

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου II

Εργαστήριο 2

Κουκουλέτσου Αικατερίνη 10218

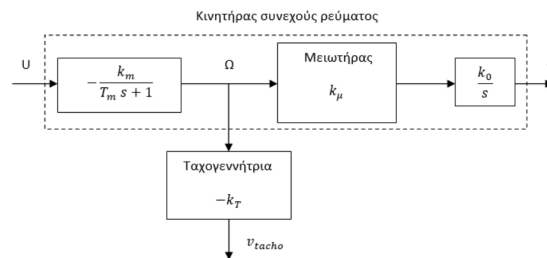
Μάιος 2024

Εισαγωγή

Σκοπός της 2ης εργαστηριακής άσκησης είναι η σχεδίαση και η υλοποίηση ενός ελεγκτή γραμμικής ανάδρασης καταστάσεων, έτσι ώστε η θέση (γωνία περιστροφής) του άξονα του κινητήρα να συγκλίνει σε μια επιθυμητή τιμή.

Μοντέλο State - Space

Η σχεδίαση γίνεται στο μοντέλο εξισώσεων χώρου - κατάστασης της εργαστηριακής άσκησης 1 που φαίνεται στην παρακάτω εικόνα



από το block διάγραμμα που περιγράφει την λειτουργία του συστήματος φαίνεται ότι

$$\omega = \frac{k_m}{T_m s + 1} u \Rightarrow s\omega + \frac{1}{T_m} \omega = \frac{k_m}{T_m} u$$

$$\theta = \frac{k_\mu k_0}{s} \omega \Rightarrow s\theta = k_\mu k_0 \omega$$

Επομένως, εφαρμόζοντας αντίστροφο μεταχρηματισμό Laplace προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις

$$\dot{\omega} + \frac{1}{T_m} \omega = \frac{k_m}{T_m} u$$

$$\dot{\theta} = k_\mu k_0 \omega$$

θέτοντας ως μεταβλητές κατάστασης το $x_1 = \omega$ και $x_2 = \theta$, όπως υποδεικνύεται από το φυλλάδιο του εργαστηρίου, προκύπτει τελικά το ακόλουθο μοντέλο state - space.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \omega \\ x_2 = \theta \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \dot{\omega} \\ \dot{x}_2 = \dot{\theta} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -\frac{1}{T_m} x_1 + \frac{k_m}{T_m} u \\ \dot{x}_2 = k_\mu k_0 x_1 \end{array} \right\}$$

Το οποίο σε μορφή πίνακα έχει ως εξής

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_m} & 0 \\ k_\mu \cdot k_0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k_m}{T_m} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u$$

Συνθήκη Ελεγχιμότητας

Πριν από οποιαδήποτε προσπάθεια σχεδίασης ελεγκτή, είναι απολύτως απαραίτητο να διασφαλιστεί η ελεγχιμότητα του συστήματος. Σε περίπτωση που το σύστημα αποδειχθεί να είναι μη ελέγξιμο, δεν έχει κανένα νόημα η σχεδίαση ελεγκτή και επομένως η ανάλυση θα πρέπει να σταματήσει. Για αυτόν τον λόγο, σε αυτό το σημείο, χρησιμοποιείται το κριτήριο ελεγχιμότητας.

Κατασκευάζεται αρχικά ο πίνακας M σύμφωνα με τον ακόλουθο τύπο, όπου με n συμβολίζεται η τάξη του συστήματος

$$M = [B \quad A \cdot B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

Για $n = 2$, ο πίνακας M είναι ίσος με

$$M = \begin{bmatrix} \frac{k_m}{T_m} & -\frac{k_m}{T_m^2} \\ 0 & \frac{k_\mu \cdot k_0 \cdot k_m}{T_m} \end{bmatrix}$$

για να είναι το σύστημα ελέγξιμο, θα πρέπει $\det(M) \neq 0$ και άρα $\text{rank}(M) = n = 2$. Υπολογίζοντας την ορίζουσα του πίνακα ελεγχιμότητας M , φαίνεται ότι

$$\det(M) = \frac{k_\mu \cdot k_0 \cdot k_m^2}{T_m^2} \neq 0$$

επομένως, το σύστημα είναι **ελέγξιμο**.

