

# Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

Κουκουλέτσου Αικατερίνη 10218

Μάρτιος 2023

## Εισαγωγή

Σκοπός της συγκεκριμένης εργασίας είναι να εκτιμήσουμε τις άγνωστες παραμέτρους του συστήματος προκειμένου να προσδιορίσουμε την μαθηματική περιγραφή του μοντέλου του.

Στην πρώτη άσκηση οι παράμετροι προς εύρεση είναι η μάζα, η σταθερά  $k$  του ελατηρίου και η σταθερά απόσβεσης  $b$  ενώ στην δεύτερη τα γινόμενα LC και RC που εμφανίζονται στον πίνακα μεταφοράς, όπου  $C$  ο πυκνωτής,  $L$  η αυτεπαγωγή και  $R$  η αντίσταση του κυκλώματος. Ο προσδιορισμός των μεγεθών αυτών γίνεται με χρήση της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων η οποία όμως για να εφαρμοστεί πρέπει πρώτα να φέρουμε τα συστήματά μας σε γραμμικά παραμετροποιημένη μορφή.

Σημειώνεται ότι, και στις δύο περιπτώσεις, η μαθηματική σχέση που περιγράφει τα μοντέλα είναι πολυωνυμική με βαθμό  $n = 2$ , έχουμε δηλαδή μερική γνώση του μοντέλου που και άρα πρόκειται για την περίπτωση της μοντελοποίησης κατά "γχιρίζο κουτί".

## Γραμμική Παραμετροποίηση

Σκοπός της διαδικασίας της γραμμικής παραμετροποίησης είναι να φέρει ένα σύστημα που δεν είναι γραμμικό σε γραμμική μορφή έτσι ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι γνωστοί αλγόριθμοι για την εύρεση ελαχίστου.

Τα βήματα που ακολουθούνται είναι τα εξής. Λύνοντας ως προς την ανώτερη παράγωγο του συστήματος θα έχουμε:

$$y^n = -a_1 \cdot y^{n-1} - a_2 \cdot y^{n-2} \dots - a_{n-1} \cdot \dot{y} - a_n \cdot y + b_0 \cdot u^m + b_1 \cdot u^{m-1} + \dots + b_m \cdot u$$

Ορίζουμε διάνυσμα  $\theta^*$ , τα στοιχεία του οποίου είναι όλες οι άγνωστοι παράμετροι.

$$\theta^* = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \ b_1 \ \dots \ b_m]^T$$

Ορίζουμε επίσης διάνυσμα  $\Delta$  τ/ώ να περιλαμβάνει την είσοδο, την έξοδο και ανώτερες παραγώγους αυτών, όλα τα στοιχεία δηλαδή με τα οποία πολλαπλασιάζεται το διάνυσμα  $\theta$ .

$$\begin{aligned} \Delta &= [-y^{n-1} \ -y^{n-2} \ \dots \ -y \ u^m \ \dots \ u]^T = \\ &= [-\Delta_{n-1}^T(s) \cdot y \ \Delta_m^T(s) \cdot u]^T \end{aligned}$$

όπου

$$\Delta_i(s) = [s^i \ s^{i-1} \ \dots \ 1]^T$$

έτσι το σύστημα γράφεται στην μορφή

$$y^n = \theta^{*T} \cdot \Delta$$

Αυτή η μορφή όπου η έξοδος του συστήματος εκφράζεται ως ένα διάνυσμα αγνώστων όρων πολλαπλασιασμένο με ένα διάνυσμα γνωστών, ονομάζεται γραμμικά παραμετροποιημένη μορφή.

Παρόλ'αυτά, επειδή δεν είναι πάντα εφικτό να μετράμε ανώτερες παραγώγους της εισόδου/εξόδου ενός συστήματος, προσπαθούμε να απαλλαχθούμε από τον όρο  $y^n$  αντικαθιστώντας τον από ένα μέγεθος που είναι γνωστό, που μπορεί δηλαδή να μετρηθεί. Φτιάχνουμε λοιπόν ένα ευσταθές φίλτρο τάξεως  $n$ .

$$\Lambda(s) = (s + \rho_1) \cdot (s + \rho_2) \cdot \dots \cdot (s + \rho_n)$$

με  $\rho_i > 0$  για  $i = 1, 2, \dots, n$  για να είναι ευσταθές. Επομένως θα προκύψει πολυώνυμο που θα έχει την μορφή

$$\Lambda(s) = s^n + \lambda_1 \cdot s^{n-1} + \dots + \lambda_{n-1} \cdot s + \lambda_n$$

$$\lambda = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \dots \lambda_n]^T$$

Όμως το  $\Lambda(s)$  μπορεί να γραφεί και ως

$$\Lambda(s) = s^n + \lambda^T \cdot \Delta_{n-1}(s)$$

”Φιλτράροντας” και τα δύο μέρη της εξίσωσης με το φίλτρο  $\frac{1}{\Lambda(s)}$  προκύπτει

$$\frac{y^n}{\Lambda(s)} = \theta^{*T} \cdot \frac{\Delta}{\Lambda(s)}$$

$$\frac{s^n}{\Lambda(s)} y = \theta^{*T} \cdot \frac{\Delta}{\Lambda(s)}$$

Πλέον αντί για την  $n$ -ιστή παράγωγο, έχουμε την έξοδο  $y$ , η οποία είναι μετρήσιμη, πολλαπλασιασμένη με ένα φίλτρο  $\frac{s}{\Lambda(s)}$  το οποίο είναι υλοποιήσιμο αφού ο βαθμός του παρονομαστή είναι ίσος με τον βαθμό του αριθμητή. Αντικαθιστώντας το  $s^n$  από την εξίσωση του  $\Lambda(s)$  προκύπτει

$$z = \frac{s^n}{\Lambda(s)} y = \frac{\Lambda(s) - \lambda^T \cdot \Delta_{n-1}(s)}{\Lambda(s)} y = y - \frac{\lambda^T \cdot \Delta_{n-1}(s)}{\Lambda(s)} y$$

