

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

ΕΥΦΥΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

Κουκουλέτσου Αικατερίνη 10218

Ιανουάριος 2025

Εισαγωγή

Η παρούσα εργασία εστιάζει στον έλεγχο ενός συστήματος που αποτελείται από δύο ανεστραμμένα εκκρεμή, τα οποία συνδέονται μεταξύ τους με ελατήριο και αποσβεστήρα. Κάθε εκκρεμές ελέγχεται μέσω της ροπής που ασκείται στη βάση του από έναν ηλεκτρικό κινητήρα.

Για τα περισσότερα μεγέθη του δυναμικού συστήματος η τιμή τους θεωρείται άγνωστη. Επομένως ο έλεγχος που χρησιμοποιήθηκε είναι όχι μόνο προσαρμοστικός αλλά αξιοποιεί και την βασική λογική των νευρωνικών δικτύων:

$$f(x) = \theta^T \cdot \Phi(x)$$

θεωρώντας δηλαδή ότι οποιαδήποτε άγνωστη συνάρτηση των μεταβλητών κατάστασης του δοσμένου συστήματος είναι εφικτό να προσεγγιστεί ικανοποιητικά καλά από ένα σύνολο συναρτήσεων βάσεις $\Phi(x)$ πολλαπλασιασμένες από τα αντίστοιχα βάρη, με τις τιμές των βαρών αυτών να ανανεώνονται έπειτα από κάθε επανάληψη έως ώτου επιτευχθεί σύγκλιση μεταξύ της πραγματικής και της επιθυμητής τροχιάς παρακολούθησης.

Το σύστημα είναι σε μορφή Brunovsky. Οι ελεγκτές u_1 και u_2 , που αντιστοιχούν στις ροπές που εφαρμόζονται στις βάσεις των εκκρεμών. Και ο έλεγχος έχει στόχο να επιτύχει παρακολούθηση της επιθυμητής τροχιάς $\theta_{1_{desired}}$ και $\theta_{2_{desired}}$ αντίστοιχα.

Δυναμικό Σύστημα

Το δυναμικό σύστημα για τα δύο εκκρεμή περιγράφεται από τις ακόλουθες εξισώσεις

$$J_1 \cdot \ddot{\theta}_1 = m_1 \cdot g \cdot r \cdot \sin(\theta_1) - 0.5 \cdot F \cdot r \cdot \cos(\theta_1 - \theta) - T_1 + u_1$$

$$J_2 \cdot \ddot{\theta}_2 = m_2 \cdot g \cdot r \cdot \sin(\theta_2) + 0.5 \cdot F \cdot r \cdot \cos(\theta_2 - \theta) - T_2 + u_2$$

όπου

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{r}{2}(\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1))}{d + \frac{r}{2}(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1))} \right)$$

$$F = k \cdot (x - l) + b \cdot \dot{x}$$

$$x = \sqrt{d^2 + d \cdot r \cdot (\sin(\theta_1) - \sin(\theta_2)) + r^2 \frac{1 - \cos(\theta_2 - \theta_1)}{2}}$$

και το \dot{x} είναι η χρονική παράγωγος του x επομένως παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει

$$\dot{x} = \frac{d \cdot r \cdot (\cos(\theta_1) \cdot \dot{\theta}_1 - \cos(\theta_2) \cdot \dot{\theta}_2) + \frac{r^2}{2} \cdot \sin(\theta_2 - \theta_1) \cdot (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)}{2\sqrt{d^2 + d \cdot r \cdot (\sin(\theta_1) - \sin(\theta_2)) + r^2 \frac{1 - \cos(\theta_2 - \theta_1)}{2}}}$$

Στις παραπάνω εξισώσεις το T_i δίνεται από τον τύπο

$$T_i = \sigma_0 \cdot \tau_i + \sigma_1 \cdot \dot{\tau}_i + \sigma_2 \theta_i$$

με το $\dot{\tau}_i$ να είναι ίσο με

$$\dot{\tau}_i = \dot{\theta}_i - \sigma_0 \frac{|\dot{\theta}_i|}{T_c + (T_s - T_c) \cdot e^{-|\dot{\theta}_i/\dot{\theta}_s|}} \tau_i$$

όπου i είναι αντίστοιχα ο δείκτης 1 και 2 για το πρώτο και δεύτερο εκκρεμές.

Από τις παραπάνω εξισώσεις, οι τιμές των d, r, l είναι γνωστές. Ενώ οι τιμές των $J_1, J_2, m_1, m_2, g, k, b, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dot{\theta}_s, T_c, T_s$ είναι άγνωστες αλλά αυστηρά θετικές με $T_s > T_c$. Η δύναμη F όπως και τα x, \dot{x} δεν μετρώνται απευθείας. Το ίδιο ισχύει και για τα $T_i, \tau_i, \dot{\tau}_i$. Αντίθετα τα $\theta_i, \dot{\theta}_i$ μετρώνται με τη βοήθεια κατάλληλων αισθητήρων.

Κατά την επίλυση, ο ελεγκτής που υλοποιήθηκε αντιμετωπίζει την δύναμη F και τα $T_i, \tau_i, \dot{\tau}_i$ συνολικά ως μια άγνωστη μη γραμμική συνάρτηση $f(x)$ και εκτιμάει την τιμή της με την πάροδο του χρόνου οπότε δεν είναι ούτε ως ή άλλως αναγκαίο να μετρώνται απευθείας. Αρκεί το διάνυσμα μεταβλητών κατάστασης να είναι μετρήσιμο, κάτι το οποίο ισχύει. Επισημαίνεται επίσης, ότι ο ελεγκτής δεν θα εκτιμήσει τις πραγματικές για κάθε μία από τις άγνωστες παραμέτρους αλλά ότι συνολικά θα εκτιμήσει την συνάρτηση $f(x)$.

Ένα σημείο που πρέπει να διευκρινιστεί είναι ότι αποφασίστηκε κατά την επίλυση να αντιμετωπιστεί το συνολικό δυναμικό σύστημα σαν δύο ξεχωριστά για λόγους ευκολίας αφού το επέτρεπε το γεγονός ότι τα θ_i και $\dot{\theta}_i$ για $i = 1, 2$ είναι μετρήσιμα από κατάλληλους αισθητήρες. Επομένως για το σύστημα 1 οι μεταβλητές θ_2 και $\dot{\theta}_2$ δεν αντιμετωπίζονται ως μεταβλητές κατάστασης αλλά θεωρούνται απλές μετρήσεις των οποίων οι τιμές είναι διαθέσιμες σε κάθε χρονική στιγμή. Το αντίστοιχο ισχύει και για το σύστημα 2. Καθώς

