Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

Κουκουλέτσου Κατερίνα 10218

Ιούνιος 2023

Μοντελοποίηση κατά Μαύρο Κουτί

Η συγκεκριμένη εργασία επικεντρώνεται στον προσδιορισμό του μαθηματικού μοντέλου που διέπει ένα δοσμένο σύστημα στην περίπτωση που το μόνο που είναι γνωστό είναι οι τιμές της εισόδου και οι τιμές της εξόδου του συστήματος αυτού. Σε αντίθεση με άλλες περιπτώσεις όπου υπάρχει μερική γνώση του συστήματος και άρα γίνεται λόγος για μοντελοποίηση κατά "Γκρίζο Κουτί", στην τρέχουσα περίπτωση, υπάρχει πλήρης έλλειψη πληροφορίας για το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει του σύστημα. Τέτοιες περιπτώσεις κατατάσσονται στην λεγόμενη μοντελοποίηση κατά "Μαύρο Κουτί". Η διαδικασία επίλυσης τέτοιων προβλημάτων αναλύεται παρακάτω, αρχικά με χρήση μιας μεθόδου μη- πραγματικού και έπειτα με χρήση μιας μεθόδου πραγματικού χρόνου.

Έλεγχος Γραμμικότητας Μοντέλου

Το δοσμένο σύστημα χαρακτηρίζεται ως "Μαύρο Κουτί", διότι δεν υπάρχει καμία γνώση για το μαθηματικό μοντέλο που το περιγράφει. Προκειμένου λοιπόν να ξεκινήσει η διαδικασία προσδιορισμού του, γίνεται αρχικά έλεγχος της γραμμικότητας του μοντέλου. Ως γνωστόν, αυτό συνεπάγεται τον έλεγχο δύο αρχών, της αρχής της ομοιογένειας και της αρχής της επαλληλίας.

Αναλυτικότερα, έστω ένα σύστημα που διέπεται από τον νόμο S τέτοιο ώστε

$$S[u_1(t)] = y_1(t)$$

$$S[u_2(t)] = y_2(t)$$

Τότε, σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας θα πρέπει να ισχύει

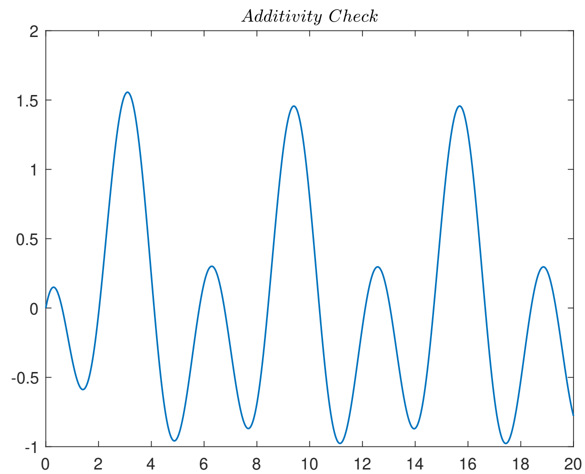
$$S[u_1(t) + u_2(t)] = y_1(t) + y_2(t)$$

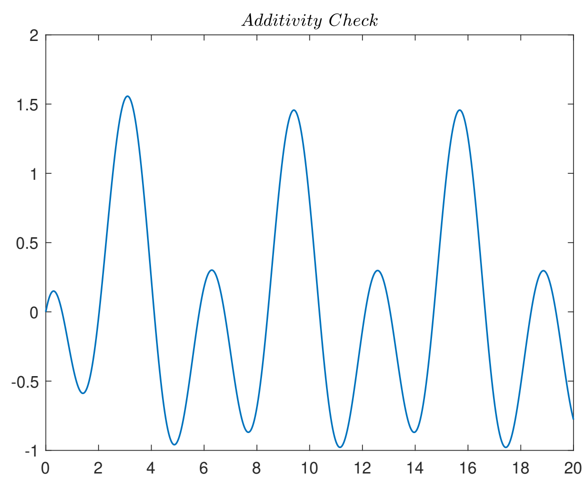
Αντίστοιχα, σύμφωνα με την αρχή της ομοιογένειας ενός συστήματος, θα πρέπει να ισχύει