Θεωρούμε ως  $\zeta$  το διάνυσμα

$$\zeta = \left[ -\frac{\Delta_{n-1}^T(s)}{\Lambda(s)} y \quad \frac{\Delta_m^T(s) u}{\Lambda(s)} \right]$$

Επομένως

$$z = \theta^{*T} \cdot \zeta = \theta_1^{*T} \zeta_1 + \theta_2^{*T} \zeta_2$$

και αντικαθιστώντας το  $z$  στην σχέση του  $y$  προκύπτει τελικά

$$y = \theta_1^{*T} \zeta_1 + \theta_2^{*T} \zeta_2 - \lambda^T \zeta_1$$

$$y = (\theta_1^{*T} - \lambda^T)\zeta_1 + \theta_2^{*T}\zeta_2$$

$$y = \theta_\lambda^T \zeta$$

$$\theta_\lambda = [\theta_1^{*T} - \lambda^T \quad \theta_2^{*T}]^T$$

Τελικά, καταλήγουμε σε μία μορφή όπου είναι όλα γνωστά, μετρήσιμα μεγέθη, εκτός από το διάνυσμα  $\theta$  και άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων για τον προσδιορισμό των στοιχείων - παραμέτρων του συστήματος.

## Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων

Η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων ανήκει στην κατηγορία των μεθόδων μη-πραγματικού χρόνου γιατί δεν μπορεί να βγάλει αποτέλεσμα σε χρόνο μιας δειγματοληψίας. Η μέθοδος ορίζεται ως εξής:

Εφόσον έχουμε φέρει το σύστημα στην μορφή

$$y = \theta_\lambda^T \cdot \varphi$$

όπου το  $\theta$  είναι διάνυσμα άγνωστων και το  $\varphi$  είναι το  $\zeta$ , δηλαδή το διάνυσμα γνωστών μεγεθών, μπορούμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων προκειμένου να προσεγγίσουμε τις τιμές των αγνώστων παραμέτρων.

Τα μόνα μετρήσιμα μεγέθη είναι οι τιμές της εισόδου  $u$  και της εξόδου  $y$  για πλήθος χρονικών στιγμών  $N$ . Το σφάλμα ορίζεται ως

$$e(i) = y(i) - \hat{y}(i), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Ως συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση ορίζουμε το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων

$$V(\theta, z_0) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \cdot e^2(i, \theta)$$

Ζητούμενο είναι να βρεθεί το όρισμα που ελαχιστοποιεί ως προς  $\theta$  την συνάρτηση  $V$ .

$$\operatorname{argmin}_{\theta} V(\theta, z)$$

Το διάνυσμα  $y$  περιλαμβάνει όλες τις μετρήσεις της εξόδου για τις  $N$  χρονικές στιγμές

$$y = [y(1) \quad y(2) \quad \dots \quad y(N)]^T$$

Με την βοήθεια του, κατασκευάζουμε τον πίνακα  $\Phi$  ο οποίος ορίζεται ως

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \varphi_3(N) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1(N) & \varphi_2(N) & \varphi_3(N) \end{bmatrix}$$

όπου  $\varphi_k(i)$  είναι η  $i$ -οστή μέτρηση της  $k$  συνιστώσας του διανύσματος  $\Phi$ . Το σφάλμα μπορεί να γραφεί πλέον στην μορφή

$$e = Y - \Phi\theta$$

$$\theta_0 = \operatorname{argmin}_{\theta} \frac{|e|^2}{2}$$

Η συνάρτηση  $V$  τώρα γράφεται ως

$$V_N = \left| \frac{Y - \Phi\theta}{2} \right|^2$$

Η συνάρτηση αυτή είναι κυρτή και επομένως το ελάχιστο της είναι μοναδικό και μπορεί να βρεθεί λύνοντας την

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

από την οποία προκύπτει μετά από πράξεις ότι

$$\theta_0^T \cdot (\Phi^T \Phi) = Y^T \Phi$$

## Άσκηση 1

### Γραμμική Παραμετροποίηση

Έχουμε σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα. Έστω  $y$  η μετατόπιση του συστήματος, τότε:

Η δύναμη του ελατηρίου δίνεται από την σχέση:

$$F_{\text{ελατηριου}} = -ky$$

Η δύναμη του αποσβεστήρα για γραμμικό ελατήριο είναι:

$$F_{\text{αποσβεστήρα}} = -b\dot{y}$$

και άρα από τον τύπο

$$\Sigma F = m \cdot \ddot{y}$$

η διαφορική θα έχει την μορφή

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u$$

Διαφορούμε με τον συντελεστή της μέγιστης παραγώγου και εφαρμόζουμε  $M/\Sigma$  Laplace. Προκύπτει:

$$s^2 y + s \frac{b}{m} y + \frac{k}{m} y = u$$

Εφόσον η μεγαλύτερη παράγωγος που εμφανίζεται στο σύστημα μας είναι η 2η, χρειαζόμαστε φίλτρο 2ης τάξης, ευσταθές αρά με πόλους στο αρνητικό ημιεπίπεδο. Επόμενως μετά από δοκιμές καταλήγουμε στην επιλογή:

$$\Lambda(s) = (s + 0.1)(s + 0.6) = s^2 + 0.7s + 0.6$$

Πρέπει να φέρουμε το σύστημα σε γραμμικά παραμετροποιημένη μορφή, οπότε θα κάνουμε κατευθείαν χρήση των τύπων που αποδείχθηκαν στην εισαγωγή,

$$\begin{aligned} y &= \theta_\lambda^T \cdot \zeta \\ \zeta &= [-\Delta_{n-1}^T(s)y \quad \Delta_m^T(s)u]^T \\ \theta_\lambda^T &= [\theta_1^{*T} - \lambda^T \quad \theta_2^{*T}] \end{aligned}$$

