

Memo

Aan
Sander Kapinga (Waterschap Rivierenland)

Datum	Kenmerk	Aantal pagina's
24 februari 2016	1220132-003-GEO-0002	14
Van	Doorkiesnummer	E-mail
Ed Calle, Alexander van Duinen	+31(0)88335 7201	alexander.vanduinen@deltares.nl

Onderwerp
Bepaling karakteristieke waarden schuifsterkte parameters

1. Inleiding

Waterschap Rivierenland is in 2013 gestart met de verkenningsfase voor de HWBP koploperprojecten. Deze verkenningsfase moet resulteren in een voorkeursalternatief voor de (eventueel noodzakelijke) dijkversterkingen. Waterschap Rivierland (WSRL) heeft aan Deltares gevraagd om bij de uitvoering van het fase 2 grondonderzoek de kwaliteitscontrole uit te voeren op het specialistisch grondonderzoek zowel in het veld als in het laboratorium. Tevens verzorgt Deltares voor WSRL de kennisoverdracht, begeleiding en controle bij het opstellen van de proevenverzamelingen en correlaties van de ondergrondparameters.

Voor het opstellen van proevenverzamelingen van de schuifsterkte parameters cohesie c' en hoek van inwendige wrijving ϕ' voor gedraineerde stabiliteitsanalyses is sinds een aantal jaren een spreadsheet in gebruik bij Deltares. Het spreadsheet wordt ook gebruikt door andere partijen, bijvoorbeeld in de database proevenverzameling die door Hoogheemraadschap Hollands Noorderkwartier en Waterschap Rivierenland is ontwikkeld. Het spreadsheet is deels gebaseerd op Van Esch (1997) en aangevuld met nieuwere inzichten. Een complete beschrijving van het spreadsheet ontbrak tot nu toe. Waterschap Rivierenland heeft verzocht een beschrijving van de achtergronden van dit spreadsheet op te stellen. Deze beschrijving is opgenomen in de voorliggende notitie. Daarnaast wordt in deze notitie ingegaan op een uitbreiding van het oorspronkelijke spreadsheet voor toepassing voor ongedraineerde schuifsterkte parameters. Het spreadsheet is verkrijgbaar via de Helpdesk Water.

2. Toepassingen in spreadsheets

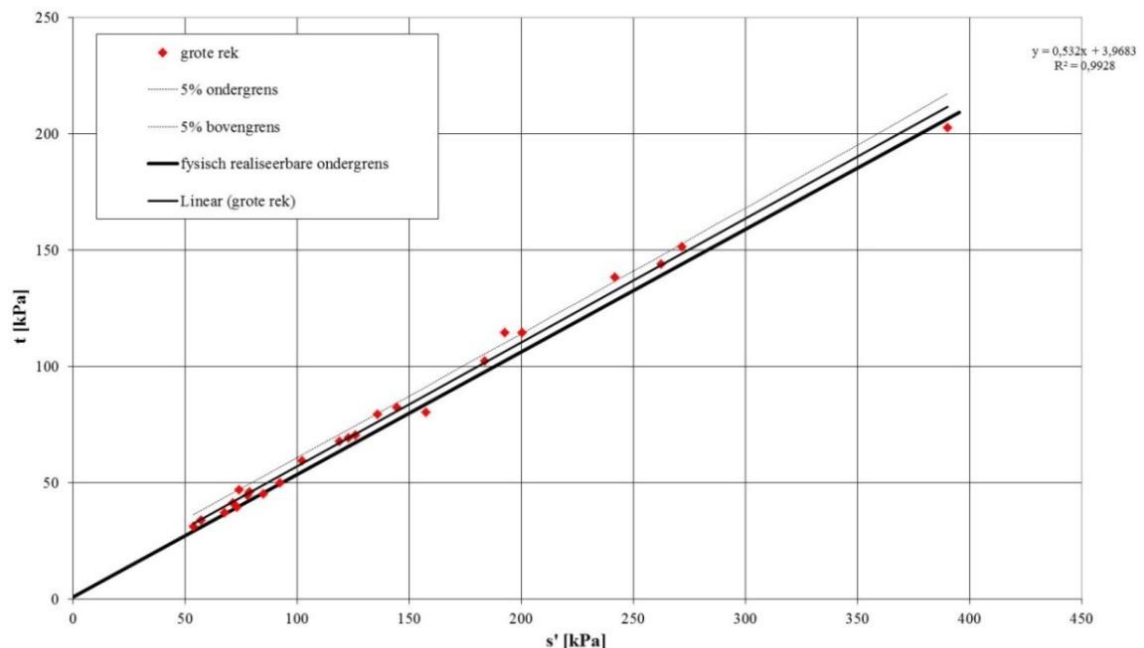
2.1 c' en $\tan(\phi')$ voor gedraineerde analyses

Het spreadsheet berekent verwachtingswaarden, karakteristieke waarden en rekenwaarden van de cohesie c' (kPa) en hoek van inwendige wrijving ϕ' (°) op basis van een serie proefresultaten uit triaxiaalproeven of direct simple shear proeven (zie Figuur 2.1). Hiervoor wordt uitgegaan van de relaties die worden beschreven in hoofdstuk 3. De invoerwaarden uit triaxiaalproeven zijn de gemiddelde spanning s' ($(\sigma'_1 + \sigma'_3)/2$ in kPa) en de schuifspanning t ($(\sigma'_1 - \sigma'_3)/2$ in kPa). De invoerwaarden uit direct simple shear proeven zijn de verticale spanning σ_v (kPa) en de schuifspanning τ (kPa).

Bij het uitwerken van de proevenverzameling kan in het spreadsheet onderscheid worden gemaakt tussen een lokale of regionale proevenverzameling. Voor een lokale

proevenverzameling is α gelijk aan 1,0. Voor een regionale proevenverzameling dient α in beginsel bepaald te worden aan de hand van ruimtelijk statistische analyse van de proevenverzameling. In (Calle 2007 en 2008) is hiervoor een ruimtelijke statistische methode beschreven, die overigens nogal specialistisch is. In het verleden is de α voor regionale proevenverzamelingen van gedraineerde schuifsterkteparameters gelijk aan 0,75 gekozen (zie TAW, 1989). Dit was een redelijk geachte, maar wel arbitraire, keuze, die sindsdien vaak is aangehouden. De veel latere statistische analyses in (Calle, 2007 en 2008), die overigens niet een regionale proevenverzameling van schuifsterkteparameters, maar van zettingsparameters betrof, gaf niet veel aanleiding om de vroegere keuze te herzien of nader te onderbouwen.