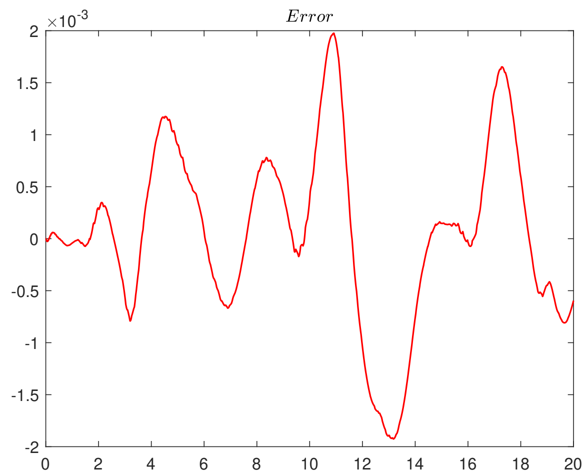
$$S[x(t)] = y(t)$$

$$S[ax(t)] = a \cdot y(t)$$

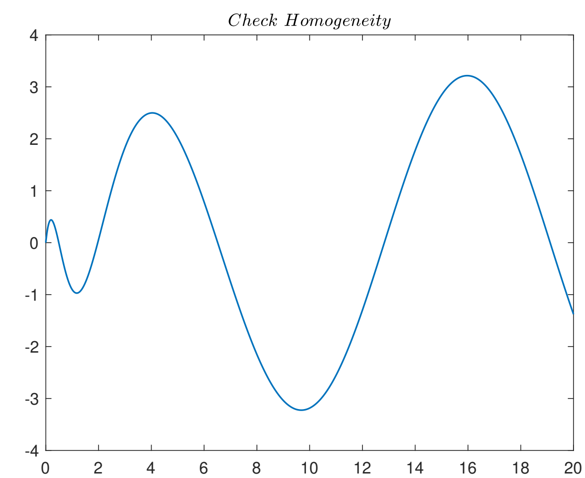
Για τον έλεγχο της επαλληλίας: επιλέγονται ως είσοδοι οι συναρτήσεις $u_1 = cos(t)$ και $u_2 = 2 \cdot sin(2t)$ και γίνεται η γραφική απεικόνιση του αθροίσματος των εξόδων αυτών των δύο σε συνάρτηση με τον χρόνο. Αμέσως μετά, επιλέγεται ως είσοδος η συνάρτηση $u = cos(t) + 2 \cdot sin(2t)$ η οποία είναι ίση με το άθροισμα των δύο προηγούμενων εισόδων $u_1 + u_2$ και γίνεται η γραφική απεικόνιση της εξόδου αυτής σε σχέση με τον χρόνο. Τέλος, ορίζεται το σφάλμα ως η διαφορά των δύο αυτών εξόδων και προκύπτουν τα ακόλουθα διαγράμματα:

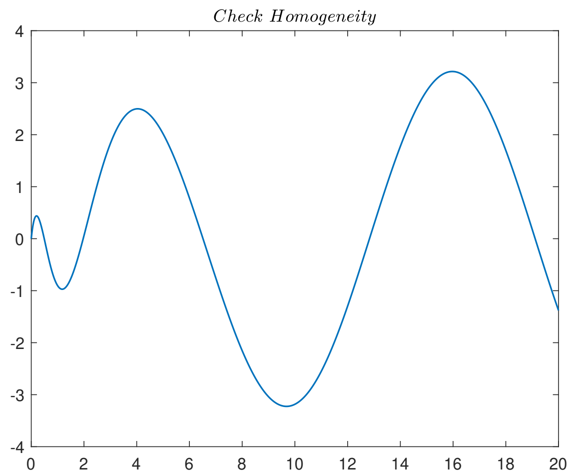

Additivity Check
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20

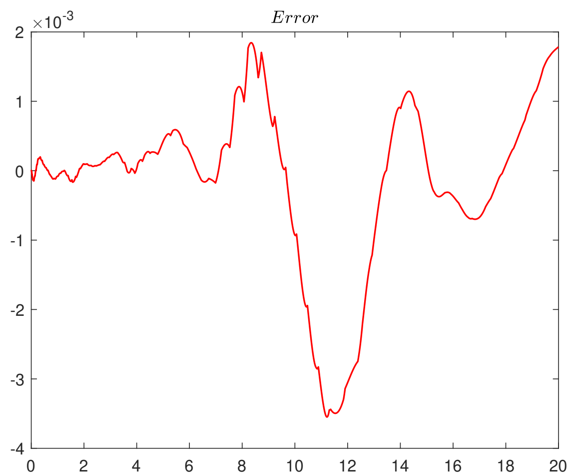

Additivity Check
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20



Για τον έλεγχο της ομοιογένειας: επιλέγεται η είσοδος $u = 5cos(0.5t)$ και γίνεται η γραφική απεικόνιση της εξόδου του συστήματος σε συνάρτηση με τον χρόνο και η είσοδος $u = cos(0.5t)$ και γίνεται η γραφική απεικόνιση της εξόδου αυτής πολλαπλασιασμένης επί 5. Ορίζεται και πάλι το σφάλμα ως η διαφορά των δύο και προκύπτουν τα ακόλουθα διαγράμματα:







Φαίνεται πως οι γραφικές παραστάσεις είναι πανομοιότυπες και το σφάλμα είναι της τάξεως του 10^{-3} και άρα αμελητέο. Επομένως, το σύστημα μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά από ένα γραμμικό. Παρόλ'αυτά είναι σημαντικό να διευκρινιστεί πως, στην πράξη, κανένα δυναμικό σύστημα δεν είναι και γραμμικό, αλλά αν η προσέγγισή του σε κάποια περιοχή έχει σφάλμα μικρότερο από ε, τότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί η γραμμική μαθηματική περιγραφή του.

Μέθοδος μη-πραγματικού χρόνου(Offline)

Η μέθοδος μη-πραγματικού χρόνου που επιλέχτηκε για τον προσδιορισμό του μοντέλου είναι η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων. Έστω n ο βαθμός της παραγώγου της εξόδου y και m ο βαθμός παραγώγου της εισόδου u, όπου $n > m$ προκειμένου το σύστημα να είναι ευσταθές. Τότε η σχέση που περιγράφει το μοντέλο του συστήματος μπορεί να γραφεί ως

$$y^{(n)}+a_1\cdot y^{(n-1)}+a_2\cdot y^{(n-2)}+...+a_{n-1}\cdot y=b_n\cdot u^{(m)}+b_{n+1}\cdot u^{(m-1)}+...+b_{n+m}\cdot u$$

Θεωρητική Ανάλυση

Τα βήματα που ακολουθούνται είναι τα εξής. Λύνοντας ως προς την ανώτερη παράγωγο του συστήματος προκύπτει:

$$y^n=-a_1\cdot y^{n-1}-a_2\cdot y^{n-2}...-a_{n-1}\cdot \dot{y}-a_n\cdot y+b_0\cdot u^m+b_1\cdot u^{m-1}+...+b_m\cdot u$$

Εφόσον το σύστημα είναι τάξεως n, είναι απαραίτητη η χρήση φίλτρου που θα είναι επίσης τάξεως n.

$$\Lambda(s)=(s+\rho_1)\cdot(s+\rho_2)\cdot...\cdot(s+\rho_n)$$

Το διάνυσμα που περιλαμβάνει τους συντελεστές του φίλτρου αυτού ονομάζεται λ και θα είναι ίσο με

$$\lambda=[\lambda_1 \quad \lambda_2...\lambda_n]^T$$

Η επιλογή του κατάλληλου φίλτρου, γίνεται κάθε φορά ανάλογα με την τάξη του συστήματος και η υλοποίηση του πραγματοποιείται από την συνάρτηση filterPick.m

