Notas de Aula da Disciplina Fundamentos da Matemática

Prof$^{\underline{a}}$ Danielle Rezende
danielle.jorge@cefet-rj.br

9 de agosto de 2023

Este material foi elaborado para facilitar o processo de aprendizagem da disciplina Fundamentos da Matemática. O texto contém notas de aula que apresentam os tópicos da disciplina com os principais conceitos, teoremas e observações. Os exemplos e algumas demonstrações são feitas em sala de aula. Portanto, esse material não substitui a leitura dos livros recomendados e nem a participação dos estudantes nas aulas. Gostaria de ressaltar que esse texto sofre alterações constantes e que a participação de todos no processo de revisão é muito importante para melhorar a qualidade do mesmo.

Danielle Rezende

A matemática não é uma caminhada cuidadosa através de uma estrada bem conhecida, é uma jornada por uma terra selvagem e estranha, onde os exploradores frequentemente se perdem. A exatidão deve ser um sinal aos historiadores de que os mapas já foram feitos e os exploradores se foram para outras terras.

(W.S.Anglin)

Sumário

Conjuntos Numéricos

Números naturais

O conjunto usado para contagens é o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Este é o primeiro conjunto numérico que aparece na história ou em qualquer assunto que se refere aos fundamentos da Matemática.
Lembramos que as operações básicas (soma e subtração) estão definidas em $\mathbb{N}$ com certas restrições. Por exemplo, $3 - 4$ não é uma operação possível em $\mathbb{N}$. Sendo assim, surge a necessidade de um novo conjunto numérico para que estas operações se tornem possíveis.

OBS.: $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Números inteiros

O conjunto dos números inteiros é definido por $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Note que todo número natural é também inteiro e portanto, podemos escrever que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Assim como em $\mathbb{N}$, as operações básicas (soma e subtração) estão bem definidas em $\mathbb{Z}$. Neste conjunto temos como operações fundamentais a soma e a multiplicação, contudo não está definido nesse o conjunto por exemplo, a operação de divisão. Logo, surge a necessidade de um novo conjunto numérico para que sejam possíveis tais operações.

Números racionais

O conjunto dos números racionais, denotado por $\mathbb{Q}$, são aqueles que podem ser escritos como o resultado de uma divisão entre inteiros, sendo que o divisor deve ser não nulo. Isto é:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \colon a, b \in \mathbb{Z}; b \neq 0 \right\}.$$

Números irracionais

Os números irracionais são aqueles que não podem ser escritos por meio de uma divisão entre dois inteiros. Denotaremos o conjuntos dos números irracionais por $\mathbb{I}$. Diferentemente das dízimas periódicas (que são números racionais), os números irracionais têm representação decimal infinita, porém não periódica. Podemos destacar como números irracionais todas as raízes de índice n não exatas, o número π e o número de Euler e. Observe que um número é racional ou irracional, ou seja, não pode ser ao mesmo tempo pertencente aos dois conjuntos.

Números reais

O conjunto formado pela união dos números racionais e irracionais é chamado de conjunto dos números reais e denotado por $\mathbb{R}$. Assim:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Os números reais podem ser representados por uma reta, chamada reta real, em que cada ponto está associado a um número.

Operações elementares

O conjunto dos números reais é um exemplo de um corpo. Um corpo é um conjunto munido de duas operações, soma e produto, que satisfaz determinadas propriedades. Listaremos as propriedades de corpo dos números reais

$$(\text{soma}) \qquad +: \begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x + y \end{array}$$

$$(\text{produto}) \qquad \cdot: \begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x\, y \end{array}$$

- Associativa da soma: $(x + y) + z = x + (y + z)$, para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.
- Comutativa da soma: $x + y = y + x$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
- Elemento neutro da soma: existe um número real, designado por 0 tal que $0 + x = x + 0 = x$,para todo $x, \in \mathbb{R}$.
- Elemento simétrico: para cada $x \in \mathbb{R}$, existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $x + y = y + x = 0$
- Associativa do produto: $(x\, y)\, z = x\, (y\, z)$, para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.
- Comutativa do produto: $x\, y = y\, x$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
- Elemento neutro do produto: existe um número real, designado por 1, tal que $1\, x = x\, 1 = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- Inverso multiplicativo: para cada $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $x\, y = y\, x = 1$
- Distributiva: $x\, (y + z) = x\, y + x\, z$, para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.

