Τεχνικές Βελτιστοποίησης

Κουκουλέτσου Αικατερίνη 10218

14 Νοεμβρίου 2022

Περίληψη

Υλοποίηση μεθόδων βελτιστοποίησης σε περιβάλλον Μάτλαμπ. Χρηση του μαθηματικού λογισμικού για την ελαχιστοποίηση των δοσμένων κυρτών συναρτήσεων. Εύρεση ελαχίστου και σχεδιασμός των ζητούμενων γραφικών παραστάσεων . Μελέτη και σχολιασμός των αποτελεσμάτων που προκύπτουν.

1 Μέθοδος Διχοτόμου

1.1 Έλεγχος Προϋποθέσεων

Η πρώτη, η δεύτερη και η τρίτη συνάρτηση που δίνονται είναι κυρτές στο διάστημα [α, β] = [-1, 3] που μας ενδιαφέρει. Επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα θεωρήματα βελτιστοποίησης απουσία περιορισμών του κεφαλαίου 5.1.1 .

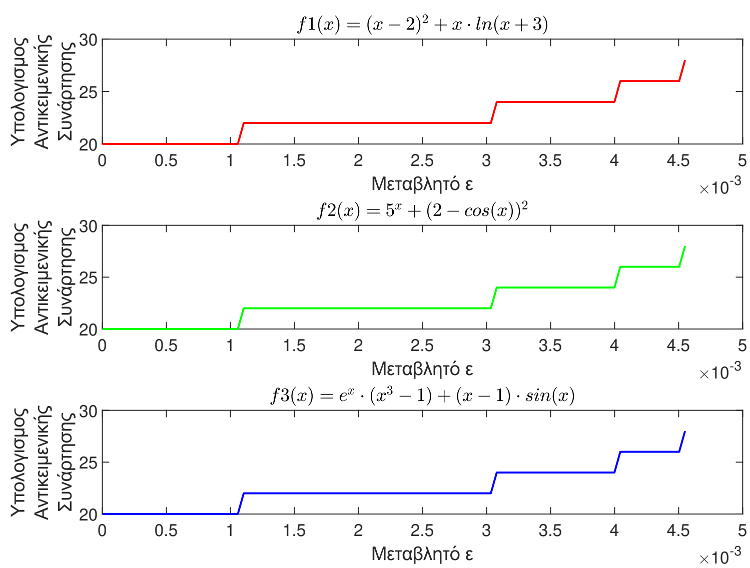
1.2 Γραφικές Παραστάσεις

Παρατίθενται 5 γραφήματα καθένα από τα οποία περιλαμβάνει και τις τρείς συναρτήσεις με την f1(x), f2(x), f3(x) σχεδιασμένες με κόκκινο, πράσινο και μπλέ αντίστοιχα.
Στο πρώτο διάγραμμα θεωρούμε το l σταθερό και ίσο με 0.01 και υπολογίζουμε την γραφική παράσταση της μεταβολής των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης συναρτήσει της μεταβολής του e σε βαθμολογημένους άξονες. Στο δεύτερο ακολουθούμε την ίδια διαδικασία αλλά αυτήν την φορά θεωρούμε σταθερό το e και ίσο με 0.001 και υπολογίζουμε την γραφική παράσταση συναρτήσει της μεταβολής του l .
Στην μέθοδο της Διχοτόμου, για k = 1 υπολογίζεται η αντικειμενική συνάρτηση 2 φορές ενώ για k = 2 υπολογίζεται 4 κ.ο.κ. Επομένως ο αριθμός υπολογισμού αντικειμενικής συνάρτησης συνδέεται με το k μέσω της σχέσης 2 x k.
Καθώς για e $\geq l/2$ ο αλγόριθμος δεν τερματίζει, για l δοσμένο και ίσο με 0.01 θα πρέπει ο βρόχος επανάληψης να μην ξεπερνάει 0.005. Επιλέγουμε τελική τιμή 0.00455.
Για το επόμενο διάγραμμα και για e σταθερό και ίσο με 0.001 πρέπει οι τιμές που θα επιλεχθούν για το l να είναι μεγαλύτερες από 2 x e επομένως επιλέγεται το l

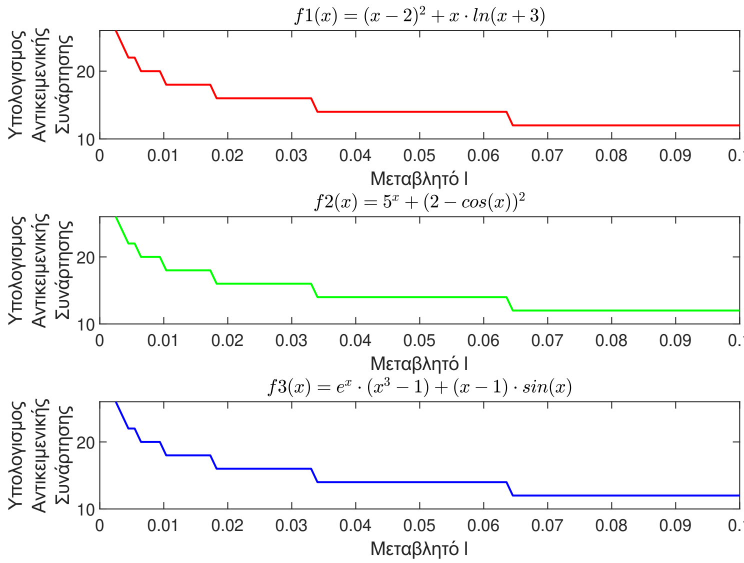
να ξεκινάει από 0.0025.
Τελος παρατίθενται 3 ακόμη γραφήματα για σταθερή τιμή του e και ίση με 0.001 και για τρεις τιμές του l , ίσες με 0.3, 0.03 και 0.003 τα οποία απεικονίζουν όλες τις μεταβολές των [ak, bk] μέχρι την εντοπισμό του διαστήματος του ελαχίστου.