Για την εφαρμογή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων είναι απαραίτητο να έρθει το σύστημα στην μορφή

$$y=\theta_\lambda^T\zeta$$

όπου

$$\theta_\lambda=[\theta_1^{*T}-\lambda^T \quad \theta_2^{*T}]^T$$

με λ το διάνυσμα συντελεστών του φίλτρου που αναφέρθηκε προηγουμένως και θ_1, θ_2 τα διανύσματα των σταθερών παραμέτρων της εισόδου και της εξόδου του συστήματος.

$$\theta_1=[a_1 \quad a_2 \quad ... \quad an]$$

$$\theta_2=[b_1 \quad b_2 \quad ... \quad b_m]$$

Εφόσον το σύστημα έχει έρθει στην μορφή

$$y=\theta_\lambda^T\cdot\varphi$$

όπου το ϑ είναι διάνυσμα άγνωστων και το φ είναι το ζ και τα μόνα μετρήσιμα μεγέθη είναι οι τιμές της εισόδου u και της εξόδου y για πλήθος χρονικών στιγμών N. Το σφάλμα ορίζεται ως

$$e(i)=y(i)-\hat{y}(i), \quad i=1,2,...,N$$

Ως συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση ορίζετε το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων

$$V(\theta, z_0) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\cdot e^2(i,\theta)$$

Ζητούμενο είναι να βρεθεί το όρισμα που ελαχιστοποιεί ως προς ϑ την συνάρτηση V.

$$argmin_\theta V(\theta, z)$$

Το διάνυσμα y περιλαμβάνει όλες τις μετρήσεις της εξόδου για τις N χρονικές στιγμές

$$y = [y(1)\ \ y(2)\ \ ...\ \ y(N)]^T$$

Με την βοήθεια του, κατασκευάζεται ο πίνακας Φ ο οποίος ορίζεται ως

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \varphi_3(N) \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ \varphi_1(N) & \varphi_2(N) & \varphi_3(N) \end{bmatrix}$$

όπου $\varphi_k(i)$ είναι η i-οστή μέτρηση της κ συνιστώσας του διανύσματος Φ. Το σφάλμα μπορεί να γραφεί πλέον στην μορφή

$$e = Y - \Phi\theta$$

$$\theta_0 = argmin_\theta \frac{|e^2|}{2}$$

Η συνάρτηση V τώρα γράφεται ως

$$V_N = \left|\frac{Y - \Phi\theta}{2}\right|^2$$

Η συνάρτηση αυτή είναι κυρτή και επομένως το ελάχιστο της είναι μοναδικό και μπορεί να βρεθεί λύνοντας την

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

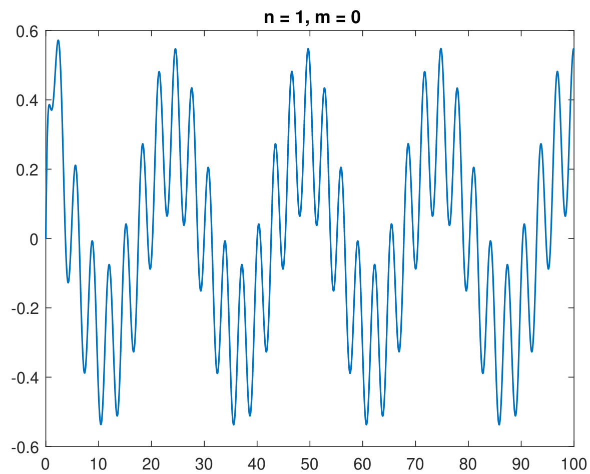
από την οποία προκύπτει μετά από πράξεις ότι

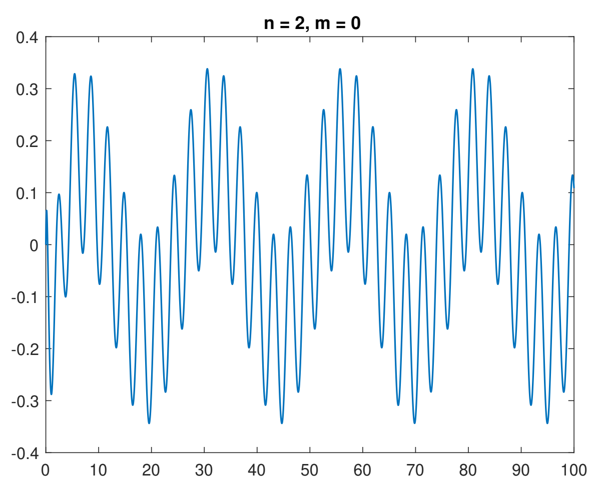
$$\theta_0^T \cdot (\Phi^T\Phi) = \Upsilon^T\Phi$$

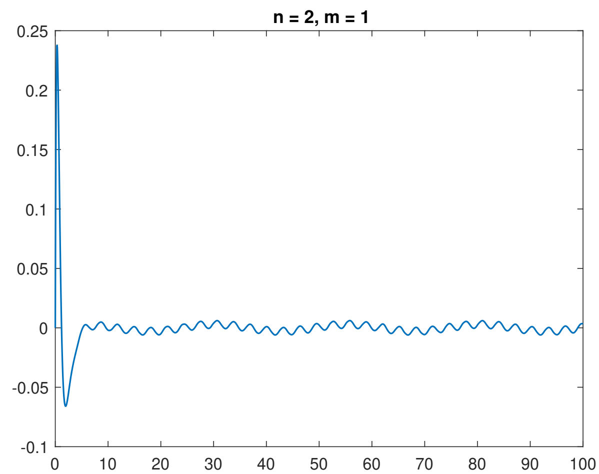
Από την λύση αυτής της εξίσωσης, βρίσκεται το διάνυσμα ϑ και έπειτα, λύνοντας για κάθε συντελεστή του διανύσματος χωριστά, προκύπτουν οι τιμές των a_i και b_i.