OBS.: O elemento simétrico da soma y no terceiro item acima, é normalmente denotado por $-x$. O inverso multiplicativo y, no penultímo item, é também chamado de recíproco e é normalmente denotado por x^{-1}.

OBS.: Resultam das propriedades acima:

- Dados $x, y, \in \mathbb{R}$ tais que $x\, y = 0$, temos que $x = 0$ ou $y = 0$.
- Dados $x, y, \in \mathbb{R}$, $(-x)\, y = x\,(-y) = -(x\, y)$.
- Dados $x, y, \in \mathbb{R}$, $(-x)\,(-y) = x\, y$.
- Dados $x, y, \in \mathbb{R}$ tais que $x^2 = y^2$, temos que $x = \pm y$.

A relação de ordem e os intervalos na reta real

Dados dois números reais a e b, dizemos que a é menor que b se $b - a$ é um número positivo. Neste caso usamos a notação $a < b$. Se $a < b$ também podemos dizer que b é maior que a e podemos usar a notação $b > a$. Assim, na reta real, se $a < b$ temos que a está a esquerda de b na reta real.

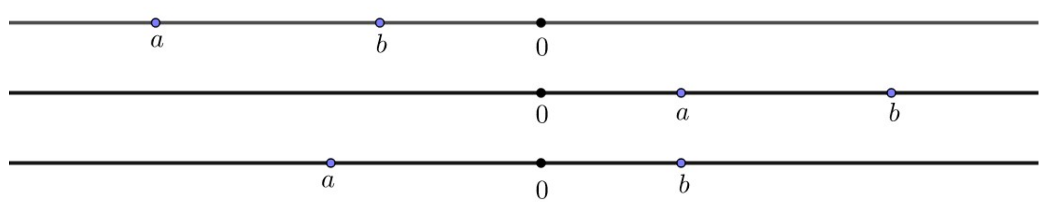


Figura 1: Relação de Ordem em $\mathbb{R}$

OBS.: Dados dois números reais a e b, usamos a notação $a \leq b$ se a é menor ou igual a b. Neste caso podemos também dizer que $b \geq a$ (b é maior ou igual a a).

Propriedades:

- $a < b \Rightarrow a + c < b + c,$ para todo $c \in \mathbb{R}$
- $a < b$ e $c < d \Rightarrow a + c < b + d$
- $a > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} > 0$
- $a < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} < 0$
- $a < b$ e $c > 0 \Rightarrow a\, c < b\, c$
- $a < b$ e $c < 0 \Rightarrow a\, c > b\, c$

Um intervalo real nada mais é que um subconjunto de $\mathbb{R}$. Veja abaixo as notações:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x \leq b\}$$

$$(a, b) =]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\}$$

$$[a, b) = [a, b[= \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x < b\}$$

$$(a, b] =]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \colon a < x \leq b\}$$

$$[a, +\infty) = [a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \colon x \geq a\}$$

$$(-\infty, b] =]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \colon x \leq b\}$$

$$(a, +\infty) =]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \colon x > a\}$$

$$(-\infty, b) =]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \colon x < b\}$$

Equações e Inequações

Equações

As equações são sentenças matemáticas que estabelecem uma relação de igualdade entre termos conhecidos (números reais, chamados de coeficientes) e valores desconhecidos (incógnitas). Existem diversos tipos de equações e diversas formas de resolvê-las. Neste momento trabalharemos com equações de apenas uma incógnita. O principal objetivo de uma equação é encontrar os valores das incógnitas que satisfazem a sentença matemática. O conjunto desses valores é chamado de **conjunto solução**. Definimos os tipos de equação com base no maior expoente que a incógnita assume na equação, chamado grau da equação. A seguir veremos os principais tipos de equações suas características e como resolvê-las.

Equações do 1° grau

A equação do primeiro grau é aquela na qual a incógnita apresenta expoente 1, ou seja, a incógnita assume seu próprio valor.

$$a\,x + b = 0, \qquad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Neste caso, temos apenas uma incógnita x que representa o valor desconhecido, o termo que se quer determinar. O conjunto solução da equação são os valores da incógnita x que a satisfazem a equação. No caso da equação de primeiro grau, é necessário isolar a incógnita trabalhando com as operações e suas propriedades em ambos os lados da equação.