Het kan voorkomen dat de met de kleinste kwadratenmethode berekende ondergrens met 5% onderschrijdingskans tot negatieve waarden van de karakteristieke waarde van de cohesie c' leidt. In dat geval kan de karakteristieke waarde van de variabele \hat{a}_1 handmatig op 0 worden gesteld en kan de karakteristieke waarde van de variabele \hat{a}_2 zodanig worden aangepast dat de 'fysisch realiseerbare ondergrens' (zie Figuur 2.1) goed overeenkomt met de ondergrens die met de kleinste kwadratenmethode is berekend. De variabelen \hat{a}_1 en \hat{a}_2 zijn regressieparameters die worden bepaald volgens de kleinste kwadratenmethode (zie hoofdstuk 3).



Figuur 2.1 *Fysisch realiseerbare ondergrens en het gebied met 90% betrouwbaarheid.*

2.2 Ongedraineerde schuifsterkte

Voor de bepaling van de karakteristieke waarden van de ongedraineerde schuifsterkte parameters S en m wordt als uitgangspunt genomen dat $\log(s_u/\sigma'_{vc})$ normaal verdeeld is, en dus $\log(S)$ en m bepaald kunnen worden via lineaire regressie op basis van meetwaarden van $\log(s_u/\sigma'_{vc})$ versus $\log(OCR)$. Of dit uitgangspunt juist is voor toepassing bij ongedraineerde

schuifsterkteparameters, moet formeel aan de hand van statistische toetsen op beschikbare gegevens over de schuifsterkteparameters worden vastgesteld.

In de kleinste-kwadraten-aanpak is (vrijwel exacte) instelbaarheid van de “x”-variabele uitgangspunt. Wanneer onzekerheid over die variabele, ten opzichte van de onzekerheid van de afhankelijke “y”-variabele, substantieel is, dan kan de kleinste kwadraten-analyse strikt genomen niet worden toegepast. In deze notitie wordt er van uitgegaan dat de ongedraineerde schuifsterkte s_u en de ongedraineerde schuifsterkte ratio s_u/σ'_{vc} worden bepaald op grondmonsters die zijn geconsolideerd bij de in situ verticale effectieve spanning σ'_{vi} (zogenaamde recompression of “Norwegian style” procedure). Toepassing van deze werkwijze is economisch als ook een correlatie wordt opgesteld tussen de ongedraineerde schuifsterkte en de sondeerweerstand. Voordeel van deze werkwijze is ook dat de grondmonsters in de proeven tijdens de consolidatie niet worden belast met een hoge spanning, zodat de structuur die de grond heeft opgebouwd in het veld zoveel mogelijk intact blijft. Nadeel van deze werkwijze is echter dat de schuifsterkte en de grensspanning en OCR noodzakelijkerwijze worden bepaald op verschillende monsters (van mogelijk iets verschillende samenstelling en historie). Er is dus onzekerheid over OCR. De toepasbaarheid van de kleinste kwadratenmethode is in dit geval dus niet vanzelfsprekend.

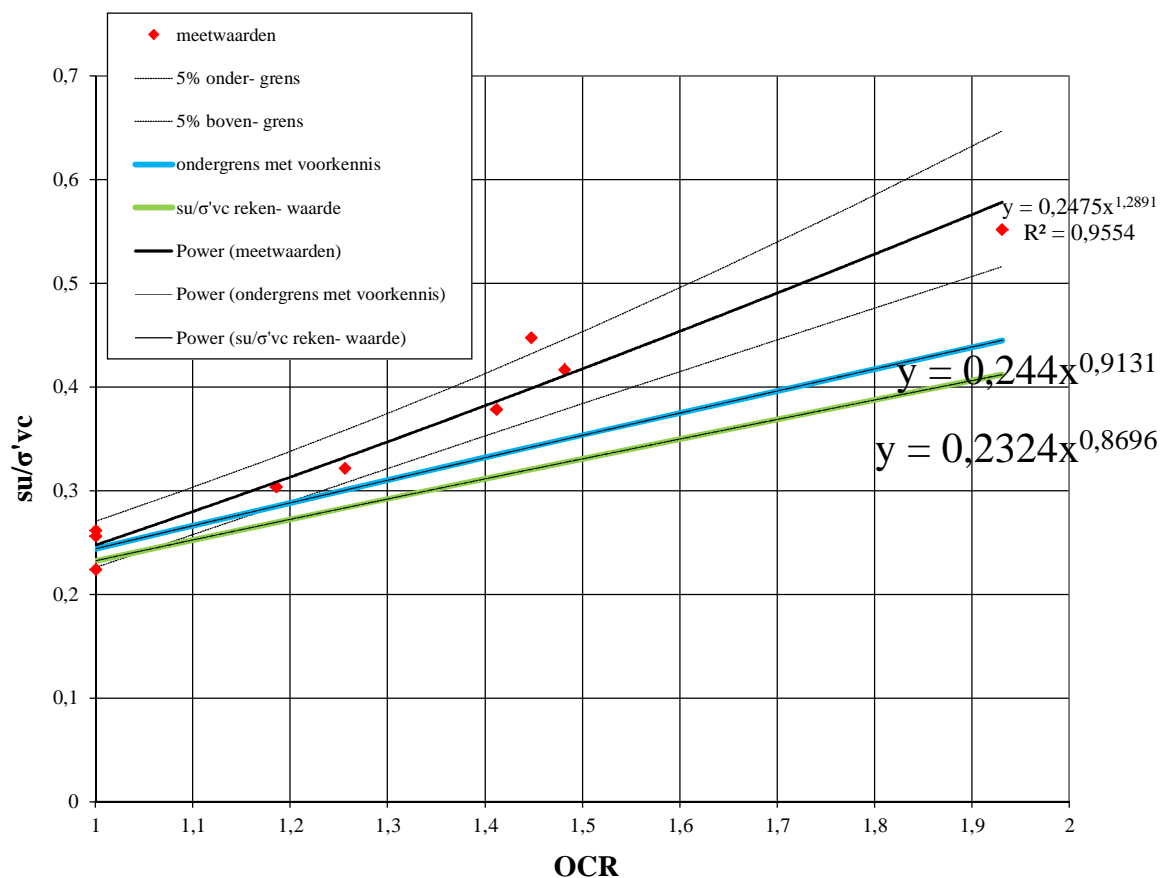
Een alternatieve aanpak zou kunnen zijn om de ongedraineerde schuifsterkte s_u uit te zetten tegen de consolidatiespanning σ'_{vc} . Deze uitwerking is vergelijkbaar met de uitwerking voor cohesie en hoek van inwendige wrijving (zie paragraaf 2.1). Dat zou een nettere uitwerking zijn, omdat dit beide gemeten waarden zijn uit dezelfde proef. Dit geeft minder onzekerheid als gevolg van de gevolgde procedure. Moeilijkheid hierbij is echter dat de relatie tussen σ'_{vc} en s_u wordt bepaald door drie parameters: normaal geconsolideerde ongedraineerde schuifsterkte ratio S , overconsolidatieratio OCR en sterkte toename exponent m . Daarbij zijn dus bij een waarde van σ'_{vc} meerdere waarden van s_u mogelijk, met name omdat OCR erg variabel is. De parameter m zou hierin met voorkennis uit samendrukkingsproeven of CRS proeven kunnen worden ingebracht. Vervolgens zijn er dan nog twee onbekenden: S en OCR. Omdat OCR erg variabel is, is de band van s_u tegen σ'_{vc} erg breed. We moeten dan iets zeggen over de verwachtingswaarde en standaardafwijking van S uitgaande van een verwachtingswaarde van OCR en een grote standaardafwijking van OCR. Deze uitwerking lijkt al met al niet werkbaar.