1.3 Συμπεράσματα και Παρατηρήσεις

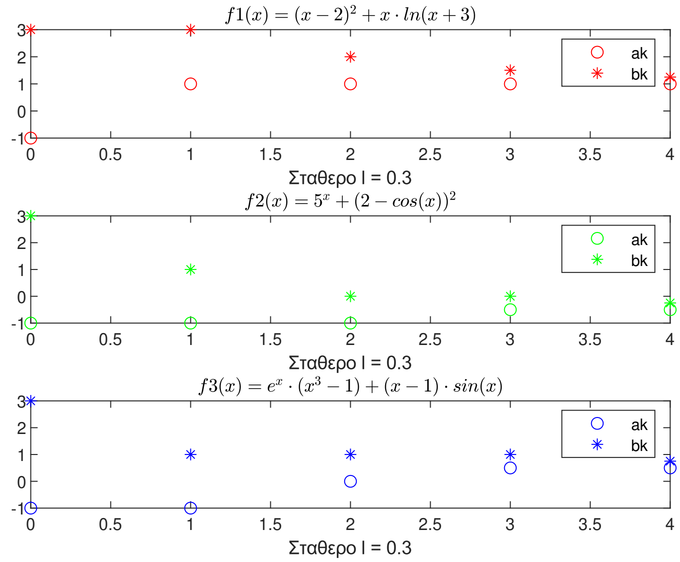
Από το πρώτο διάγραμμα φαίνεται και για τις τρεις συναρτήσεις πως όσο αυξάνεται η τιμή του e , τόσο αυξάνονται και οι επαναλήψεις, το οποίο επιβεβαιώνεται και από την θεωρία καθώς όσο μεγαλύτερη είναι η απόσταση απο την διχοτόμο, τόσο μικρότερη είναι η μεταβολή για τα διαδοχικά a(k) και a(k - 1) , b(k) και b(k - 1) . Αυτό με την σειρά του έχει ως αποτέλεσμα να απαιτούνται περισσότερες επαναλήψεις για τον εντοπισμό του διαστήματος όπου ανήκει το ελάχιστο.
Αντιθέτως, στο δεύτερο διάγραμμα, φαίνεται πως όσο αυξάνεται η τιμή του l , τόσο μειώνονται οι επαναλήψεις. Η συμπεριφορά αυτή είναι λογική αφού όσο αυξάνει η τιμή του l και άρα όσο μείωνονται οι απαιτήσεις για ακρίβεια τόσο λιγότερες θα είναι οι απαιτούμενες επαναλήψεις προκειμένου να βρεθεί το ak, bk μέσα στο ζητούμενο διάστημα.
Τέλος, τα τρία τελευταία διαγράμματα αφορούν τις σταδιακές μεταβολές των τιμών ak, bk για l = 0.003, l = 0.03 και l = 0.3 αντίστοιχα. Φαίνεται πως όσο μεγαλώνει το l λιγοστεύει το σύνολο των τιμών ak, bk και οι τιμές συγκλίνουν με λιγότερες επαναλήψεις χάνεται βέβαια ως ένα βαθμό η ακρίβεια στο τελικό διάστημα.



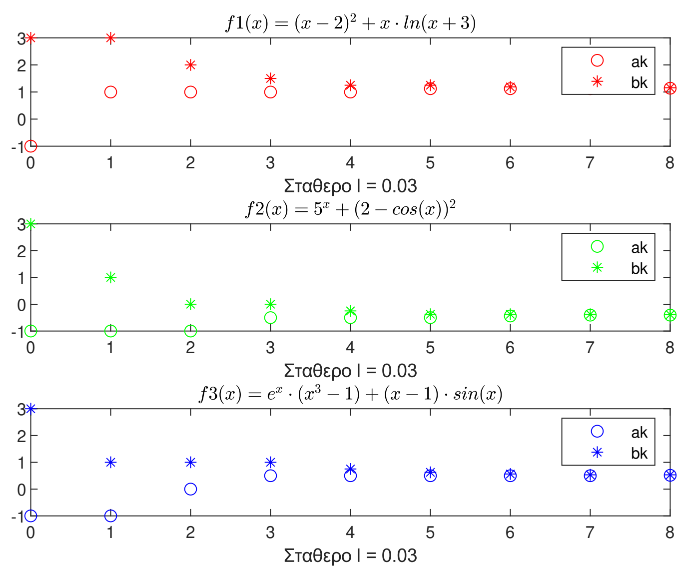
Σχήμα 1: Διάγραμμα μεταβολής αριθμού υπολογισμών αντικειμενικής συνάρτησης για διαφορετικές τιμές του ε.