Σχεδίαση Ελεγκτή Γραμμικής Ανάδρασης Καταστάσεων

Ο ελεγκτής που θα χρησιμοποιηθεί στο 2ο εργαστήριο, είναι ένας ελεγκτής γραμμικής ανάδρασης καταστάσεων και άρα έχει την ακόλουθη μορφή

$$u = -k_1 \cdot x_1 - k_2 \cdot x_2 + k_r \cdot r$$

Με αντικατάσταση του u , το σύστημα κλειστού βρόχου θα είναι

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-1-k_1 k_m}{T_m} & \frac{-k_m k_2}{T_m} \\ k_\mu k_0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{k_m k_r}{T_m} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} \cdot r$$

Οι τιμές των κερδών k_1 και k_2 αποτελούν σχεδιαστική επιλογή, όμως είναι απαραίτητη προϋπόθεση να επιλεγθούν έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η ευστάθεια του συστήματος και να ικανοποιούνται οι δοσμένες προδιαγραφές. Για τον έλεγχο της ευστάθειας του συστήματος, είναι απαραίτητη η εύρεση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.

Εύρεση Χαρακτηριστικού Πολυωνύμου

$$\det(sI - \tilde{A}) = \det \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{-1-k_1 k_m}{T_m} & \frac{-k_m k_2}{T_m} \\ k_\mu k_0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} s + \frac{1+k_1 k_m}{T_m} & \frac{k_m k_2}{T_m} \\ -k_\mu k_0 & s \end{bmatrix} \right)$$

$$\left| s + \frac{1+k_1 k_m}{T_m} \quad \frac{k_m k_2}{T_m} \right| = s^2 + \frac{1+k_1 k_m}{T_m} \cdot s + \frac{k_\mu k_0 k_m k_2}{T_m}$$

Σύμφωνα με το κριτήριο ευστάθειας Routh-Hurwitz για ένα δευτεροβάθμιο σύστημα, θα πρέπει όλοι οι συντελεστές να είναι ομόσημοι με τον συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου. Επομένως, στην συγκεκριμένη περίπτωση, πρέπει όλοι οι συντελεστές να είναι θετικοί. Λύνοντας τις σχέσεις ως προς τα ζητούμενα κέρδη k_1 και k_2 προκύπτουν οι ακόλουθες ανισοτικές σχέσεις.

$$\frac{1 + k_1 k_m}{T_m} > 0 \Rightarrow k_1 > -\frac{1}{k_m}$$

και ταυτόχρονα,

$$\frac{k_\mu k_0 k_m k_2}{T_m} > 0 \Rightarrow k_2 > 0$$

Προδιαγραφές Ελεγχόμενου Συστήματος

Όσον αφορά τις προδιαγραφές, η απόκριση του συστήματος κλειστού βρόχου θα πρέπει

1. να μην παρουσιάζει υπερύψωση και
2. ο χρόνος αποκατάστασης να είναι ο μικρότερος δυνατός.

Καθώς το σύστημα είναι δευτεροβάθμιο, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο παρακάτω τύπος

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Με αντιστοίχιση από το χαρακτηριστικό πολυωνύμο του συστήματος προκύπτει

$$\frac{1 + k_1 k_m}{T_m} = 2\zeta\omega_n$$

$$\frac{k_\mu k_0 k_2 k_m}{T_m} = \omega_n^2$$

Λύνοντας τις δύο εξισώσεις ως προς τις ζητούμενες τιμές κερδών k_1, k_2 προκύπτουν οι νέες σχέσεις

$$k_1 = \frac{2T_m\zeta\omega_n - 1}{k_m}$$

$$k_2 = \frac{T_m\omega_n^2}{k_\mu k_0 k_m}$$

στους παραπάνω τύπους, το ζ δηλώνει τον συντελεστή απόσβεσης και το ω_n την φυσική συχνότητα. Από την προδιαγραφή για απουσία υπερύψωσης, προκύπτει απαίτηση για συντελεστή απόσβεσης $\zeta \geq 1$. Από την θεωρία Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου Ι ισχύει ότι