Vanwege het ontbreken van een logischer alternatief is daarom de aanpak met s_u/σ'_{vc} tegen OCR verder uitgewerkt.

Het spreadsheet berekent verwachtingswaarden, karakteristieke waarden en rekenwaarden van de normaal geconsolideerde ongedraineerde schuifsterkte ratio S en de sterkte toename exponent m op basis van een serie proefresultaten uit triaxiaalproeven of direct simple shear proeven en samendrukkingsproeven of CRS proeven. Hiervoor wordt uitgegaan van de relaties die worden beschreven in hoofdstuk 3. De invoerwaarden uit de triaxiaalproeven en de direct simple shear proeven zijn de ongedraineerde schuifsterkte ratio s_u/σ'_{vc} (-). Uit samendrukkingsproeven of CRS proeven wordt de overconsolidatieratio OCR (-) bepaald. Van beide parameters wordt de logaritme genomen en vervolgens wordt de kleinste kwadratenmethode toegepast conform hoofdstuk 3.

Bij het uitwerken van de proevenverzameling kan in het spreadsheet onderscheid worden gemaakt tussen een lokale of regionale proevenverzameling (zie paragraaf 2.1). Voor een lokale proevenverzameling is α gelijk aan 1,0 en voor een regionale proevenverzameling is α gelijk aan 0,75.

Vaak geeft het afleiden van de exponent m uit samendrukkingsproeven en CRS proeven betrouwbaarder waarden van m dan het fitten van m via lineaire regressie op basis van meetwaarden van s_u/σ'_{vc} versus OCR. Betrouwbaarder wil in dit verband zeggen dat m een kleinere bandbreedte heeft en ook beter aansluit bij waarden uit de internationale literatuur (m moet kleiner zijn dan 1,0 en groter dan 0,6 à 0,7). Daarom kan in het spreadsheet voorkennis over m uit samendrukkingsproeven of CRS proeven worden gebruikt. Daarvoor worden de verwachtingswaarde en standaardafwijking van m in het spreadsheet ingevuld.



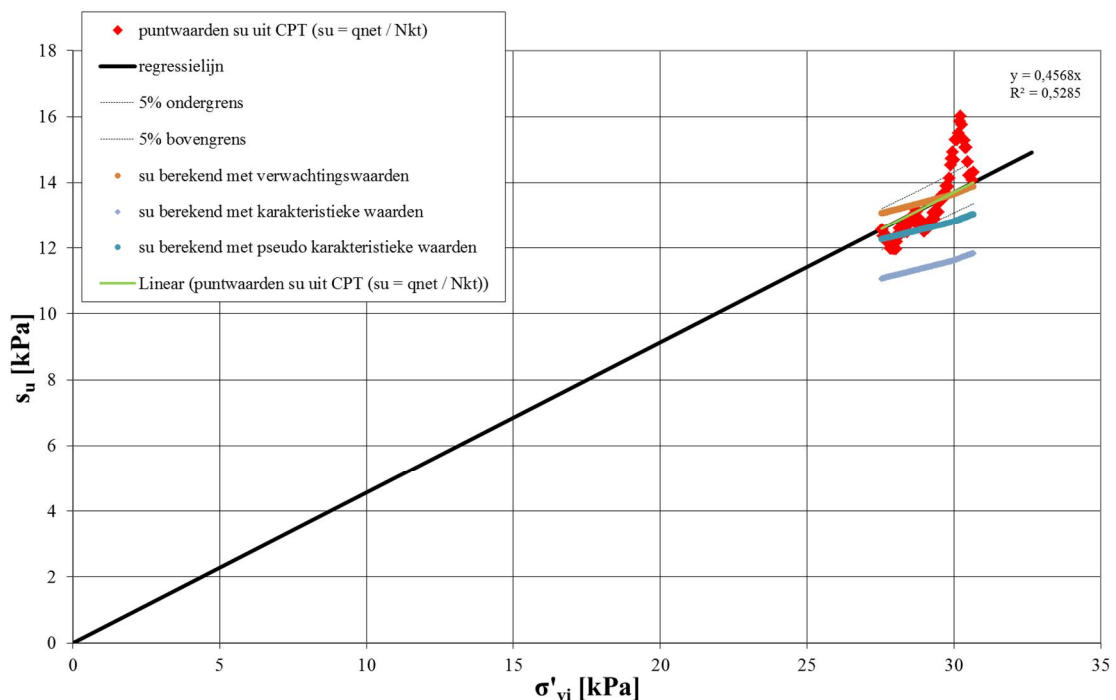
Figuur 2.2 Berekening van verwachtingswaarden, karakteristieke waarden en rekenwaarden van de normaal geconsolideerde ongedraineerde schuifsterkte ratio S en de sterkte toename exponent m .