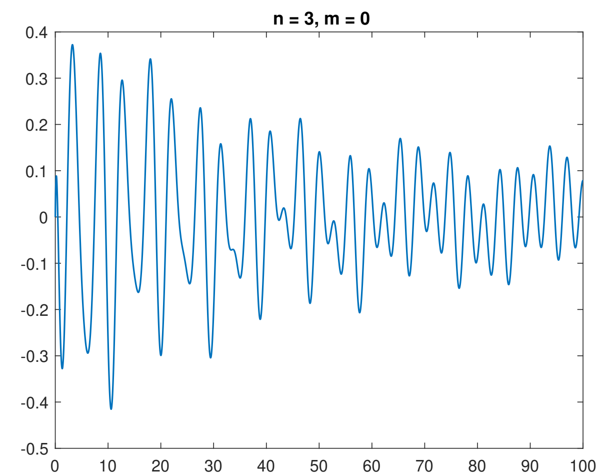
Προσομοίωση στο Matlab

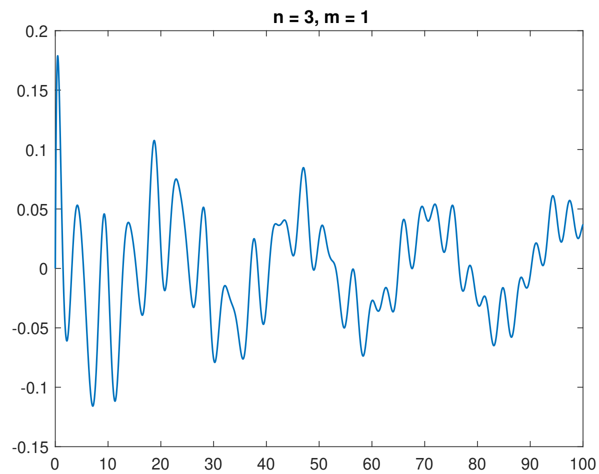
Το σύστημα προσομοιώνεται για ένα πλήθος τάξεων εισόδου και εξόδου. Για κάθε έναν από τους συνδυασμούς (n, m) που προκύπτουν, υπολογίζεται η διαφορά της δοσμένης με την εκτιμώμενη έξοδο, δηλαδή το σφάλμα, και απεικονίζεται γραφικά σε συνάρτηση με τον χρόνο. Μετά από τις δοκιμές, ο συνδυασμός που θα δώσει το ελάχιστο σφάλμα θα είναι και αυτός που θα προσεγγίζει καλύτερα το σύστημα.