1. Για $\zeta = 1$: προκύπτει διπλή πραγματική ρίζα και κρίσιμη απόκριση. Οι ρίζες και ο χρόνος αποκατάστασης δίνονται από τις σχέσεις

$$\rho_{1,2} = -\sigma = -\zeta\omega_n = \omega_n$$

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\omega_n}$$

2. Για $\zeta > 1$: προκύπτουν δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες και υπεραποσβενύμενη απόκριση. Οι ρίζες και ο χρόνος αποκατάστασης δίνονται από τις σχέσεις

$$\rho_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$\rho_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$t_s = \frac{4}{\rho_1}$$

Μια καλή μεθοδολογία που θα μπορούσε να έχει εφαρμοστεί είναι αρχικά ο προσδιορισμός της τιμής του συντελεστή ζ . Το επιλεγμένο αυτό ζ μπορεί να είναι ίσο ή μεγαλύτερο της μονάδας. Ανάλογα με αυτήν την σχεδιαστική επιλογή, στο επόμενο βήμα πρέπει να χρησιμοποιηθούν και οι αντίστοιχοι τύποι για τον προσδιορισμό των ριζών και της φυσικής συχνότητας. Η φυσική συχνότητα ω_n είναι και αυτή σχεδιαστική παράμετρος και θα μπορούσε να έχει επιλεχθεί έτσι ώστε να προκύψει ο επιθυμητός χρόνος αποκατάστασης. Εφόσον γίνουν όλοι αυτοί οι υπολογισμοί του ζ , ω_n και άρα του t_s , μπορούν πλέον να χρησιμοποιηθούν οι παραπάνω σχέσεις λυμένες ως προς τα κέρδη k_1, k_2 , να γίνει αντικατάσταση των τιμών ω_n και ζ και να υπολογιστούν τα κέρδη για τα οποία το σύστημα κλειστού βρόχου θα έχει την απόκριση που σχεδιάστηκε.

Όσο για το κέρδος k_r , σύμφωνα με τον τύπο θα είναι ίσο με

$$k_r = \frac{1}{Dk(A - Bk)^{-1}B + D - C(A - Bk)^{-1}B}$$

όμως στην συγκεκριμένη περίπτωση $D = 0$ άρα

$$k_r = -\frac{1}{C(A - Bk)^{-1}B}$$

Υπολογίζεται ο όρος

$$\begin{aligned} C(A - Bk)^{-1}B &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{k_1 k_m - 1}{T_m} & \frac{k_2 k_m}{T_m} \\ k_\mu k_0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{-k_m}{T_m} \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{k_\mu k_0} \\ \frac{T_m}{k_2 k_m} & \frac{-(k_1 k_m - 1)}{k_2 k_m k_\mu k_0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-k_m}{T_m} \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{T_m}{k_2 k_m} & \frac{1 - k_1 k_m}{k_2 k_m k_0 k_\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-k_m}{T_m} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{-k_m}{T_m} \frac{T_m}{k_2 k_m} = \frac{-1}{k_2} \end{aligned}$$

με αντικατάσταση στην αρχική σχέση

$$k_r = -\frac{1}{C(A - Bk)^{-1}B} = -\frac{1}{-\frac{1}{k_2}} \Rightarrow k_r = k_2$$