Equações do 2º grau

A equação do segundo grau ou equação quadrática é aquela na qual a incógnita apresenta expoente 2, ou seja, a incógnita está ao quadrado.

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Para resolver esse tipo de equação podemos usar a Fórmula de Bhaskara:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2\,a} \quad , \text{ onde } \Delta = b^2 - 4\,a\,c}$$

OBS.: Δ é chamado **discriminante** da equação dada.

OBS.: Os valores da incógnita x que satisfazem a equação são chamados raízes da equação.

OBS.: Se $\Delta > 0$ temos que a equação possui duas raízes reais e distintas. Se $\Delta = 0$ temos que a equação possui duas raízes reais e iguais. Se $\Delta < 0$ temos que a equação possui raízes complexas.

OBS.: A Fórmula de Bhaskara é mais utilizada nas equações de 2º grau completas (quando $a, b, c \neq 0$). Nas equações do 2º grau incompletas ($a \neq 0$, $b = 0$ ou $c = 0$) existem outros métodos mais práticos de resolução.

OBS.: Outro método para resolver equações quadráticas é o método da soma e produto. Esse método é indicado quando as raízes são números inteiros. Considerando a equação

$$x^2 - S\,x + P = 0.$$

O método da soma e produto baseia-se na seguinte relação entre as raízes x_1 e x_2:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad P = x_1\,x_2 = \frac{c}{a}.$$

Inequações

As inequações são sentenças matemáticas que estabelecem uma relação de ordem entre termos conhecidos (números reais chamados de coeficientes) e valores desconhecidos (incógnitas). Existem diversos tipos de inequações e diversas formas de resolvê-las. Neste momento trabalharemos com inequações de apenas uma incógnita. O principal objetivo de uma inequação é encontrar todos os valores da incógnita que satisfazem a relação de ordem determinada. Definimos os tipos de inequação com base no maior expoente que a incógnita assume na inequação, chamado grau da inequação. A seguir veremos os principais tipos de inequações suas características e como resolvê-las.

Inequações do 1º grau

Uma inequação do primeiro grau é aquela na qual a incógnita apresenta expoente 1, ou seja, a incógnita assume seu próprio valor. Podem assumir as seguintes formas:

$$a\,x + b > 0, \qquad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

$$a\,x + b < 0, \qquad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

$$a\,x + b \geq 0, \qquad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

$$a\,x + b \leq 0, \qquad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Podemos resolver uma inequação desse tipo de maneira análoga a forma como resolvemos equações, usando as propriedades que envolvem a relação de ordem em $\mathbb{R}$. Porém, devemos tomar cuidado quando a incógnita possui coeficiente negativo. Neste caso devemos observar que quando multiplicamos por um número negativo devemos trocar o sinal da desigualdade.

Inequações do 2° grau

Uma inequação do segundo grau é aquela na qual a incógnita apresenta expoente 2, ou seja, a incógnita está ao quadrado. Podem assumir as seguintes formas:

$$a\,x^2 + b\,x + c > 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

$$a\,x^2 + b\,x + c < 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$
$$a\,x^2 + b\,x + c \geq 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$
$$a\,x^2 + b\,x + c \leq 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Para resolver uma inequação desse tipo podemos determinar a solução da equação do 2º equivalente e fazer o estudo do sinal para valores a direita e a esquerda das raízes (caso existam).

Equações e inequações modulares

Definimos o **valor absoluto** (ou **módulo**) de um número real a da seguinte forma:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Propriedades:

- $|a|^2 = a^2$
- $|a| = \sqrt{a^2}$
- $|a| = b \Leftrightarrow a = \pm b$
- $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$
- $|a| \geq b \Leftrightarrow a \leq -b$ ou $a \geq b$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$
- $|a\,b| = |a|\,|b|$

Falaremos sobre equações e inequações modulares, onde a incógnita aparece dentro da definição de módulo. Usaremos a definição e as propriedades de módulo para resolver as equações e inequações modulares.

