Algorithmic Operation Research

Homework 1
Instructor: Anna Karasoulou
Fall 2019

Αλεξανδρής Δημήτριος, 1115201400006
Βλάχου Μελίνα Μαρία, 1115201500017
Κωνσταντίνος Κουκάκης, 1115201400289

1. Let $C \subseteq \mathbb{R}^n$ be a convex set with $x_1, \dots x_k \in C$ and let $\theta_1, \dots, \theta_k \in \mathbb{R}$ satisfy $\theta_i \geq 0$ and $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$. Show that $\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \in C$.

Για $k=2$, αληθές από τον ορισμό του κυρτού συνόλου.
Εξετάζω $k=3$: έστω $x_1, x_2, x_3 \in C$ και $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \geq$ με $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1$.
Θα δείξω ότι ο συνδυασμός $y = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_3 \in C$. Αφού $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1$,
τότε ένα από αυτά θα είναι $!= 1$. Χωρίς βλάβη της γενικότητος μπορώ
να υποθέσω ότι $\theta_1 != 1$. Άρα ο συνδυασμός y γράφεται ως
$y = \theta_1 x_1 + (1-\theta_1)(\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)$ όπου $a_2 = \frac{\theta_2}{1-\theta_1}$, $\alpha_3 = \frac{\theta_3}{1-\theta_1}$

Βλέπω ότι $a_2 + a_3 = 1$, αφού $a_2 + a_3 = \frac{\theta_2 + \theta_3}{1-\theta_1} = \frac{\cancel{1-\theta_1}}{\cancel{1-\theta_1}} = 1$,
Επίσης C κυρτό και $x_2, x_3 \in C$, άρα ο συνδυασμός $a_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \in C$
Αφού και το σημείο $x_1 \in C$, τότε όλο το $y \in C$. Η απόδειξη
μπορεί να γενικευτεί για κάθε τιμή του k.

2. Show that a set is convex if and only if its intersection with any line is convex.

Δεδομένου ότι καλούμαι να αποδείξω το αντ. διακρίνω:
~ για το πρώτο μέλος της πρότασης (φορά προς τα δεξιά) έχω.
α) $C \cap \Gamma = \emptyset \Rightarrow$ αυτό είναι κυρτό εξ ορισμού.
β) $C \cap \Gamma$ μη κενό. τότε για $x_1, x_2 \in C$ και $x_1, x_2 \in \Gamma$ θα έχω ότι
ο συνδυασμός $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C$. (με $\theta \in [0,1]$) Επίσης, ο $\theta x_1 + (1-\theta)x_2$
βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα x_1, x_2 το οποίο
είναι επί της Γ (αφού και $x_1, x_2 \in \Gamma$). Άρα και πάλι κυρτό.
~ για το δεύτερο μέλος (φορά προς αριστερά) έχω:
για $x_1, x_2 \in C$ θέλω να δείξω ότι ο $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C$.
Έστω Γ περνά από τα x_1, x_2. $x_1, x_2 \in C \cap \Gamma$ και αφού $C \cap \Gamma$ κυρτό,
έχω ότι $x_1 + (1-\theta)x_2 \in C \cap \Gamma$, άρα $x_1 + (1-\theta)x_2 \in C$ και
C κυρτό

3. Show that a set is affine if and only if its intersection with any line is affine.

Πρωτη κατευθυνση: Η γραμμη ειναι συγγενης. Θα αποδειξουμε οτι η διατομη δυο συγγενων συνολων ειναι επισης συγγενης δηλαδη αν το S_1 και S_2 συγγενη, τοτε το $S_1 \cap S_2$ συγγενες. Πραγματι:

$x \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow x \in S_1$ και $x \in S_2$

$y \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow y \in S_1$ και $y \in S_2$.

τοτε για ολα τα $\theta \in \mathbb{R}$

$\theta x + (1-\theta)y \in S_1$ και $\theta x + (1-\theta)y \in S_2 \Rightarrow$

$\theta x + (1-\theta)y \in S_1 \cap S_2$.

Αντιστροφα, υποθετουμε οτι η διατομη του S με οποιαδηποτε γραμμη ειναι συγγενης. Παιρνουμε δυο διακριτα σημεια $x_1, x_2 \in S$. Η διατομη του S με τη γραμμη που διερχεται απο τα x_1, x_2 ειναι συγγενης που σημαινει οτι το $\theta x_1 + (1-\theta)x_2$ ανηκει στη διατομη $\forall \theta \in \mathbb{R}$ και συνεπως και στο S.

4. A set C is midpoint convex, if whenever two points $a, b \in C$, the average or midpoint $(a+b)/2$ is in C. Obviously, a convex set is midpoint convex. Prove that if C is closed and midpoint convex, then C is convex.

Κυρτο συνολο σημαινει $\forall x_1, x_2 \in C$, $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C$ $\forall \theta \in [0,1]$.