Τελικά, κατά την θεωρητική ανάλυση και την προετοιμασία του εργαστηρίου επιλέχθηκε $\zeta = 1$. Όπως περιγράφηκε αναλυτικά παραπάνω, για δοσμένο t_s γινόταν ο προσδιορισμός της φυσικής συχνότητας, των ριζών και τελικά των κερδών k_1, k_2 (αυτόματα από τον κώδικα matlab). Έγιναν πολλές δοκιμές για όλο και μικρότερες τιμές του χρόνου αποκατάστασης. Εννοείται πως για κάθε συνδυασμό k_1, k_2 που προέκυπτε γινόταν έλεγχος για να εξασφαλιστεί ότι πληρούνται ταυτόχρονα και οι προδιαγραφές που είχαν προκύψει κατά την ανάλυση ευστάθειας κατά Routh - Hurwitz

Ακολουθούν τα διαγράμματα των καταστάσεων (θέσης και ταχύτητας), το διάγραμμα της εισόδου ελέγχου και του σφάλματος καθώς και κοινό διάγραμμα της τρέχουσας και της επιθυμητής θέσης. Οι τιμές των κερδών στις οποίες αντιστοιχούν τα ακόλουθα διαγράμματα είναι

$$k_1 = 1.5$$

$$k_2 = 4$$

$$k_r = k_2 = 4$$

δηλαδή, τελικά ο ελεγκτής που υλοποιήθηκε έχει την μορφή

$$u = -1.5 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + 4 \cdot r(t)$$

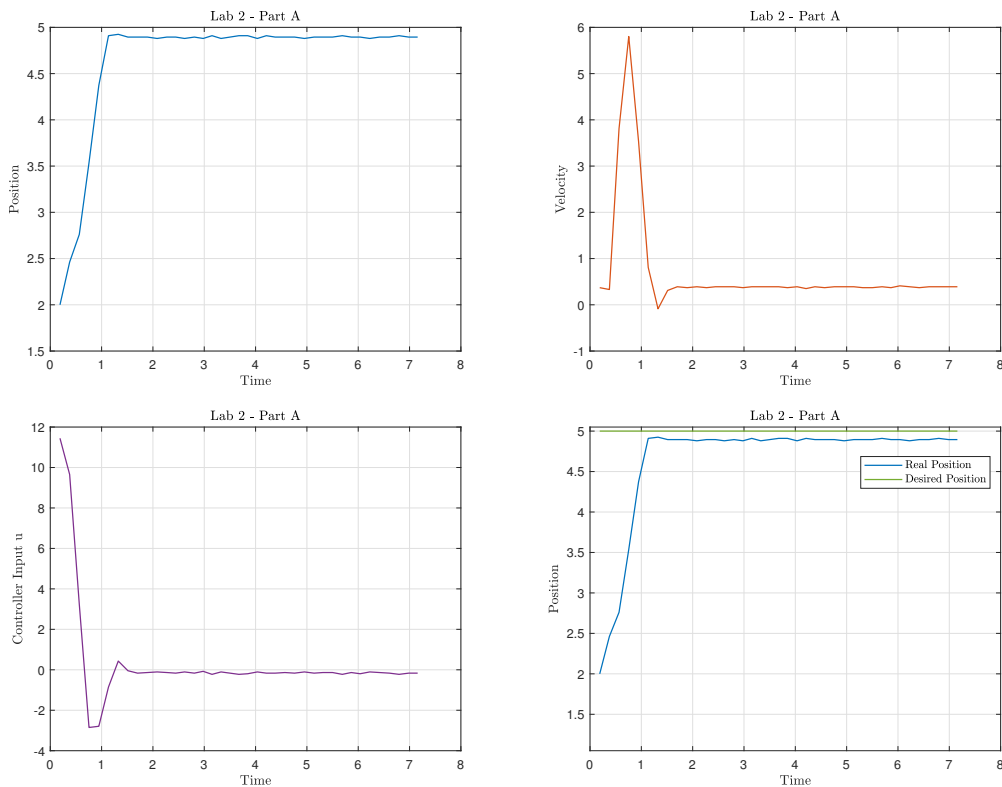
με $r(t) = \text{constant} = 5$.