Produtos Notáveis e Binômio de Newton

Produtos notáveis

Os produtos notáveis são expressões algébricas muito utilizadas na matemática. As mais usadas são:

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2}$$

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2}$$

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b)}$$

OBS.: Também temos:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 - b^3$$

Contudo, veremos casos desse tipo de forma mais genérica adiante.

Binômio de Newton

Considere $n \in \mathbb{N}$. Temos que:

$$\boxed{\begin{aligned} (a+b)^n &= \binom{n}{0} a^n\,b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1}\,b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2}\,b^2 + \cdots + \\ &\quad + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k}\,b^k + \cdots + \binom{n}{n-2} a^2\,b^{n-2} + \binom{n}{n-1} a^1\,b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0\,b^n \end{aligned}}$$

onde

$$\boxed{C_{n,k} = \tbinom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n, k \in \mathbb{N}, n \geq k.}$$

OBS.: O número $C_{n,k}$ é chamado de coeficiente binomial (ou **número binomial**).

OBS.: Lembre que, para $p \in \mathbb{N}$, definimos o **fatorial** de p (denotado por $p!$) como:

$$p! = \begin{cases} 1, & p = 0 \\ p\,(p-1)!, & p \geq 1 \end{cases}$$

OBS.: Note que $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$ e $\binom{n}{1} = n$.

Propriedades: Para $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, temos:

- $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

- $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ (Regra de Stifel)

OBS.: Os coeficientes binomiais estão dispostos ordenadamente em uma tabela que chamamos de **Triângulo de Pascal**. Os números binomiais de mesmo denominador são descritos na mesma coluna e de mesmo numerador na mesma linha.

$$\begin{array}{ccccccc}
\binom{0}{0} & & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6}
\end{array}$$

Assim:

$$\begin{array}{lllllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}$$

O Triângulo de Pascal possui algumas propriedades, a saber:

- Se somarmos dois elementos consecutivos em uma linha n qualquer, digamos os elementos da coluna $p-1$ e p, o resultado será o elemento na coluna p da linha $n+1$. Essa propriedade da Relação de Stifel.

- Dois números binomiais equidistantes em qualquer linha da tabela são iguais. Os números binomiais complementares são iguais.

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. Isto é, o somatório de todos os elementos da linha n é igual a 2^n.

- A soma dos elementos de qualquer coluna p, do primeiro elemento até um elemento de uma determinada linha n, é igual ao elemento situado na coluna $p+1$ da linha $n+1$.

- A soma dos elementos situados na mesma diagonal, do primeiro elemento até o elemento de uma determinada coluna p na linha n, é igual ao elemento na coluna p da linha $n+1$.

Polinômios Reais

Polinômios com coeficientes reais

Agora iremos tratar de polinômios com coeficientes reais, as operações de soma e multiplicação e estudaremos suas propriedades.

Um polinômio com coeficientes reais, denotado por $p(x)$, é uma expressão do tipo

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^k + \cdots\ ,$$

onde $a_k \in \mathbb{R}$ (chamados de coeficientes), para todo $k \in \mathbb{N}$.

OBS.: O polinômio $0(x) = 0 + 0\, x + 0\, x^2 + \cdots + 0\, x^k + \cdots$, isto é o polinômio onde todos os coeficientes são nulos, é chamado de polinômio identicamente nulo e, em geral, é denotado apenas por 0.

OBS.: Em todo polinômio não identicamente nulo, algum coeficiente é diferente de zero, portanto, existe um maior número natural n, tal que $a_n \neq 0$, chamaremos esse número n de **grau** ou **ordem** de $p(x)$ e denotaremos por $gr(p(x)) = n$. Os polinômios de grau n tal que o coeficiente $a_n = 1$ são chamados de polinômios mônicos.

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n, \quad a_n \neq 0$$

OBS.: Denotaremos por $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ o conjunto de todos os polinômios com coeficientes reais, isto é,

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \{p(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_k\, x^k + \cdots : a_k \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

Os polinômios reais e suas operações

Igualdade de Polinômios: Considere os polinômios com coeficientes reais

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n \qquad \text{e}$$

$$q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k\, x^k = b_0 + b_1\, x + b_2\, x^2 + \cdots + b_n\, x^n.$$

Dizemos que polinômios $p(x)$ e $q(x)$ são iguais ($p(x) = q(x)$) se $a_k = b_k$, para todo k, $0 \leq k \leq n$.