Για  $n = 2$ ,  $m = 1$  και  $\lambda = [0.7 \quad 0.6]$ , το  $\zeta$  και  $\theta$  είναι

$$\begin{aligned} \zeta &= \left[ -\frac{s}{\Lambda(s)} \cdot y \quad -\frac{1}{\Lambda(s)} \cdot y \quad \frac{1}{\Lambda(s)} \cdot u \right] \\ \theta^T &= \left[ \frac{b}{m} - 0.7 \quad \frac{k}{m} - 0.6 \quad \frac{1}{m} \right] \end{aligned}$$

## Επιλογή Φίλτρου

Η επιλογή του φίλτρου έγινε με διαδικασία trial and error. Αρχικά, το φίλτρο θα πρέπει να είναι ευσταθές άρα θέλουμε οι λύσεις να βρίσκονται στο αρνητικό ημιεπίπεδο.

Στην πρώτη δοκιμή, επιλέγουμε διπλό πόλο στο 20. Οι εκτιμήσεις που προκύπτουν για την μάζα, το  $\kappa$  και το  $b$  είναι 13.8532, 2.5012 και 0.19093 αντίστοιχα. Παρατηρούμε πως το  $\hat{b}$  διαφέρει σημαντικά. Η εκτίμηση του  $\hat{k}$  είναι κοντά στην πραγματική τιμή αλλά το  $\hat{m}$  δεν είναι ικανοποιητικό.

Στην δεύτερη προσπάθεια επιλέχθηκε διπλός πόλος στο 50 και τα αποτελέσματα που προέκυψαν αυτήν την φορά είναι  $\hat{m} = 59.7775$ ,  $\hat{k} = 2.5138$ ,  $\hat{b} = -0.13758$ . Οι προσεγγίσεις πλέον είναι λάθος και αρα οι πόλοι πρέπει να βρίσκονται πιο κοντά στο 0, όχι πιο μακριά.

Έπειτα από πολλές δοκιμές, οι βέλτιστες τιμές παρατηρούνται για επιλογή πόλων κοντά στο 0.8 με 0.1, το οποίο επιβεβαιώνεται και από την φυσική του συστήματος αφού  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 0.5$  και  $\omega_n = p_1 \cdot p_2$ . Τελικά, επιλέγουμε  $p_1 = 0.1$  και  $p_2 = 0.6$  και οι τιμές που προκύπτουν για τις εκτιμήσεις είναι  $\hat{m} = 9.9741$ ,  $\hat{k} = 2.4978$ ,  $\hat{b} = 0.5004$ .

## Εφαρμογή μεθόδου Ελαχίστων Τετραγώνων

Σύμφωνα με την ανάλυση που προηγήθηκε, για 10 δευτερόλεπτα και δειγματοληψία κάθε 0.1 δευτερόλεπτο, ο αριθμός μετρήσεων  $N$  θα είναι

$$N = \frac{RunTime}{Step} + 1 = \frac{10}{0.1} + 1 = 101$$

Επομένως ο πίνακας  $\Phi$  παίρνει την μορφή

$$\Phi = \begin{bmatrix} \frac{-s}{s^2+0.7s+0.6}y(1) & \frac{-1}{s^2+0.7s+0.6}y(1) & \frac{1}{s^2+0.7s+0.6}u(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{-s}{s^2+0.7s+0.6}y(101) & \frac{-1}{s^2+0.7s+0.6}y(101) & \frac{1}{s^2+0.7s+0.6}u(101) \end{bmatrix}$$

Ο  $\Phi$  ένας πίνακας 101x3. Υπολογίζουμε τα γινόμενα

$$\Phi^T \cdot \Phi$$

γινόμενο πίνακα 3x101 με πίνακα 101x3 και άρα το αποτέλεσμα είναι πίνακας 3x3 και

$$\Upsilon^T \cdot \Phi$$

όπου  $\Upsilon^T$  το διάνυσμα 1x101 με τις τιμές από την επίλυση της διαφορικής με χρήση της *ode45*, δηλαδή, έχει την μορφή  $\Upsilon^T = [y_0 \ y_{0.1} \ y_{0.2} \dots y_{10}]$ . όπου ως  $y_i$  εννοείται η τιμή της λύσης της διαφορικής υπολογισμένη για  $t = i$

Από τον πολλαπλασιασμό πίνακα 1x101 με πίνακα 101x3 προκύπτει πίνακας 1x3 και άρα υπολογίζουμε το  $\theta_0^T$ , το οποίο είναι διάνυσμα 1x3, λύνοντας το σύστημα

$$\theta_0^T (\Phi^T \Phi) = \Upsilon^T \cdot \Phi$$

Από τις προηγούμενη σχέση για το  $\theta$

$$\theta^T = \left[ \frac{b}{m} - 0.7 \quad \frac{k}{m} - 0.6 \quad \frac{1}{m} \right]$$

και με εξίσωση των στοιχείων προκύπτουν οι εκτιμήσεις των παραμέτρων.

$$\hat{m} = \frac{1}{\theta_0(3)}$$

,

$$\hat{k} = \hat{m}(\theta_0(2) + 0.6)$$

$$\hat{b} = \hat{m}(\theta_0(1) + 0.7)$$

Για τα φίλτρα με τα οποία είναι πολλαπλασιασμένα τα σήματα χρησιμοποιήθηκε η εντολή *tf* και για την επιστροφή των χρονικών στιγμών η *lsim*. Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων υλοποιείται στο αρχείο με τίτλο *leastSquaresRegression.m* και η λύση της διαφορικής γίνεται στο αρχείο *odefun.m*.