λοιπόν αντιμετωπίζονται σαν δύο διαφορετικά συστήματα, πρέπει να γίνει η εκτίμηση της $f_1(x), f_2(x), g_1(x), g_2(x)$. Προκειμένου να έρθει το σύστημα σε μορφή εξισώσεων κατάστασης, θέτω ως μεταβλητές κατάστασης

$$y_1 = \theta_1 \Rightarrow \dot{y}_1 = \dot{\theta}_1 = y_2$$

$$y_2 = \dot{\theta}_1 \Rightarrow \dot{y}_2 = \ddot{\theta}_1$$

αρα

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = \frac{m_1 \cdot g \cdot r}{J_1} \sin(y_1) - \frac{0.5}{J_1} \cdot F \cdot r \cdot \cos(y_1 - \theta) - \frac{1}{J_1} \cdot T_1 + \frac{1}{J_1} \cdot u_1$$

ομοίως για το δεύτερο εκκρεμές

$$\dot{y}_3 = y_4$$

$$\dot{y}_4 = \frac{m_2 \cdot g \cdot r}{J_2} \sin(y_3) + \frac{0.5}{J_2} \cdot F \cdot r \cdot \cos(y_3 - \theta) - \frac{1}{J_2} \cdot T_2 + \frac{1}{J_2} \cdot u_2$$

Μορφή Brunovsky

Τα συστήματα είναι στην γενική μορφή Brunovsky, δηλαδή

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

...

$$\dot{x}_n = f(x) + g(x) \cdot u$$

και η έξοδος είναι

$$y = x_1$$

οπου x είναι όλο το διάνυσμα μεταβλητών κατάστασης

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T,$$

και πρέπει να είναι μετρήσιμο, προδιαγραφή που τηρείται εφόσον διευκρινίζεται από την εκφώνηση ότι τα $\theta_i, \dot{\theta}_i$ για $i = 1, 2$ μετρώνται με κατάλληλους αισθητήρες. Σημειώνεται ότι το y εδώ συμβολίζει την έξοδο και δεν έχει καμία σχέση με τις μεταβλητές κατάστασης y_1, y_2, y_3, y_4 που ορίστηκαν στην προηγούμενη ενότητα.

Αντιστοίχιση Νευρωνικής Μορφής με Δυναμικό Σύστημα

Για το εκκρεμές 1 και άρα για το πρώτο σύστημα εξισώσεων κατάστασης η $f_1(y)$ και η $g_1(y)$ είναι οι εξής:

$$f_1(y_1, y_2) = \frac{m_1 \cdot g \cdot r}{J_1} \sin(y_1) - \frac{0.5}{J_1} \cdot F \cdot r \cdot \cos(y_1 - \theta) - \frac{1}{J_1} \cdot T_1$$
$$g_1(y_1, y_2) = \frac{1}{J_1}$$

και η έξοδος είναι

$$y = x_1$$

άρα το θ_1 όπως ορίζεται και από την εκφώνηση. Να σημειωθεί ότι η f είναι όντως συνάρτηση του y_1 και του y_2 , απλά το y_2 δεν φαίνεται γιατί είναι κρυμμένο μέσα στο F . Αντίστοιχα για το εκκρεμές 2

$$f_2(y_3, y_4) = \frac{m_2 \cdot g \cdot r}{J_2} \sin(y_3) + \frac{0.5}{J_2} \cdot F \cdot r \cdot \cos(y_3 - \theta) - \frac{1}{J_2} \cdot T_2$$
$$g_2(y_3, y_4) = \frac{1}{J_2}$$

Υπόθεση 1

Για την συνάρτηση g ισχύει ότι $|g(x)| \geq g^* > 0 \forall x \in R^n$. Και το πρόσημό της είναι γνωστό. Άρα $\text{sgn}(g(x))$ είναι γνωστό. **Η υπόθεση ισχύει** αφού η $g(x)$ είναι ίση με

$$g_i(x) = \frac{1}{J_i}, i = 1, 2$$

όπου το J_i είναι μια άγνωστη σταθερά που όμως είναι αυστηρά θετική. Επομένως υπάρχει g^* τέτοιο ώστε

$$|g(x)| = \left| \frac{1}{J_i} \right| = \frac{1}{J_i} \geq g^* > 0$$

και το πρόσημο της είναι γνωστό. Η υπόθεση αυτή, αποτελεί αναγκαία συνθήκη ελεγχσιμότητας. Όσο για την συνάρτηση

$$E(t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} \cdot e(t)$$

όπου n είναι ο βαθμός του συστήματος και άρα είναι ίσος με 2, επομένως για την συγκεκριμένη περίπτωση προκύπτει

$$E(t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right) \cdot e(t) = \frac{de(t)}{dt} + \lambda \cdot e(t) = \dot{e}(t) + \lambda \cdot e(t)$$

όπου λ μια σχεδιαστική σταθερά που επιλέχθηκε κατά την διαδικασία του tuning των παραμέτρων και έπειτα από προσομοιώσεις και $e(t)$ είναι το σφάλμα παρακολούθησης της τροχιάς και άρα είναι ίσο με

$$e(t) = \theta(t) - \theta_d(t)$$

Προς αυτήν την κατεύθυνση ορίζεται η v

$$v = -y_d^{(n)} + (a_{n-1}e^{n-1} + \dots + a_1\dot{e})$$

η οποία για $n = 2$ γίνεται ίση με

$$v = -\ddot{y}_d + a_1\dot{e}$$

Αν οι δύο συναρτήσεις ήταν γνωστές μη-γραμμικότητες, τότε ο θ θα ήταν εφικτός μέσω του ελεγκτή

$$u = \frac{1}{g(x)} \cdot (-f(x) - v(t) - k \cdot E)$$

Όμως οι συναρτήσεις είναι άγνωστες επομένως ο ελεγκτής αυτός είναι μη πραγματοποιήσιμος. Παρόλ'αυτά είναι δυνατόν να προσεγγιστούν με την βοήθεια γραμμικών ως προς τα βάρη νευρωνικών δικτύων τύπου RBF μονοστρωματικά (με ένα layer). Συγκεκριμένα, επειδή οι f και g , είναι συνεχείς συναρτήσεις των μεταβλητών κατάστασης υπάρχουν υλοποιήσεις μονοστρωματικών νευρωνικών δικτύων RBF κατάλληλου πλήθους νευρωνίων, έστω L_f και L_g αντίστοιχα έτσι ώστε:

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^{L_f} \theta_{f_i}^* \varphi_{f_i}(x) = \theta_f^{*T} \varphi_f(x)$$

$$g(x) \approx \sum_{i=1}^{L_g} \theta_{g_i}^* \varphi_{g_i}(x) = \theta_g^{*T} \varphi_g(x)$$

όπου φ_f, φ_g είναι τα διανύσματα προεπιλεγμένων συναρτήσεων βάσης του νευρωνικού. Οι διαφορές των πραγματικών f, g και των προσεγγίσεών τους $\omega_f(x)$ και $\omega_g(x)$ αντίστοιχα είναι:

$$\omega_f(x) = f(x) - \theta_f^{*T} \cdot \varphi_f(x)$$

$$\omega_g(x) = g(x) - \theta_g^{*T} \cdot \varphi_g(x)$$

Τα $\omega_f(x)$ και $\omega_g(x)$ ονομάζονται σφάλματα προσέγγισης. Στις παραπάνω εκφράσεις τα θ_f^* και θ_g^* αναφέρονται ως τα άγνωστα βέλτιστα βάρη των αντίστοιχων νευρωνικών διότι

$$\mathcal{G}_f^* = \arg \min_{\hat{\theta}_f \in \mathbb{R}^{L_f}} \left\{ \sup_{x \in \Omega} |f(x) - \hat{\theta}_f^T \varphi_f(x)| \right\},$$

$$\mathcal{G}_g^* = \arg \min_{\hat{\theta}_g \in \mathbb{R}^{L_g}} \left\{ \sup_{x \in \Omega} |g(x) - \hat{\theta}_g^T \varphi_g(x)| \right\}.$$