Adição de Polinômios: Considere os polinômios com coeficientes reais de graus n e m, respectivamente

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n \qquad \text{e}$$

$$q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k\, x^k = b_0 + b_1\, x + b_2\, x^2 + \cdots + b_n\, x^m.$$

Definimos a soma dos polinômios $p(x)$ e $q(x)$, denotada por $p(x) + q(x)$, como o polinômio

$$p(x) + q(x) = \sum_{k=0}^{r} (a_k + b_k)\, x^k = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)\, x + (a_2 + b_2)\, x^2 + \cdots + (a_r + b_r)\, x^r.$$

onde $r = gr(p(x) + q(x)) = \max\{m, n\}$, sendo que a igualdade é válida se $m \neq n$.

Multiplicação de Polinômios: Considere os polinômios com coeficientes reais de graus n e m, respectivamente

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n \qquad \text{e}$$

$$q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k\, x^k = b_0 + b_1\, x + b_2\, x^2 + \cdots + b_n\, x^m.$$

Definimos a multiplicação dos polinômios $p(x)$ e $q(x)$, denotada por $p(x)\, q(x)$, como o polinômio

$$p(x)\, q(x) = \sum_{k=0}^{m+n} c_k\, x^k$$

onde $c_k = \displaystyle\sum_{\alpha+\beta=k}^{m+n} a_\alpha\, b_\beta$, isto é,

$$\begin{aligned}
&c_0 = a_0 + b_0 \\
&c_1 = a_0\, b_1 + a_1\, b_0 \\
&c_2 = a_0\, b_2 + a_1\, b_1 + a_2\, b_0 \\
&c_3 = a_0\, b_3 + a_1\, b_2 + a_2\, b_1 + a_3\, b_0, \\
&\vdots \\
&c_{n+m} = a_n\, b_m
\end{aligned}$$

Propriedades das Operações: Considere os polinômios com coeficientes reais $p(x)$, $q(x)$ e $h(x)$. Temos que:

- $p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$
- $p(x) + (q(x) + h(x)) = (p(x) + q(x)) + h(x)$
- $p(x) + 0(x) = p(x)$
- Para cada $p(x)$ existe um polinômio denotado por $-p(x)$, tal que $p(x)+(-p(x)) = 0(x)$. Neste caso para

  $$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$$

  temos

  $$-p(x) = \sum_{k=0}^{n} (-a_k)\, x^k$$

- $p(x)\, q(x) = q(x)\, p(x)$
- $p(x)\, (q(x)\, h(x)) = (p(x)\, q(x))\, h(x)$
- $p(x)\, (q(x) + h(x)) = p(x)\, q(x) + p(x)\, h(x)$

Divisão de polinômios

Considere os polinômios com coeficientes reais $p(x)$ e $q(x)$ com $q(x) \neq 0$. Dizemos que $q(x)$ **divide** $p(x)$ se, e somente se, existe um polinômio de coeficientes reais $h(x)$, tal que

$$p(x) = h(x)q(x).$$

Neste caso também podemos dizer que $p(x)$ é um **múltiplo** de $q(x)$ ou ainda que $p(x)$ é **divisível** por $q(x)$.

Algoritmo da Divisão de Euclides:

Considere os polinômios com coeficientes reais $p(x)$ e $q(x)$ com $q(x) \neq 0$. Então, existe um único par de polinômios com coeficientes reais $h(x)$ e $r(x)$ tais que

$$p(x) = h(x)\, q(x) + r(x),$$

onde $r(x) = 0$ ou $gr(r(x)) < gr(q(x))$.

OBS.: O polinômio $r(x)$ é chamado de **resto**. Os polinômios $p(x)$ e $q(x)$ são chamados de **dividendo** e **divisor**, respectivamente.

Raiz de um polinômio

Considere $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n$ um polinômio de coeficientes reais tal que $n > 1$. Dizemos que o número real w é uma **raiz** de $p(x)$ se, e somente se, $p(w) = 0$, isto é, se ao substituirmos x por w temos como resultado o número real zero.

OBS.: Temos que o resto da divisão de $p(x)$ por $x - w$ é $r(x) = p(w)$. Assim, $r(x) = 0$ (isto é, $x - w$ divide $p(x)$) se, e somente se, w for uma raiz de $p(x)$ (isto é, $p(w) = 0$).