## Προσομοίωση στο Matlab

Παρατίθενται τα διαγράμματα των  $y$  και  $\hat{y}$  καθώς και το διάγραμμα του σφάλματος  $error = y - \hat{y}$  συναρτήσει του χρόνου.

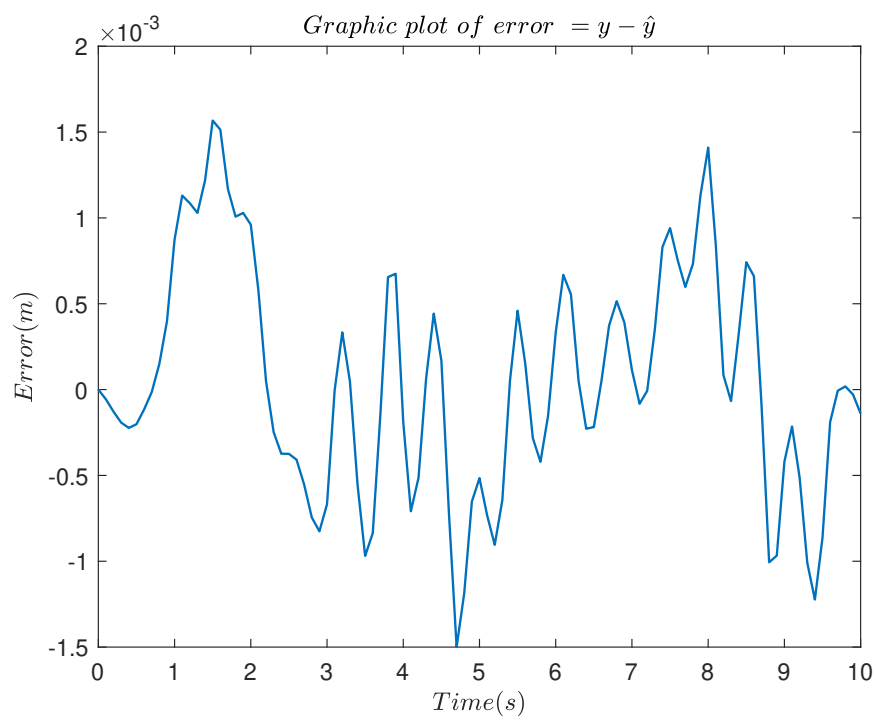
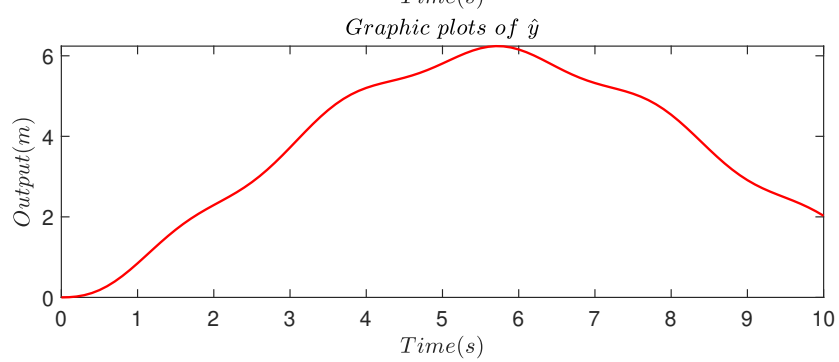
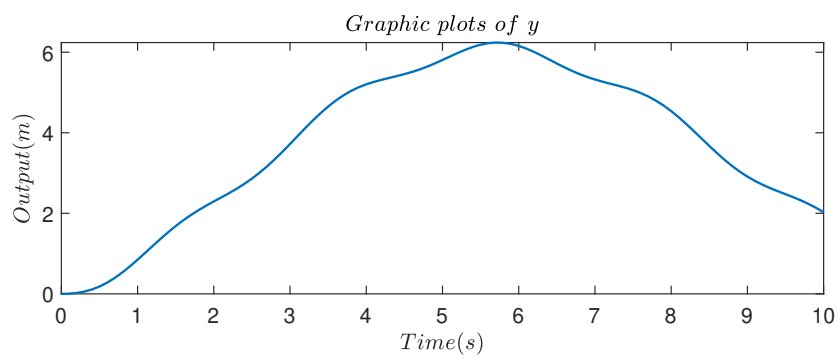
Διευκρινίζεται ότι οι τιμές του  $y$  προκύπτουν από την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει το σύστημα με χρήση της *ode45* ενώ οι τιμές της  $\hat{y}$  με τον πολλαπλασιασμό  $\hat{y} = \theta^T \cdot \Phi$ , όπου  $\theta$  το γνωστό πλέον διάνυσμα με τις εκτιμήσεις των παραμέτρων.

Παρατηρείται πως το σφάλμα είναι της τάξεως του  $10^{-3}$  και για αυτό οι καμπύλες της εξόδου είναι σχεδόν πανομοιότυπες. Μάλιστα, όταν σχεδιάζονται σε κοινό σύστημα αξόνων "πέφτουν" η μία πάνω στην άλλη για αυτό και επιλέχθηκε να παρουσιαστούν χωριστά.