Wanneer m uit de samendrukkingsproeven of CRS proeven duidelijk afwijkt van de met het spreadsheet gefitte waarde van m op basis van de resultaten uit de triaxiaalproeven of direct simple shear proeven is de met het spreadsheet berekende waarde van de correlatiecoëfficiënt ρ niet meer juist. In dat geval wordt ρ gelijk aan 0 genomen.

In Figuur 2.2 staat de uitwerking voor het bepalen van S en m op basis van s_u/σ'_{vc} tegen OCR weergegeven. In het spreadsheet wordt eerst lineaire regressie op de meetwaarden uitgevoerd en wordt de ondergrens met 5% onderschrijdingskans van s_u/σ'_{vc} tegen OCR berekend. De voorkennis over m uit samendrukkingsproeven of CRS proeven is toegevoegd om de uitwerking bij te kunnen sturen voor onrealistische waarden van m . Door de verwachtingswaarde en standaardafwijking van S te variëren is een tweede ondergrens van

s_u/σ'_{vc} tegen OCR bepaald (ondergrens met voorkennis), die zo dicht mogelijk bij de ondergrens van s_u/σ'_{vc} tegen OCR komt, die met de kleinste kwadratenmethode wordt berekend. De waarden van S zijn zo gekozen dat de ondergrens met voorkennis van s_u/σ'_{vc} tegen OCR vooral goed is voor waarden van OCR die in het veld voorkomen. Op deze manier is het mogelijk om reële verwachtingswaarden en standaardafwijkingen van S en m te vinden, die goed aansluiten bij literatuur waarden.

Verder is belangrijk dat er een goede samenhang is tussen alle parameters. Daarom is een controle uitgevoerd, waarin wordt gecontroleerd of de karakteristieke waarden van S, OCR en m goed aansluiten bij de karakteristieke waarde van s_u uit de sondering (als de materiaalfactoren bekend zijn, kunnen we dat met rekenwaarden doen).



Figuur 2.3 Controle van de samenhang tussen de karakteristieke waarden van S, OCR en m uit de laboratoriumproeven en de karakteristieke waarde van s_u uit de sondering.

In Figuur 2.3 is de controle van de samenhang tussen de karakteristieke waarden van S, OCR en m uit de laboratoriumproeven en de karakteristieke waarde van s_u uit de sondering weergegeven. De sondering geeft immers lokale informatie over s_u ($s_u = q_{net} / N_{kt}$). Hierin zijn q_{net} de gecorrigeerde sondeerweerstand en N_{kt} de empirisch bepaalde conusfactor op basis van een vergelijking tussen sondeerwestanden en schuifsterktewaarden uit laboratoriumproeven.

Voor de controle is de sondeerweerstand omgewerkt naar de ongedraineerde schuifsterkte s_u , OCR en grensspanning σ'_{vy} . N_{kt} is bepaald door de grensspanning uit de CPT zo netjes mogelijk op de grensspanning σ'_{vy} uit een aantal samendrukkingsproeven en CRS proeven te krijgen. Daarbij zijn de verwachtingswaarden van S en m uit Figuur 2.2 gebruikt (om van ongedraineerde schuifsterkte s_u naar OCR en grensspanning σ'_{vy} te komen). De effectieve

spanning en de bijbehorende puntwaarden van de ongedraineerde schuifsterkte uit de CPT zijn hiermee bepaald (dat wil zeggen een stukje van 0,5 m van Gorkum zwaar klei).

Met de kleinste kwadratenmethode is lineaire regressie toegepast op de verwachtingswaarden van s_u uit de sondering. Tevens is de ondergrenswaarde van s_u uit de sondering berekend. Ook hier is er weer de mogelijkheid om de lineaire regressie zonodig bij te sturen. Verder zijn drie s_u -profielen berekend met de verwachtingswaarden, karakteristieke waarden en “pseudo karakteristieke waarden” van S , OCR en m . Hiermee is onderzocht of de verwachtingswaarden van S , grensspanning en m samen tot een verwachtingswaarde van s_u leiden, die past bij de verwachtingswaarde van s_u uit de CPT. Voor de karakteristieke waarden is nagegaan of de karakteristieke waarden van S , grensspanning en m samen tot een karakteristieke waarde van s_u leiden die past bij de karakteristieke waarde van s_u uit de CPT.

Uit de controle blijkt dat de karakteristieke waarden van S , OCR en m tot een lagere berekende waarde van s_u leiden dan de karakteristieke waarde van s_u uit de sondering. Dit kan te maken hebben met het verschil in het aantal waarnemingen (heel veel voor s_u en OCR en veel minder voor S) of met het feit dat de berekende s_u is gebaseerd op de combinatie van drie parameters waarvoor drie keer de karakteristieke ondergrenswaarde is toegepast. Dit laatste is wellicht wat te conservatief. Dit zou kunnen worden opgelost met een soort “pseudo karakteristieke waarde” aanpak. Daarbij wordt niet voor alle parameters de karakteristieke ondergrenswaarde toegepast, maar voor de meest dominante parameter wordt de karakteristieke waarde toegepast en voor de overige parameters een hogere waarde. Het principe van “pseudo karakteristieke waarden” wordt toegelicht in Bijlage 1 van het Technisch Rapport Waterkerende Grondconstructies (TAW, 2001).

Het is van belang dat de karakteristieke waarden van S , OCR en m samen met de effectieve spanning in een stabiliteitsberekening zoveel mogelijk hetzelfde s_u -profiel geven als de sondering. Op het moment dat dit het geval is, kan de statistische uitwerking voor het bepalen van S en m op basis van s_u/σ'_{vc} tegen OCR als voldoende accuraat worden gezien (hoewel het vanuit de wiskunde / statistiek niet volledig correct is, vanwege de onzekerheid van OCR (uitgaande van toepassing van de recompression of “Norwegian style” procedure), die niet in rekening wordt gebracht met de gekozen uitwerking met de kleinste kwadratenmethode).

