == 0

Out[∘]=

u[L, t] == 0

Χωρίζουμε τα X με τα T στη Μ.Δ.Ε.:

```
PDE[[1]] / (c^2 X[x] T[t]) // Apart
```

Out[∘]=

$$\frac{T''[t]}{c^2\, T[t]} - \frac{X''[x]}{X[x]}$$

Προκύπτουν δύο Σ.Δ.Ε.:

```
ODEt = D[T[t], {t, 2}] / (c^2 T[t]) == λ
ODEx = D[X[x], {x, 2}] / X[x] == λ
```

Out[•]=

$$\frac{T''[t]}{c^2\,T[t]} == \lambda$$

Out[•]=

$$\frac{X''[x]}{X[x]} == \lambda$$

Εξετάζουμε πρώτα τις προς απόρριψιν περιπτώσεις λ ≥ 0. Από τις $u(0,\ t) = 0$ και $u(L,\ t) = 0$ συνάγουμε ότι $X(0)\ T(t) = 0 = X(L)\ T(t)$. Επομένως $X(0) = 0 == X(L)$, προκειμένου να αποφύγουμε τη μηδενική λύση.

```
Assuming[λ > 0, DSolve[ODEx, X[x], x]]
Assuming[λ > 0, DSolve[{ODEx, X[0] == 0, X[L] == 0}, X[x], x]]
```

Out[•]=

$$\left\{\left\{X[x] \to e^{x\sqrt{\lambda}}\ \mathbb{c}_1 + \frac{\mathbb{c}_2}{e^{x\sqrt{\lambda}}}\right\}\right\}$$

Out[•]=

$$\{\{X[x] \to 0\}\}$$

Στην περίπτωση που λ = 0 έχουμε:

```
ODEx = D[X[x], {x, 2}] == 0
```

Out[•]=

$$X''[x] == 0$$

```
DSolve[{ODEx}, X[x], x]
DSolve[{ODEx, X[0] == 0, X[L] == 0}, X[x], x]
```

Out[•]=

$$\{\{X[x] \to \mathbb{c}_1 + x\ \mathbb{c}_2\}\}$$

Out[•]=

$$\left\{\left\{X[x] \to \begin{cases} x\ \mathbb{c}_1 & L == 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}\right\}\right\}$$

Αποδείξαμε ότι λ < 0, επομένως:

```
λ = -k^2
ODEx = D[X[x], {x, 2}] + k^2 X[x] == 0
DSolve[{ODEx}, X[x], x]
DSolve[{ODEx, X[0] == 0, X[L] == 0}, X[x], x]
```

Out[•]=

$$-k^2$$

Out[•]=

$$k^2\,X[x] + X''[x] == 0$$

Out[•]=

$$\{\{X[x] \to \mathbb{c}_1 \operatorname{Cos}[k\,x] + \mathbb{c}_2 \operatorname{Sin}[k\,x]\}\}$$

Out[•]=

$$\left\{\left\{X[x] \to \begin{cases} \mathbb{c}_1 \operatorname{Sin}\left[\sqrt{k^2}\ x\right] & n \in \mathbb{Z}\ \&\&\ n \geq 1\ \&\&\ k^2 == \frac{n^2\,\pi^2}{L^2}\ \&\&\ L > 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}\right\}\right\}$$

Έχουμε τις ιδιοτιμές:

```
k = (m Pi) / L
```

Out[∘]=

$$\frac{m\pi}{L}$$

Άρα:

```
DSolve[{ODEx, X[0] == 0, X[L] == 0}, X[x], x]
DSolve[ODEt, T[t], t]
```

Out[∘]=

$$\left\{\left\{X[x]\to\begin{cases}\mathbb{c}_1\,\mathrm{Sin}\left[\frac{m\pi x}{L}\right] & n\in\mathbb{Z}\ \&\&\ \left(m==2n\ ||\ m==\frac{\pi+2n\pi}{\pi}\right)\\ 0 & \mathrm{True}\end{cases}\right\}\right\}$$

Out[∘]=

$$\left\{\left\{T[t]\to\mathbb{c}_1\,\mathrm{Cos}\left[\frac{c\,m\,\pi\,t}{L}\right]+\mathbb{c}_2\,\mathrm{Sin}\left[\frac{c\,m\,\pi\,t}{L}\right]\right\}\right\}$$