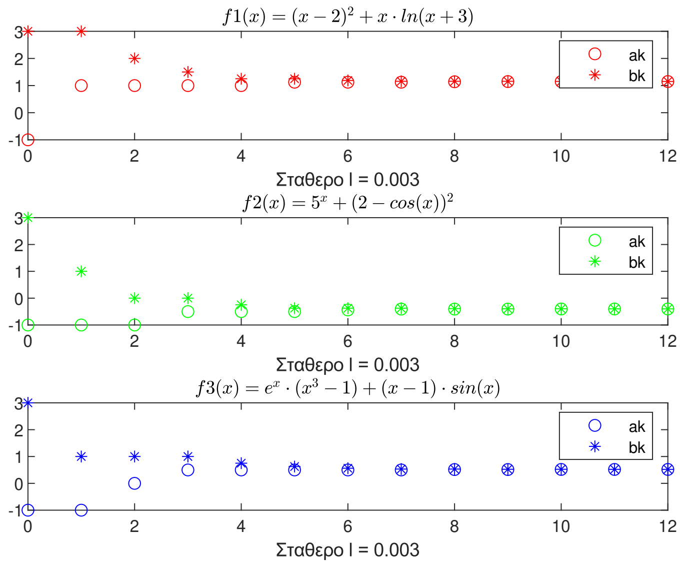
Σχήμα 2: Διάγραμμα μεταβολής αριθμού υπολογισμών αντκειμενικής συνάρτησης για διαφορετικές τιμές του λ.



Σχήμα 3: Διάγραμμα των τιμών των ακ και βκ σε κάθε επανάληψη, από το αρχικό μέχρι το τελικό διάστημα.



Σχήμα 4: Διάγραμμα των τιμών των ακ και βκ σε κάθε επανάληψη, από το αρχικό μέχρι το τελικό διάστημα



Σχήμα 5: Διάγραμμα των τιμών των ακ και βκ σε κάθε επανάληψη, από το αρχικό μέχρι το τελικό διάστημα

2 Μέθοδος Χρυσού Τομέα

2.1 Έλεγχος Προϋποθέσεων

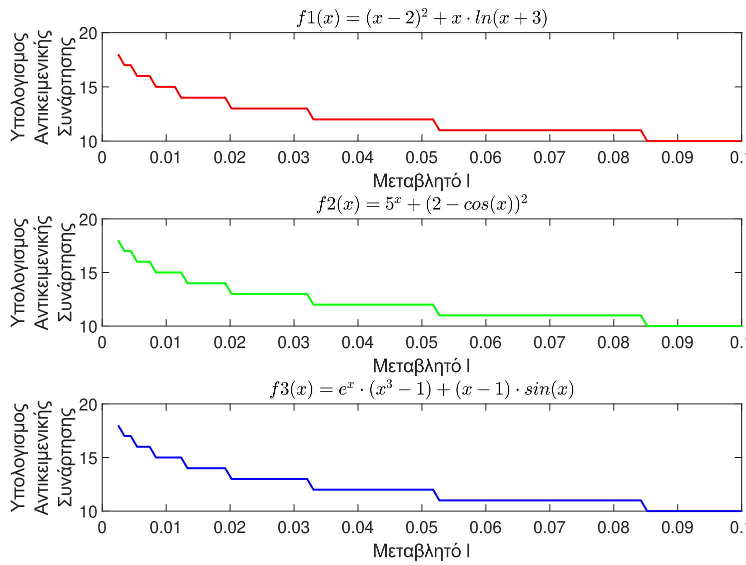
Όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη υποενότητα, μπορούμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο του Χρυσού Τομέα μόνο και μόνο επειδή οι συναρτήσεις είναι κυρτές ως άθροισμα κυρτών στο διάστημα [α, β] = [-1, 3] όπου θέλουμε να γίνει η βελτιστοποίηση.

2.2 Γραφικές Παραστάσεις

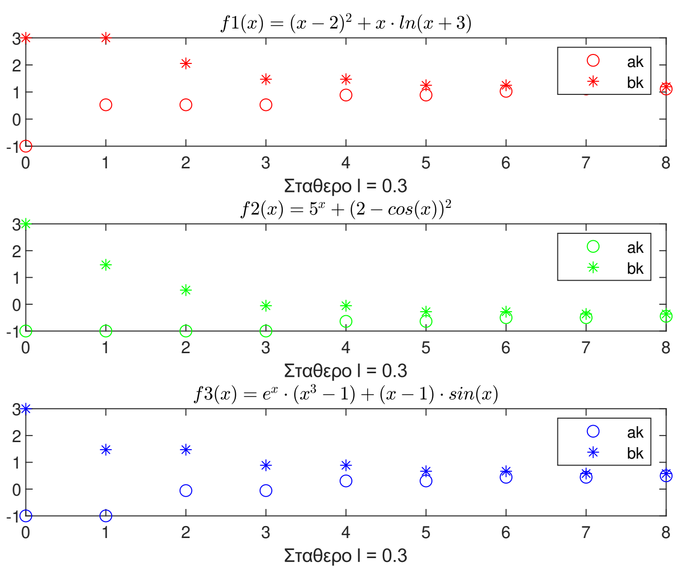
Στο πρώτο διάγραμμα απεικονίζεται η μεταβολή του αριθμού υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης για μεταβαλλόμενες τιμές του l σε βαθμολογημένους άξονες. Για τον βρόχο επανάληψης που καθορίζει τις τιμές του έχει επιλεχθεί ως αρχική τιμή το 0.0025 και ως τελική το 0.1 .
Όσον αφορά την σχέση που περιγράφει τον αριθμό υπολογισμών αντικειμενικής συνάρτησης συναρτήσει του k , για την μέθοδο του χρυσού τομέα, ισχύει ότι για k = 1 υπολογίζουμε την αντικειμενική συνάρτηση δύο φορές. Για k = 2 όμως έχουμε μόνο έναν υπολογισμό παραπάνω δηλαδή συνολικά 3 αφού για την περίπτωση που είναι αληθής η πρώτη συνθήκη δηλαδή f(x1k) > f(x2k) έχουμε καινουριο υπολογισμό για το νέο x2k που προκύπτει, ενώ για την περίπτωση που είναι αληθής η δεύτερη συνθήκη, δηλαδή έχουμε το f(x1k) < f(x2k) έχουμε καινούριο υπολογισμό για το νέο x1k που προκύπτει. Δηλαδή, σε κάθε επόμενη επανάληψη k έχουμε έναν παραπάνω υπολογισμό σε σχέση με πριν και άρα για k επαναλήψεις η σχέση που δίνει τον αριθμό υπολογισμών είναι k + 1.
Ακολουθούν πάλι τρία ακόμη διαγράμματα για κάθε συνάρτηση για l ίσο με 0.3, 0.03 και 0.003 στα οποία απεικονίζονται, σε κοινό σύστημα αξόνων, όλες οι τιμές που παίρνουν τα ak και bk έπειτα από κάθε επανάληψη.

