

Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

Κουκουλέτσου Αικατερίνη 10218

Απρίλιος 2023

Εισαγωγή

Σκοπός της εργασίας είναι η εκτίμηση αγνώστων παραμέτρων με χρήση της μεθόδου μέγιστης καθόδου και της μεθόδου σχεδίασης κατά Lyapunov (παράλληλη και μικτή τοπολογία). Οι μέθοδοι αυτοί ονομάζονται μέθοδοι πραγματικού χρόνου ή online γιατί δίνουν εκτίμηση μέσα σε χρόνο μιας δειγματοληψίας. Για την εκτίμηση αυτή, οι αλγόριθμοι πραγματικού χρόνου στηρίζονται στην τρέχουσα τιμή και στην αμέσως προηγούμενη, δουλεύουν δηλαδή αναδρομικά. Απευθύνονται κυρίως σε εφαρμογές στις οποίες ο αλγόριθμος πρέπει να είναι υπολογιστικά απλός και η διαδικασία της εκτίμησης να ολοκληρωθεί πριν λάβει χώρα η επόμενη δειγματοληψία. Χαρακτηριστικά παραδείγματα τέτοιων εφαρμογών είναι ο προσαρμοστικός έλεγχος συστημάτων, η πρόβλεψη της απόκρισης συστημάτων, η ανίχνευση και αναγνώριση βλαβών σε δυναμικά συστήματα. Η εργασία επικεντρώνεται στην υλοποίηση των μεθόδων στο Matlab, την κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων σύμφωνα με την λογική του trial and error και την επίδραση του θορύβου στις εκτιμήσεις.

Θέμα 1

Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου

Το σύστημα που δίνεται είναι

$$\dot{x} = -a \cdot x + b \cdot u, x(0) = 0$$

όπου u είναι η είσοδος του συστήματος και ισχύει $u = 10$ για το πρώτο ερώτημα και $u = 10 \cdot \sin(3t)$ για το δεύτερο. Τα a, b είναι σταθερές αλλά άγνωστες παράμετροι που θέλουμε να εκτιμήσουμε. Οι πραγματικές τιμές τους είναι $a = 3$ και $b = 0.5$. Το σύστημα είναι ευσταθές αφού $a > 0$.

Το μοντέλο είναι γραμμένο σε μορφή εξισώσεων κατάστασης επομένως πρέπει να το φέρουμε σε γραμμικά παραμετρική μορφή. Προσθέτουμε και αφαιρούμε τον όρο $a_m \cdot x$, όπου a_m θετική σταθερά που την επιλέγουμε εμείς.

$$\dot{x} = a_m \cdot x - a_m \cdot x - a \cdot x + b \cdot u$$

$$\dot{x} + a_m \cdot x = (a_m - a) \cdot x + b \cdot u$$

Εφαρμόζουμε M/Σ Laplace και υποθέτοντας πως οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές προκύπτει

$$s \cdot x + a_m x = (a_m - a) \cdot x + b \cdot u$$

$$x \cdot (s + a_m) = (a_m - a) \cdot x + b \cdot u$$

$$x = \frac{1}{s + a_m} \cdot [(a_m - a)x + bu]$$

Τα διανύσματα ϑ και φ είναι

$$\theta^* = [a_m - a \quad b]^T$$

$$\varphi = [\frac{1}{s+a_m}x \quad \frac{1}{s+a_m}u]^T$$

Επομένως το σύστημα έχει έρθει πλέον σε μορφή

$$x = \theta^{*\tau} \cdot \varphi$$

Ορίζουμε το σφάλμα αναγνώρισης

$$e = x - \hat{x} = x - \hat{\theta}^\tau \varphi$$

$$e = (\theta^* - \hat{\theta})^\tau \cdot \varphi$$

Η συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση είναι

$$K(\hat{\theta}) = \frac{e^2}{2} = \frac{(x - \hat{\theta}^\tau \varphi)^2}{2}$$

Θέλουμε λοιπόν

$$\operatorname{argmin}_{\hat{\theta}} K(\hat{\theta})$$

Η συνάρτηση K όπως ορίστηκε είναι κυρτή επομένως κάθε τοπικό ελάχιστο θα είναι και ολικό και θα ικανοποιεί την εξίσωση

$$\nabla K(\hat{\theta})|_{\hat{\theta}=\theta^*} = 0$$

Σύμφωνα με την μέθοδο κλίσης

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma \nabla K$$

όπου το διάνυσμα κλίσης της συνάρτησης K θα είναι ίσο με

$$\nabla K = -(x - \hat{\theta}^\tau \varphi) \varphi = -e \varphi$$

επομένως με αντικατάσταση προκύπτει

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma e \varphi$$

όπου το e είναι μετρήσιμο μέγεθος, το γ θετική σταθερά και το διάνυσμα φ έχει δύο συνιστώσες και είναι

$$\varphi_1 = \frac{1}{s+a_m}x \quad \varphi_2 = \frac{1}{s+a_m}u$$

Περνώντας στο πεδίο του χρόνου, το σύστημα εξισώσεων που προκύπτει είναι

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + bu \\ \varphi_1 = \frac{1}{s+a_m}x \Rightarrow \dot{\varphi}_1 = -a_m \varphi_1 + x, \varphi_1(0) = 0 \\ \varphi_2 = \frac{1}{s+a_m}u \Rightarrow \dot{\varphi}_2 = -a_m \varphi_2 + u, \varphi_2(0) = 0 \\ \dot{\hat{\theta}}_1 = \gamma e \varphi_1, \hat{\theta}_1(0) = 0 \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma e \varphi_2, \hat{\theta}_2(0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Λύνοντας το σύστημα προκύπτουν οι εκτιμήσεις των a και b σύμφωνα με τις σχέσεις

$$\begin{aligned}\hat{a} &= a_m - \hat{\theta}_1 \\ \hat{b} &= \hat{\theta}_2\end{aligned}$$

Έλεγχος Ευστάθειας

Το σύστημα με τις πραγματικές τιμές a , b είναι ευσταθές αφού όπως αναφέρθηκε προηγουμένως το a είναι θετικό και άρα για φραγμένη είσοδο θα έχουμε φραγμένη έξοδο. Παρόλ'αυτα, θα μπορούσαν οι εκτιμήσεις \hat{a} και \hat{b} να οδηγήσουν το σύστημα σε αστάθεια.

Κρίνεται επομένως απαραίτητο να αποδειχθεί η ευστάθεια του συστήματος που χρησιμοποιεί πλέον τις εκτιμήσεις \hat{a} και \hat{b} αντί των πραγματικών τιμών και για αυτόν τον λόγο επιλέγουμε ως συνάρτηση Lyapunov την $V = \frac{\tilde{\theta}^2}{2} \geq 0$. Υπολογίζοντας την παράγωγό της προκύπτει $\dot{V} = \tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma u^2 \tilde{\theta}^2 = -\gamma e^2 \leq 0$.

Ισχύει ότι το $\tilde{\theta} \in L_\infty$ και αφού $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta^*$, με θ^* σταθερό, προκύπτει $\hat{\theta} \in L_\infty$. Ισχύει επίσης ότι η $V \geq 0$ και άρα κάτω φραγμένη και $\dot{V} \leq 0$ αρα φθίνουσα, επομένως το όριο της στο άπειρο υπάρχει, $\lim_{t \rightarrow \infty} V(\tilde{\theta}(t)) = V_\infty$.

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση της παραγώγου της V και στα δύο μέρη προκύπτει

$$\int_0^\infty e^2 d\tau = -\frac{1}{\gamma} \int_0^\infty \dot{V}(\tau) d\tau = -\frac{1}{\gamma} [V_\infty - V(0)]$$

με $V(0) = \frac{\tilde{\theta}(0)^2}{2}$ επομένως $e \in L_2$.

Συνεχίζοντας έχουμε ότι $\hat{x} = \hat{\theta}u$. Καθώς, $\hat{\theta}$ και $u \in L_\infty$ θα έχουμε και $\hat{x} \in L_\infty$. Για το σφάλμα ισχύει $e = x - \hat{x} \in L_\infty$. Επομένως, $e \in L_2 \cap L_\infty$ και $\dot{e} \in L_\infty$ αρα από λήμμα Barbalat προκύπτει $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$. Επειδή $\dot{\hat{\theta}} = -\gamma e u$ θα έχουμε και $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\hat{\theta}} = 0$ ως γινόμενο συνάρτησης που έχει όριο το 0 με ομοιόμορφα φραγμένη.

Μετά από ανάλυση, καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως για είσοδο που ικανοποιεί $u, \dot{u} \in L_\infty$, ισχύει ότι ο αναδρομικός νόμος μεταβολής των εκτιμώμενων παραμέτρων $\dot{\hat{\theta}} = -\gamma e u$ εξασφαλίζει πως η εκτιμώμενη έξοδος \hat{x} του συστήματος θα συγκλίνει στην τιμή της πραγματικής εξόδου x .