Η μεθοδολογία αυτή ίσως να μην είναι η βέλτιστη καθώς αφήνει μεγάλο περιθώριο για σχεδιαστικές επιλογές. Αυτό σημαίνει ότι και πάλι δεν έχει εντοπιστεί ένα στενό διάστημα εντός του οποίου θα βρίσκεται η βέλτιστη λύση. Παρόλ'αυτά, προσφέρει έναν τρόπο να ρυθμίσει κανείς άμεσα τα χαρακτηριστικά της απόκρισης, πειράζοντας τις τιμές του ζ και του ω_n κατευθείαν και όχι έμμεσα επιλέγοντας κέρδη τα οποία δεν είναι προφανές το πως επηρεάζουν την συμπεριφορά του συστήματος.

Σημειώνεται ότι οι τιμές αυτές, προέκυψαν με βάση την θεωρητική ανάλυση που προηγήθηκε αλλά και έπειτα από μια διαδικασία trial and error κατά την διάρκεια του εργαστηρίου. Τα συγκεκριμένα κέρδη επιλέχθηκαν καθώς όχι μόνο ικανοποιούν την ευστάθεια και την απουσία ταλαντώσεων αλλά παρουσιάζουν και τον ελάχιστο χρόνο αποκατάστασης συγκριτικά με όλες τις υπόλοιπες δοκιμές που έγιναν.

Ερώτημα 1

Στα παρακάτω διαγράμματα φαίνεται η επίδραση του ελεγκτή γραμμικής ανάδρασης καταστάσεων. Σημειώνεται ότι ως τάση αναφοράς θ_{ref} ορίζεται να είναι τα 5 Volt ενώ ως αρχική θέση του κινητήρα επιλέγονται τα 2 Volt.



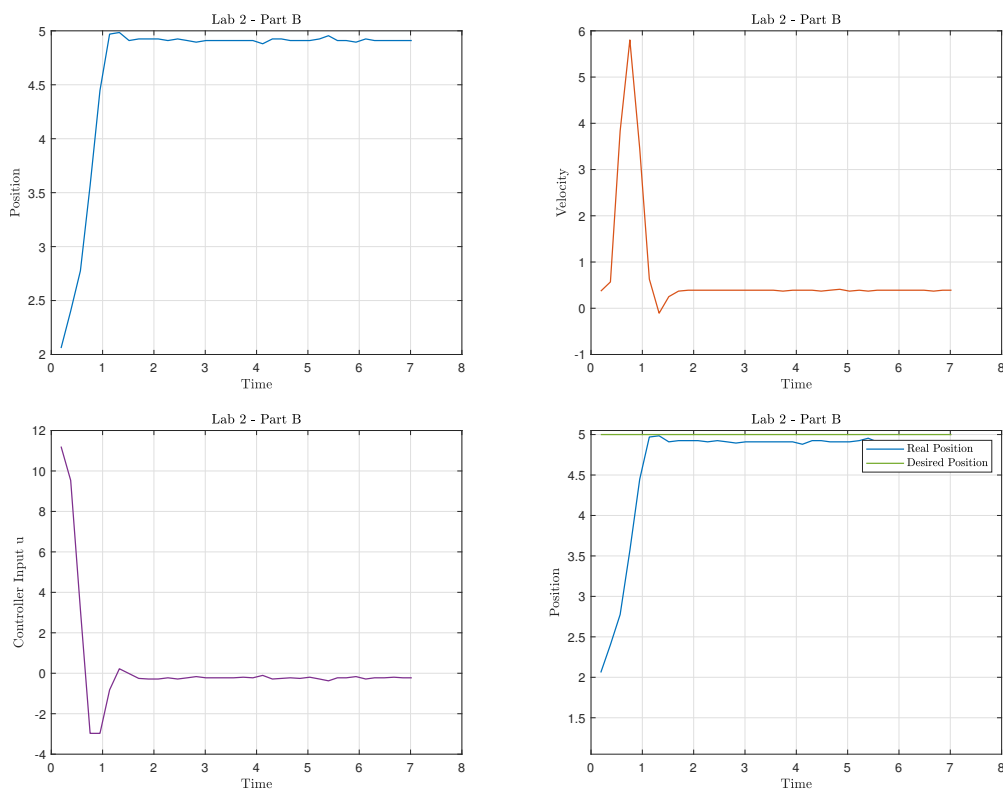
Φαίνεται πως η απόκριση του συστήματος δεν παρουσιάζει υπερύψωση και ο χρόνος αποκατάστασης έχει μικρή τιμή. Παρατηρείται βέβαια ένα σφάλμα μόνιμης κατάστασης. Σε επόμενες επαναλήψεις και προκειμένου να διορθωθεί το σφάλμα αυτό, επιλέχθηκαν μεγαλύτερες τιμές στα κέρδη οι οποίες όντως μειώναν το σφάλμα μόνιμης κατάστασης αλλά προκαλούσαν και υπερύψωση. Γι'αυτόν τον λόγο αποφασίστηκε να κρατηθούν αυτές οι τιμές κερδών με τις οποίες φαίνεται να γίνεται ένα καλό trade off σφάλματος μόνιμης κατάστασης και απουσίας υπερύψωσης.