Έχουμε ότι η $u_m(x,\ t)=\sin(\frac{m\pi\,x}{L})\,(a_m\cos(\frac{c\,m\pi\,t}{L})+b_m\sin(\frac{c\,m\pi\,t}{L}))$ ικανοποιεί τη Μ.Δ.Ε. και τις συνοριακές συνθήκες. Το ίδιο συμβαίνει και με κάθε γραμμικό συνδυασμό τους. Θα βρούμε ποιος γραμμικός συνδυασμός επαληθεύει και τις αρχικές συνθήκες. Θέλουμε, δηλαδή:

- $\sum_{m=1}^{\infty}u_m(x,0)=f(x)\Leftrightarrow\sum_{m=1}^{\infty}a_m\sin(\frac{m\pi\,x}{L})=f(x)$
- $\sum_{m=1}^{\infty}\partial_t u_m(x,0)=g(x)\Leftrightarrow\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c\,m\,b_m\pi}{L}\sin(\frac{m\pi\,x}{L})=g(x)$

Οι συντελεστές a_m και b_m θα βρεθούν πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά με $\sin(m\,x)$ και τα δύο μέλη των ισοτήτων. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την ορθογωνιότητα των ημιτόνων έχουμε:

```
a[m_] := Assuming[Element[m, Integers],
  Integrate[f[x] Sin[(m π x) / L], {x, 0, L}] / Integrate[(Sin[(m π x) / L])^2, {x, 0, L}]]
a[m]
```

Out[∘]=

$$\frac{2\int_0^L f[x]\,\mathrm{Sin}\left[\frac{m\pi x}{L}\right]\,dx}{L}$$

```
b[m_] := Assuming[Element[m, Integers], Integrate[g[x] Sin[(m π x) / L], {x, 0, L}] /
   ((c m Pi) / L Integrate[(Sin[(m π x) / L])^2, {x, 0, L}])]
b[m]
```

Out[∘]=

$$\frac{2\int_0^L g[x]\,\mathrm{Sin}\left[\frac{m\pi x}{L}\right]\,dx}{c\,m\,\pi}$$

Έτσι μπορούμε να έχουμε μια προσέγγιση της λύσης μας με n_0 όρους.

```
un[x_, t_, m_] := Sin[(m π x) / L] (a[m] Cos[(c m π t) / L] + b[m] Sin[(c m π t) / L])
uApprox[x_, t_, n0_] := Sum[un[x, t, m], {m, 1, n0}]
uApprox[x, t, 4]
```

Out[∘]=

$$\left(\frac{2\,\text{Cos}\left[\frac{c\pi t}{L}\right]\int_0^L f[x]\,\text{Sin}\left[\frac{\pi x}{L}\right]dx}{L}+\frac{2\left(\int_0^L g[x]\,\text{Sin}\left[\frac{\pi x}{L}\right]dx\right)\text{Sin}\left[\frac{c\pi t}{L}\right]}{c\,\pi}\right)\text{Sin}\left[\frac{\pi x}{L}\right]+$$
$$\left(\frac{2\,\text{Cos}\left[\frac{2c\pi t}{L}\right]\int_0^L f[x]\,\text{Sin}\left[\frac{2\pi x}{L}\right]dx}{L}+\frac{\left(\int_0^L g[x]\,\text{Sin}\left[\frac{2\pi x}{L}\right]dx\right)\text{Sin}\left[\frac{2c\pi t}{L}\right]}{c\,\pi}\right)\text{Sin}\left[\frac{2\pi x}{L}\right]+$$
$$\left(\frac{2\,\text{Cos}\left[\frac{3c\pi t}{L}\right]\int_0^L f[x]\,\text{Sin}\left[\frac{3\pi x}{L}\right]dx}{L}+\frac{2\left(\int_0^L g[x]\,\text{Sin}\left[\frac{3\pi x}{L}\right]dx\right)\text{Sin}\left[\frac{3c\pi t}{L}\right]}{3\,c\,\pi}\right)\text{Sin}\left[\frac{3\pi x}{L}\right]+$$
$$\left(\frac{2\,\text{Cos}\left[\frac{4c\pi t}{L}\right]\int_0^L f[x]\,\text{Sin}\left[\frac{4\pi x}{L}\right]dx}{L}+\frac{\left(\int_0^L g[x]\,\text{Sin}\left[\frac{4\pi x}{L}\right]dx\right)\text{Sin}\left[\frac{4c\pi t}{L}\right]}{2\,c\,\pi}\right)\text{Sin}\left[\frac{4\pi x}{L}\right]$$