Επιλογή Παραμέτρων - Trial and Error

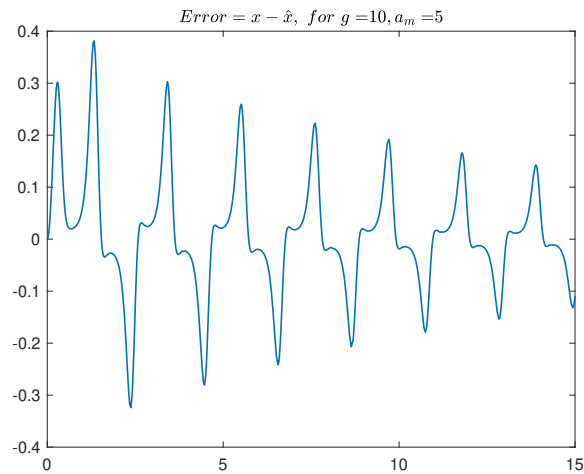
α) Μετά από διάφορες δοκιμές στις παραμέτρους a_m και γ φαίνεται πως οι εκτιμήσεις των a και b δεν πλησιάζουν τις πραγματικές τιμές τους. Παρατηρείται πως

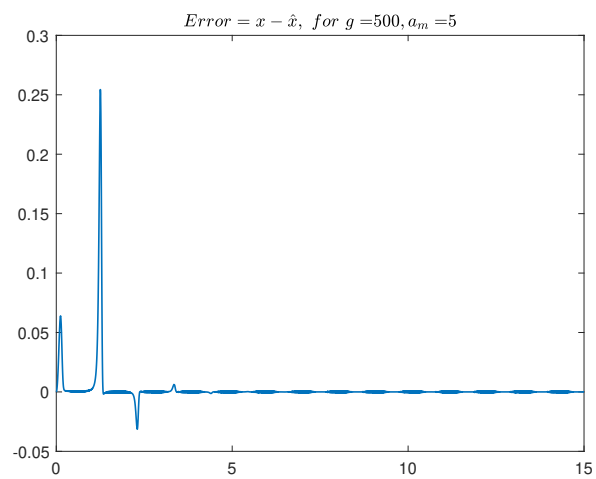
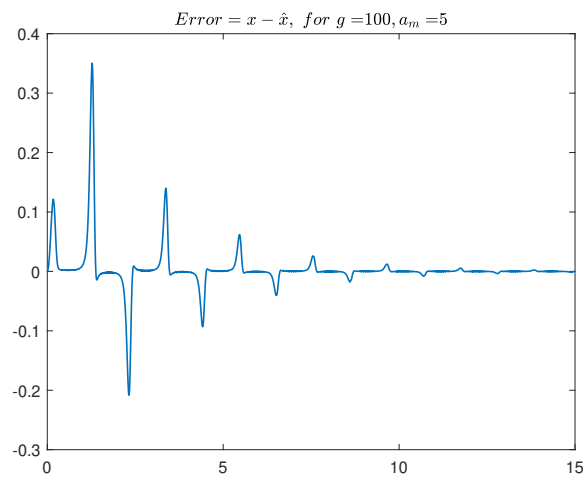
η παράμετρος α πλησιάζει κάθε την τιμή της επιλεγμένης παραμέτρου α_m και για α_m που απέχει από το 3, εκτιμήσεις είναι λανθασμένες.

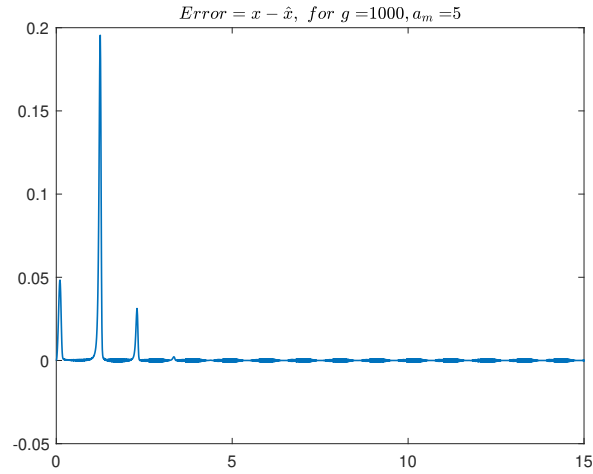
Αυτή η συμπεριφορά, μπορεί να δικαιολογηθεί από την Συνθήκη Επιμένουσας Διέγερσης - ΣΕΔ. Σύμφωνα με την ΣΕΔ, για n αγνώστους χρειάζονται $\frac{n}{2}$ διαφορετικές συχνότητες, επομένως όταν χρησιμοποιούμε ως είσοδο την $u = 10$, η ΣΕΔ δεν ικανοποιείται και η εκτίμηση των παραμέτρων δεν μπορεί να γίνει σωστά. Τα διαγράμματα που παρουσιάζονται παρακάτω έχουν γίνει για $\alpha_m = 3$ και $\gamma = 100$.

β)Ενδιαφερόμαστε για την ταχύτητα με την οποία γίνεται η εκτίμηση και για την απόκλιση του σφάλματος αναγνώρισης μέχρι αυτό να μηδενιστεί. Θέλουμε η επιλογή του γ_1 και α_m να είναι τέτοια ώστε η τιμή της εκτιμώμενης κατάστασης \hat{x} να γίνει ίση με την τιμή της κατάστασης x , όσο πιο γρήγορα γίνεται ενώ ταυτόχρονα τα σφάλμα να είναι όσο γίνεται πιο μικρό.

Έτσι, στην αρχή, κρατώντας την παράμετρο α_m σταθερή και ίση με 5 δοκιμάζουμε διαφορετικές τιμές για την παράμετρο γ και προκύπτουν τα ακόλουθα διαγράμματα (παρουσιάζονται ενδεικτικά, χάριν συντομίας, μόνο τα διαγράμματα του σφάλματος και μόνο για κάποιες από τις δοκιμές)

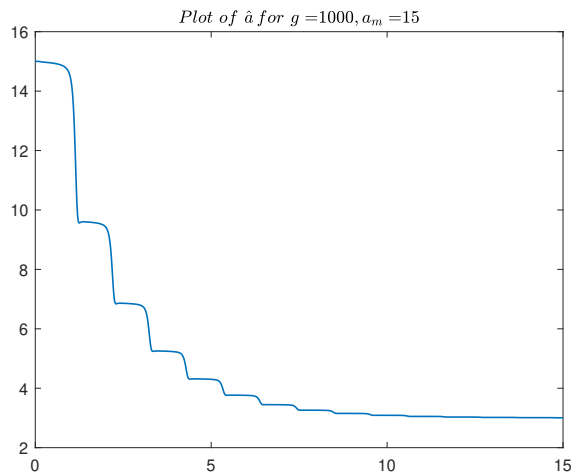


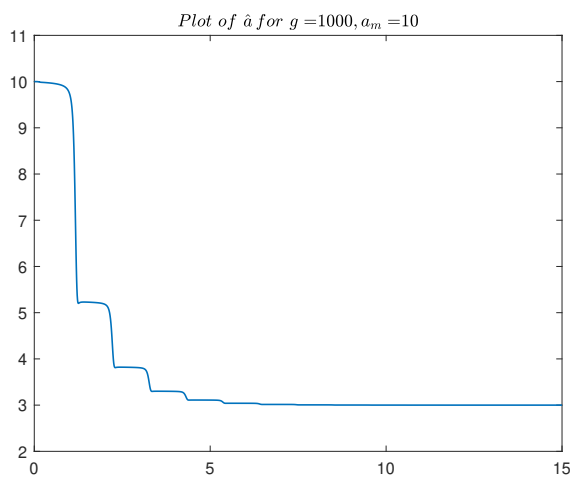
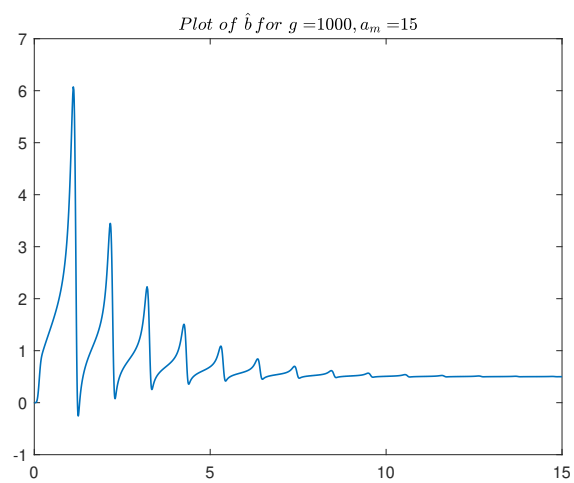