Οι εκτιμήσεις των αγνώστων συναρτήσεων $f(x), g(x)$ όπως αυτές παράγονται από τα αντίστοιχα νευρωνικά είναι

$$f(\hat{x}, t) = \hat{\theta}_f^T \varphi_f(x)$$

$$g(\hat{x}, t) = \hat{\theta}_g^T \varphi_g(x)$$

όπου τα $\hat{\theta}_f^T$ και τα $\hat{\theta}_g^T$ είναι οι εκτιμήσεις των βέλτιστων βαρών.

Για την ανάλυση ακολουθείται η **Ισοδυναμία Βεβαιότητας (Certainty Equivalence)** και άρα ο ελεγκτής που προτείνεται είναι ο

$$u = \frac{1}{g(\hat{x}, t)} \cdot (-f(x, t) - \hat{v}(t) - k \cdot E)$$

(Στην μεθοδολογία που ακολουθεί έχει ληφθεί ήδη υπόψιν το πρόβλημα που προκύπτει από την εκτίμηση του $g(\hat{x}, t)$ που βρίσκεται στον παρονομαστή του κλάσματος και ενδέχεται περιστασιακά να διέλθει από το μηδέν (zero-crossing) και να οδηγήσει το σύστημα σε αστάθεια.)

Η Lyapunov που επιλέγεται είναι η

$$L = \frac{E^2}{2} + \frac{\tilde{\theta}_f^T \Gamma_f^{-1} \tilde{\theta}_f}{2} + \frac{\tilde{\theta}_g^T \Gamma_g^{-1} \tilde{\theta}_g}{2}$$

όπου οι πίνακες Γ_f, Γ_g είναι διαγώνιοι με γνήσια θετικά στοιχεία και $\tilde{\theta}_f = \hat{\theta}_f - \theta_f^*$ και $\tilde{\theta}_g = \hat{\theta}_g - \theta_g^*$. Η Lyapunov παραγωγίζεται και επιλέγονται οι προσαρμοστικοί νόμοι (νόμοι εκμάθησης) ως εξής

$$\dot{\hat{\theta}}_f = -\sigma_f \cdot \hat{\theta}_f + E \cdot \Gamma_f \cdot \varphi_f(x)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_g = -\sigma_g \cdot \hat{\theta}_g + E \cdot \Gamma_g \cdot \varphi_g(x)$$

Με αυτούς τους προσαρμοστικούς νόμους και με χρήση του Λήμματος που αναφέρεται στις σημειώσεις προκύπτει ελεγκτής τέτοιος ώστε

1. όλα τα σήματα στον κλειστό βρόχο είναι φραγμένα
2. το σφάλμα παρακολούθησης της εξόδου $e(t) = y(t) - y_d(t)$ θα είναι ομοιόμορφα τελικώς φραγμένο ως προς το σύνολο $E_0 = \left\{ e \in R : |e(t)| \leq \frac{\bar{E}}{\lambda^{n-1}} \right\}$ όπου \bar{E} μια θετική σταθερά.

Υλοποίηση Ελεγκτή

Επομένως, ο ελεγκτής υλοποιείται τελικά από τις παρακάτω εξισώσεις

$$u = u_a - (n_a \cdot |u_a|^2 + n_b \cdot |u_b|^2) E \operatorname{sgn}(g(x))$$

όπου τα u_a και τα u_b δίνονται από τις σχέσεις

$$u_a = -\frac{\hat{\theta}_g^T \varphi_g(x)}{(\hat{\theta}_g^T \varphi_g(x))^2 + \delta} u_b$$

$$u_b = \hat{\theta}_f^T \varphi_f(x) + v + kE + nE$$

και οι εκτιμήσεις των διανυσμάτων των βαρών μεταβάλλονται στον χρόνο με ρυθμο που δίνεται από τις παρακάτω παραγωγούς.

$$\dot{\hat{\theta}}_f = -\sigma_f \cdot \hat{\theta}_f + E \cdot \Gamma_f \cdot \varphi_f(x)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_g = -\sigma_g \cdot \hat{\theta}_g + E \cdot \Gamma_g \cdot \varphi_g(x)$$

Για το $E(t)$ που στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι $n = 2$ και για τα δύο συστήματα άρα

$$E(t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right) \cdot e(t) = \frac{de(t)}{dt} + \lambda e(t) = \dot{e}(t) + \lambda e(t)$$

όπου τα $n_a, n_b, \delta, k, n, \sigma_f, \sigma_g$ είναι κάποιες γνήσια θετικές σχεδιαστικές σταθερές. Και $e(t)$ είναι το σφάλμα παρακολούθησης με την πρώτη παράγωγό του να ισούται με

$$e(t) = y(t) - y_d(t)$$

$$\dot{e}(t) = \dot{y}(t) - \dot{y}_d(t)$$

Συναρτήσεις Βάσης

Η επιλογή των συναρτήσεων βάσης είναι καθοριστική για την επιτυχή λειτουργία του ελεγκτή καθώς πρέπει να είναι τέτοιες ώστε να μπορεί ο συνδυασμός τους να προσεγγίσει την άγνωστη συνάρτηση $f_i(x)$ και $g_i(x)$. Αποφασίστηκε να χρησιμοποιηθούν 4 στο πλήθος Gaussian συναρτήσεις βάσεων για την προσέγγιση κάθε συνάρτησης. Δηλαδή το διάνυσμα των βαρών έχει διαστάσεις 4×1 και άρα το transpose του διανύσματος είναι 1×4 και το διάνυσμα των συναρτήσεων βάσης έχει διαστάσεις 4×1 . Και άρα τελικά το αποτέλεσμα της πράξης δίνει $f(x)$ διαστάσεων 1×1 . Με άλλα λόγια για κάθε εκτίμηση ισχύει ο παρακάτω τύπος:

$$f(x) = [w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4]^T \cdot [\Phi_1(x) \ \Phi_2(x) \ \Phi_3(x) \ \Phi_4(x)]$$

όπου το x είναι όλο το διάνυσμα μεταβλητών κατάστασης. Ως W_i συμβολίζονται τα βάρη (weights) και ως $\Phi_i(\mu_i, \sigma_i)$ συμβολίζεται η κάθε Gaussian η οποία έχει διαφορετική τιμή μέση τιμή μ και διασπορά σ από τις υπόλοιπες έτσι ώστε να υπάρχει μια επικάλυψη στον χώρο και να είναι επιτυχής η εκτίμηση.