3. **Achtergrond van in de spreadsheets toegepaste regressieanalyse**

3.1 *Kleinste kwadratenmethode voor enkelvoudige lineaire regressie*

Bij (enkelvoudige) lineaire regressieanalyse wordt een trendfunctie:

$$t = \hat{a}_1 + \hat{a}_2 s \quad (3.1)$$

bepaald, die zo goed mogelijk past bij een set waarnemingen $\{T_i, s_i\}$ ($i=1 \dots n$). De T_i zijn gemeten waarden van een of andere variabele, die (mede) afhankelijk zijn van ingestelde waarden s_i . De regressieparameters \hat{a}_1 en \hat{a}_2 worden bepaald volgens de kleinste kwadratenmethode. Dit houdt in dat deze parameters zodanig worden bepaald dat de som van de kwadraten van de residuen $(T_i - \hat{a}_1 - \hat{a}_2 s_i)$ minimaal is, dus:

$$R^2 = \sum_{i=1}^n (T_i - \hat{a}_1 - \hat{a}_2 s_i)^2 \quad (3.2)$$

is minimaal. Dit leidt tot de volgende vergelijkingen waaraan \hat{a}_1 en \hat{a}_2 moeten voldoen:

$$\frac{\partial R^2}{\partial \hat{a}_1} = - \sum_{i=1}^n 2(T_i - \hat{a}_1 - \hat{a}_2 s_i) = 0 \Rightarrow n\hat{a}_1 + \left(\sum_{i=1}^n s_i\right)\hat{a}_2 = \sum_{i=1}^n T_i \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial R^2}{\partial \hat{a}_2} = - \sum_{i=1}^n 2(T_i - \hat{a}_1 - \hat{a}_2 s_i) s_i = 0 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n s_i\right)\hat{a}_1 + \left(\sum_{i=1}^n s_i^2\right)\hat{a}_2 = \sum_{i=1}^n T_i s_i \quad (3.4)$$

De oplossing luidt:

$$\hat{a}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n T_i (s_i - \bar{s})}{\sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2} \quad \text{hierin is} \quad \bar{s} = \left(\sum_{i=1}^n s_i\right) / n \quad (3.5)$$

en:

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (T_i - \hat{a}_2 s_i)}{n} \quad (3.6)$$

De minimale R^2 wordt gevonden door deze oplossing te gebruiken in vgl. (3.2).

3.2 Onderliggend stochastisch model

De in paragraaf 3.1 beschreven methode wordt vaak toegepast als puur numerieke techniek zonder associatie met het onderliggend stochastisch model. Het onderliggende stochastische model is dat t een normaal verdeelde stochastische variabele is, die lineair afhankelijk is van s . Of de aanname dat t een normaal verdeelde stochastische variabele is terecht is voor toepassing bij schuifsterkteparameters, moet formeel aan de hand van statistische toetsen op beschikbare gegevens over schuifsterkteparameters worden vastgesteld. De verwachtingswaarde van t is:

$$E[t] = a_1 + a_2 s \quad (3.7)$$

en met standaardafwijking σ_t . De stochastische variabele t en waargenomen realisaties T_i ervan we kunnen derhalve geschreven worden als:

$$t = a_1 + a_2 s + \varepsilon \Rightarrow T_i = a_1 + a_2 s_i + \varepsilon_i \quad (3.8)$$

Hierin is ε een normaal verdeelde stochastische variabele met verwachtingswaarde gelijk 0 en standaardafwijking gelijk σ_t en zijn de ε_i realisaties van ε in de steekproef $\{T_i, s_i\}$ ($i=1 \dots n$). De aanname hieronder is dat de realisaties ε_i en ε_j onafhankelijk zijn. Dit is geen noodzakelijke aanname, maar doorgaans wordt hieraan voldaan in steekproeven.

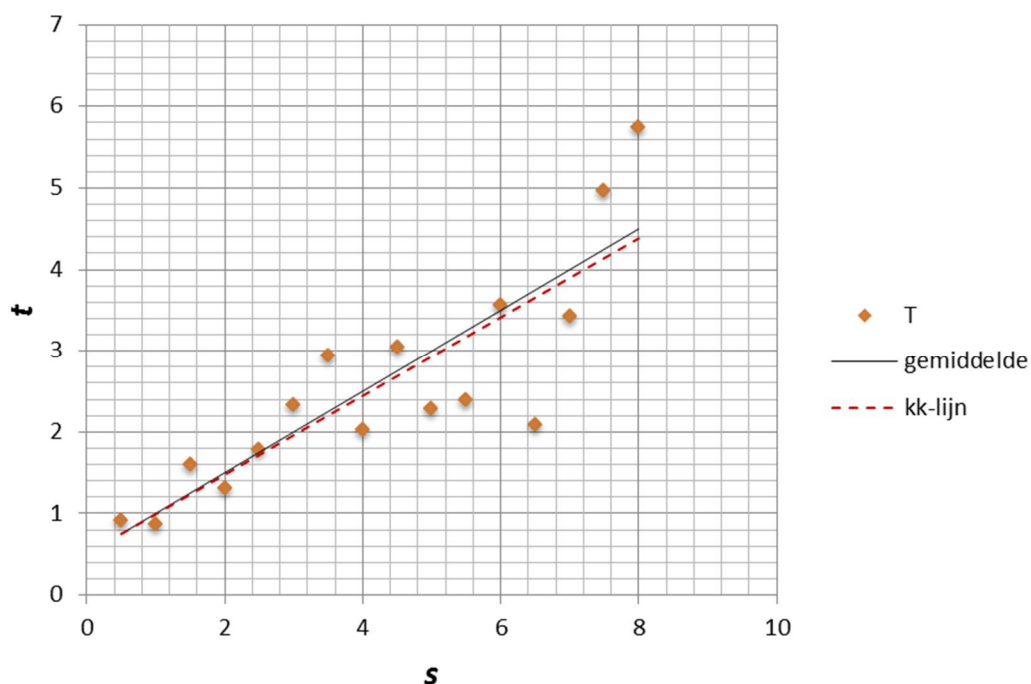
De model parameters a_1 en a_2 en σ_t zijn doorgaans onbekenden, die aan de hand van de steekproef van waarnemingen $\{T_i, s_i\} (i=1 \dots n)$ moeten worden bepaald. Er geldt dat:

- De \hat{a}_1 en \hat{a}_2 volgens vgl. (3.6) en (3.5) zijn op te vatten als (realisaties van) stochastische variabelen. Immers ze zijn afhankelijk van de stochastische variabele t (via de realisaties T_i). Berekende waarden van \hat{a}_1 en \hat{a}_2 zijn zuivere schatters zijn van a_1 en a_2 , met andere woorden:

$$E[\hat{a}_1] = a_1 \text{ en } E[\hat{a}_2] = a_2 \quad (3.9)$$

- $R^2/(n-2)$ (en deze grootte noteren we verder als S_t^2) een zuivere schatter van de variantie σ_t^2 is. Met andere woorden: $E[S_t^2] = \sigma_t^2$. In het vervolg gaan we er van uit dat S_t^2 een (voldoend) nauwkeurige schatting van σ_t^2 levert. Theoretisch statistisch gezien valt daar uiteraard op af te dingen, maar voor de praktische toepassing hier is dat acceptabel.