Ερώτημα 2

Η ύπαρξη σφάλματος στην μόνιμη κατάσταση παρατηρήθηκε πολύ πιο έντονα σε περιπτώσεις που δοκιμάστηκαν μικρές τιμές των κερδών και μάλιστα μικρές τιμές στο k_2 και άρα στο k_r . Δεν αποθηκεύτηκαν τα διαγράμματα από αυτά τα σενάρια δυστυχώς αλλά υπήρχαν και δοκιμές που η τιμή της θέσης σταθεροποιούνταν ακόμη και στο 4.3, δηλαδή το σφάλμα μόνιμης είχε μέγεθος και πάνω από 0.5. Το σφάλμα αυτό θα μπορούσε να μειωθεί με αύξηση της τιμής των κερδών k_2 και k_r , αλλά όπως αναλύθηκε και προηγουμένως και αυτή η αύξηση έχει κάποιους περιορισμούς και κάποιες αρνητικές επιπτώσεις στην απόκριση του συστήματος. Ένας άλλος τρόπος με τον οποίο θα μπορούσε να μειωθεί το σφάλμα αυτό, είναι με δυναμική ανάδραση καταστάσεων, κάτι το οποίο γίνεται στην εργαστηριακή άσκηση 3.

Ερώτημα 3

Επανάληψη της διαδικασίας για τα κέρδη που υπολογίστηκαν στο 1ο ερώτημα με κατεβασμένο το μαγνητικό φρένο του κινητήρα.

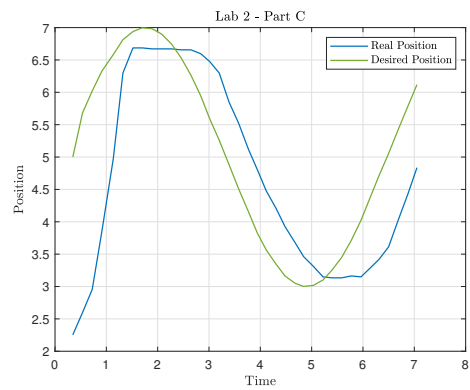
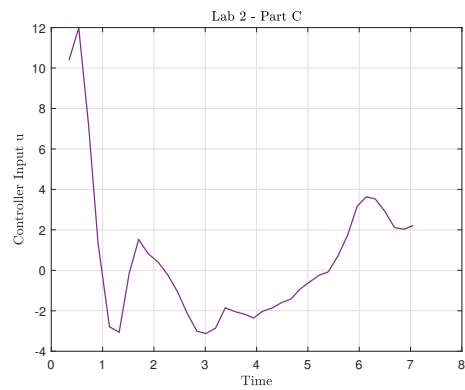
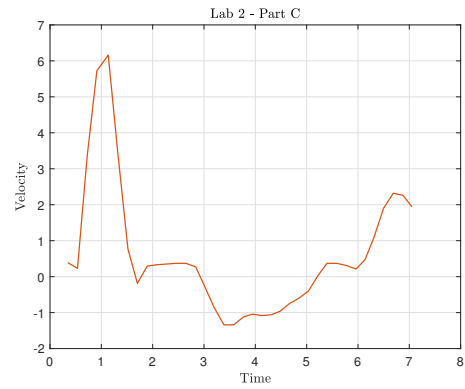
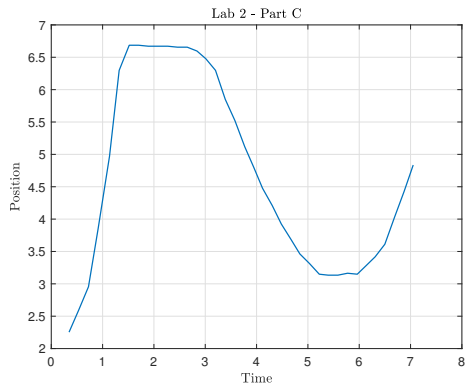