2.3 Συμπεράσματα και Παρατηρήσεις

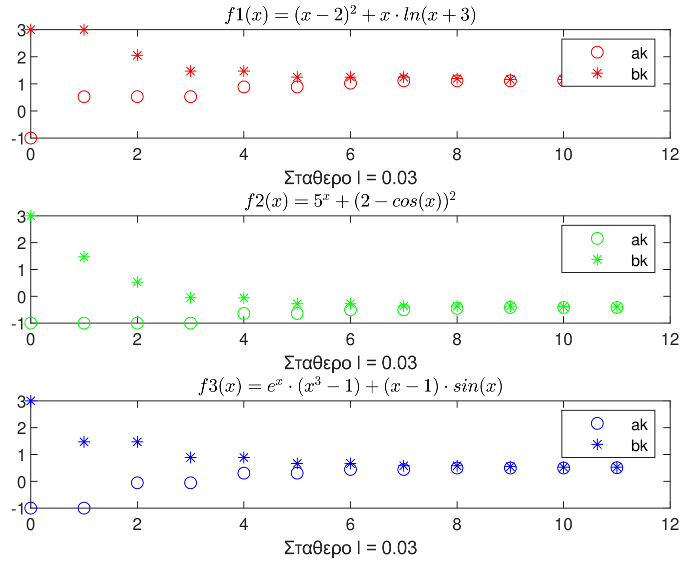
Στο πρώτο διάγραμμα παρατηρείται και πάλι πως όσο αυξάνεται το l τόσο μειώνονται οι υπολογισμοί της συνάρτησης. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού μεγαλύτερο l σημαίνει πως θα χρειαστουν λιγότερες επαναλήψεις για την εύρεση του ελαχίστου.
Όπως φαίνεται από το διάγραμμα, οταν το l κυμαίνεται στην περιοχή 0.035 και μετά οι επαναλήψεις που απαιτούνται είναι μεταξύ 10 και 15. Αντιθέτως, όταν το l είναι μικρό και άρα οι απαιτήσεις για ακρίβεια είναι μεγάλες, πχ. για l κοντά στο 0.01 απαιτούνται περισσοτερες από 15 επαναλήψεις, ενώ για την περιοχή όπου το l γίνεται πολυ μικρό, τείνει 0, οι επαναλήψεις ξεφεύγουν υπερβολικά.
Τα υπόλοιπα τρία διαγράμματα έχουν γίνει για και αυτήν την φορά για τιμές l = 0.003, l = 0.03 και l = 0.3 αντίστοιχα. Παρατηρείται και πάλι πως για μεγαλύτερες τιμές του l , τα ak και bk συγκλίνουν με λιγότερες επαναλήψεις, ενώ για μικρότερες τιμές του l , οι επαναλήψεις αυξάνονται σημαντικά. Βέβαια στην δεύτερη περίπτωση επιτυγχάνεται καλύτερη ακρίβεια.



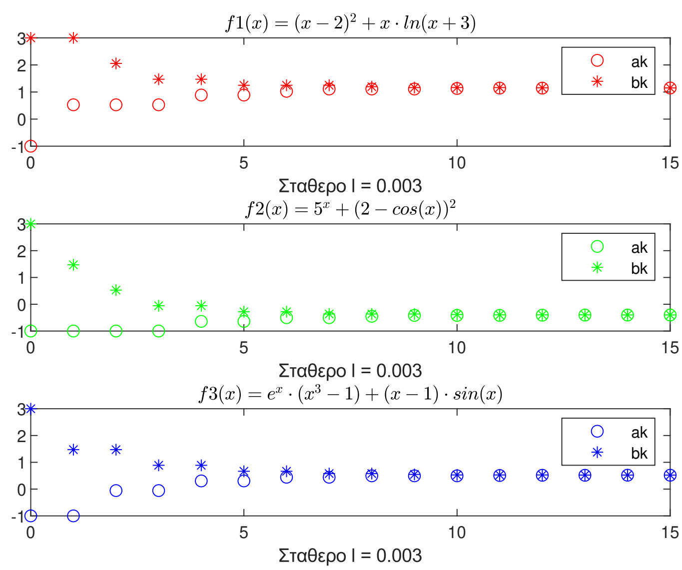
Σχήμα 6: Διάγραμμα μεταβολής αριθμού υπολογισμών αντκειμενικής συνάρτησης για διαφορετικές τιμές του λ.