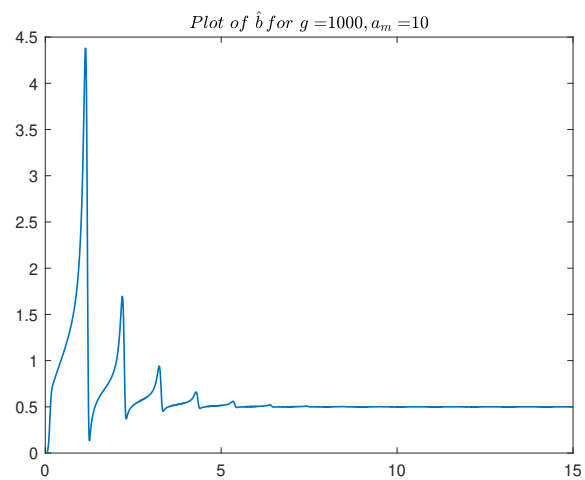
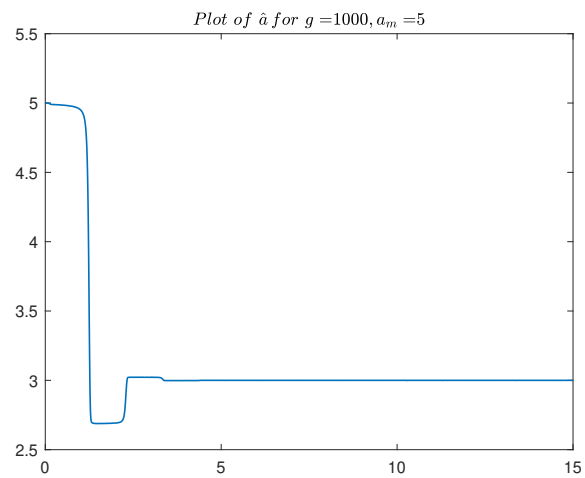


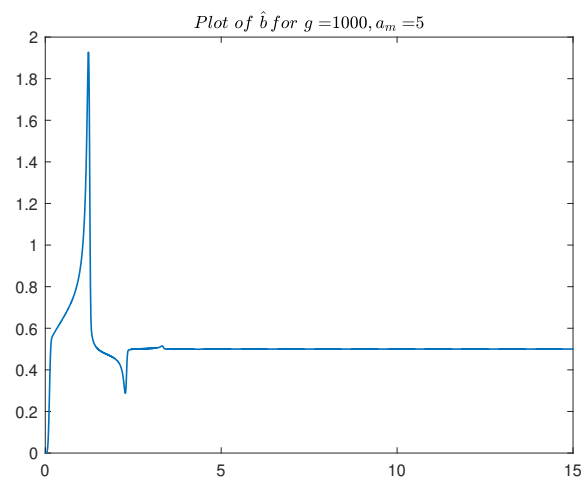
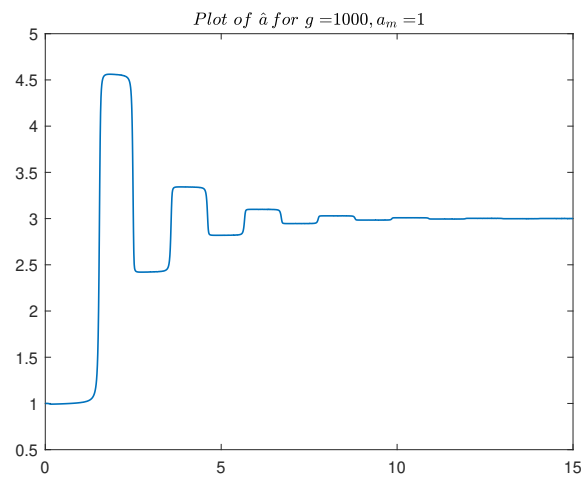
Από τα σχήματα φαίνεται πως για $\gamma = 10$, η ταχύτητα σύγκλισης είναι αργή και ενώ το σφάλμα ελατώνεται, δεν μηδενίζει πριν τα 15 δευτερόλεπτα. Αυξάνοντας την τιμή του γ , φαίνεται να βελτιώνεται αρκετά η ταχύτητα σύγκλισης. Παρόλ'αυτά για πολύ μεγάλες τιμές, $\gamma > 2000$ η υπερύψωση είναι σημαντική και οι εκτιμήσεις ταλαντώνονται ανάμεσα σε μεγάλες τιμές ενώ για $\gamma > 3000$ αρχίζει να χαλάει και η ταχύτητα σύγκλισης. Τελικά επιλέγεται γ ίσο με 1000 αφού φαίνεται να έχει καλή ταχύτητα σύγκλισης, μικρότερη των 5s καθώς και μικρή υπερύψωση, μικρότερη του 0.2.

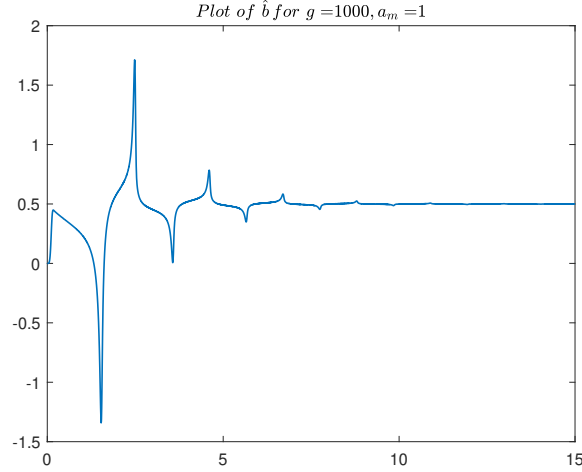
Στην συνέχεια, για γ σταθερό και ίσο με 1000, μεταβάλλουμε την τιμή του a_m και προκύπτουν τα ακόλουθα διαγράμματα











Αυτήν την φορά, παρουσιάζονται ενδεικτικά τα διαγράμματα των εκτιμήσεων \hat{a} και \hat{b} . Αρχικά, επιλέγουμε $\alpha_m = 15$ και φαίνεται πως οι εκτιμήσεις των παραμέτρων απέχουν σημαντικά από τις πραγματικές τιμές τους και η ταχύτητα σύγκλισης είναι κακή. Μειώνουμε σταδιακά το α_m και παρατηρούμε πως προκύπτουν όλο ένα και καλύτερα αποτελέσματα. Παρόλ'αυτα, όταν το α_m γίνει πολύ μικρό, φαίνεται πως η ταχύτητα σύγκλισης αρχίζει να μειώνεται και οι προσεγγίσεις να χαλάνε. Επομένως επιλέγουμε τελικά $a_m = 5$.

Τις επόμενες φορές, στις αντίστοιχες υπο-ενότητες, παραλείπονται τα διαγράμματα που προέκυψαν κατά την διαδικασία του trial and error από τις διάφορες δοκιμές που απέτυχαν και παρουσιάζονται μια και καλή, τα διαγράμματα για τις επιλεγμένες τιμές των σταθερών παραμέτρων.