Τα αποτελέσματα αυτά είναι αναμενόμενα, αφού για την συγκεκριμένη επιλογή πόλων οι εκτιμήσεις των παραμέτρων ήταν πολύ κοντά στις πραγματικές τιμές. Συγκεκριμένα,  $m - \hat{m} = 10 - 9.9741 = 0.0259$ ,  $k - \hat{k} = 2.5 - 2.4978 = 0.0022$  και  $b - \hat{b} = 0.5 - 0.5004 = -0.004$

Τα διαγράμματα που παρουσιάζονται έχουν προκύψει επιλέγοντας χρόνο εκτέλεσης 10s και δειγματοληψία κάθε 0.1s.





## Άσκηση 2

### Θεωρητική Ανάλυση

Από τον 2ο κανόνα του Kirchhoff ισχύει:

$$I_R + I_L = I_C$$

ισχύει επίσης ότι

$$I_R = \frac{V_R}{R}$$
$$V_C = \int_0^t I(\tau) d\tau$$

άρα παραγωγίζοντας προκύπτει

$$I_C = \dot{V}_C \cdot C$$

Η εξίσωση του πρώτου βρόγχου είναι:

$$u_1 - V_R - L \cdot \frac{dI_L}{dt} = 0$$

αντικαθιστώντας το  $I_L$  από τα παραπάνω θα έχουμε

$$u_1 - V_R - \frac{L}{R} \cdot \dot{V}_R + L \cdot C \cdot \ddot{V}_C = 0(1)$$

η εξίσωση του δεύτερου βρόγχου είναι

$$u_2 - L \cdot \frac{d(-I_L)}{dt} - V_C = 0$$

αντικαθιστώντας πάλι το  $I_L$  έχουμε

$$u_2 - L \cdot C \cdot \ddot{V}_C + \frac{L}{R} \cdot \dot{V}_R - V_C = 0(2)$$

Στις (1) και (2) αντικαθιστώ την σχέση

$$u_1 + u_2 = V_R + V_C$$

Οπότε μετά από πράξεις θα έχουμε

$$\ddot{V}_C + \frac{1}{R \cdot C} \cdot \dot{V}_C + \frac{1}{L \cdot C} \cdot V_C = \frac{1}{R \cdot C} \cdot u_1 + \frac{1}{R \cdot C} \cdot u_2 + \frac{1}{L \cdot C} \cdot u_2$$
$$\ddot{V}_R + \frac{1}{R \cdot C} \cdot \dot{V}_R + \frac{1}{L \cdot C} \cdot V_R = \ddot{u}_1 + \frac{1}{L \cdot C} \cdot u_1 + \ddot{u}_2$$

Εφαρμόζουμε Μετασχηματισμό Laplace

$$\begin{aligned} s^2 V_C(s) - sV_C(0) - \dot{V}_C(0) + \frac{1}{RC} \cdot (sV_C(s) - V_C(0)) + \frac{1}{LC} \cdot V_C(s) \\ = \frac{1}{RC} \cdot (s \cdot u_1(s) - u_1(0)) + \frac{1}{RC} \cdot (su_2(s) - u_2(0)) + \frac{1}{LC} u_2(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s^2 V_R(s) - sV_R(0) - \dot{V}_R(0) + \frac{1}{RC} \cdot (sV_R(s) - V_R(0)) + \frac{1}{LC} \cdot V_R(s) \\ = (s^2 \cdot u_1(s) - u_1(0) - \dot{u}_1(0)) + \frac{1}{LC} \cdot u_1(s) + s^2 \cdot u_2(s) - s \cdot u_2(0) - \dot{u}_2(0) \end{aligned}$$

Έαν υποθέσουμε πως οι αρχικές συνθήκες είναι ίσες με το μηδέν έχουμε

$$\begin{aligned} s^2 V_C(s) + \frac{1}{RC} \cdot sV_C(s) + \frac{1}{LC} \cdot V_C(s) \\ = \frac{1}{RC} \cdot s \cdot u_1(s) + \frac{1}{RC} \cdot s \cdot u_2(s) + \frac{1}{LC} u_2(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s^2 V_R(s) + \frac{1}{RC} \cdot sV_R(s) + \frac{1}{LC} \cdot V_R(s) \\ = s^2 \cdot u_1(s) + \frac{1}{LC} \cdot u_1(s) + s^2 \cdot u_2(s) \end{aligned}$$

Επομένως, ο πίνακας μεταφοράς του συστήματος θα έχει την μορφή

$$\begin{bmatrix} V_R \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} & \frac{s^2}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} \\ \frac{\frac{s}{RC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} & \frac{\frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Για να υπολογίσουμε τον πίνακα θα πρέπει να βρούμε τις τιμές των γινομένων  $L \cdot C$  και του  $R \cdot C$ .

Ξεκινώντας από την διαφορική εξίσωση του  $V_C$ , παρατηρούμε πως η ανώτερη παράγωγος είναι η 2η και άρα χρειαζόμαστε ένα φίλτρο  $\Lambda(s)$  2ης τάξης. Οι τιμές των πόλων επιλέγονται και πάλι με δοκιμές (trial and error). Φέρνουμε την εξίσωση στην μορφή  $y = \theta^{*T} \cdot \zeta$

$$\zeta = [-\Delta_{n-1}^T(s)y \quad \Delta_m^T(s)u]^T$$

άρα για  $n = 2$  και  $m = 1$  θα έχουμε

$$\zeta = \begin{bmatrix} -\frac{[s \ 1]}{\Lambda(s)} \cdot y & \frac{[s \ 1]}{\Lambda(s)} \cdot u_1^T & \frac{[s \ 1]}{\Lambda(s)} \cdot u_2^T \end{bmatrix}$$

$$\theta = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC} & \frac{1}{RC} & 0 & \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC} \end{bmatrix}$$