Figuur 3.1 geeft een illustratie van het model. De lijn “gemiddelde” (ononderbroken zwarte lijn) is de lijn volgens vgl. (3.7). Hierin is $a_1=0,5$ en $a_2=0,5$. De rode ruitjes geven (gegenereerde) realisaties van T_i , volgens vgl. (3.8). Hierbij is uitgegaan van een normale kansverdeling van ε , met verwachtingswaarde 0 en variantie 0,5. De rode streepjeslijn in de figuur is de berekende kleinste kwadraten lijn $t = \hat{a}_1 + \hat{a}_2 s$, waarbij \hat{a}_1 en \hat{a}_2 berekend zijn o.b.v. de gegenereerde realisaties (T_i, s_i) met behulp van de vergelijkingen (3.6) en (3.5). In dit geval lijkt de benadering (rode streepjeslijn) dicht bij de oorspronkelijke lijn (zwarte lijn) waarvan uitgegaan bij het genereren van de set “pseudo” realisaties. Hier komen we in paragraaf 3.3 nader op terug.



Figuur 3.1 *Illustratie van model.*

De varianties van \hat{a}_1 en \hat{a}_2 worden als volgt berekend:

$$\sigma^2(\hat{a}_1) = S_t^2 \left(\frac{1}{n} \left(1 + \frac{\sum_{i=1}^n s_i^2}{n \sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2} \right) \right) \quad (3.10)$$

$$\sigma^2(\hat{a}_2) = \frac{S_t^2}{\sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2} \quad (3.11)$$

De schatters \hat{a}_1 en \hat{a}_2 zijn onderling afhankelijk. De covariantie is:

$$\text{cov}(\hat{a}_1, \hat{a}_2) = E[(\hat{a}_1 - a_1)(\hat{a}_2 - a_2)] = -\frac{\bar{s}}{\sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2} S_t^2 \quad (3.12)$$

en de correlatie is (per definitie):

$$\rho(\hat{a}_1, \hat{a}_2) = \frac{\text{cov}(\hat{a}_1, \hat{a}_2)}{\sigma(\hat{a}_1) \sigma(\hat{a}_2)} \quad (3.13)$$

In appendix 1 zijn wiskundige afleidingen van de vergelijkingen (3.10) ... (3.12) gegeven.

3.3 Karakteristieke schattingen

Aan de hand de schatters \hat{a}_1 , \hat{a}_2 , de varianties ervan en de correlatie, kunnen karakteristieke schattingen (d.w.z. onder- en bovengrenzen met 5% kans op over- of onderschrijding; betrouwbaarheidsinterval 90%). Voor de puntwaarden zijn die grenzen:

$$t_{kar} = \hat{a}_1 + \hat{a}_2 s \pm t_{n-2}^{0.95} \sqrt{\sigma^2(\hat{a}_1) + s^2 \sigma^2(\hat{a}_2) + 2\rho(\hat{a}_1, \hat{a}_2) s \sigma(\hat{a}_1) \sigma(\hat{a}_2) + S_t^2} \quad (3.14)$$

Hierin is $t_{n-2}^{0.95}$ de Student-t met 95% onderschrijdingskans. De “+” van het “±” in vgl. (3.14) geeft de karakteristieke bovengrens en “-” de karakteristieke ondergrens. De eerste drie termen onder het wortelteken representeren de variantie van de onzekerheid van het gemiddelde van t , de laatste term de variantie van de ruimtelijke spreiding van t . Voor karakteristieke waarden van “gemiddelden” van t , aangegeven als (zie in hoofdstuk 3 bijvoorbeeld) grondlaaggemiddelden is er een bijna identieke uitdrukking:

$$\bar{t}_{kar} = \hat{a}_1 + \hat{a}_2 s \pm t_{n-2}^{0.95} \sqrt{\sigma^2(\hat{a}_1) + s^2 \sigma^2(\hat{a}_2) + 2\rho(\hat{a}_1, \hat{a}_2) s \sigma(\hat{a}_1) \sigma(\hat{a}_2) + (1 - \alpha) S_t^2} \quad (3.15)$$

Het verschil zit in de mate waarin de ruimtelijke spreiding in rekening wordt gebracht. De factor $(1-\alpha)$ in vgl. (3.15) is een reductie factor. Deze is afhankelijk van het (stochastische) ruimtelijke model waarmee de spreiding van t te beschrijven is. In dat model speelt de verhouding tussen de variantie van t op een locatie en de regionale variantie een rol. Die verhouding wordt weergegeven met α . De variantie van t op een locatie is de variantie van de spreiding van “puntwaarden” van t ten opzichte van een lokaal gemiddelde. De regionale variantie is de variantie van de spreiding van “puntwaarden” van t t.o.v. een regionaal gemiddelde. Geven we de regionale variantie aan met σ_t^2 dan is de variantie van t op een locatie gelijk aan $\alpha \sigma_t^2$. Bij gevolg is de variantie van de spreiding van lokale gemiddelden t.o.v. het regionale gemiddelde $(1-\alpha) \sigma_t^2$. Dit model voor het statistisch beschrijven van ruimtelijke variatie is o.a. beschreven in (Calle, 2007 en 2008). De verhouding tussen lokale en regionale variantie wordt hierin aangeduid met het symbool “ α ”, in eerdere publicaties (Calle, 1996) met “ a ” en in de TAW-leidraad voor het ontwerpen van rivierdijken (deel 2) (TAW, 1989) met $(1-\Gamma^2)$. De wisselende notaties reflecteren het voortschrijdend inzicht door de jaren heen. De term $(1-\alpha) S_t^2$ in vgl. (3.15) reflecteert dat bij de bepaling van de karakteristieke schatting van de gemiddelde waarde van t , op een willekeurige locatie binnen een gebied waarvoor een regionale proevenverzameling is opgesteld, ermee rekening gehouden moet worden dat deze lokale gemiddelden variëren ten opzichte van het regionale gemiddelde. De overige termen in vgl. (3.15) reflecteren de statistische onzekerheid van schattingen van het regionale gemiddelde.