Συγκεκριμένα για τις διαστάσεις της κάθε μιας βάσης, εφόσον όπου x εννοείται όλο το διάνυσμα μεταβλητών κατάστασης άρα $x = [\theta_i; \dot{\theta}_i]$, προκύπτει ότι οι συναρτήσεις που ορίζονται είναι συναρτήσεις δύο μεταβλητών, x_- και y_- . Παρά την εξάρτησή τους όμως από δύο εισόδους, επιστρέφουν τελικά μία μόνο τιμή (είναι scalar). Ο γενικός τύπος της συνάρτησης είναι ο εξής:

$$\Phi(x, y) = \exp \left(-\frac{\|\mathbf{p} - \mathbf{c}_i\|^2}{2\sigma^2} \right),$$

όπου $\mathbf{p} = [x, y]$ είναι το διάνυσμα εισόδου, $\mathbf{c}_i = [c_{i1}, c_{i2}]$ είναι τα κέντρα, και σ είναι η παράμετρος που ελέγχει το πλάτος της βάσης.

Επιλογή Τιμών

Η επιλογή πρέπει να είναι τέτοια ώστε να καλύπτεται το πεδίο ενδιαφέροντος, region of interest στο state space. Θεωρείται ότι το θ_i παίρνει τιμές στο $[-\pi/2, \pi/2]$. Για να υπάρχει και ένα περιθώριο ασφαλείας επιλέγεται το διάστημα $[-\pi, \pi]$. Για τις τιμές της $\dot{\theta}_i$ το εύρος δεν είναι τόσο προφανές. Ωστόσο μια καλή εκτίμηση είναι το διάστημα $[-10, 10]$ (κάτι το οποίο επιβεβαιώνεται τελικά και από τα διαγράμματα). Επομένως προκύπτει

$$\theta \in [-\pi, \pi], \quad \dot{\theta} \in [-10, 10]$$

Για να καλυφθεί επαρκώς το πεδίο του state space, τοποθετούνται 4 κέντρα στην περιοχή

$$\text{centers}_{f1} = \begin{bmatrix} -\pi & -10 \\ -\pi & 10 \\ \pi & -10 \\ \pi & 10 \end{bmatrix}$$

Προς αυτήν την κατεύθυνση, το σίγμα για τις συναρτήσεις RBF υπολογίζεται με βάση την απόσταση μεταξύ των κέντρων. Η τιμή του σίγμα ισούται με τη μέση απόσταση μεταξύ των κέντρων διά την ρίζα του 2

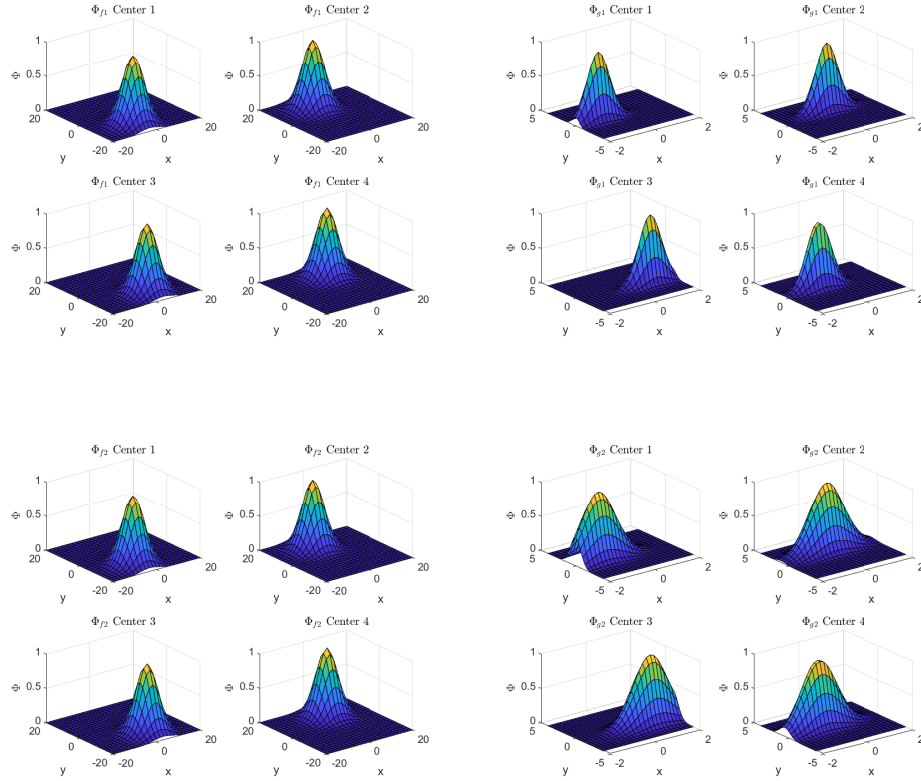
$$\sigma = \frac{\text{mean distance}}{\sqrt{2}} = 4.0611$$

Αντίστοιχα, για τις Φ_{g1} και Φ_{g2} , δεδομένου ότι οι συναρτήσεις αυτές εκτιμούν σταθερές τιμές ($g_1(x) = 1/J_1$ και $g_2(x) = 1/J_2$) η κατάσταση είναι πιο απλή. Για τα κέντρα των Φ_{g1} και Φ_{g2} γίνεται η ακόλουθη επιλογή:

$$\text{centers}_{g1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{g1} = 0.5, \quad \sigma_{g2} = 0.75$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθεί ότι, προφανώς τέτοιες επιλογές δεν είναι ούτε απόλυτες ούτε μοναδικές. Υπάρχουν άπειροι συνδυασμοί τιμών κεντρών και τιμών σ και πλήθους συναρτήσεων βάσης που δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα σύγκλισης στο σφάλμα παρακολούθησης. Η διαδικασία που ακολουθήθηκε δείχνει απλά έναν τρόπο για να γίνει μια αρχική εκτίμηση, παρέχοντας μια τεκμηριωμένη προσέγγιση, χωρίς να χρειάζεται κανείς να καταφύγει σε διαδικασίες trial-and-error.



Κώδικας

Ο κώδικας αποτελείται από τα αρχεία της *main.m*, της *odefun.m* στην οποία επιλύονται οι διαφορικές που περιγράφουν την δυναμική του συστήματος, υπολογίζεται και εφαρμόζεται ο ελεγκτής και την συνάρτηση *basisfunctions.m* για την οπτικοποίηση των συναρτήσεων βάσης στον χώρο.

Οι τιμές των παραμέτρων ειλέχθηκαν έπειτα από δοκιμές και είναι οι ακόλουθες.