Σχήμα 7: Διάγραμμα των τιμών των αk και βk σε κάθε επανάληψη, από το αρχικό μέχρι το τελικό διάστημα.



Σχήμα 8: Διάγραμμα των τιμών των αk και βk σε κάθε επανάληψη, από το αρχικό μέχρι το τελικό διάστημα.



Σχήμα 9: Διάγραμμα των τιμών των αk και βk σε κάθε επανάληψη, από το αρχικό μέχρι το τελικό διάστημα.

3 Μέθοδος Fibonacci

3.1 Έλεγχος Προϋποθέσεων

Όπως αναφέρθηκε και πιο πάνω, οι συναρτήσεις είναι κυρτές ως άθροισμα κυρτών στο διάστημα [α, β] που μας ενδιαφέρει για αυτό μπορούμε να προχωρήσουμε στην εφαρμογή της μεθόδου Fibonacci .
Σε αντίθεση με τις προηγούμενες μεθόδους, στην μέθοδο Fibonacci ο αριθμός των επαναλήψεων n είναι προκαθορισμένος από την αρχή έτσι ώστε να είναι ο μικρότερος ακέραιος n που ικανοποιεί την συνθήκη

$$(bk - ak)/l < F(n) \tag{1}$$

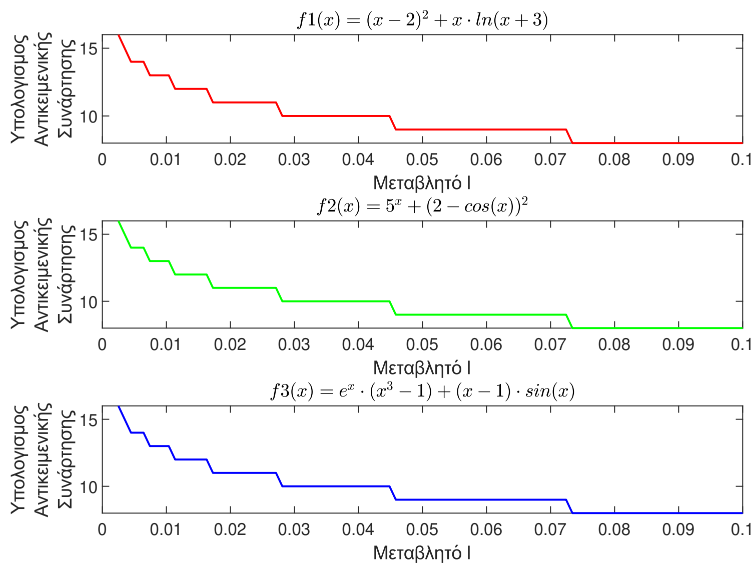
Επομένως σε αντίθεση με τις προηγούμενες μεθόδους, εκτός από τον αλγόριθμο εντοπισμού ελαχίστου κατά Fibonacci , είναι απαράιτητο να γραφεί ένας βρόχος επανάληψης ο οποίος θα υπολογίζει το μικρότερο n που ικανοποιεί τις απαιτήσεις ακρίβειας καθώς και ο αλγόριθμος υπολογισμού της τιμής του F(n), F(n - 1), F(n - 2) για το n αυτό.

3.2 Γραφικές Παραστάσεις

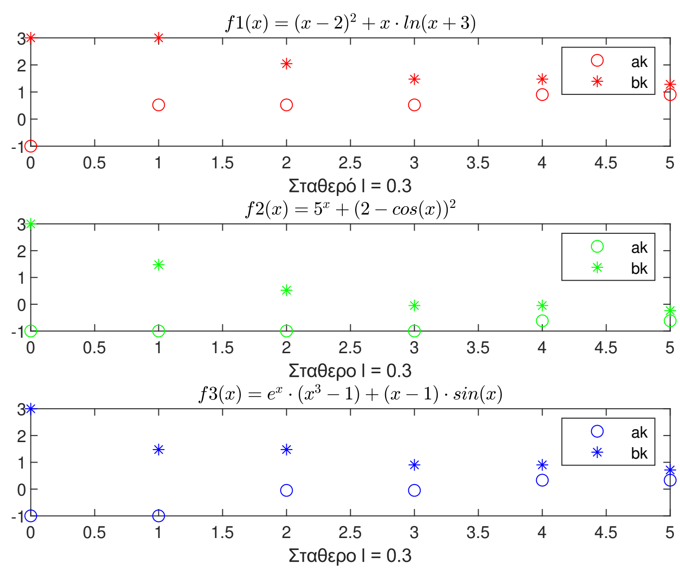
Στο πρώτο διάγραμμα, για μεταβαλλόμενο l υπολογίζουμε την γραφική παράσταση του l σε σχέση με την μεταβολή του αρθμού υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης. Οι τιμές που επιλέγονται στον βρόχο επανάληψης για το l είναι από 0.0025 έως 0.1. Στην μέθοδο Fibonacci στην πρώτη επανάληψη, γίνονται δύο υπολογισμοί της αντικειμενικής συνάρτησης. Σε κάθε επόμενη επανάληψη όμως γίνεται 1 παραπάνω υπολογισμός. Στην Fibonacci , σε αντίθεση με τις προηγούμενες μεθόδους, το υποδιάστημα αναζήτησης στην k επανάληψη δεν συνδέεται με αυτό της k - 1 με μία σταθερά αλλά μειώνεται κάθε φορά κατά F(n - k)/F(n - k + 1) και αποδεικνύεται πως για k επαναλήψεις, η σχέση που δίνει τον αριθμό υπολογισμών αντικειμενικής συνάρτησης είναι k .