Εστω οτι $\theta^{(k)}$ ειναι ο δυαδικος αριθμος του μηκους k δηλαδη της μορφης: $\theta^{(k)} = c_1 2^{-1} + c_2 2^{-2} + \dots + c_k 2^{-k}$ με $c_i \in \{0,1\}$ πλησιεστερα του θ. Με την μεση κυρτοτητα (εφαρμοσμενη k φορες αναδρομικα) εχω:

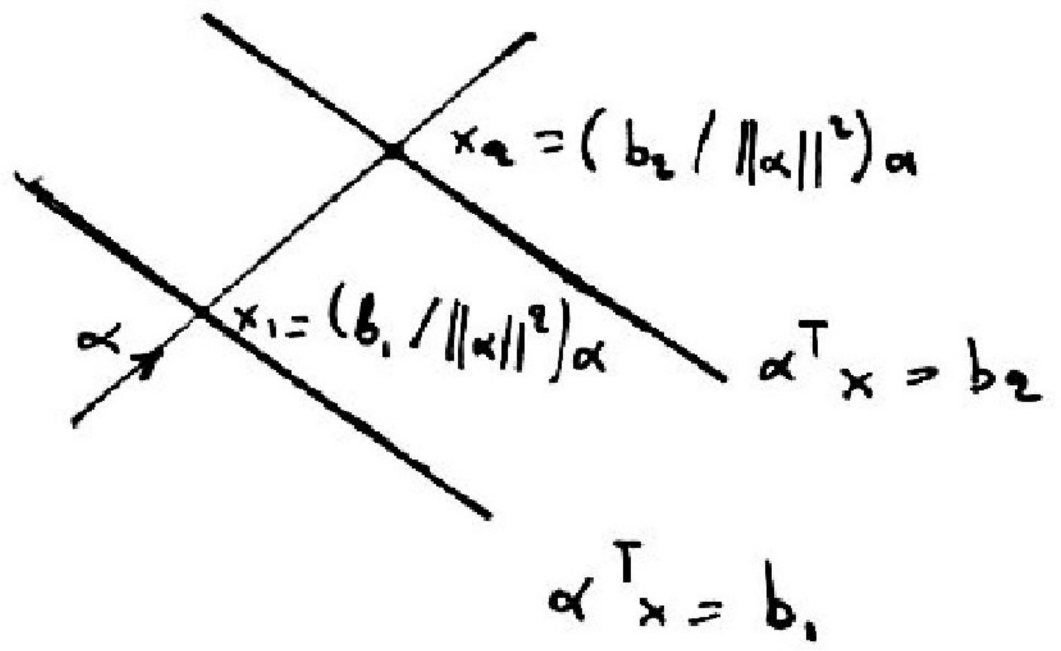
$\theta^{(k)}x + (1-\theta^{(k)})y \in C$. Επειδη το C ειναι κλειστο:

$\lim_{k \to \infty} (\theta^{(k)}x + (1-\theta^{(k)})y) = \theta x + (1-\theta)y \in C$ δηλαδη

το C ειναι και κυρτο.

6. What is the distance between two parallel hyperplanes $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b_1\}$ and $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b_2\}$?

Η απόσταση μεταξύ των παράλληλων hyperplanes
$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha^T x = b_1\}$ και $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha^T x = b_2\}$



είναι η απόσταση των σημείων x_1, x_2 όπου το hyperplane τέμνει την γραμμή στον αρχικό και τον παράλληλο vector α.

Άρα τα σημεία είναι
$$x_1 = (b_1/\|\alpha\|_2^2)\alpha \qquad x_2 = (b_2/\|\alpha\|_2^2)\alpha$$
και η απόσταση ίση με
$$\|x_1 - x_2\|_2 = |b_1 - b_2| / \|\alpha\|_2$$

7. Let a and b be distinct points in $\mathbb{R}^n$. Show that the set of all points that are closer (in Euclidean norm) to a than b is a halfspace.

Αφού η νόρμα είναι πάντα θετική, έχουμε
$\|x - \alpha\|_2 \le \|x - b\|_2$ αν και μόνο αν
$\|x - \alpha\|_2^2 \le \|x - b\|_2^2$, οπότε:

$$\|x-\alpha\|_2^2 \le \|x-b\|_2^2 \iff (x-\alpha)^T(x-\alpha) \le (x-b)^T(x-b)$$
$$\iff x^Tx - 2\alpha^Tx + \alpha^T\alpha \le x^Tx - 2b^Tx + b^Tb$$
$$\iff 2(b-\alpha)^T x \le b^Tb - \alpha^T\alpha$$

Άρα το σύνολο είναι halfspace.
Παίρνουμε τα $c = 2(b-\alpha)$ και $d = b^Tb - \alpha^T\alpha$
Από γεωμετρική ερμηνεία: τα σημεία ~~που~~ είναι ισαπέχουν στα α και b δίνονται ~~από~~ ένα hyperplane που είναι στην κατεύθυνση $b - \alpha$