Parameter	Value	Parameter	Value
λ_1	50	λ_2	90
n_{a1}	1	n_{a2}	1
n_{b1}	1	n_{b2}	1
δ_1	1	δ_2	1
k_1	50	k_2	50
σ_{f1}	0.5	σ_{f2}	0.3
σ_{g1}	0.4	σ_{g2}	0.2
Γ_{f1}	$5 \cdot I_4$	Γ_{f2}	$5 \cdot I_4$
Γ_{g1}	$3 \cdot I_4$	Γ_{g2}	$3 \cdot I_4$

Διαγράμματα

Στο διάγραμμα του ελεγκτή ως συνάρτηση του χρόνου παρατηρήθηκε ότι η έξοδος $u(t)$ λαμβάνει υπερβολικά μεγάλες τιμές, της τάξης 10^4 , και εμφανίζει ένα πολύ υψηλό peak στο $t = 6s$, με τιμή περίπου $u_1 = 1 \cdot 10^{45}$, στην προσπάθεια να διορθωθεί το tracking error. Στην πράξη, αυτό δεν είναι εφικτό καθώς όλοι οι ελεγκτές έχουν συγκεκριμένα όρια κορεσμού (saturation), πέρα από τα οποία δεν είναι δυνατό να παράγουν περαιτέρω διόρθωση.

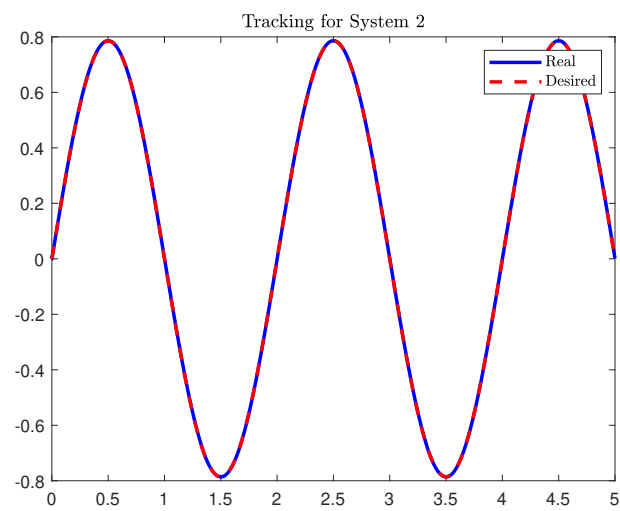
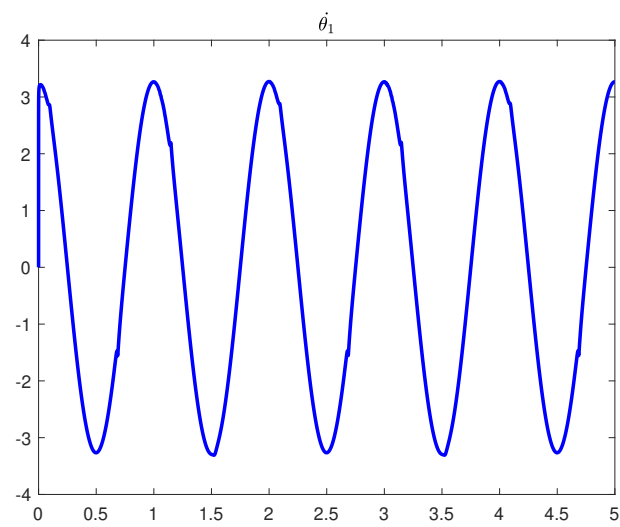
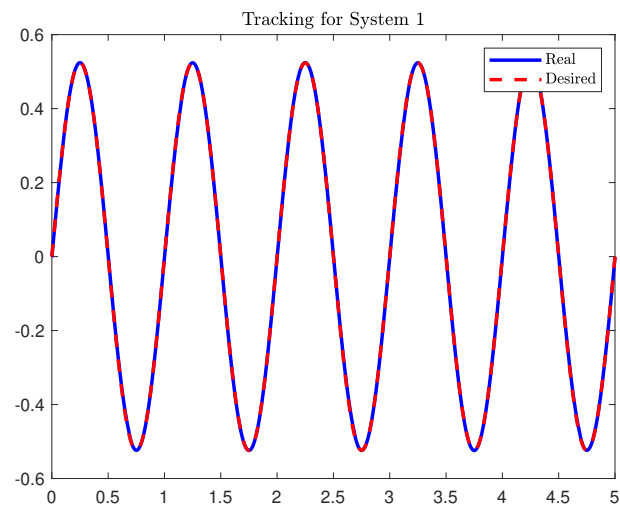
Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος, ενσωματώθηκε στον κώδικα η επίδραση του κορεσμού στις εφικτές τιμές του u . Η προσθήκη αυτή έδειξε ότι το διάγραμμα του ελεγκτή σε συνάρτηση με τον χρόνο δεν λαμβάνει πλέον μη ρεαλιστικά μεγάλες τιμές, αλλά περιορίζεται σε μικρότερα επίπεδα τιμών που έχουν υποστεί κορεσμό. Ακόμη και αν η έξοδος του ελεγκτή, υπό ιδανικές συνθήκες, ήταν διαφορετική, ο κορεσμός εξασφαλίζει ρεαλιστική απόδοση του συστήματος σε πραγματικό σενάριο.

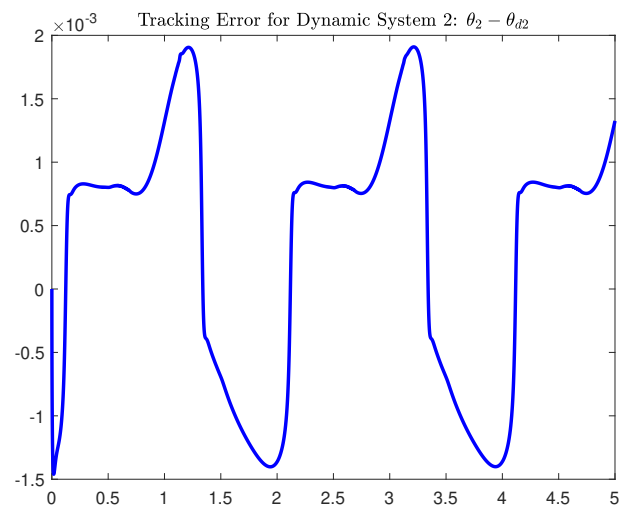
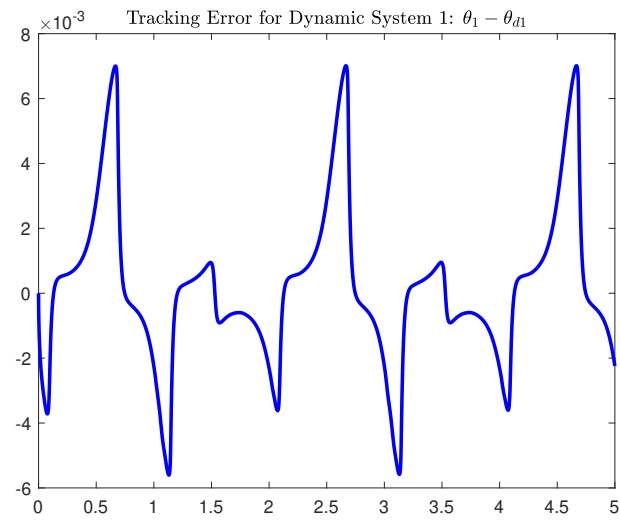
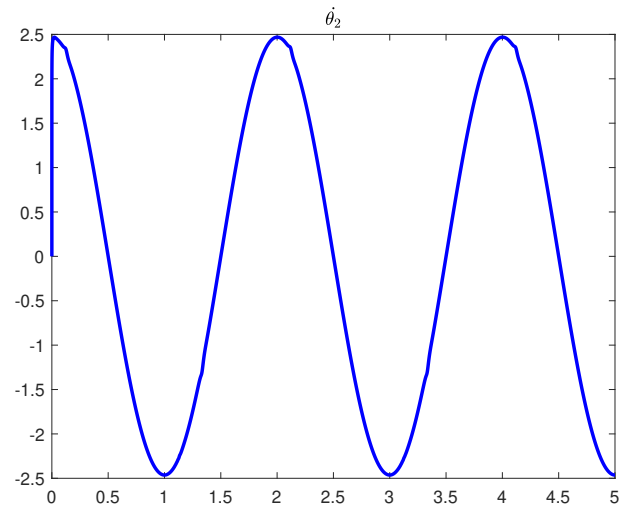
Ως αναμενόμενο, η διαδικασία παρακολούθησης (tracking) καθυστερεί περισσότερο να ολοκληρωθεί, αλλά αυτό είναι και το ρεαλιστικότερο αποτέλεσμα, λαμβάνοντας υπόψη τους φυσικούς περιορισμούς ενός πρακτικού συστήματος ελέγχου.