Proposição: Considere $p(x)$ um polinômio de coeficientes reais. O polinômio $p(x)$ é divisível por $(x - w_1) \cdots (x - w_n)$, onde w_k são números reais distintos, $k = 0, \cdots, n$, se e somente se, w_k raizes de $p(x)$, para todo $k = 0, \cdots, n$.

Teorema Fundamental da Álgebra

Teorema Fundamental da Álgebra: Todo polinômio $p(x)$ de grau $n \geq 1$ com coeficientes complexos se escreve de modo único, a menos da ordem dos fatores, como:

$$p(x) = a_n\, (x - w_1)^{r_1} \cdots (x - w_t)^{r_t},$$

onde $r_1 + \cdots + r_t = n$, com $w_1, \cdots, w_t$ raizes distintas de $p(x)$, e os números naturais $r_1, \cdots, r_t$ são as multiplicidades das raizes $w_1, \cdots, w_t$ respectivamente.

OBS.: Se $p(x)$ é um polinômio com coeficientes reais e w é uma raiz complexa (isto é, w é uma raiz não real) de $p(x)$, então o conjugado de w também o é e com a mesma multiplicidade.

Teorema Fundamental da Álgebra para polinômios reais: Todo polinômio $p(x)$ de grau $n \geq 1$ com coeficientes complexos se escreve de modo único, a menos da ordem dos fatores, como:

$$p(x) = a_n\, (x - w_1)^{r_1} \cdots (x - w_t)^{r_t}\, (x^2 + b_1\, x + c_1)^{n_1} \cdots (x^2 + b_s\, x + c_s)^{n_s},$$

onde $r_1 + \cdots + r_t + 2\, n_1 + \cdots + 2\, n_s = n$, $w_1, \cdots, w_t$ são raizes reais distintas de $p(x)$ com multiplicidades $r_1, \cdots, r_t$ respectivamente, e os polinômios $(x^2 + b_1\, x + c_1)$, $\cdots$, $(x^2 + b_s\, x + c_s)$ possuem raízes complexas com multiplicidades $n_1, \cdots, n_s$, respectivamente.

Funções

O conceito mais importante da matemática é o de função. Nosso objetivo é estudar o conceito de função, que relaciona quantidades descritas por números reais. As funções modelam vários fenômenos físicos, e portanto, para estudá-las as informações algébricas (expressões matemáticas) determinadas por essas funções serão relacionadas às informações geométricas (descritas por gráficos).

Funções: definição, domínio e imagem

Inicialmente vamos estudar as funções como uma relação entre conjuntos. Considere dois conjuntos não vazios A e B.

Uma **função de** A **em** B é uma relação (regra) que associa a cada elemento x do conjunto A um **único** elemento y do conjunto B. O único elemento $y \in B$ associado ao elemento $x \in A$ é indicado por $f(x)$, isto é, $f(x)$ é o valor que f assume em x (ou ainda, $f(x)$ é a imagem de x por f).

O conjunto A é chamado de **domínio** (conjunto onde a função esta definida) e é denotado por D_f, $D(f)$ ou $Dom(f)$. O conjunto B é chamado de contradomínio ou campo de valores de f. Observe que quando x percorre o domínio de f, $f(x)$ descreve um conjunto que chamamos de **imagem** de f e que será denotado por Im_f, $Im(f)$ ou $f(A)$. Assim:

$$Im(f) = \{y \in B \colon x \in A\} \subseteq B.$$

OBS.: O elemento de $y \in B$ é obtido mediante a relação dada pela função f a partir do elemento escolhido $x \in A$. Como vimos antes, para explicitar essa dependência, escrevemos $y = f(x)$. Por isso, chamamos x de **variável independente** e y de **variável dependente**.

OBS.: Uma função f de domínio A e contradominio B é indicada por

$$f \colon A \to B$$

e a lei de correspondência é indicada por

$$x \mapsto f(x).$$

OBS.: No nosso curso trabalharemos apenas com funções de uma variável real a valores reais, isto é, os conjuntos A e B são subconjuntos da reta real. Assim, as variáveis envolvidas são números reais.