Απ'ότι φαίνεται από τα διαγράμματα, δεν παρατηρείται κάποια ιδιαίτερη διαφορά σε σχέση με πριν. Κανονικά το μαγνητικό φρένο του κινητήρα λειτουργεί σαν είσοδος διαταραχών αλλά κάτι τέτοιο δεν φαίνεται από τα διαγράμματα. Από υπόδειξη που έγινε κατά την διάρκεια του εργαστηρίου ήταν αρκετά πιθανό να μην παρατηρηθεί ιδιαίτερη διαφορά καθώς το μαγνητικό φρένο δεν λειτουργούσε σωστά. Μπορεί επίσης να οφείλεται σε σφάλμα κατά την μοντελοποίηση.

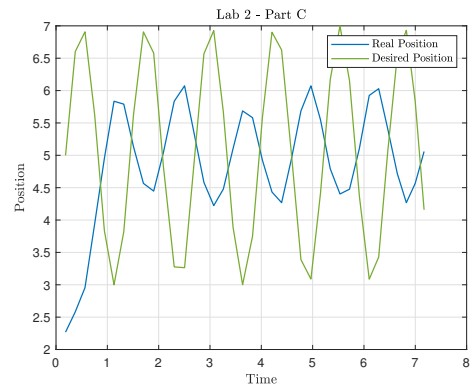
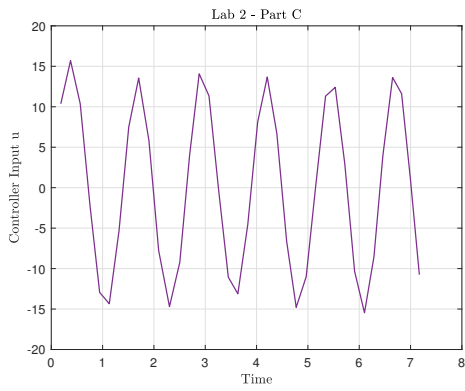
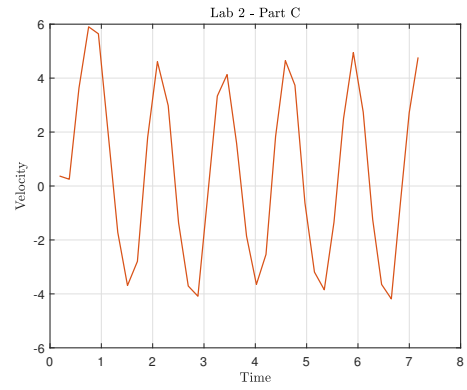
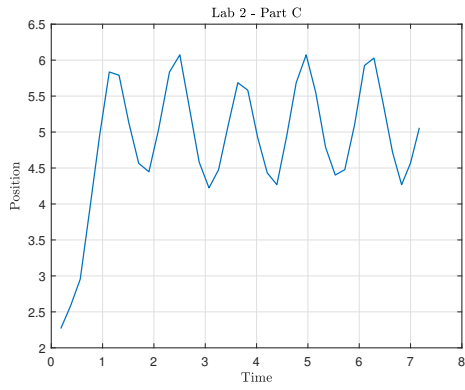
Ερώτημα 4

Επανάληψη της διαδικασίας για τα κέρδη που υπολογίστηκαν στο 1ο ερώτημα χωρίς το μαγνητικό φρένο, αλλά για $\theta_{ref}(t) = 5 + 2\sin(\omega t)$.

