Algorithmic Operation Research ~ Fall 2019

Homework 2

Instructor: Anna Karasoulou

Fall 2019

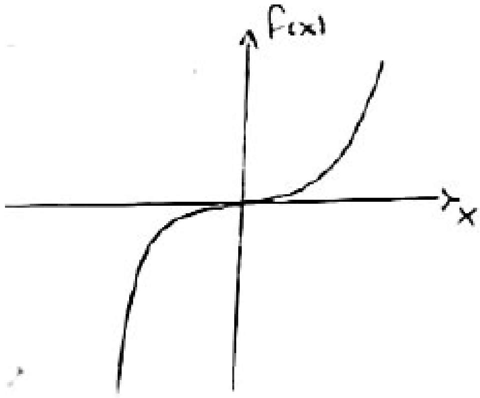
Αλεξανδρής Δημήτριος, 1115201400006
Βλάχου Μελίνα Μαρία, 1115201500017
Κωνσταντίνος Κουκάκης, 1115201400289

1. Find a differentiable function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that f does not have an extremum at its critical point.

Μια συναρτηση f $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ οπου η παραγωγος της υπαρχει για ολα τα σημεια της και δεν εχει μεγιστο ή ελαχιστο στα κρισιμα σημεια της ειναι η $\underline{f(x) = x^3}$, $x \in \mathbb{R}$

η παραγωγος $f'(x) = 3x^2$ $x \in \mathbb{R}$ μηδενιζεται για $x=0$ αρα το $x=0$ ειναι το κρισιμο σημειο της f. Ομως σε αυτο το σημειο δεν παρουσιαζει ουτε μεγιστο ουτε ελαχιστο:

$x=-1$	0	$x=1$
+		+



2. Given a positive integer S, which decompositions

$$a_1 + \cdots + a_n = S$$

with the a_i positive integers have the largest product $a_1 \cdot \cdots \cdot a_n$?

) Γνωρίζουμε ότι αν είναι ακέραιος πρέπει να σπάσει σε 2 άλλους ακεραίους, για να μεγιστοποιήσουμε το γινόμενο τους αυτοί οι ακέραιοι πρέπει να είναι ίσοι. Με αυτή τη λογική σπάμε το S σε (S/n) n και έτσι το γινόμενο τους θα είναι $n^{S/n}$. Αν παραγωγίσουμε αυτό το γινόμενο και πάρουμε την παράγωγο $(-S n^{S/n-2}(\ln(n)-1))$ ίση με το <u>μηδέν</u> (ώστε να δούμε που μεγιστοποιείται) θα πάρουμε την τιμή $n=e$ για το μέγιστο γινόμενο. Γνωρίζουμε ότι $2<e<3$ συνεπώς ο κάθε ακέραιος πρέπει να σπάσει σε 2 ή 3 για το μέγιστο γινόμενο

Επόμενο βήμα: πχ 6: $3+3 = 2+2+2$ και παρατηρώ ότι $3\cdot 3 > 2\cdot 2\cdot 2$ οπότε κάθε τριάδα από 2 πρέπει να αντικαθίσταται από δυάδα των 3 (δύναμη του 3). Άρα σπάμε τον αρχικό ακέραιο σε 3άρια έως ότου το υπόλοιπο που μένει είναι 4 $(2\cdot 2)$ ή 2 και έτσι θα λάβουμε το μέγιστο γινόμενο

3. Find the optimal solution to the Diet Problem when the cost function is

$$Cost(x_1, x_2) = x_1 + x_2.$$

---

(3) Επαναδιατύπωση Προβλήματος:

Αγοράζουμε τρόφιμα, έχουμε τις επιλογές S κι G.

κάθε S δίνει 30 σίδηρο και 15 πρωτεΐνη.

κάθε G δίνει 5 σίδηρο και 10 unit πρωτ.

Χρειαζόμαστε τουλάχιστον 60 σίδηρο και 70 πρωτ. με ελάχιστο κόστος. x_1 η ποσότητα S και x_2 η ποσότητα G.

Η αντικειμενική συνάρτηση (κόστος) είναι η $\boxed{C = x_1 + x_2}$

Θα διερευνήσω optimal λύση με μέθοδο Simplex.

Έχω: $30x_1 + 5x_2 \geq 60$, $15x_1 + 10x_2 \geq 70$, $x_1, x_2 \geq 0$,

Φέρνω σε μορφή πίνακα και φτιάχνω τον transposed αντίστοιχο.

Κάθε σειρά γίνεται στήλη!

$$\begin{bmatrix} 30 & 5 & 60 \\ 15 & 10 & 70 \\ 1 & 1 & C \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 30 & 15 & 1 \\ 5 & 10 & 1 \\ 60 & 70 & C \end{bmatrix}$$

Από εδώ έχω ένα πρόβλημα Μεγιστοποίησης!!

με $C = 60y_1 + 70y_2$ για (1) $30y_1 + 15y_2 \leq 1$ και (2) $5y_1 + 10y_2 \leq 1$.

Γράφω ως ισότητες με slack variables: (1) $\Rightarrow 30y_1 + 15y_2 + s_1 = 1$

(2) $\Rightarrow 5y_1 + 10y_2 + s_2 = 1$.