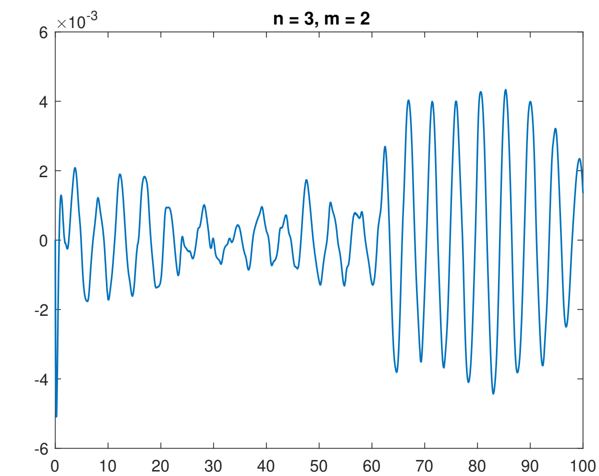


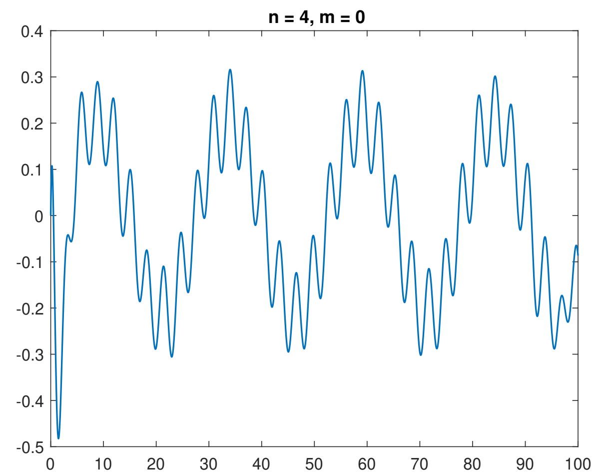


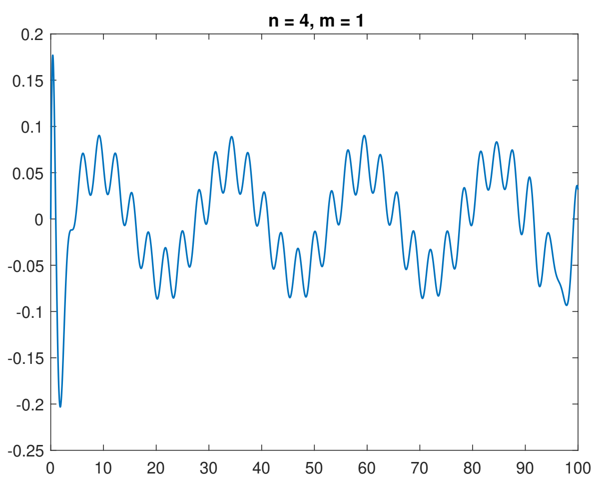

n = 2, m = 1
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

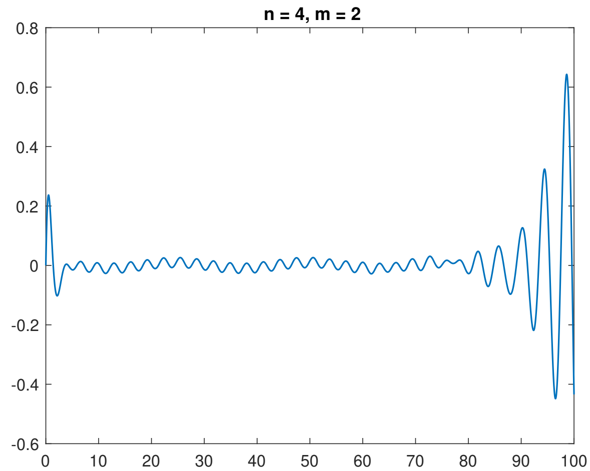

n = 3, m = 0
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

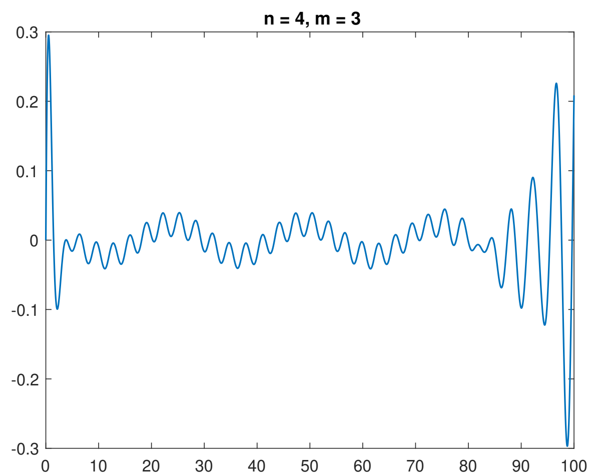

n = 3, m = 1
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

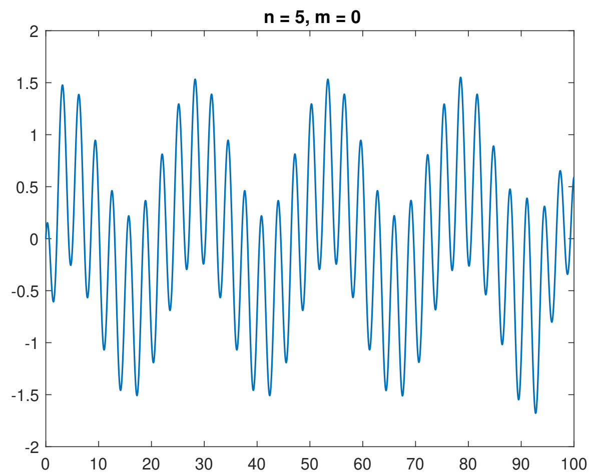

n = 3, m = 2
×10^-3
6
4
2
0
-2
-4
-6
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

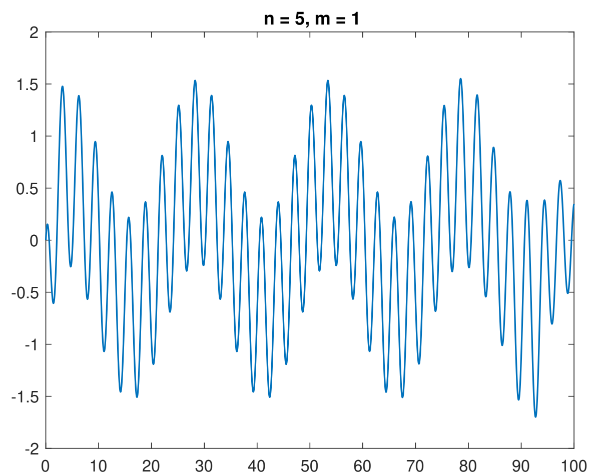

n = 4, m = 0
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100


n = 4, m = 1
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
-0.25
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

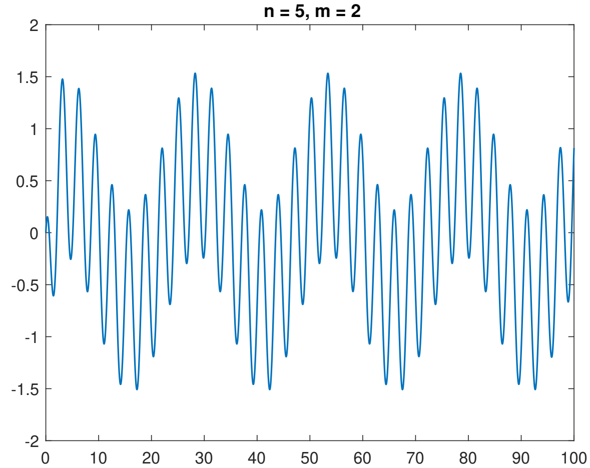

n = 4, m = 2
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100


n = 4, m = 3
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

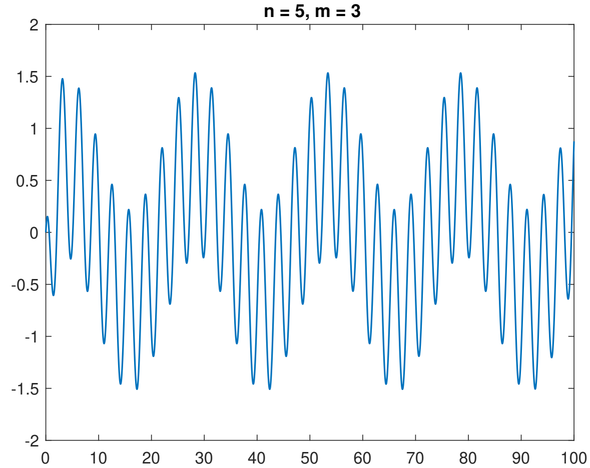

n = 5, m = 0

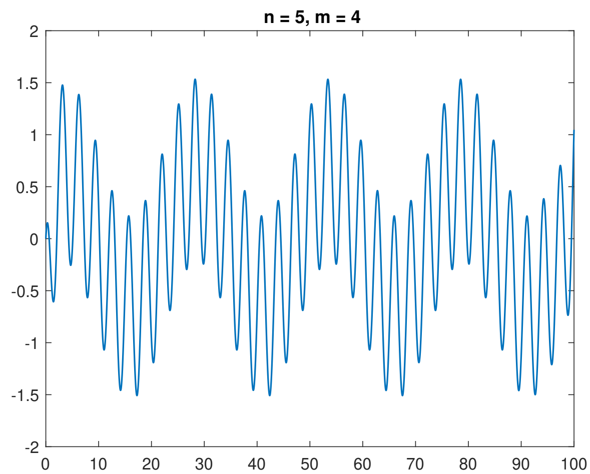

n = 5, m = 1

n = 5, m = 2


2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

n = 5, m = 3


2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100



Από τα διαγράμματα που παρατίθενται, το σφάλμα φαίνεται να είναι μικρότερο όταν n = 3 και m = 2. Οι συντελεστές του φίλτρου Λ(s) δίνονται από το διάνυσμα λ, το οποίο για σύστημα τάξης n = 3 έχει οριστεί ίσο με

$$\lambda = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3] = [4 \quad 2 \quad 7]$$