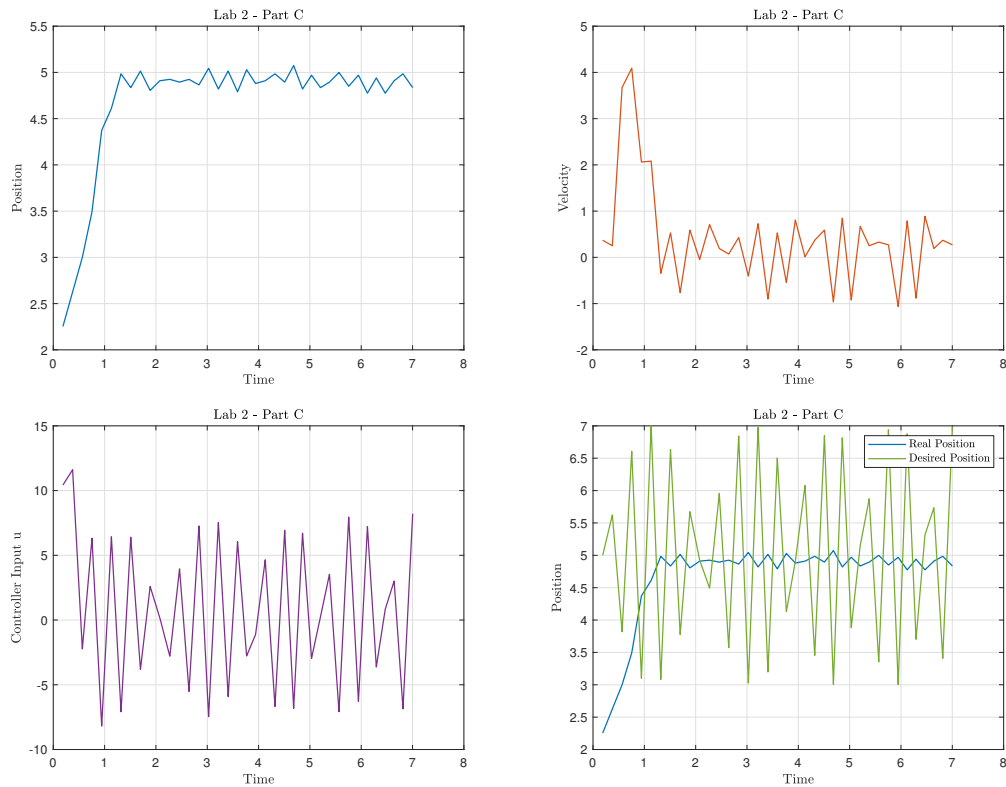
Επιλογή για το $\omega = 1 \text{ rad/s}$



Επιλογή για το $\omega = 5 \text{ rad/s}$



Επιλογή για το $\omega = 15 \text{ rad/s}$



Από τα διαγράμματα είναι ξεκάθαρο πως για μεγαλύτερες συχνότητες η απόκριση του συστήματος μοιάζει με την απόκριση του συστήματος στο 2ο ερώτημα. Αυτό είναι και το αναμενόμενο αφού μεγάλη τιμή στο ω_n σημαίνει ότι η συχνότητα της κυματομορφής πλησιάζει την συχνότητα της δειγματοληψίας και επομένως το πλάτος της κυματομορφής δεν έχει μεγάλη διαφορά στην τιμή του από δειγματοληψία σε δειγματοληψία.