και κόστος: $-60y_1 - 70y_2 + C = 0$

Φτιάχνω πίνακα:

	y_1	y_2	s_1	s_2	C	const column	
R_1	30	15	1	0	0	1	: 1/15
R_2	5	10	0	1	0	1	: 1/10
R_3	-60	-70	0	0	1	0	

Φτιάχνω pivot element βάσει μεγαλύτερης αρνητικής τιμής! Εδώ η 2η στήλη! Από τα θετικά στοιχεία της φτιάχνω αυτό που δίνει το μικρότερο πηλίκο με την const. column. Είναι το 15, άρα αυτό θα πάρω. Για επιστροφή στο αρχικό πρόβλημα, θα δω τις slack.

Θέλω το pivot element να γίνει άσσος και από κάτω του μηδενικά, εφαρμόζοντας

Row operations: $R_1 \cdot \frac{1}{15} \rightarrow R_1$.

y_1	y_2	s_1	s_2	C	
2	1	1/15	0	0	1/15
5	10	0	1	0	1
-60	-70	0	0	1	0

$R_2 - 10R_1 \rightarrow R_2$

$R_3 + 70R_1 \rightarrow R_3$

y_1	y_2	S_1	S_2	C	
2	1	1/15	0	0	1/15
-15	0	-10/15	1	0	1/3
80	0	70/15	0	1	70/15

όλα κάτω θετικά έχω όπτιμα λύση, κόστος ελάχιστο στην τιμή $\boxed{C = \boxed{70/15} \to 5}$

με $\boxed{S_1 = x_1 = \boxed{\frac{70}{15}} = 5}$ και $\boxed{S_2 = x_2 = 0}$

4. Let $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Show that the traditional way of computing their product AB requires a total of $(2n-1)n^2$ arithmetic operations.

Έστω ότι έχουμε δύο τετραγωνικούς πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Υπολογίζοντας το στοιχείο α_{ij} του AB χρειάζεται να πάρουμε αυτή γραμμή i του A και από την στήλη j του B. Ο υπολογισμός αυτός χρειάζεται n πολλαπλασιασμούς και $n-1$ προσθέσεις. Από την στιγμή που υπάρχουν n^2 στοιχεία ο συνολικός αριθμός των operations είναι:

$$\underbrace{n^2}_{\text{πλήθος στοιχείων}}(\underbrace{n}_{\text{πλήθος πολλαπλασιασμών}} + \underbrace{(n-1)}_{\text{πλήθος προσθέσεων}}) = n^3 + n^3 - n^2 = 2n^3 - n^2 = (2n-1)n^2$$

5. Consider the problem of solving a system of n linear equations in n unknowns. Show that the Gaussian elimination method requires $O(n^3)$ arithmetic operations in order to either compute a solution or to decide that no solution exist.

Gaussian-Jordan

For Each row i (R_i) from 1 to n $\quad (\sum_{i=1}^n)$

 If any row j below row i has non zero entries to the right of the first non zero entry in row i

  $R_i \leftrightarrow R_j$

 $R_i \to \frac{1}{c}R_i$ where $c =$ the first non-zero entry of row i (the pivot).

 For each row $j > i$ $\quad (n-i)$

  $R_j \to R_j - dR_i$ where $d =$ the entry in row j which is directly below the pivot in row i.

 If any 0 rows have appeared exchange them to the bottom of the matrix.

next i [Matrix is now in REF]

For each non zero row i (R_i) from n to 1 $\quad (\sum_{i=1}^n)$

 For each $j < i$ $\quad (n-i)$

  $R_j \to R_j - bR_i$ where $b =$ the value in row j directly above the pivot in row i.

Υπολογίζουμε τους υπολογισμούς (πολλαπλασιασμοί):

$$\sum_{i=1}^{n}[(n+1)+(n-i)(n+1)] + \sum_{i=1}^{n}[(n-i)(n+1)]$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(2n-2i+1)(n+1)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} 2n^2+3n+1-2(n+1)i$$
$$= 2n^3+3n^2+n+n(n+1)^2$$
$$= 3n^3+5n^2+2n$$

Υπολογίζουμε τους υπολογισμούς (προσθέσεις):

$$\sum_{i=1} 2(n-i)(n+1) = n^3-n$$

Συνολικά: $4n^3+5n^2+n$

Άρα $O(n^3)$

6. Suppose that we are given a set of vectors in $\mathbb{R}^n$ that form a basis and let y be an arbitrary vector in R^n. We wish to express y as a linear combination of the basis vectors. How can this by accomplished?

Έστω $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ οι συντελεστές που ψάχνουμε και $b^1, \dots, b^n$ οι basis vectors. Περιορισμοί $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_j^i = y_j$ για όλα τα j όπου b_j^i είναι το j-στο στοιχείο του i-στου basis vector. Αυτά μας δίνουν μοναδική λύση. Μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε μια σταθερή συνάρτηση που υπόκειται στους περιορισμούς αυτούς με σκοπό την εύρεση των επιθυμητών συντελεστών.

7. Study the paper with title: *Do dogs know Calculus?* found in the Readings folder.