3.3 Συμπεράσματα και Παρατηρήσεις

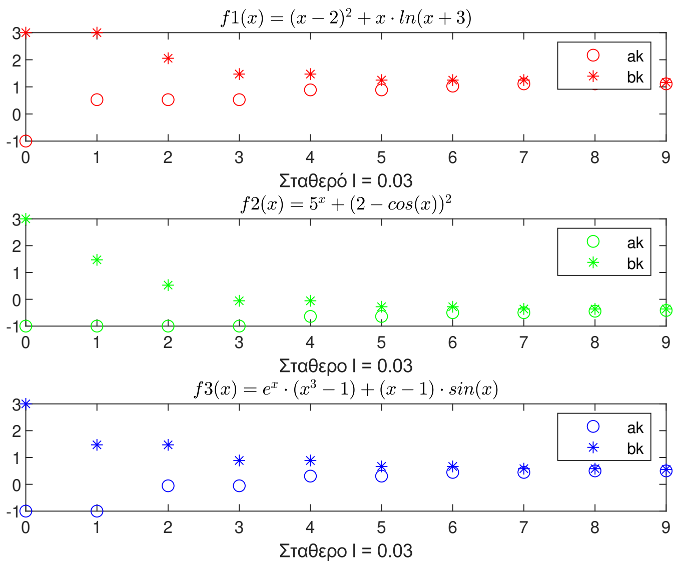
Τα συμπεράσματα που εξάγονται από το διάγραμμα συμβαδίζουν με αυτά που περιμέναμε να έχουμε. Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, στο πρώτο διάγραμμα με αύξηση του l παρατηρείται μείωση του αριθμού υπολογισμού αντικειμενικής συνάρτησης. Αυτό επιβεβαιώνεται και θεωρητικά αφού όσο το l μεγαλώνει, το κλάσμα (bk - ak)/l μικραίνει και άρα μικραίνει και ο αριθμός n για τον οποίο ικανοποιείται η συνθήκη (1). Καθώς, οι συνολικές επαναλήψεις είναι πάντα n - 2, μικρότερο n συνεπάγεται τελικά και λιγότερες επαναλήψεις.
Όσον αφορά τα υπόλοιπα τρία διαγράμματα των ak, bk που έχουν σχεδιαστεί σε κοινά διάγραμματα για l σταθερό και ίσο με 0.3, 0.03 και 0.003 αντίστοιχα, επιβεβαιώνονται ξανά τα παραπάνω συμπεράσματα αφού φαίνεται πως για μεγαλύτερα l γίνονται λιγότερες επαναλήψεις και τα ak, bk συγκλίνουν πιο γρήγορα ενώ όσο περισσότερο μειώνουμε το l τόσο περισσότερο αυξάνονται οι επαναλήψεις, πετυχαίνουμε όμως καλύτερη ακρίβεια στον εντοπισμό του ελαχίστου.



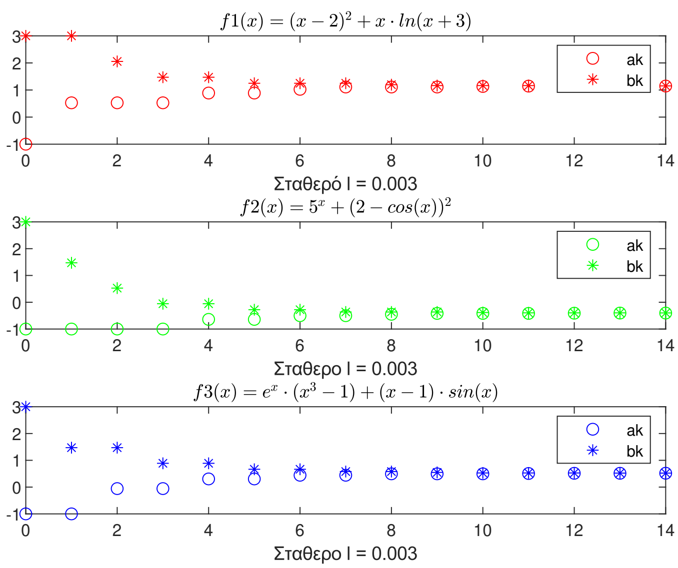
Σχήμα 10: Διάγραμμα μεταβολής αριθμού υπολογισμών αντκειμενικής συνάρτησης για διαφορετικές τιμές του λ.



Σχήμα 11: Διάγραμμα των τιμών των ακ και βκ σε κάθε επανάληψη, από το αρχικό μέχρι το τελικό διάστημα.



Σχήμα 12: Διάγραμμα των τιμών των ακ και βκ σε κάθε επανάληψη, από το αρχικό μέχρι το τελικό διάστημα.



Σχήμα 13: Διάγραμμα των τιμών των ακ και βκ σε κάθε επανάληψη, από το αρχικό μέχρι το τελικό διάστημα.