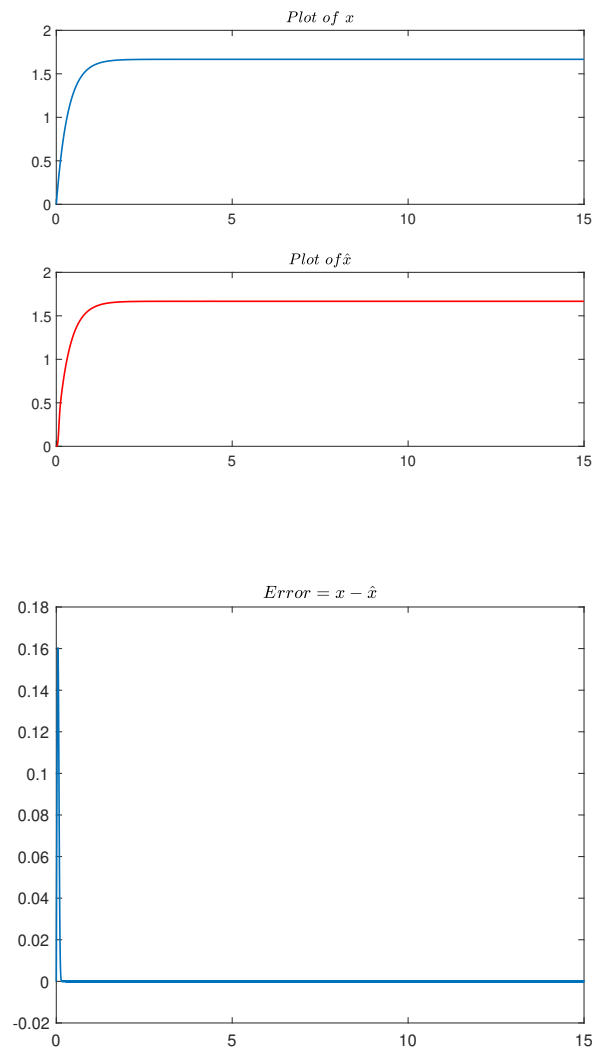
Προσομοίωση στο Matlab

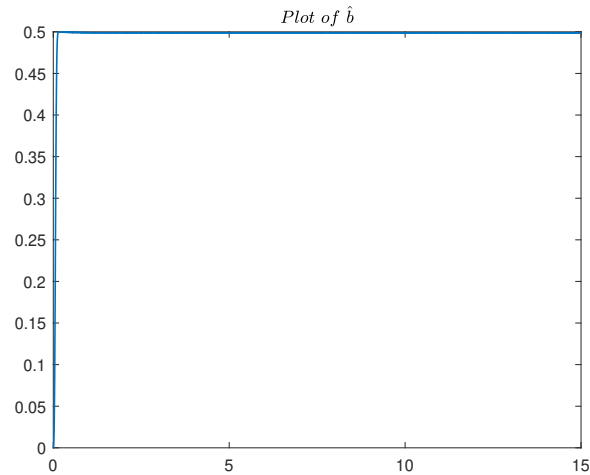
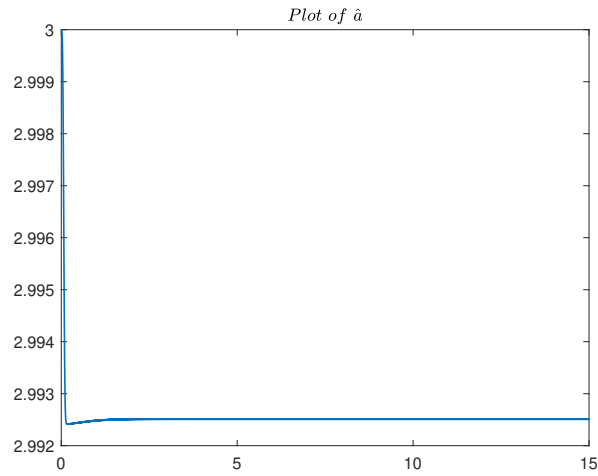
Στο πρώτο διάγραμμα φαίνεται η γραφική παράσταση της κατάστασης x και της κατάστασης \hat{x} συναρτήσει του χρόνου και για είσοδο $u = 10$. Όπως φαίνεται από το σχήμα, η γραφική παράσταση της εκτιμώμενης κατάστασης ακολουθεί την ίδια πορεία με αυτήν της κατάστασης x . Ξεκινώντας από το μηδέν, αυξάνεται σταδιακά μέχρι που σταθεροποιείται στην ίδια τιμή. Οι γραφικές παραστάσεις που παρατίθενται προκύπτουν για επιλογές $\gamma = 100$ και $a_m = 3$.

Στο δεύτερο διάγραμμα, παρουσιάζεται το σφάλμα αναγνώρισης, *error*, το οποίο ορίζεται ως η διαφορά της κατάστασης x με την εκτιμώμενη κατάσταση \hat{x} . Φαίνεται πως μετά από ένα μεταβατικό στάδιο που διαρκεί κάποια δευτερόλεπτα, το σφάλμα τείνει στο μηδέν. Τα αποτελέσματα αυτά συμφωνούν και με την ανάλυση που προηγήθηκε.

Στο τρίτο και τέταρτο διάγραμμα, παρουσιάζονται οι μεταβολές των εκτιμήσεων \hat{a}

και \hat{b} συναρτήσει του χρόνου. Φαίνεται πως με την πάροδο του χρόνου οι εκτιμήσεις βελτιώνονται και πλησιάζουν αρκετά τις πραγματικές τιμές των παραμέτρων.



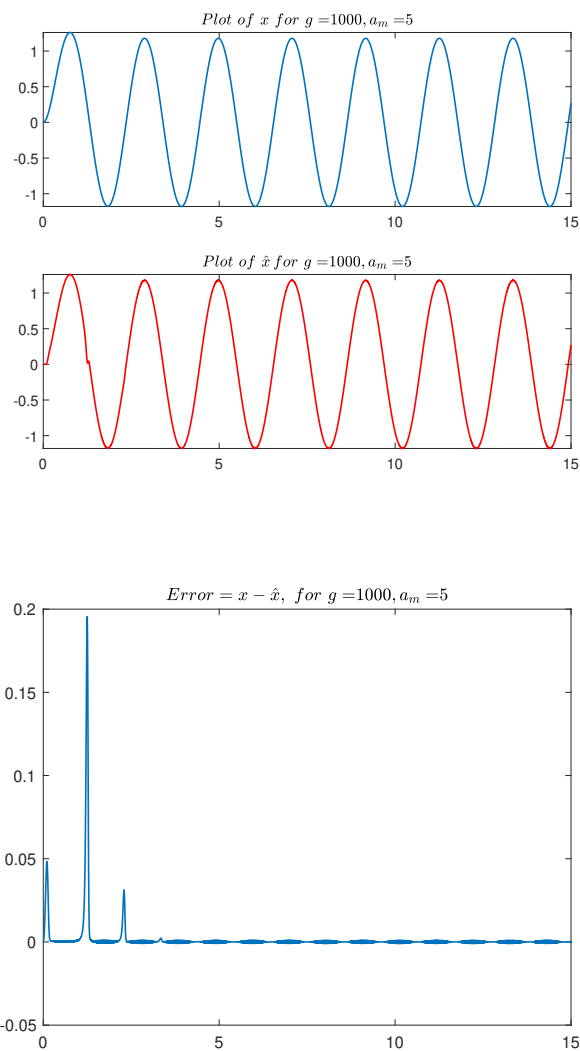


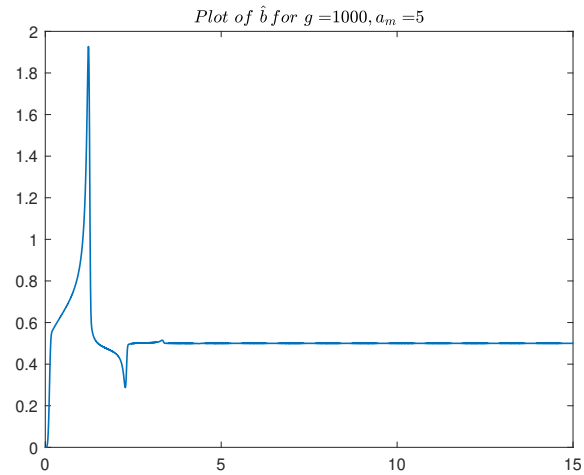
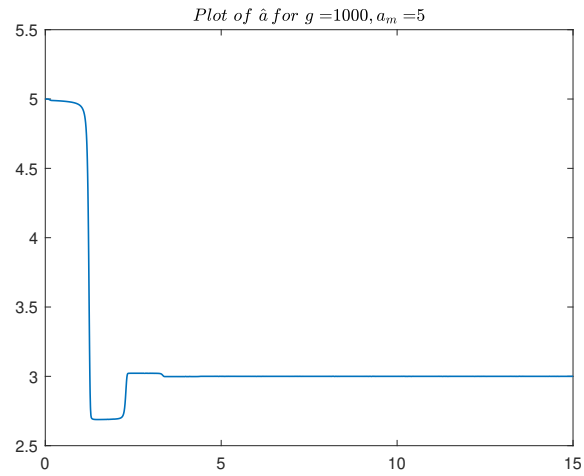
Στο πρώτο διάγραμμα φαίνεται και πάλι η γραφική παράσταση της κατάστασης x και της κατάστασης \hat{x} συναρτήσει του χρόνου, αλλά αυτήν την φορά, για είσοδο $u = 10\sin(3t)$. Όπως φαίνεται από το σχήμα, η γραφική παράσταση της εκτιμώμενης κατάστασης ενώ διαφέρει στα πρώτα δευτερόλεπτα, καθώς περνάει ο χρόνος, αρχίζει να ακολουθεί την ίδια πορεία με αυτήν της κατάστασης x . Οι γραφικές παραστάσεις που παρατίθενται προκύπτουν για επιλογές $\gamma = 1000$ και $a_m = 5$.

Στο δεύτερο διάγραμμα, παρουσιάζεται πάλι το σφάλμα αναγνώρισης, *error*, το οποίο ορίζεται ως η διαφορά της κατάστασης x με την εκτιμώμενη κατάσταση \hat{x} . Φαίνεται πως μετά από ένα μεταβατικό στάδιο που διαρκεί λιγότερο από 5

δευτερόλεπτα, το σφάλμα τείνει στο μηδενίζει

Στο τρίτο και τέταρτο διάγραμμα, παρουσιάζονται οι μεταβολές των εκτιμήσεων \hat{a} και \hat{b} συναρτήσει του χρόνου. Φαίνεται πως για την επιλογή των σταθερών γ και α_m που κάναμε, επιτυγχάνεται όχι μόνο μεγάλη ταχύτητα σύγκλισης αλλά και μικρή υπερύψωση αφού για χρόνο μικρότερο των 5 δευτερολέπτων οι εκτιμήσεις των \hat{a} και \hat{b} έχουν φτάσει στις πραγματικές τους τιμές.





Θέμα 2

Για το προηγούμενο σύστημα σχεδιάζεται εκτιμητής πραγματικού χρόνου παράλληλης και μικτής δομής βασισμένος στην μέθοδο Lyapunov.