Για την διαφορική του  $V_R$  αντίστοιχα θα έχουμε

$$\zeta = \begin{bmatrix} -\frac{[s \ 1]}{\Lambda(s)} \cdot y & \frac{[s^2 \ s \ 1]}{\Lambda(s)} \cdot u_1^T & \frac{[s^2 \ s \ 1]}{\Lambda(s)} \cdot u_2^T \end{bmatrix}$$

$$\theta = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC} & 1 & 0 & \frac{1}{LC} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Εφαρμογή Μεθόδου Ελαχίστων Τετραγώνων

Εφαρμόζουμε μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων για των προσδιορισμό το LC και RC. Ο χρόνος εκτέλεσης αυτήν την φορά είναι 50 δευτερόλεπτα και η δειγματοληψία θα γίνεται κάθε  $1e - 4$  δευτερόλεπτα. Επομένως, ο αριθμός  $N$  θα είναι  $\frac{50}{10^{-4}} + 1$  και άρα ο πίνακας  $\Phi$  ορίζεται ως εξής. Ως πόλοι επιλέγονται το 40 και το 100

$$\Phi = \begin{bmatrix} \frac{-s}{\Lambda(s)} V_C(1) & \frac{-1}{\Lambda(s)} V_C(1) & \frac{s}{\Lambda(s)} u_1(1) & \frac{1}{\Lambda(s)} u_1(1) & \frac{s}{\Lambda(s)} u_2(1) & \frac{1}{\Lambda(s)} u_2(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{-s}{\Lambda(s)} V_C(N) & \frac{-1}{\Lambda(s)} V_C(N) & \frac{s}{\Lambda(s)} u_1(N) & \frac{1}{\Lambda(s)} u_1(N) & \frac{s}{\Lambda(s)} u_2(N) & \frac{1}{\Lambda(s)} u_2(N) \end{bmatrix}$$

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για το  $V_R$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \frac{-s}{\Lambda(s)} V_R(1) & \frac{-1}{\Lambda(s)} V_R(1) & \frac{s^2}{\Lambda(s)} u_1(1) & \frac{s}{\Lambda(s)} u_1(1) & \frac{1}{\Lambda(s)} u_1(1) & \frac{s^2}{\Lambda(s)} u_2(1) & \frac{s}{\Lambda(s)} u_2(1) & \frac{1}{\Lambda(s)} u_2(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{-s}{\Lambda(s)} V_R(N) & \frac{-1}{\Lambda(s)} V_R(N) & \frac{s^2}{\Lambda(s)} u_1(N) & \frac{s}{\Lambda(s)} u_1(N) & \frac{1}{\Lambda(s)} u_1(N) & \frac{s^2}{\Lambda(s)} u_2(N) & \frac{s}{\Lambda(s)} u_2(N) & \frac{1}{\Lambda(s)} u_2(N) \end{bmatrix}$$

Αυτήν την φορά τα σήματα με τα οποία πολλαπλασιάζονται τα φίλτρα δίνονται από το αρχείο v.p. Μετά τον προσδιορισμό των πινάκων  $\Phi$  και  $\theta_\lambda$  τα βήματα του αλγορίθμου είναι τα ίδια με πριν. Για την εύρεση του  $\theta$  καλούμε πάλι την συνάρτηση *leastSquaresRegression.m*, ο κώδικας για την δεύτερη άσκηση βρίσκεται στο αρχείο με τίτλο *mainPart2.m*.