Επομένως με αντικατάσταση στον τύπο

$$\theta_\lambda = [\alpha_1 - \lambda_1 \quad \alpha_2 - \lambda_2 \quad \alpha_3 - \lambda_3 \quad b_0 \quad b_1 \quad b_2]$$

προκύπτουν οι σταθεροί παράμετροι του συστήματος οι οποίοι είναι $a_1 = 4.3$,$a_2 = 6.6$, $a_3 = 3.15$, $b_0 = 1.06$, $b_1 = -3.155$, $b_2 = 2.1$ Άρα το μοντέλο που διέπει το σύστημα μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά από την σχέση

$$y^{(3)} + 4.3y^{(2)} + 6.6\dot{y} + 3.15y = 1.06u^{(2)} - 3.155\dot{u} + 2.1u$$

Μέθοδος πραγματικού χρόνου(Online)

Για τον προσδιορισμό του μαθηματικού μοντέλου που περιγράφει το σύστημα χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος πραγματικού χρόνου των Ελαχίστων Τετραγώνων σε αναδρομική μορφή.

Θεωρητική Ανάλυση

Έστω ότι το σύστημα βρίσκεται στην γνωστή γραμμικά παραμετροποιημένη μορφή

$$y = {\theta^*}^T \varphi$$

οπου y η έξοδος, θ^* το διάνυσμα των άγνωστων παραμέτρων και φ το διάνυσμα των οπισθιδρομητών. Το σύστημα αναγνώρισης αντίστοιχα, ορίζεται ως εξής:

$$\hat{y} = \hat{\theta^T} \varphi$$

και επομένως, το σφάλμα των δύο προκύπτει από την σχέση

$$e = y - \hat{y}$$

Η ζητούμενη τιμή για το ϑ, είναι η τιμή του $\hat{\theta}$ που ελαχιστοποιεί το κριτήριο:

$$K(\hat{\theta}) = \frac{1}{2}e^{-\beta t}(\hat{\theta}(t)-\hat{\theta}(0))^T Q_0(\hat{\theta}(t)-\hat{\theta}(0))+\frac{1}{2}\int_0^t e^{-\beta(t-\tau)}[y(\tau)-\hat{\theta}(t)^T\varphi(\tau)]^2 d\tau$$

Η Κ($\hat{\theta}$) είναι κυρτή συνάρτηση ως προς $\hat{\theta}$. Επομένως κάθε τοπικό ελάχιστο θα είναι και το ολικό και θα ικανοποιεί την συνθήκη:

$$\nabla K(\hat{\theta}) = 0$$

λύνοντας προκύπτει πως

$$\hat{\theta}(t) = P(t)[e^{-\beta t}Q_0\hat{\theta}(0) + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)}y(\tau)\varphi(\tau)d\tau]$$

$$P(t) = [e^{-\beta t}Q_0 + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)}\varphi(\tau)\varphi^T(\tau)d\tau]^{-1}$$

Παραγωγίζοντας την σχέση ΡP^{-1} = Ι οπου Ι ο μοναδιαίος πίνακας και λύνοντας ως προς $\dot{P}$ προκύπτει

$$\frac{d}{dt}[PP^{-1}] = 0$$

$$\dot{P} = -P(\frac{d}{dt}P^{-1})P$$

$$P^{-1}(t) = e^{-\beta t}Q_0 + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)}\varphi(\tau)\varphi^T(\tau)d\tau$$

$$\frac{d}{dt}P^{-1} = -\beta P^{-1} + \varphi\varphi^T$$

μετά από αντικατάσταση

$$\dot{P} = \beta P - P\varphi\varphi^T P \;\; \kappa\alpha\iota \;\; P(0) = {Q_0}^{-1}$$

ομοίως:

$$\hat{\theta}(t) = P(t)\Omega(t)$$

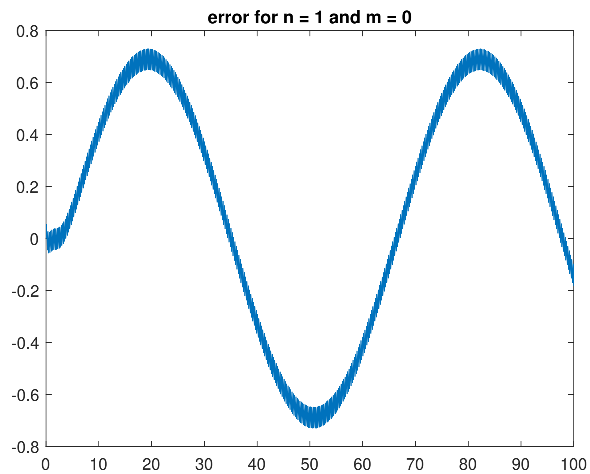
$$\dot{\Omega} = -\beta\Omega + y\varphi \;\; \Omega(0) = Q_0\hat{\theta}(0)$$