Παράλληλη Δομή

Θέλουμε να φέρουμε το σύστημα 1 στην μορφή

$$\dot{x} = -\theta_1^* x + \theta_2^* u, x(0) = 0$$

Σε αντίθεση με την μέθοδο κλίσης, στην μέθοδο σχεδίασης κατά Lyapunov, θέλουμε το σύστημα να βρίσκεται σε μορφή εξισώσεων κατάστασης, επομένως δεν χρειάζεται να κάνουμε κάποια αλλαγή.

$$\dot{x} = -ax + bu = -\theta_1^*x + \theta_2^*u$$

Ορίζουμε ως σύστημα αναγνώρισης το

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1\hat{x} + \hat{\theta}_2u = -\hat{a}\hat{x} + \hat{b}u, \hat{x}(0) = 0$$

Υπολογίζοντας το σφάλμα προκύπτει

$$e = x - \hat{x} \Rightarrow \dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$$

$$\dot{e} = -\theta_1^*x + \theta_2^*u + \hat{\theta}_1\hat{x} - \hat{\theta}_2u$$

Προσθέτουμε και αφαιρούμε τον όρο $\theta_1^*\hat{x}$

$$\dot{e} = -\theta_1^*(x - \hat{x}) + (\hat{\theta}_1 - \theta_1^*)\hat{x} - \hat{\theta}_2u$$

$$\dot{e} = -\theta_1^*e + \tilde{\theta}_1\hat{x} - \tilde{\theta}_2u$$

οπου $\theta_2 = \hat{\theta}_2 - \theta_2^*$ Επιλέγουμε την συνάρτηση Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2\gamma_1}\tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{2\gamma_2}\tilde{\theta}_2^2$$

υπολογίζοντας την παράγωγό της προκύπτει

$$\dot{V} = e\dot{e} + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1\dot{\tilde{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2\dot{\tilde{\theta}}_2$$

$$\dot{V} = e(-\theta_1^* - \tilde{\theta}_2u + \tilde{\theta}_1\hat{x}) + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1\dot{\tilde{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2\dot{\tilde{\theta}}_2$$

$$\dot{V} = -e\theta_1^* - e\tilde{\theta}_2u + e\tilde{\theta}_1\hat{x} + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1\dot{\tilde{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2\dot{\tilde{\theta}}_2$$

Από τον ορισμό παραμετρικών σφαλμάτων έχουμε ότι

$$\dot{\tilde{\theta}}_1 = \dot{\hat{\theta}}_1$$

$$\dot{\tilde{\theta}}_2 = \dot{\hat{\theta}}_2$$

Έτσι επιλέγοντας

$$\dot{\tilde{\theta}}_1 = -\gamma_1 e\hat{x}$$

$$\dot{\tilde{\theta}}_2 = \gamma_2 eu$$

με αντικατάσταση στην παράγωγο της Lyapunov προκύπτει

$$\dot{V} = -\theta_1^*e^2 \leq 0$$

Όσον αφορά την ευστάθεια του συστήματος, ακολουθώντας την ίδια ανάλυση με πριν καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για ομοιόμορφα φραγμένες εισόδους $u \in L_\infty$, ο αναδρομικός νόμος μεταβολής των εκτιμώμενων παραμέτρων $\dot{\hat{\theta}}_1 = -ex$ και $\dot{\hat{\theta}}_2 = eu$ εξασφαλίζει ότι η εκτιμώμενη έξοδος \hat{x} της παράλληλης δομής συστήματος αναγνώρισης θα συγκλίνει στην έξοδο x του πραγματικού συστήματος και ο ρυθμός μεταβολής των παραμέτρων $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ θα μειώνεται με τον χρόνο και θα συγκλίνει ασυμπτωτικά στο μηδέν.

Επομένως το σύστημα εξισώσεων που καλούμαστε να επιλύσουμε, περνώντας και πάλι στο πεδίο του χρόνου, είναι το

$$\begin{cases} \dot{x} = -\theta_1^* x + \theta_2^* u, x(0) = 0 \\ \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e \hat{x}, \hat{\theta}_1(0) = 0 \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 e u, \hat{\theta}_2(0) = 0 \\ \dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 \hat{x} + \hat{\theta}_2 u, \hat{x}(0) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Από όπου εξάγουμε τις τιμές των εκτιμήσεων σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \hat{\theta}_1 \\ \hat{b} &= \hat{\theta}_2 \end{aligned}$$

Μικτή Δομή

Αυτήν την φορά, ορίζουμε ως σύστημα αναγνώρισης

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 x + \hat{\theta}_2 u + \theta_m(x - \hat{x})$$

Υπολογίζοντας το σφάλμα προκύπτει

$$\begin{aligned} e &= x - \hat{x} \Rightarrow \dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ \dot{e} &= -\theta_1^* x + \theta_2^* u + \hat{\theta}_1 x - \hat{\theta}_2 u - \theta_m(x - \hat{x}) \\ \dot{e} &= (\hat{\theta}_1 - \theta_1^*)x - (\hat{\theta}_2 - \theta_2^*)u - \theta_m(x - \hat{x}) \\ \dot{e} &= -\theta_m e + \tilde{\theta}_1 x - \tilde{\theta}_2 u \end{aligned}$$

Επιλέγουμε ως συνάρτηση Lyapunov

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2\gamma_1}\tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{2\gamma_2}\tilde{\theta}_2^2 \\ \dot{V} &= e\dot{e} + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1\dot{\tilde{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2\dot{\tilde{\theta}}_2 \\ \dot{V} &= -\theta_m e^2 + \tilde{\theta}_1 ex - \tilde{\theta}_2 eu + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1\dot{\tilde{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2\dot{\tilde{\theta}}_2 \end{aligned}$$

Για να είναι η παράγωγος της Lyapunov γνωστού προσήμου και μάλιστα αρνητική, θέλουμε να απαλείψουμε τους όρους αγνώστου προσήμου επομένως επιλέγουμε

$$\frac{1}{\gamma_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\theta}_1 = -\tilde{\theta}_1 e x \Rightarrow \dot{\theta}_1 = -\gamma_1 e x, \gamma_1 > 0$$

$$\frac{1}{\gamma_2} \tilde{\theta}_2 \dot{\theta}_2 = -\tilde{\theta}_2 e u \Rightarrow \dot{\theta}_2 = \gamma_2 e u, \gamma_2 > 0$$

Με αυτήν την επιλογή προκύπτει

$$\dot{V} = -\theta_m e^2 \leq 0$$

Επομένως, σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως, ισχύει πως για φραγμένες εισόδους, ο αναδρομικός νόμος μεταβολής των εκτιμώμενων παραμέτρων $\dot{\theta}_1 = -ex$ και $\dot{\theta}_2 = eu$ εξασφαλίζει ότι η εκτιμώμενη έξοδος \hat{x} της μικτής δομής συστήματος αναγνώρισης θα συγκλίνει στην έξοδο x του πραγματικού συστήματος και ο ρυθμός μεταβολής των παραμέτρων $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ θα μειώνεται με τον χρόνο και θα συγκλίνει ασυμπτωτικά στο μηδέν.

Το σύστημα εξισώσεων που καλούμαστε να λύσουμε είναι το

$$\begin{cases} \dot{x} = -\theta_1^* x + \theta_2^* u, x(0) = 0 \\ \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e \hat{x}, \hat{\theta}_1(0) = 0 \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 e u, \hat{\theta}_2(0) = 0 \\ \dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 x + \hat{\theta}_2 u + \theta_m (x - \hat{x}), \hat{x}(0) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Από όπου οι τιμές των εκτιμήσεων προκύπτουν σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \hat{\theta}_1 \\ \hat{b} &= \hat{\theta}_2 \end{aligned}$$