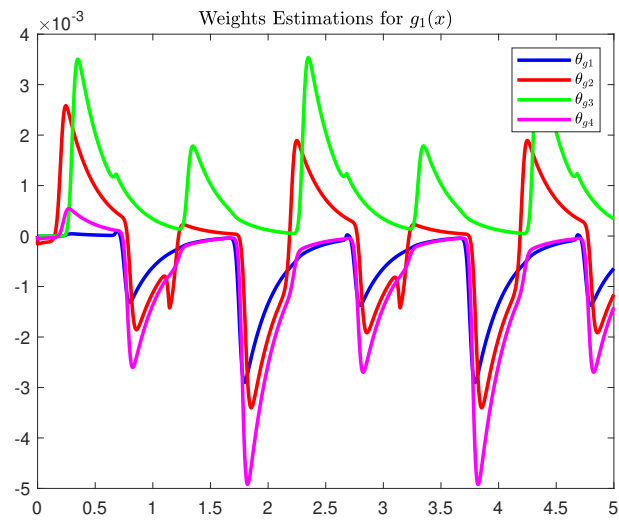
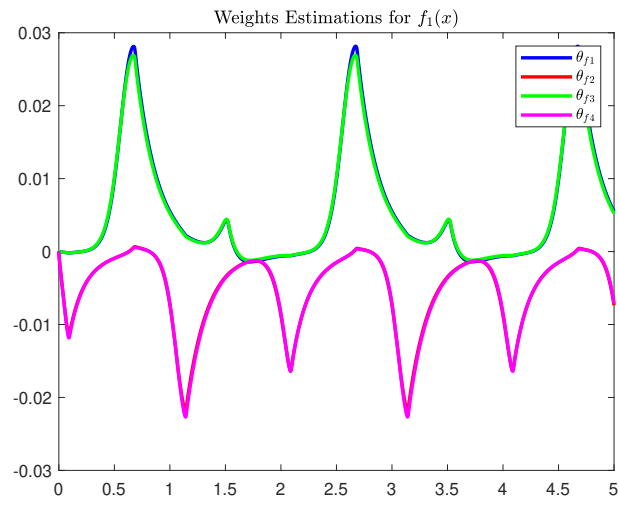
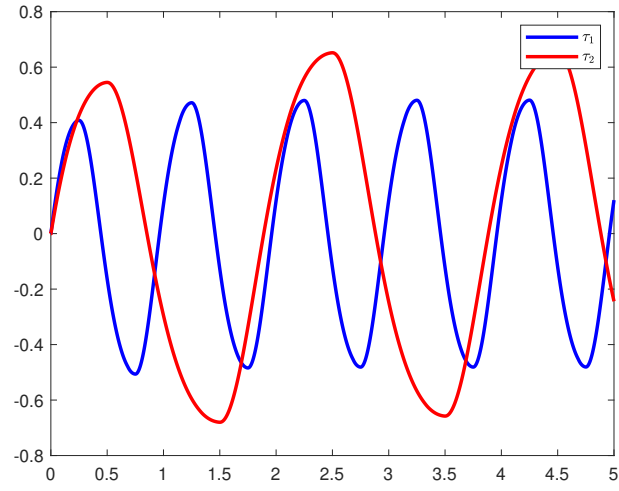
Παρατίθενται τα διαγράμματα και για saturated controller και για τις τιμές του controller έτσι ακριβώς όπως προκύπτουν από την θεωρητική ανάλυση.

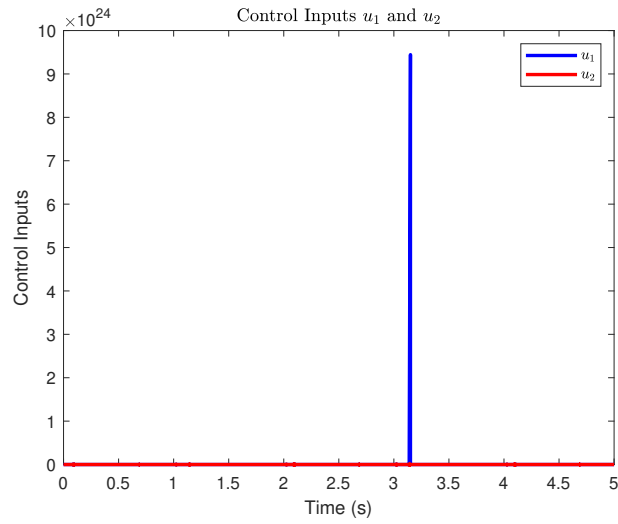
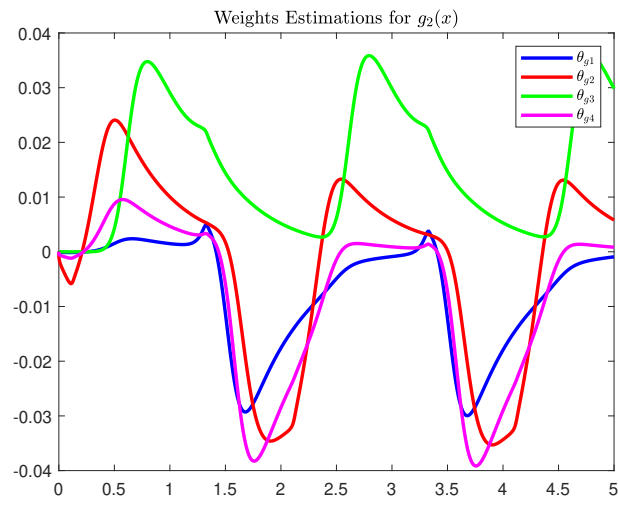
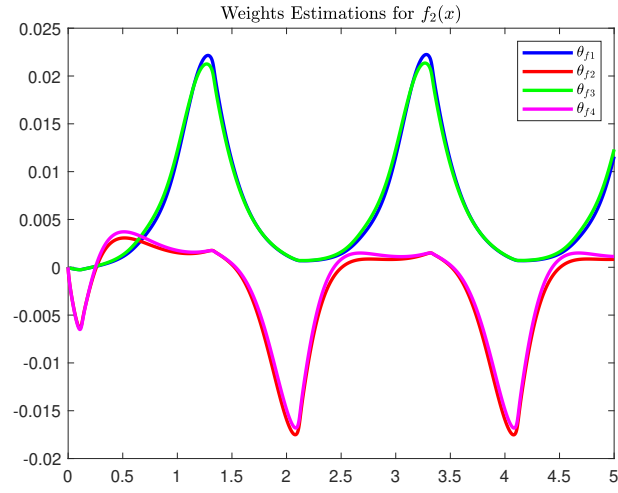
Βέβαια παίζει ρόλο και τι τιμές μπορεί να πάρει η ροπή που ασκείται από τον κινητήρα.