## Προσομοίωση στο Matlab

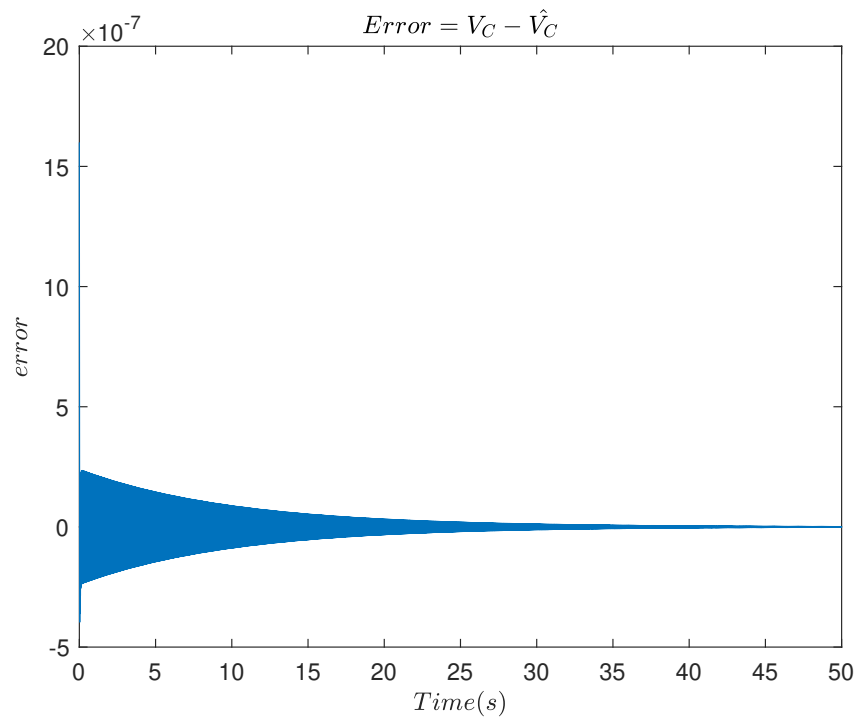
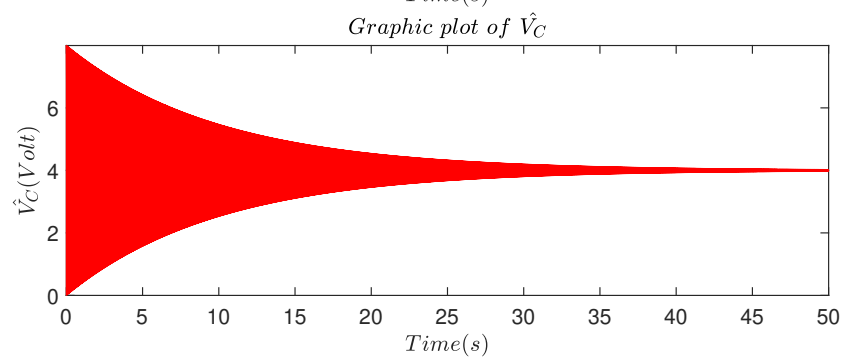
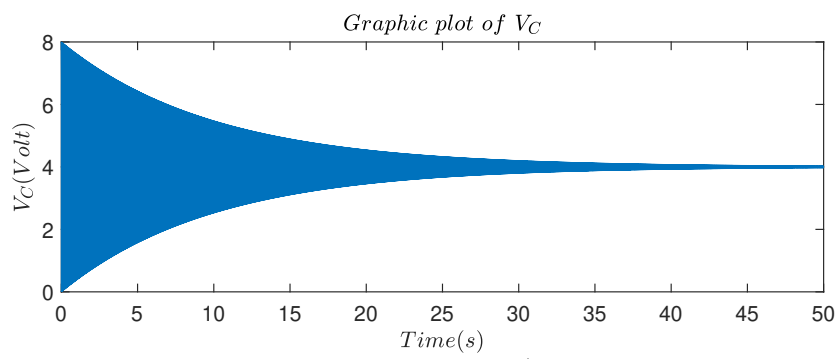
Εφόσον βρεθούν τα διανύσματα  $\theta$  για το  $V_C$  και το  $V_R$ , βρίσκουμε το  $\hat{V}_C$  και το  $\hat{V}_R$  κάνοντας τον πολλαπλασιασμό  $\theta^T \Phi$ . Το σφάλμα υπολογίζεται από την διαφορά, δηλαδή θα έχουμε  $error_1 = V_C - \hat{V}_C$  και  $error_2 = V_R - \hat{V}_R$ .

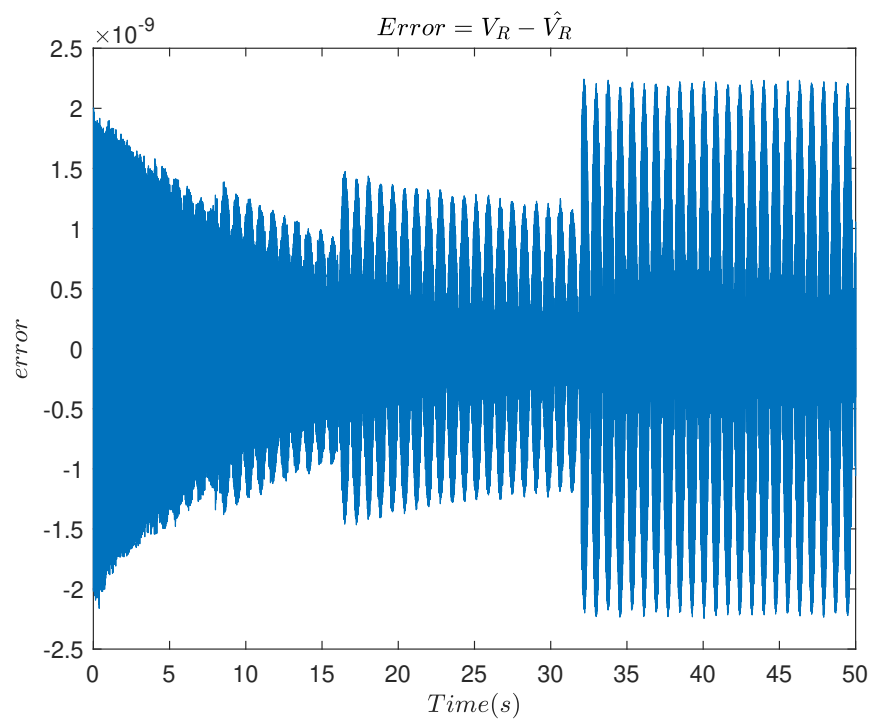
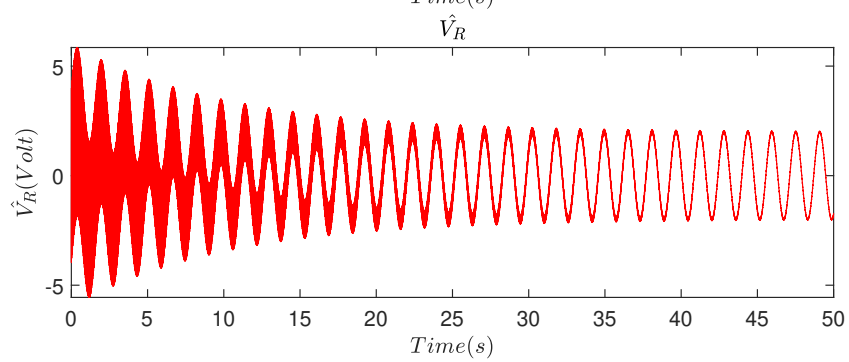
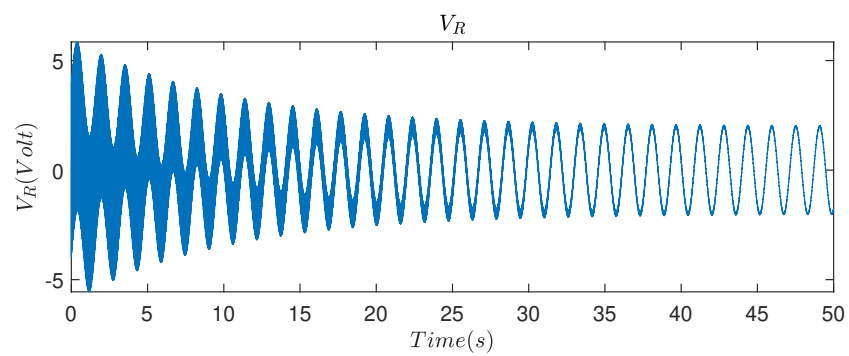
Οι πόλοι επιλέγονται και πάλι με την διαδικασία trial and error. Αυτήν την φορά παρατηρείται πως ο αλγόριθμος επιστρέφει καλύτερα αποτελέσματα για πόλους με μεγάλες τιμές. Μετά από πολλές δοκιμές καταλήγουμε στην επιλογή 40 και 100 για την οποία το σφάλμα στο  $V_C$  είναι της τάξεως του  $10^{-7}$  και το σφάλμα στο