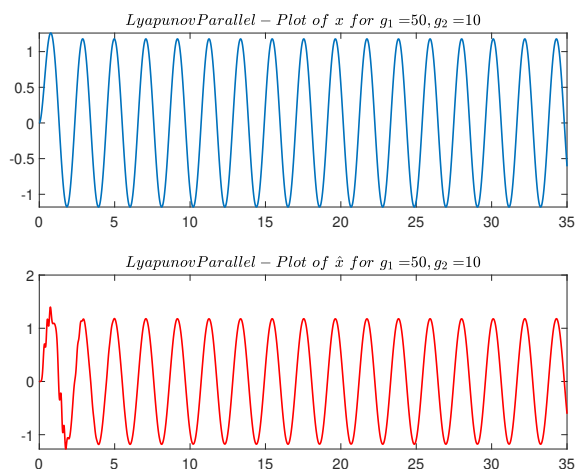
Επιλογή Παραμέτρων - Trial and Error

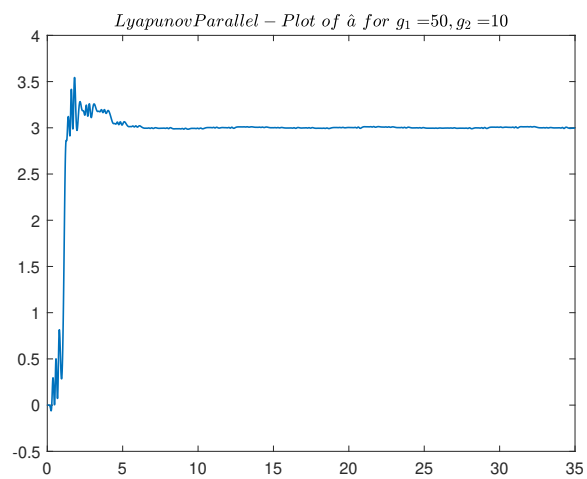
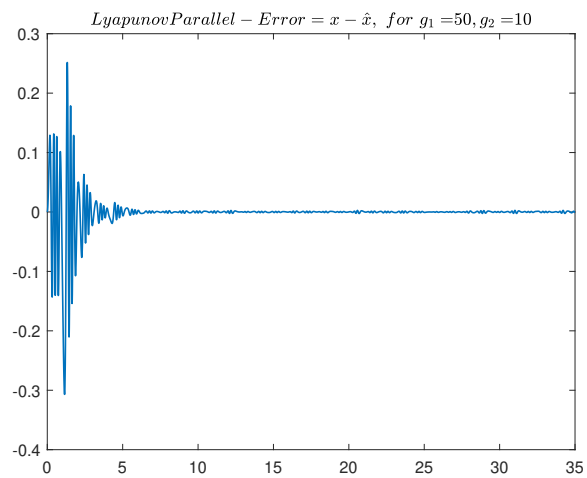
Για την επιλογή των παραμέτρων ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με πριν. Αυτήν την φορά, για την παράλληλη τοπολογία, χρειάζεται ο προσδιορισμός των παραμέτρων γ_1 και γ_2 ενώ για την μικτή χρειάζεται ο προσδιορισμός των παραμέτρων γ_1, γ_2 και θ_m . Κάθε φορά που θέλουμε να προσεγγίσουμε την καλύτερη επιλογή για μία από τις παραμέτρους, κρατάμε τις υπόλοιπες σταθερές. Έτσι, για την παράλληλη τοπολογία, βρίσκουμε $\gamma_1 = 50$ και $\gamma_2 = 10$. Αντίστοιχα για την μικτή, βρίσκουμε το $\gamma_1 = 70, \gamma_2 = 10$ και τέλος $\theta_m = 10$. Στόχος και πάλι είναι να πετύχουμε την καλύτερη ταχύτητα σύγκλισης με την μικρότερη δυνατή υπερύψωση.

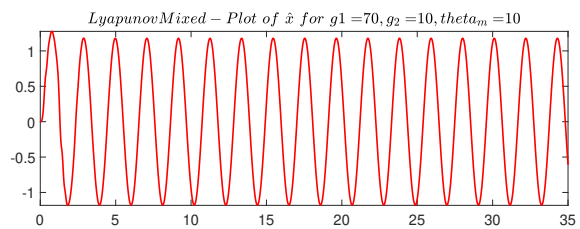
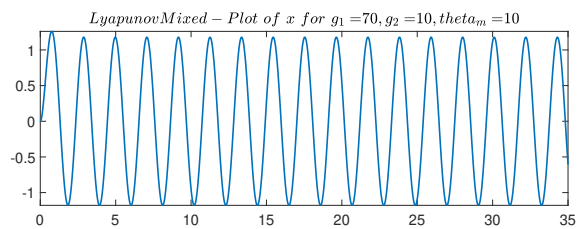
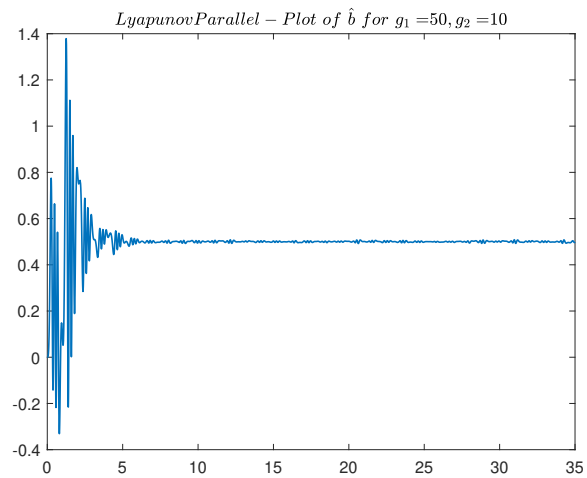
Προσομοίωση στο Matlab

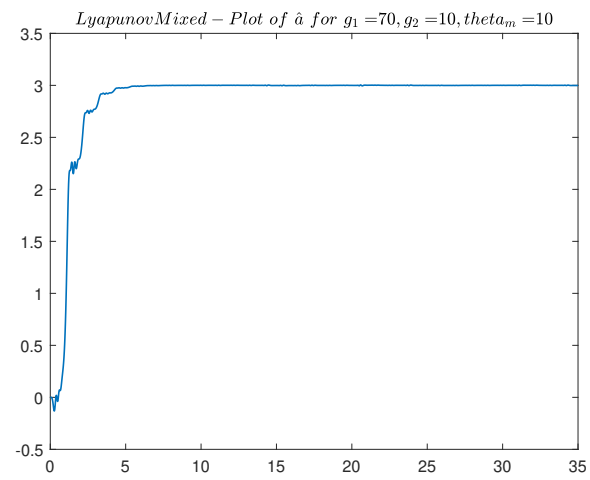
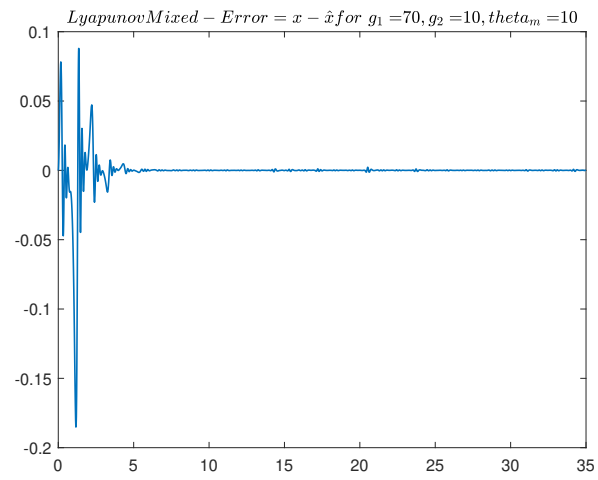
Στο πρώτο διάγραμμα, η γραφική παράσταση της εκτιμώμενης κατάστασης \hat{x} φαίνεται να ακολουθεί την ίδια πορεία με αυτήν της κατάστασης x μετά τα πρώτα 5 δευτερόλεπτα. Παρατηρώντας και την γραφική παράσταση του σφάλματος επιβεβαιώνονται τα ίδια συμπεράσματα αφού φαίνεται πως το σφάλμα είναι αρκετά μεγάλο για $t < 5$ αλλά για $t > 5$ αρχίζει να μειώνεται σημαντικά. Και πάλι οι εκτιμήσεις προσεγγίζουν με την πάροδο του χρόνου τις πραγματικές τους τιμές. Η γραφική παράσταση του $\hat{\delta}$ φαίνεται να ταλαντώνει στην αρχή ενώ η γραφική του \hat{a} παρουσιάζει μια μικρή υπερύψωση.

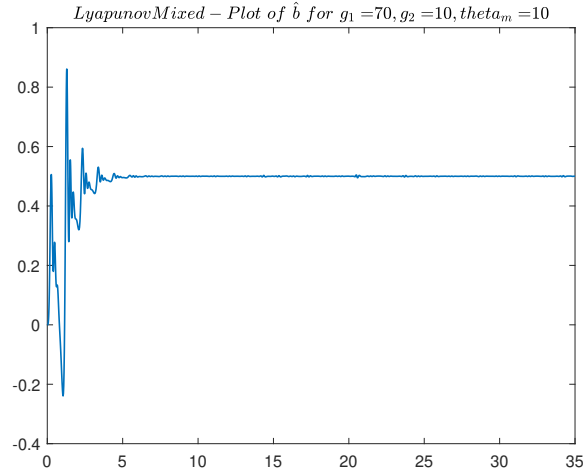
Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα της μικτής και παράλληλης τοπολογίας φαίνεται πως η μικτή παρέχει -με μικρή διαφορά- καλύτερα αποτελέσματα. Βέβαια η σύγκριση αυτή δεν είναι τελείως ορθή αφού δεν χρησιμοποιούνται οι ίδιες ακριβώς τιμές για τα γ_1 και γ_2 .