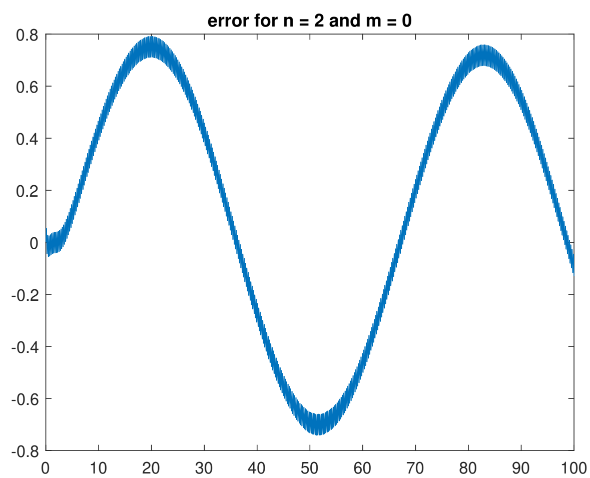
παραγωγίζοντας το $\hat{\theta}$ προκύπτει:

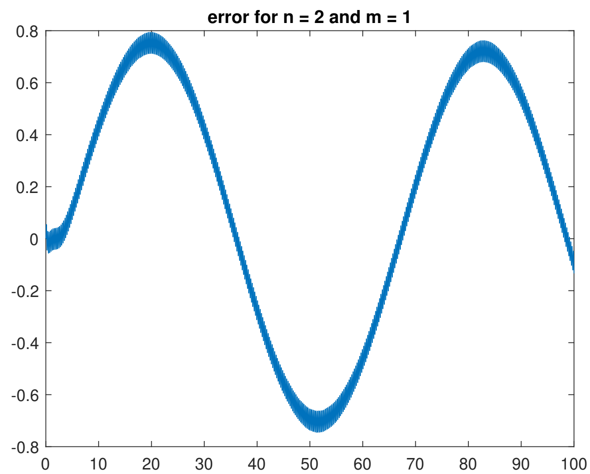
$$\dot{\hat{\theta}} = P(t)\tilde{y}(t)\varphi(t)$$

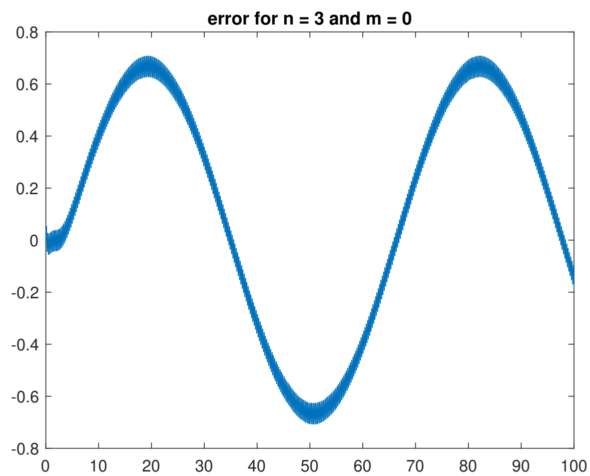
Προσομοίωση στο Matlab

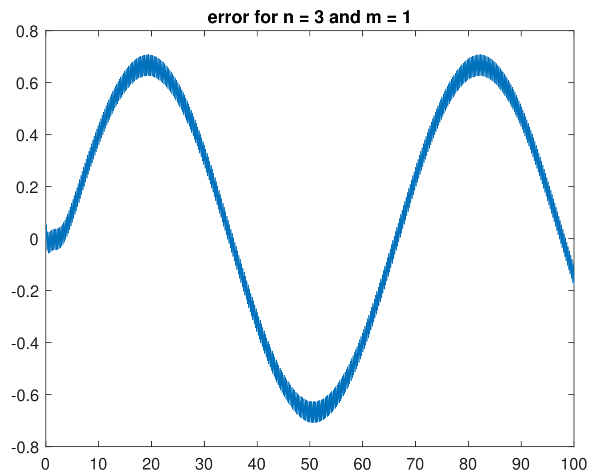
Γίνονται δοκιμές για τάξη συστήματος n έως και 4 προκειμένου να επιβεβαιωθούν τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την προηγούμενη μέθοδο.