In het oorspronkelijke spreadsheet is een van vgl. (3.15) afwijkende formule gebruikt, die (m.m.) luidt:

$$\bar{t}_{kar} = \hat{a}_1 + \hat{a}_2 s \pm t_{n-2}^{0.95} \sqrt{(\sigma^2(\hat{a}_1) + s^2 \sigma^2(\hat{a}_2) + 2\rho(\hat{a}_1, \hat{a}_2) s \sigma(\hat{a}_1) \sigma(\hat{a}_2)) (n(1-\alpha) + 1)} \quad (3.16)$$

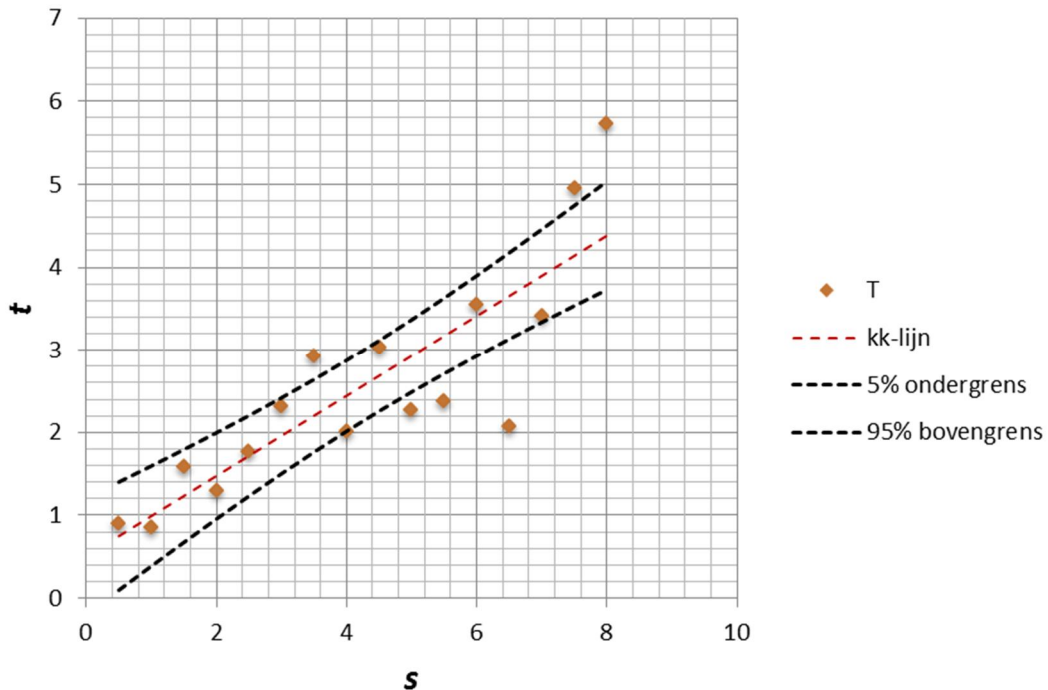
De formules (3.15) en (3.16) zouden overeenkomen als:

$$(\sigma^2(\hat{a}_1) + s^2 \sigma^2(\hat{a}_2) + 2\rho(\hat{a}_1, \hat{a}_2) s \sigma(\hat{a}_1) \sigma(\hat{a}_2)) = \frac{S_t^2}{n} \quad (3.17)$$

Dit is alleen het geval wanneer de stochast t een enkelvoudige stochast is, dus niet afhankelijk van de parameter s . De in het oorspronkelijke spreadsheet opgenomen relaties volgens vgl. (3.16) voor het bepalen van karakteristieke schattingen, moeten derhalve vervangen worden door relaties volgens vgl. (3.15).

In Figuur 3.2 zijn de 5% onder- en de 95% bovengrens weergegeven die berekend zijn met vgl. (3.15) (met daarin $\alpha=1$). De onder- en bovengrens markeren de ruimte waarbinnen de rechte “gemiddelde waarde”-lijn kan liggen (met 90% betrouwbaarheid). Elke rechte lijn die tussen de onder- en bovengrenzen ligt is in principe mogelijk (maar ze zijn uiteraard niet alle even waarschijnlijk). Hieruit blijkt dat het dicht bij elkaar liggen van de “gemiddelde lijn” en de “kleinste kwadratenlijn” in Figuur 3.1 een beetje op toeval berust. Let op, de lijnen markeren dus niet het 90% betrouwbaarheidsgebied waarbinnen de punten (T_i, s_i) moeten liggen.

In het geval de t -waarde per definitie positief moet zijn (denk aan een schuifsterkteparameter), dan zullen het gemiddelde en de ondergrens van t voor elke waarde van s positief moeten zijn.



Figuur 3.2 Gebied waarbinnen de gemiddelde waarden lijn kan liggen (90% betrouwbaarheid).

Referenties

Calle, E.O.F. (1996) Karakteristieke waarden voor schuifsterkte t.b.v. Stabiliteitsanalyses. Grondmechanica Delft rapport CO-350000/43, juli 1996.

Calle, E.O.F. (2007) Statistiek bij regionale proevenverzamelingen: Het ruimtelijk statistische model. Geotechniek 2007, nr. 3, p 40.

Calle, E.O.F. (2008) Statistiek bij regionale proevenverzamelingen. Geotechniek 2008, nr. 1, p 40.

TAW (1989). Leidraad voor het ontwerpen van rivierdijken, Deel 2 – Benedenrivierengebied. Technische Adviescommissie voor de Waterkeringen. Uitgeverij Waltman, Delft, oktober 1989.

TAW (2001). Technisch Rapport Waterkerende Grondconstructies, Technische Adviescommissie voor de Waterkeringen. Delft, juni 2001.