Προσθήκη Θορύβου

Έστω ότι προστίθεται θόρυβος στην μέτρηση της εξόδου x , ο οποίος δίνεται από την σχέση $n(t) = 0.5\sin(2\pi 40t)$. Επομένως πλέον το σφάλμα αναγνώρισης e δίνεται από την σχέση

$$e = x + n - \hat{x}$$

Σύμφωνα με την ανάλυση που προηγήθηκε, οι εκτιμήσεις θ_1 και θ_2 δίνονται από τις σχέσεις

για την παράλληλη δομή:

$$\dot{\theta}_1 = -\gamma_1 e \hat{x}$$

$$\dot{\theta}_2 = \gamma_2 e u$$

για την μικτή δομή:

$$\dot{\theta}_1 = -\gamma_1 e x$$

$$\dot{\theta}_2 = \gamma_2 e u,$$

Επομένως φαίνεται ότι μόνο η πρώτη συνιστώσα του διανύσματος θ εξαρτάται από το x και κάνοντας την αντικατάσταση προκύπτει

για την παράλληλη:

$$\dot{\theta}_1 = -\gamma_1 (x + n - \hat{x}) \hat{x}$$

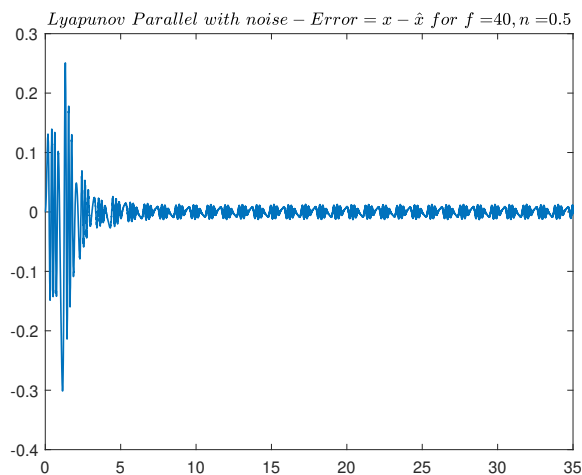
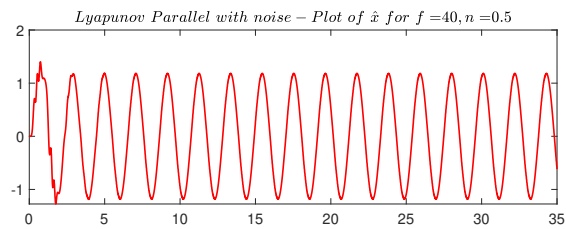
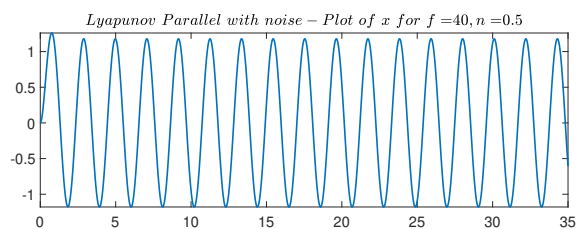
για την μικτή:

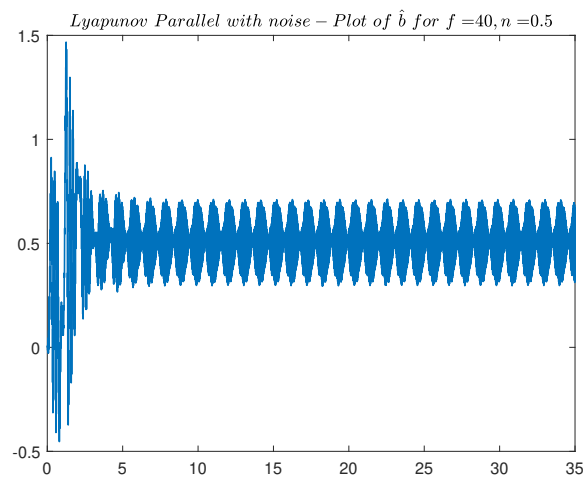
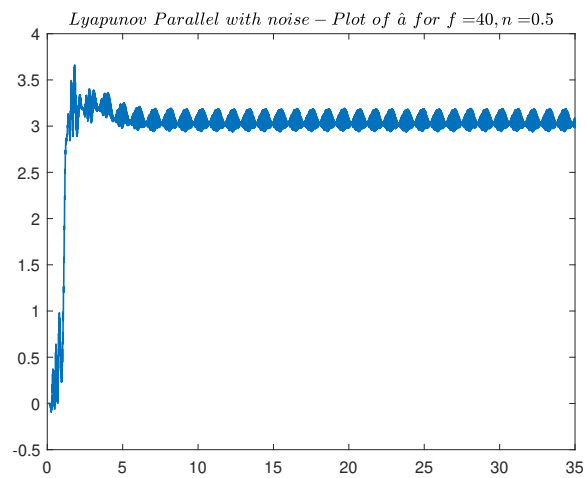
$$\dot{\theta}_1 = -\gamma_1 (x + n - \hat{x})(x + n)$$

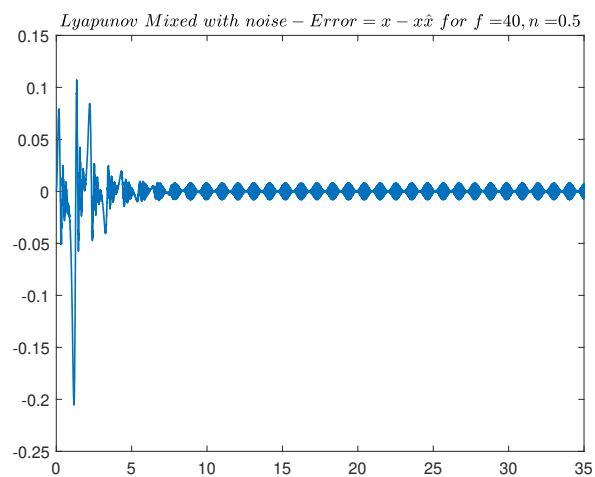
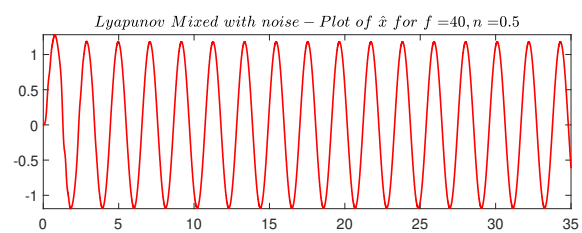
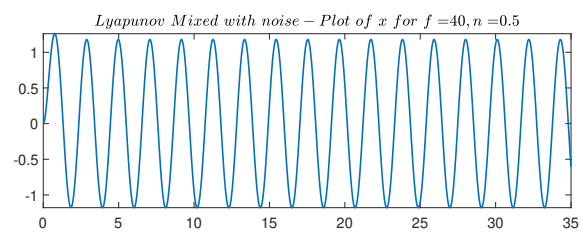
Επομένως, αναμένουμε ο θόρυβος να επηρεάζει πιο έντονα τις εκτιμήσεις στην μικτή δομή παρά στην παράλληλη αφού στην μικτή εμφανίζεται στο τετράγωνο.

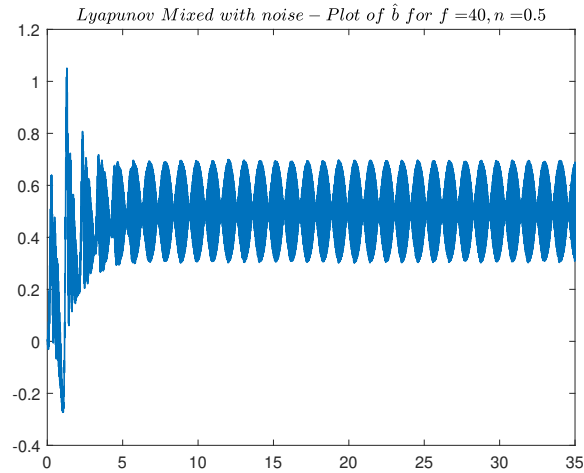
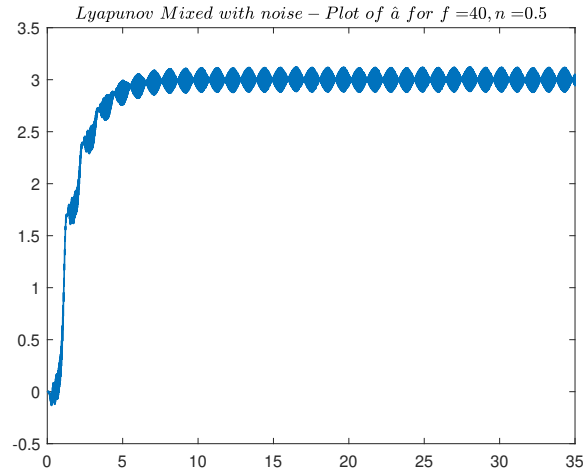
Προσομοίωση στο Matlab

Πράγματι, όπως φαίνεται και από το διάγραμμα του σφάλματος αναγνώρισης, ο θόρυβος έχει επηρεάσει περισσότερο τις εκτιμήσεις που προκύπτουν από χρήση μικτής τοπολογίας. Οι εκτιμήσεις πάντως πια να συγκλίνουν στις πραγματικές τους τιμές. Μάλιστα η προσέγγιση της τιμής του b έχει χαλάσει σημαντικά αφού φαίνεται να ταλαντώνει ανάμεσα σε μεγάλα νούμερα.