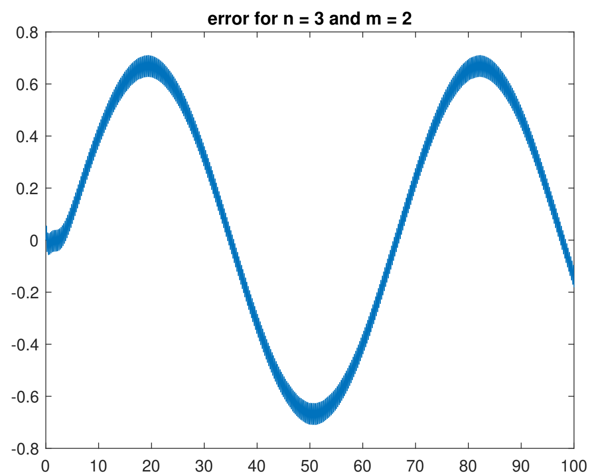


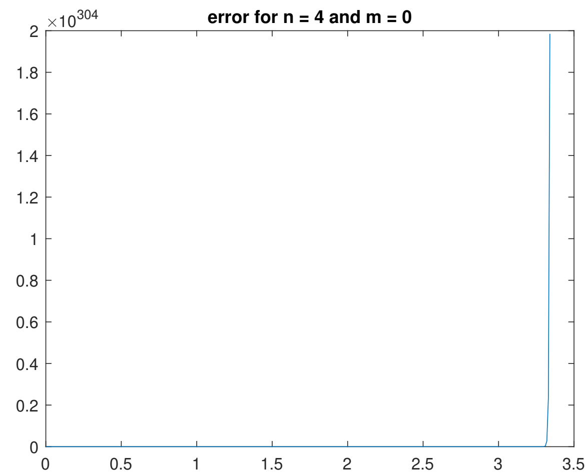


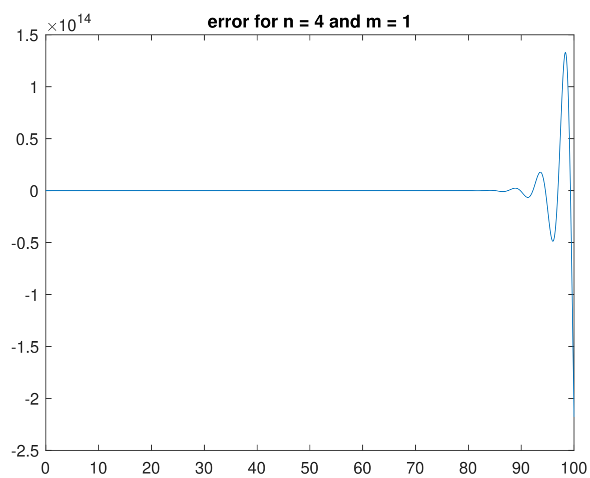

error for n = 2 and m = 1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

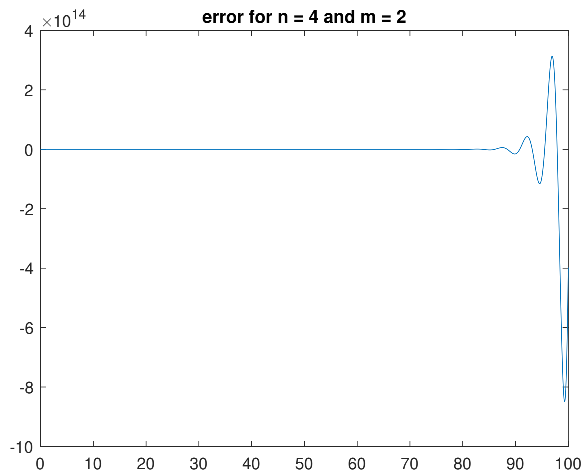

error for n = 3 and m = 0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

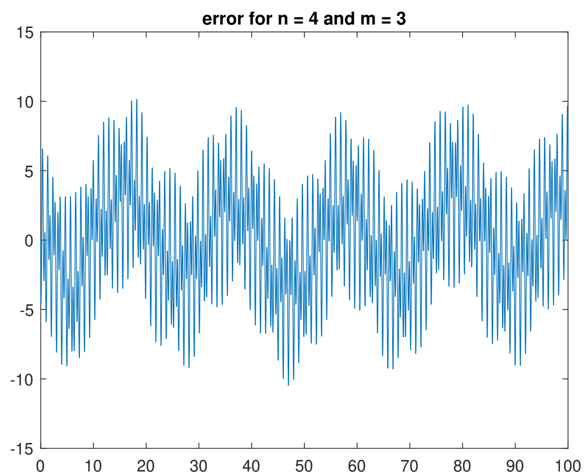

error for n = 3 and m = 1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100


error for n = 3 and m = 2
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100


error for n = 4 and m = 0
×10^304
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5


error for n = 4 and m = 1
×10^14
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100





Όπως αποδεικνύεται και από τα διαγράμματα, το ελάχιστο σφάλμα εντοπίζεται και πάλι για (n, m) = (3, 2). Από τις εκτιμήσεις των συντελεστών a και b προκύπτει ο προσδιορσιμός του μοντέλου σύμφωνα με την σχέση

$$y^{(3)} + 3.95y^{(2)} + 3.95\dot{y} + 2.8y = -0.018u^{(2)} - 0.018\dot{u} - 0.0088u$$

Οι δύο μέθοδοι συγκρίνονται παρακάτω με το κριτήριο AIC.

Συνθήκη Επιμένουσας Διέγερσης - ΣΕΔ

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να συγκλίνει η εκτίμηση των παραμέτρων $\hat{\theta}$ στην πραγματική τιμή θ^* είναι η ικανοποίηση μιας ΣΕΔ. Πρακτικά, κατά την διαδικασία της εκτίμησης των παραμέτρων, η είσοδος u(t) πρέπει να επιλέγεται έτσι ώστε να διεγείρει όλους τους ρυθμούς του συστήματος. Αυτό είναι καίριας σημασίας καθώς, υπάρχουν άπειρα συστήματα τα οποία δίνουν την ίδια έξοδο για μια είσοδο συχνότητας ω. Έτσι είναι απαραίτητο να χρησιμοποιείται μια είσοδος η οποία να διεγείρει όλους τους ρυθμούς του συστήματος. Σύμφωνα με τον ορισμό, ένα σήμα u θα αποτελεί επιμένουσα διέγερση τάξεως n, αν αποτελείται από τουλάχιστον n/2 διακριτές συχνότητες. Οι είσοδοι u που χρησιμοποιούνται στην εργασία έχουν επιλεγεί έτσι ώστε να πληρούν το κριτήριο αυτό. Δηλαδή, σε όλες τις περιπτώσεις, ως σήμα εισόδου χρησιμοποιείται μια συνάρτηση u που είναι άθροισμα ημιτονοειδών συναρτήσεων διαφορετικών συχνοτήτων.

Αξιολόγηση Μεθόδων

Για την αξιολόγηση των μεθόδων χρησιμοποιήθηκε το κριτήριο του Akaike. Πρόκειται για κριτήριο δανεισμένο από την θεωρία πληροφοριών. Το κριτήριο ορίζεται σύμφωνα με την σχέση

$$AIC = N \cdot ln\left(I(\theta)\right) + \rho \cdot \kappa$$

όπου

$$I(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2$$

και όπου N είναι ο αριθμός των δεδομένων, κ ο αριθμός των παραμέτρων, και το ρ επιλέγεται ίσο με 2. Ως καλύτερο μοντέλο, ορίζεται αυτό που αντιστοιχεί στην μικρότερη τιμή. Κάνοντας τους υπολογισμούς για τις δύο μεθόδους στα αρχεία mainOnlineMethod.m και mainOfflineMethod.m αντίστοιχα, φαίνεται πως η καλύτερη προσέγγιση προκύπτει από την εφαρμογή της offline μεθόδου αφού δίνει AIC ίσο με -152597.6284 σε αντίθεση με την online που δίνει AIC ίσο με 27424.2359.