Διαγράμματα για non-saturated Controller

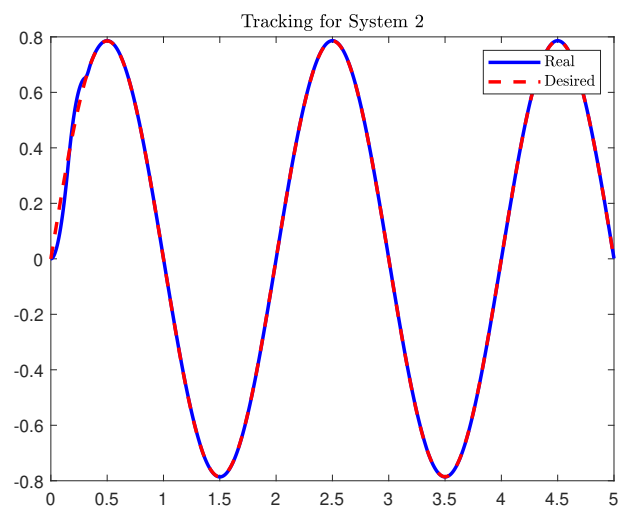
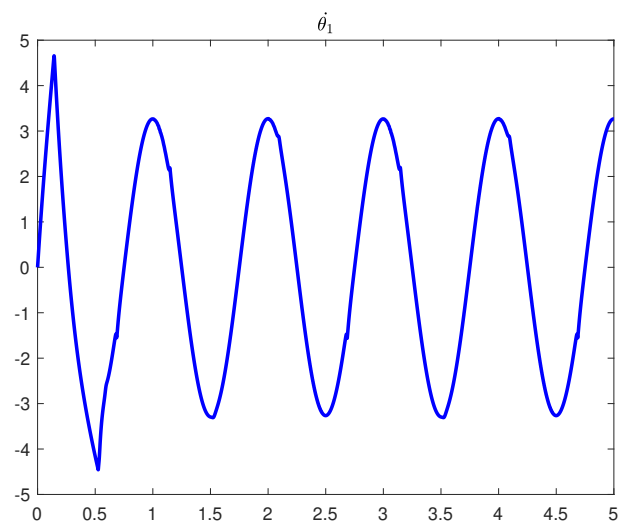
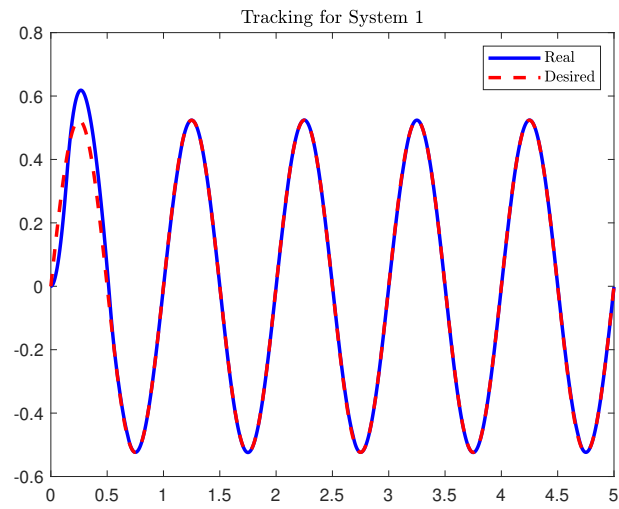


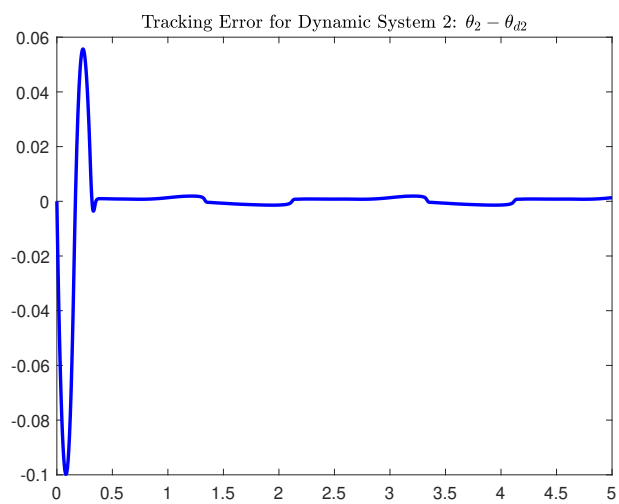
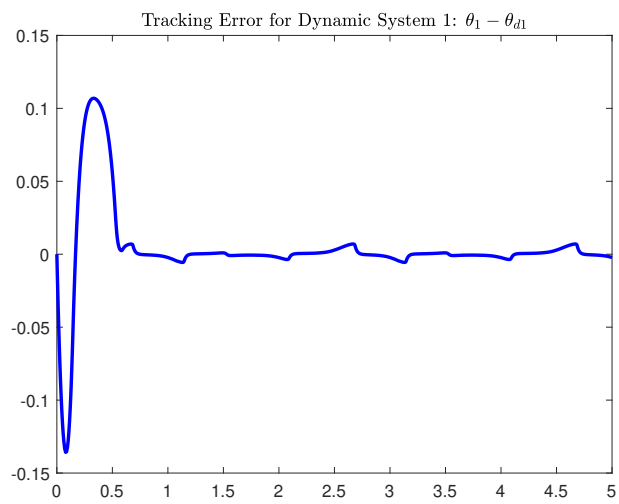
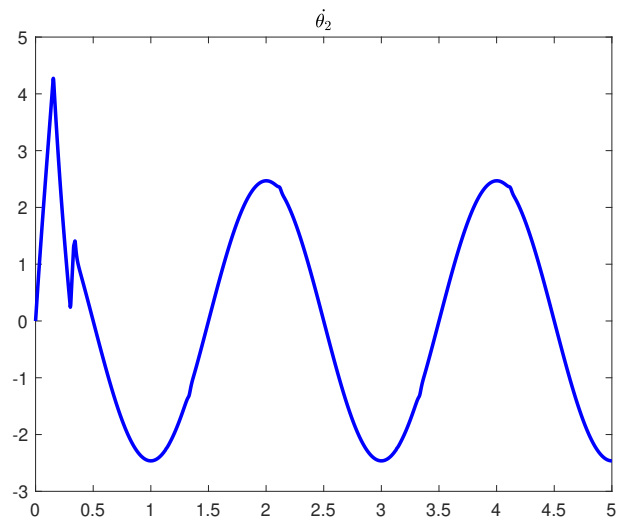