4 Μέθοδος της Διχοτόμου με χρήση Παραγώγων

4.1 Έλεγχος Προϋποθέσεων

Οι δοσμένες συναρτήσεις είναι κυρτές ως άθροισμα κυρτών στο διάστημα [α, β] = [-1, 3] που μας ενδιαφέρει για αυτό και μπορούμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο της διχοτόμου με χρήση παραγώγων.
Όπως και στην μέθοδο Fibonacci , στην μέθοδο διχοτόμου με χρήση παραγώγων ο αριθμός επαναλήψεων είναι προκαθορισμένος έτσι ώστε να είναι ο μικρότερος ακέραιος n που ικανοποιεί την συνθήκη

$$(1/2)^n < l/(bk - ak) \tag{2}$$

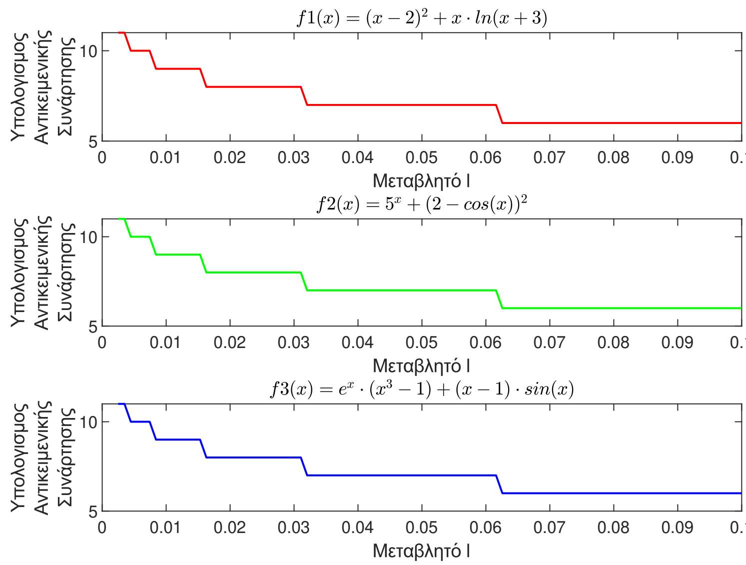
Επομένως πριν από τον αλγόριθμο υπολογισμού της μεθόδου, είναι απαραίτητος ένας βρόχος επανάληψης ο οποίος χρησιμοποιώντας την συνθήκη θα βρίσκει το συνολικό αριθμό επαναλήψεων n .
Επιπλέον, σε αντίθεση με τα προηγούμενα, η συνάρτηση της μεθόδου διχοτόμου με παραγώγους δεν δέχεται ως όρισμα την ίδια την f1(x), f2(x), f3(x) αλλά τις διαφορίσεις αυτών ως προς x .

4.2 Γραφικές Παραστάσεις

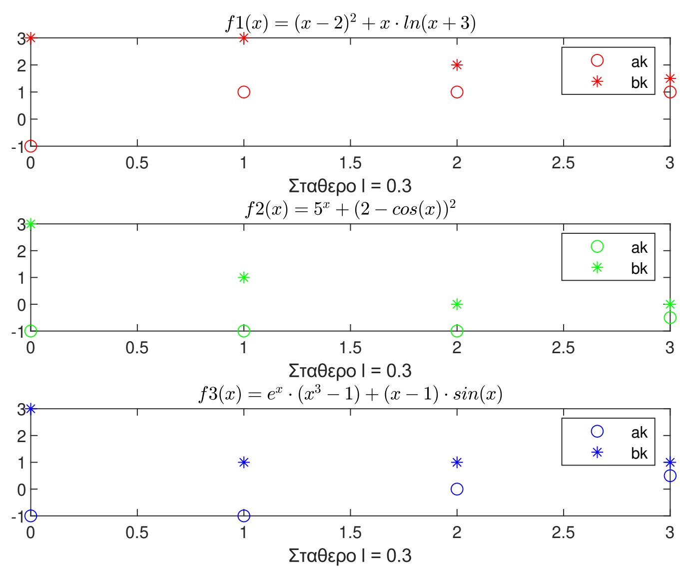
Στο πρώτο διάγραμμα, απεικονίζεται ο αριθμός υπολογισμού αντικειμενικής συνάρτησης για μεταβαλλόμενες τιμές του l . Ο βρόχος επανάληψης που καθορίζει την τιμή του l ξεκινάει από την τιμή 0.0025 και φτάνει μέχρι την τιμή 0.1.
Η σχέση που δίνει τον αριθμό υπολογισμού της αντικειμενικής συνάρτησης συναρτήσει του k στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι k . Αυτό ισχύει γιατί ξεκινώντας από την πρώτη επανάληψη, δηλαδή για k = 1, έχουμε μόνο έναν υπολογισμό και αυτός είναι το f'(xk) . Σε κάθε επόμενη επανάληψη, προκύπτει νέο διάστημα ak, bk και συνεπώς νέο xk και νέο f'(xk) . Επομένως σε κάθε επανάληψη οι υπολογισμοί αυξάνονται κατά 1.