Van Esch, J.M. (1997) Statistische verwerking cel- en triaxiaalproeven. Grondmechanica Delft. Rapport SE-50676.001. Februari 1997.

Appendix 1: Wiskundige afleidingen

Te bewijzen: \hat{a}_1 en \hat{a}_2 zijn zuivere schatters van a_1 en a_2 , m.a.w. $E[\hat{a}_1] = a_1$ en $E[\hat{a}_2] = a_2$:
Substitutie van de $T_i = a_1 + a_2 s_i + \varepsilon_i$ (volgens het stochastisch model volgens vgl. (3.8)) in vgl. (3.5) levert:

$$\begin{aligned}
 \hat{a}_2 &= \frac{\sum_{i=1}^n T_i (s_i - \bar{s})}{\sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2} \implies = \frac{\sum_{i=1}^n (a_1 + a_2 s_i + \varepsilon_i) (s_i - \bar{s})}{\sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n (a_1 (s_i - \bar{s}) + a_2 (s_i - \bar{s})(s_i - \bar{s}) + a_2 \bar{s} (s_i - \bar{s}) + \varepsilon_i (s_i - \bar{s}))}{\sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2} \quad (A1.1) \\
 &= \frac{a_2 \sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2 + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (s_i - \bar{s})}{\sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2} = a_2 + \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i (s_i - \bar{s})}{\sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2}
 \end{aligned}$$

Omdat $E[\varepsilon_i] = 0$ is dus $E[\hat{a}_2] = a_2$ (qed).

Analoog geldt, uitgaande van vgl. (3.6) :

$$\begin{aligned}
 \hat{a}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n (T_i - \hat{a}_2 s_i)}{n} \implies = \frac{\sum_{i=1}^n (a_1 + a_2 s_i + \varepsilon_i - \hat{a}_2 s_i)}{n} \quad (A1.2) \\
 &= a_1 + (a_2 - \hat{a}_2) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i
 \end{aligned}$$

En omdat $E[\varepsilon_i] = 0$ en $E[\hat{a}_2 - a_2] = 0$ is derhalve $E[\hat{a}_1] = a_1$ (qed).

De varianties van \hat{a}_1 en \hat{a}_2 worden als volgt berekend:

$$\begin{aligned}
 \sigma^2(\hat{a}_2) &= E[(\hat{a}_2 - a_2)^2] = E\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i (s_i - \bar{s})}{\sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2}\right)^2\right] \\
 &= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2\right)^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (E[\varepsilon_i \varepsilon_j] (s_i - \bar{s})(s_j - \bar{s})) \\
 &= \frac{\sigma_t^2}{\sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2}
 \end{aligned} \tag{A1.3}$$

Omdat $E[\varepsilon_i \varepsilon_j] = 0$ als $j \neq i$ en $E[\varepsilon_i \varepsilon_i] = \sigma_t^2$ ($i = 1 \dots n$). Verder geldt:

$$\begin{aligned}
 \sigma^2(\hat{a}_1) &= E[(\hat{a}_1 - a_1)^2] \\
 \Rightarrow \text{vgl(A1.2)} &= E\left[\left((a_2 - \hat{a}_2) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i\right)^2\right] \\
 &= \sigma^2(\hat{a}_2) \bar{s}^2 + \frac{\sigma_t^2}{n} = \bar{s}^2 \frac{\sigma_t^2}{\sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2} + \frac{\sigma_t^2}{n} \\
 &= \frac{\sigma_t^2}{n} \left(1 + \frac{\left(\sum_{i=1}^n s_i\right)^2}{n \sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2}\right)
 \end{aligned} \tag{A1.4}$$

De uitdrukkingen zijn zodanig gekozen dat ze overeenkomen met de notaties in de spreadsheet en (Van Esch, 1997).

De covariantie van \hat{a}_1 en \hat{a}_2 wordt berekend als:

$$\begin{aligned}
 \text{cov}(\hat{a}_1, \hat{a}_2) &= E[(\hat{a}_1 - a_1)(\hat{a}_2 - a_2)] = -\bar{s} E[(\hat{a}_2 - a_2)^2] \\
 &= -\bar{s} \sigma^2(\hat{a}_2) = -\frac{\bar{s}}{\sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2} \sigma_t^2
 \end{aligned} \tag{A1.5}$$

Hierin is gebruik gemaakt van de relatie in vgl. (3.6):

$$\begin{aligned}
 \hat{a}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n (T_i - \hat{a}_2 s_i)}{n} = a_1 + a_2 \bar{s} - \hat{a}_2 \bar{s} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \\
 \Rightarrow \hat{a}_1 - a_1 &= -(\hat{a}_2 - a_2) \bar{s} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \\
 \Rightarrow (\hat{a}_1 - a_1)(\hat{a}_2 - a_2) &= -(\hat{a}_2 - a_2)^2 \bar{s} + (\hat{a}_2 - a_2) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \\
 \Rightarrow E[(\hat{a}_1 - a_1)(\hat{a}_2 - a_2)] &= -\bar{s} E[(\hat{a}_2 - a_2)^2] + E[(\hat{a}_2 - a_2) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i]
 \end{aligned} \tag{A1.6}$$

We beschouwen de tweede term van het rechterlid apart en substitueren hierin voor $(\hat{a}_2 - a_2)$ de uitdrukking in het tweede rechterlid van vgl. (A1.3), dan volgt:

$$\begin{aligned}
 E[(\hat{a}_2 - a_2) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i] &= E\left[\frac{\sum_{k=1}^n \varepsilon_k (s_k - \bar{s})}{\sum_{k=1}^n (s_k - \bar{s})^2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \right] = \\
 &= \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n E[\varepsilon_i \varepsilon_k] (s_k - \bar{s})}{n \sum_{k=1}^n (s_k - \bar{s})^2} = \frac{\sigma_\varepsilon^2 \sum_{k=1}^n (s_k - \bar{s})}{n \sum_{k=1}^n (s_k - \bar{s})^2} = 0
 \end{aligned} \tag{A1.7}$$

Omdat $E[\varepsilon_i \varepsilon_k] = 0$ als $k \neq i$ en $E[\varepsilon_k \varepsilon_k] = \sigma_\varepsilon^2$ ($i = 1 \dots n$). Daarmee is de vgl. (A1.5) bewezen.