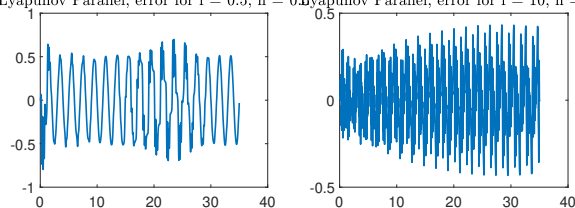
Μεταβολές στον Θόρυβο

Με μεταβολή και μάλιστα αύξηση του n_0 , προκαλείται διασπορά του θορύβου στην εκτίμηση. Αυτό το αποτέλεσμα είναι και το αναμενόμενο αφού η μεταβλητή n_0 είναι αυτή που καθορίζει το πλάτος του θορύβου. Η διαφορά σε σχέση με πριν φαίνεται έντονα και στις δύο τοπολογίες αλλά ιδιαίτερα στην μικτή οι εκτιμήσεις έχουν πλέον χαλάσει τελείως. Σημειώνεται επίσης πως, όπως θα περίμενε κανείς, για $n_0 < 1$ η μικτή τοπολογία υπερσχύει της παράλληλης.

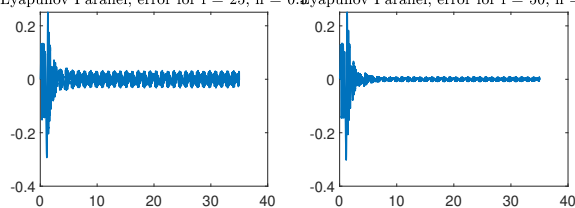
Μεταβάλλουμε την συχνότητα και παρατηρούμε τις αλλαγές που προκύπτουν.

Φαίνεται πως όσο μεγαλύτερη η συχνότητα, τόσο καλύτερα είναι τα αποτελέσματα και στις δύο τοπολογίες. Ενώ, συγκρίνοντας τις δύο τοπολογίες μεταξύ τους, βλέπουμε πως η μικτή ανταποκρίνεται καλύτερα.

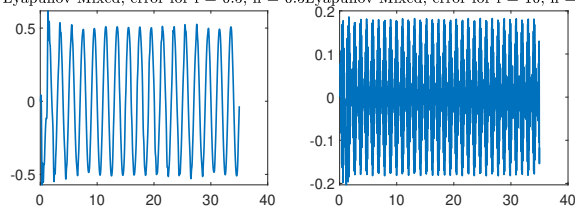
Lyapunov Parallel, error for $f = 0.5$, $n = 0$ Lyapunov Parallel, error for $f = 10$, $n = 0.5$



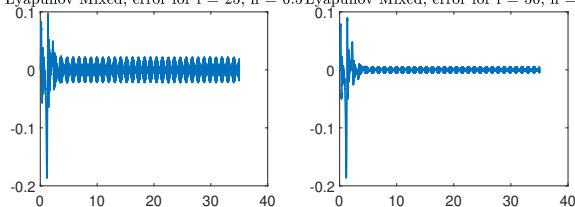
Lyapunov Parallel, error for $f = 25$, $n = 0$ Lyapunov Parallel, error for $f = 50$, $n = 0.5$

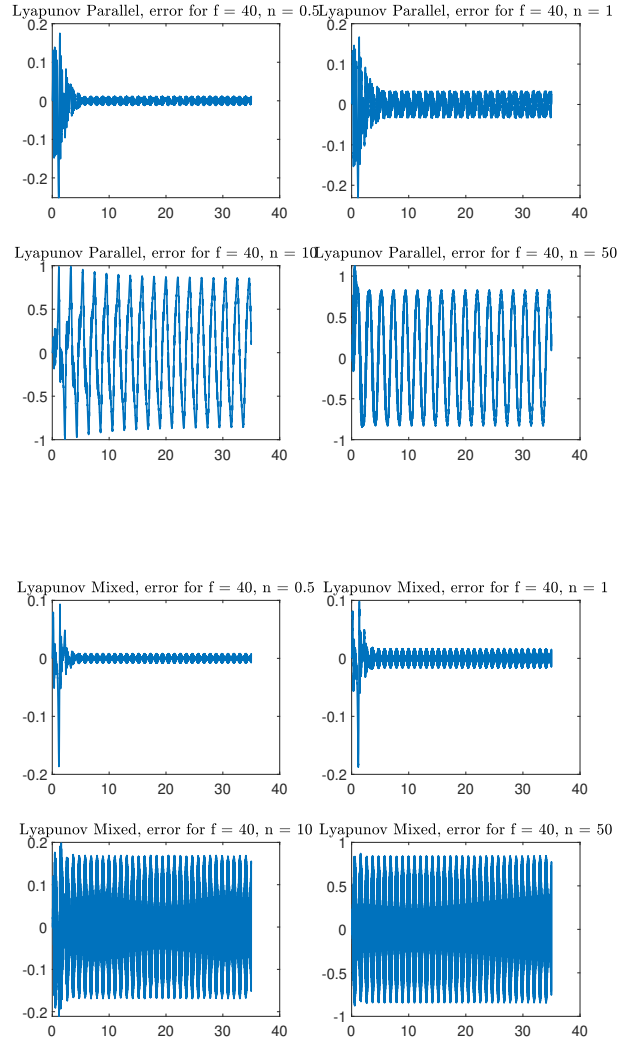


Lyapunov Mixed, error for $f = 0.5$, $n = 0.5$ Lyapunov Mixed, error for $f = 10$, $n = 0.5$



Lyapunov Mixed, error for $f = 25$, $n = 0.5$ Lyapunov Mixed, error for $f = 50$, $n = 0.5$





Θέμα 3

Θεωρητική Ανάλυση

Το σύστημα που δίνεται είναι το

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \cdot u, x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u = 3.5\sin(7.2t) + 2\sin(11.7t)$$

$$a_{1,1} = -0.25, a_{1,2} = 3, a_{2,1} = -5, a_{2,2} = 0, b_1 = 0.5, b_2 = 1.5$$

Το σύστημα περιγράφεται από την εξίσωση

$$\dot{x} = Ax + bu$$

ορίζουμε ως σύστημα αναγνώρισης σύμφωνα με τον τύπο της μικτής δομής το

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}x + \hat{b}u + \theta_m(x - \hat{x})$$

και ορίζουμε και το σφάλμα

$$e = x - \hat{x} \Rightarrow \dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$$

με αντικατάσταση προκύπτει

$$\dot{e} = Ax + bu - \hat{A}x - \hat{b}u - \theta_m(x - \hat{x})$$

$$\dot{e} = x(A - \hat{A}) + u(b - \hat{b}) - \theta_m(x - \hat{x})$$

$$\dot{e} = -\theta_m e - \tilde{A}x - \tilde{B}u$$

όπου $\tilde{A} = \hat{A} - A$ και $\tilde{B} = \hat{b} - b$.

Επιλέγοντας ως συνάρτηση Lyapunov την

$$V = \frac{1}{2}e^T e + \frac{1}{\gamma_1} \text{tr}\{\tilde{A}^T \tilde{A}\} + \frac{1}{\gamma_2} \text{tr}\{\tilde{B}^T \tilde{B}\}$$

και παραγωγίζοντας, προκύπτει

$$\dot{V} = e^T \dot{e} + \text{tr}\{\tilde{A}^T \dot{\tilde{A}}\} + \text{tr}\{\tilde{B}^T \dot{\tilde{B}}\}$$

$$\dot{V} = e^T A e - e^T \tilde{A} \hat{x} - e^T \tilde{B} u + \text{tr}\{\tilde{A}^T \dot{\tilde{A}}\} + \text{tr}\{\tilde{B}^T \dot{\tilde{B}}\}$$

$$\dot{V} = e^T A e + \text{tr}\{\tilde{A} \dot{\tilde{A}} + \tilde{B} \dot{\tilde{B}} - \tilde{A} \hat{x} e^T - \tilde{B} u e^T\}$$

Επιλέγοντας

$$\dot{\tilde{A}} = \hat{x} e^T$$

$$\dot{\tilde{B}} = u e^T$$

Προκύπτει

$$\dot{V} = e^T A e \leq 0$$

Επομένως, το σύστημα εξισώσεων που καλούμαστε να λύσουμε είναι το

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ \dot{\hat{x}} = \hat{A}x + \hat{b}u + \theta_m(x - \hat{x}) \\ \dot{\tilde{A}} = \gamma_1 \hat{x} e^T \\ \dot{\tilde{B}} = \gamma_2 u e^T \end{cases} \quad (4)$$

Επιλογή Παραμέτρων - Trial and Error

Γίνεται και πάλι χρήση της μικτής τοπολογίας της σχεδίασης κατά Lyapunov οπότε οι παράμετροι που καλούμαστε να επιλέξουμε είναι το γ_1 , γ_2 και το θ_m . Με κριτήρια την ταχύτητα σύγκλισης και τη χαμηλή υπερύψωση, μετά από δοκιμές, βλέπουμε πως τα καλύτερα αποτελέσματα παρατηρούνται για $\gamma_1 = \gamma_2 = 100$ και $\theta_m = 5$.

Προσομοίωση στο Matlab

Από τις γραφικές παραστάσεις που παρατίθενται, φαίνεται πως το \hat{x} ακολουθεί την ίδια πορεία με το x , το σφάλμα πηγαίνει γρήγορα στο μηδέν και οι εκτιμήσεις των στοιχείων των πινάκων A και B φτάνουν, σε χρόνο λιγότερο των 5s, τις πραγματικές τους τιμές.