4.3 Συμπεράσματα και Παρατηρήσεις

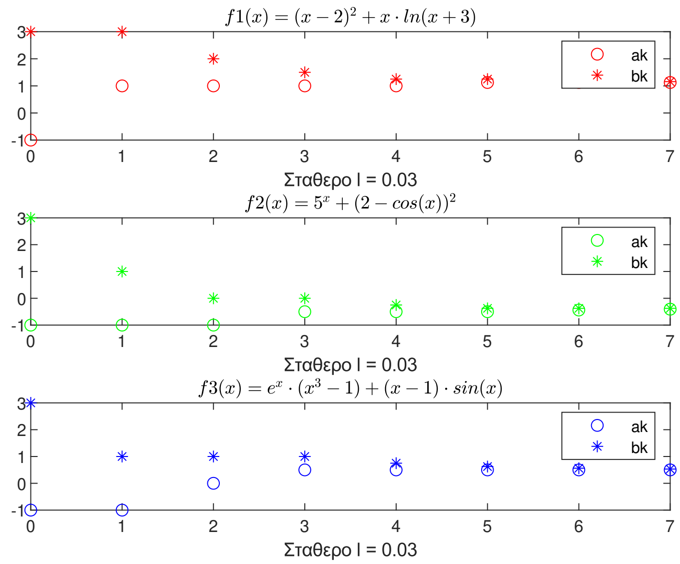
Στο πρώτο διάγραμμα παρατηρείται ,όπως και στις τρείς προηγούμενες μεθόδους, πως όσο αυξάνεται το l τόσο μειώνεται ο αριθμός υπολογιμών αντικειμενικής συνάρτησης. Φαίνεται από το διάγραμμα αλλά και θεωρητικά, πως και στην μέθοδο της διχοτόμου με παραγώγους, η αύξηση του l συνεπάγεται την μείωση του των συνολικών επαναλήψεων n σύμφωνα με την σχέση (2), το οποίο με την σειρά του συνεπάγεται και την μείωση του συνολικού αριθμού υπολογισμών k (= n).
Στα επόμενα τρία διαγράμματα, που έχουν γίνει για l = 0.3, 0.03, 0.003 παρατηρείται και για την μέθοδο της διχοτόμου με παραγώγους η ίδια συμπεριφορά με τις προηγούμενες μεθόδους. Φαίνεται πάλι πως για μικρότερο l έχουμε περισσότερες επαναλήψεις αλλά και καλύτερη ακρίβεια στον εντοπισμό του ελαχίστου ενώ για μεγαλύτερο l , λιγότερες επαναλήψεις αλλά και μικρότερη ακρίβεια.



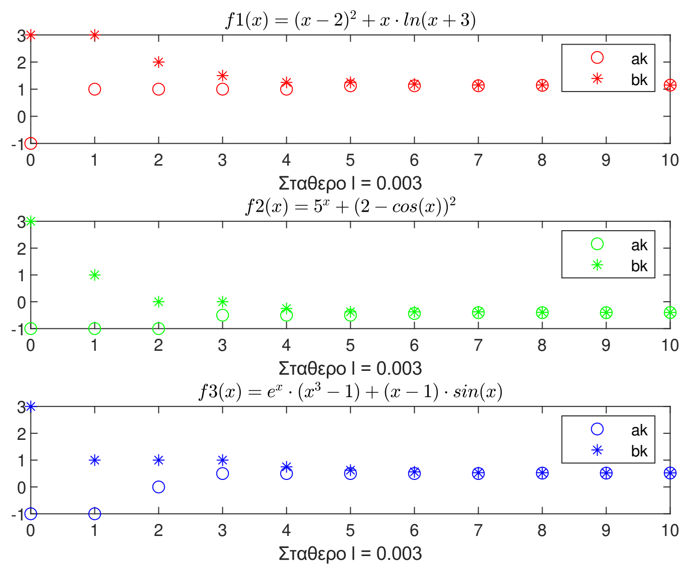
Σχήμα 14: Διάγραμμα μεταβολής αριθμού υπολογισμών αντκειμενικής συνάρτησης για διαφορετικές τιμές του λ.



Σχήμα 15: Διάγραμμα των τιμών των ακ και βκ σε κάθε επανάληψη, από το αρχικό μέχρι το τελικό διάστημα.



Σχήμα 16: Διάγραμμα των τιμών των ακ και βκ σε κάθε επανάληψη, από το αρχικό μέχρι το τελικό διάστημα.



Σχήμα 17: Διάγραμμα των τιμών των ακ και βκ σε κάθε επανάληψη, από το αρχικό μέχρι το τελικό διάστημα.

5 Σύγκριση Αποτελεσματικότητας Μεθόδων

Τα αποτελέσματα αυτά, συμβαδίζουν με τα συμπεράσματα του βιβλίου των Τεχνικών Βελτιστοποίησης όσον αφορά την κατάταξη αποτελεσματικότητας όλων των μεθόδων εκτός από την μέθοδο της διχοτόμου. Τέτοια απόκλιση από την θεωρία ενδέχεται να οφείλεται στον περιορισμένο αριθμό δοκιμών στις τιμές του l . Συμπερασματικά, πιο αποτελεσματική μέθοδος αποδεικνύεται να είναι με διαφορά η μέθοδος Διχοτόμου με παραγώγους, ακολουθεί η μέθοδος Fibonacci και η μέθοδος της χρυσής τομής.

τιμές του l	0.3	0.03	0.003
Μέθοδος Διχοτόμου	4	8	12
Μέθοδος Χρυσής Τομής	8	11	15
Μέθοδος Fibonacci	5	9	14
Μέθοδος Διχοτόμου με Παραγώγους	3	7	10