$V_R$  είναι της τάξεως του  $10^{-9}$ . Επίσης, το σφάλμα στο  $V_C$  φαίνεται να πηγαίνει στο μηδέν με την πάροδο του χρόνου.

Τα διαγράμματα που ακολουθούν έχουν χρόνο εκτέλεσης 50 δευτρολέπτων για να φανεί το μεταβατικό φαινόμενο και δειγματοληψία  $1\text{e-}4$  για μεγαλύτερη ακρίβεια στα αποτελέσματα.

Το  $V_C$  και το  $\hat{V}_C$  παρουσιάζονται και πάλι σε χωριστά γραφήματα για να μην "πέσει" το ένα πάνω στο άλλο. Το ίδιο ισχύει και για τις μετρήσεις του  $V_R$  και  $\hat{V}_R$ .





## Προσθήκη Θορύβου

Στις τιμές των  $V_C$  και  $V_R$  του αρχείου *v.p* προστίθεται σε τρεις τυχαίες χρονικές στιγμές, θόρυβος της τάξεως  $10^2 - 10^3$ .

Με τα καινούρια πλέον διανύσματα  $V_{C-Noise}$  και  $V_{R-Noise}$  επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία της γραμμικής παραμετροποίησης και της χρήσης μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων για τον προσδιορισμό του διανύσματος  $\theta_0$  και λαμβάνονται τα παρακάτω διαγράμματα.

Στο διάγραμμα του  $V_C$  παρατηρείται ο θόρυβος σε τρεις χρονικές στιγμές όπως περιμέναμε και μάλιστα στα χρονικά διαστήματα (0, 5), (5, 10) και (20, 25). Οι τιμές του θορύβου που παρατηρούνται είναι κοντά στα 200, 700 και 700 αντίστοιχα. Παρατηρώντας όμως το  $\hat{V}_C$  τις ίδιες χρονικές στιγμές φαίνεται πως πάλι υπάρχει θόρυβος αλλά αυτήν την φορά η τιμή του είναι μικρότερη από 8. Κοιτάζοντας και το διάγραμμα σφάλματος φαίνεται πως η διαφορά των δύο σημάτων είναι κοντά στο 0 όπως άλλωστε και πριν, εκτός από τις χρονικές στιγμές που εισάγεται θόρυβος. Εκείνες τις χρονικές στιγμές, η διαφορά των δύο σημάτων είναι μεταξύ 700 και 800.

Τα ίδια ισχύουν και για το  $V_R$  αφού, ενώ ο θόρυβος που εισάγεται τις χρονικές στιγμές (0, 5), (25, 30) και (45, 50) έχει πολύ μεγάλη διαφορά από τις τιμές που παίρνει κανονικά το σήμα, στο διάγραμμα του  $V_R$  φαίνεται αυτή η διαφορά να έχει μειωθεί σημαντικά.

Συμβολίζουμε ως  $\theta_1$  το διάνυσμα που αντιστοιχεί στην εξίσωση του  $V_C$ , ως  $\theta_2$  το διάνυσμα που αντιστοιχεί στην εξίσωση του  $V_R$ , ως  $\theta_3$  το διάνυσμα που αντιστοιχεί στην εξίσωση του  $V_C$  με θόρυβο και τέλος ως  $\theta_4$  το διάνυσμα που αντιστοιχεί στην εξίσωση του  $V_R$  με θόρυβο.

Παρατηρώντας και συγκρίνοντας τις τιμές των στοιχείων του διανύσματος  $\theta_1$  με  $\theta_3$  και  $\theta_2$  με  $\theta_4$  παρατηρούμε ότι για ίδιους πόλους, οι εκτιμήσεις διαφέρουν σημαντικά. Αυτό συμβαίνει γιατί η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων επηρεάζεται έντονα από τις ακραίες τιμές. Επειδή η μέθοδος επικεντρώνεται στην ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των τετραγώνων των σφαλμάτων, έστω και μια τιμή να βρίσκεται μακριά από τις υπόλοιπες το σημείο όπου το άθροισμα αυτό είναι ελάχιστο αλλάζει. Επειδή μάλιστα στην περίπτωση μας, τα σφάλματα τις στιγμές του θορύβου είναι έως και 4 τάξεις μεγαλύτερα από τα υπόλοιπα σφάλματα, ο αλγόριθμος θα επικεντρωθεί στην ελαχιστοποίηση των τετραγώνων αυτών των λανθασμένων όρων και για αυτό χαλάει η εκτίμηση.