Ας εξειδικεύσουμε την κατάσταση, για να δούμε τι πετύχαμε.

```
c = 4;
L = 2 Pi;
f[x_] := x^2
g[x_] := 2 x - 1
```

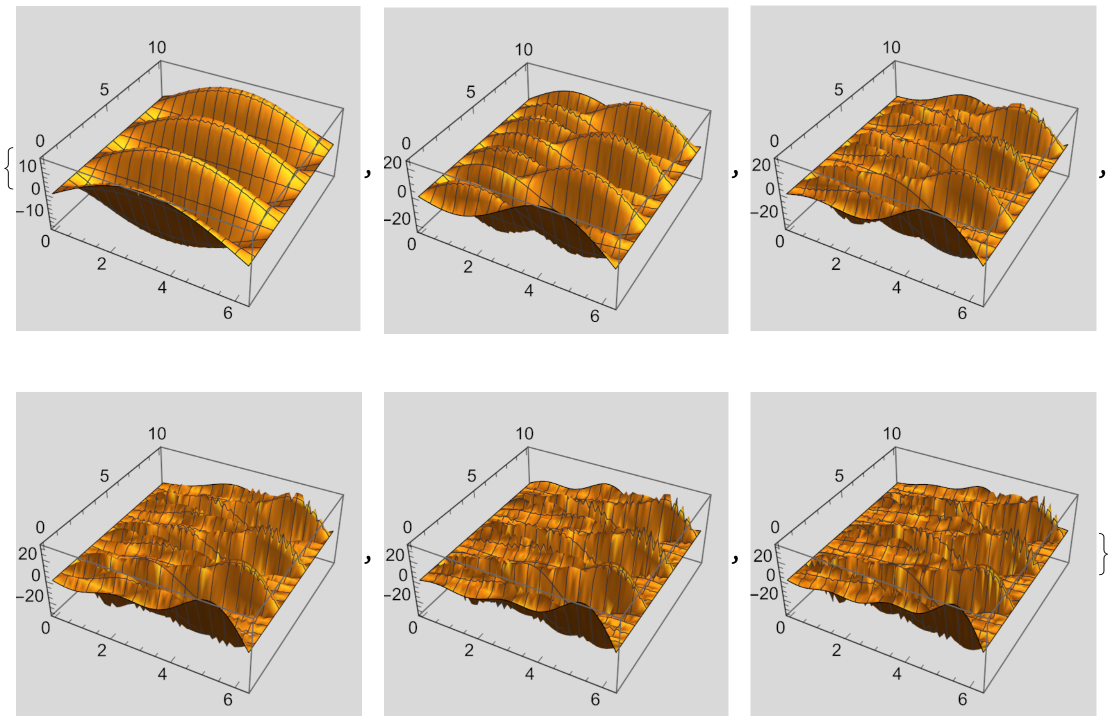
```
uApprox[x, t, 6]
```

Out[∘]=

$$\left(\frac{8\left(-4+\pi^2\right)\text{Cos}[2t]}{\pi}+\frac{(-4+8\pi)\,\text{Sin}[2t]}{2\pi}\right)\text{Sin}\left[\frac{x}{2}\right]+(-4\pi\,\text{Cos}[4t]-\text{Sin}[4t])\,\text{Sin}[x]+$$
$$\left(\frac{8\left(-4+9\pi^2\right)\text{Cos}[6t]}{27\pi}+\frac{2(-1+2\pi)\,\text{Sin}[6t]}{9\pi}\right)\text{Sin}\left[\frac{3x}{2}\right]+$$
$$\left(-2\pi\,\text{Cos}[8t]-\frac{1}{4}\text{Sin}[8t]\right)\text{Sin}[2x]+$$
$$\left(\frac{8\left(-4+25\pi^2\right)\text{Cos}[10t]}{125\pi}+\frac{2(-1+2\pi)\,\text{Sin}[10t]}{25\pi}\right)\text{Sin}\left[\frac{5x}{2}\right]+$$
$$\left(-\frac{4}{3}\pi\,\text{Cos}[12t]-\frac{1}{9}\text{Sin}[12t]\right)\text{Sin}[3x]$$

```
Table[Plot3D[Evaluate[uApprox[x, t, n0]],
  {x, 0, L}, {t, 0, 10}, Background → LightGray], {n0, 1, 6}]
```

Out[]=



```
Plot3D[Evaluate[uApprox[x, t, 30]], {x, 0, L},
 {t, 0, 10}, AxesLabel → Automatic, Background → LightGray]
```

Out[]=