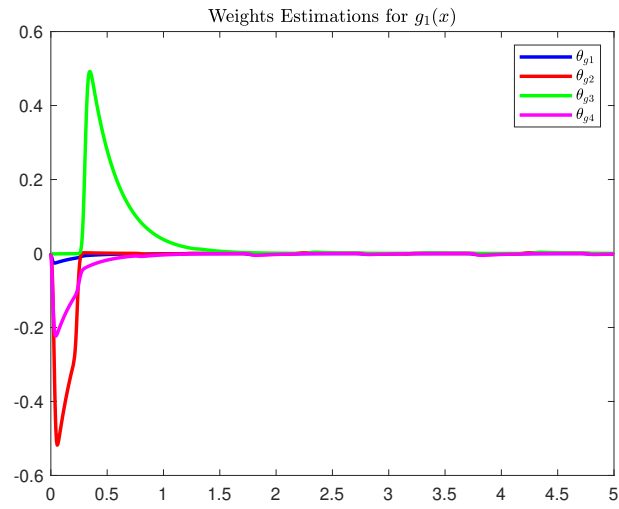
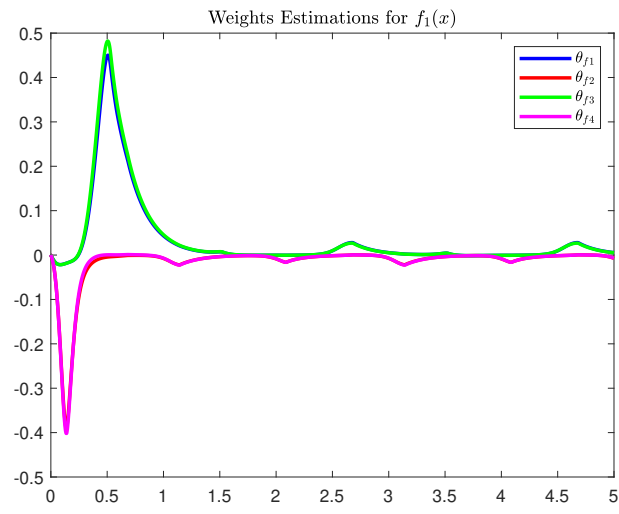
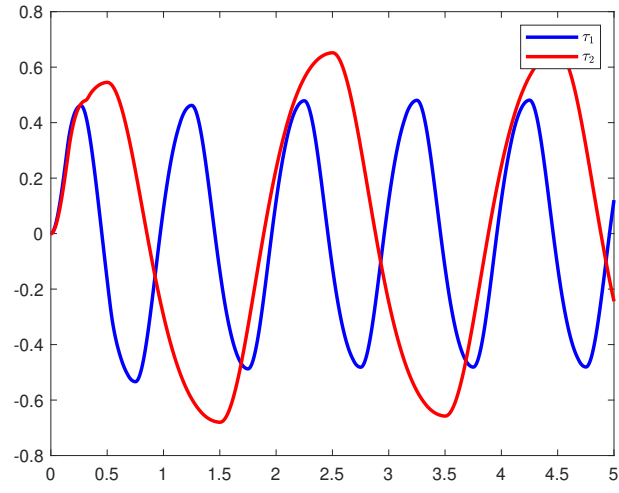


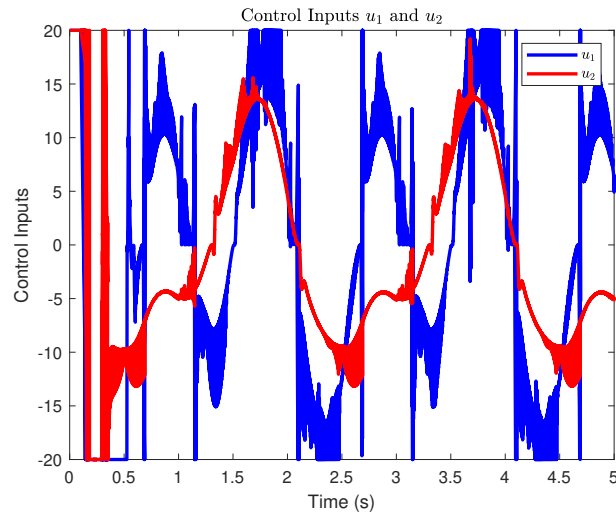
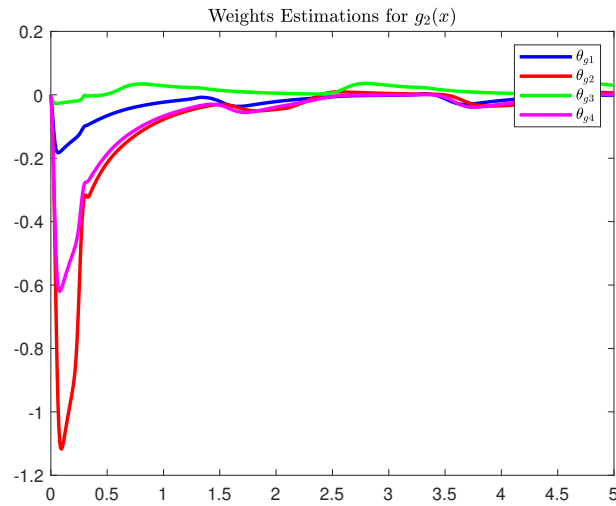
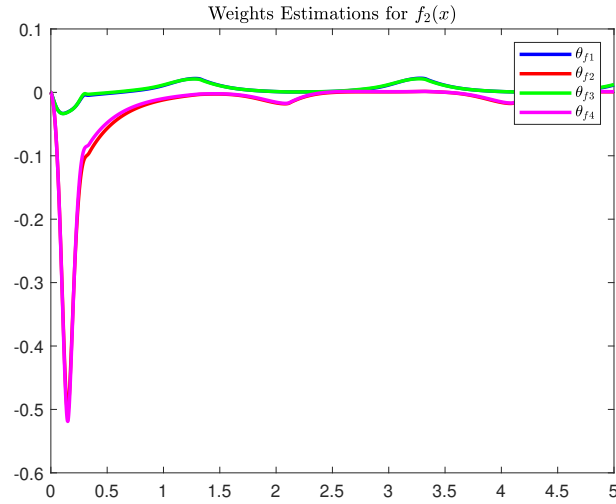


Διαγράμματα για Saturated Controller









Και στα δυο σεναρια επιτυγχανεται η παρακολούθηση τροχιάς με σφάλμα της τάξεως του 10^{-3} που είναι αποδεκτό. Φαίνεται πως όλα τα σήματα στον κλειστό βρόχο είναι φραγμένα. Και μάλιστα για την περίπτωση του saturated controller παρατηρείται και μια σύγκλιση όσον αφορά τις τιμές που τείνουν να πάρουν τα βάρη των RBF.