OBS.: Em geral, uma função deve ser definida junto com o seu domínio, que determina os valores de x para os quais $y = f(x)$ está bem definida. Para simplificar, algumas vezes deixamos de explicitar o domínio da função f, falando apenas a lei de correspondência $y = f(x)$. Neste caso, fica implícito que o domínio é o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ para os quais a lei faça sentido (conjunto de todos os valores admissíveis de x). Algumas vezes também poderemos escolher um domínio particular somente por razões específicas, ou pelas exigências de um problema.

O plano cartesiano e o gráfico de uma função

O conjunto $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in D(f)\}$ é chamado **gráfico** da função f, denotado por G_f ou $G(f)$. Podemos extrair informações importantes de uma função quando representamos esse conjunto geometricamente. Para isso, introduzimos um sistema ortogonal de coordenadas (o plano cartesiano).

O plano cartesiano (denotado por $\mathbb{R}^2$), é o conjunto dos pares $P = (x, y)$ de números reais x e y, chamados respectivamente de abscissa (ou primeira coordenada) e ordenada (ou segunda coordenada).

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \colon x, y \in \mathbb{R}\}$$

O conjunto dos pontos cuja primeira coordenada é nula, é chamado de eixo y ou O_y (eixo das ordenadas). O conjunto dos pontos cuja segunda coordenada é nula, é chamado de eixo x ou O_x (eixo das abscissas). Os eixos x e y formam duas retas perpendiculares com origem no ponto O.

Munindo-se desse sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, o gráfico de f é o lugar geométrico de todos os pares da forma $(x, f(x))$ quando x percorre o domínio de f.

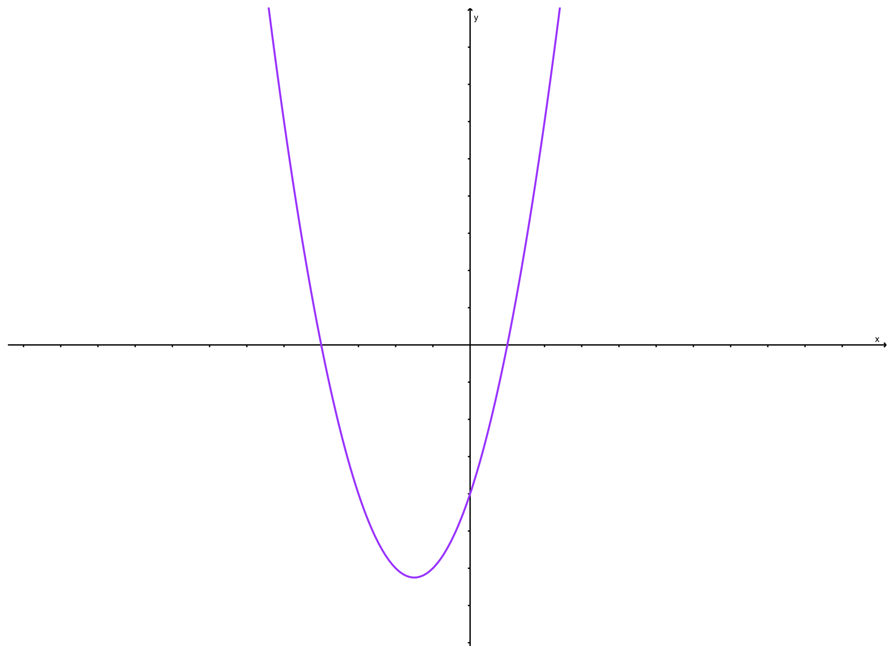


Figura 2: Gráfico de uma função

OBS.: O gráfico de uma função pode ser interceptado por uma reta vertical em no máximo um ponto.

Funções pares e ímpares

Seja f uma função. Suponha que para todo $x \in D(f)$ exista $-x \in D(f)$.

- Dizemos que f é uma função **par** se $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in D(f)$.

- Dizemos que f é uma função **ímpar** se $-f(x) = f(-x)$, para todo $x \in D(f)$.

O gráfico de uma função par é simétrico com relação ao eixo O_y (isto é, se $(a, b) \in G_f$ temos que $(-a, b) \in G_f$) e o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem (isto é, se $(a, b) \in G_f$ temos que $(-a, -b) \in G_f$).

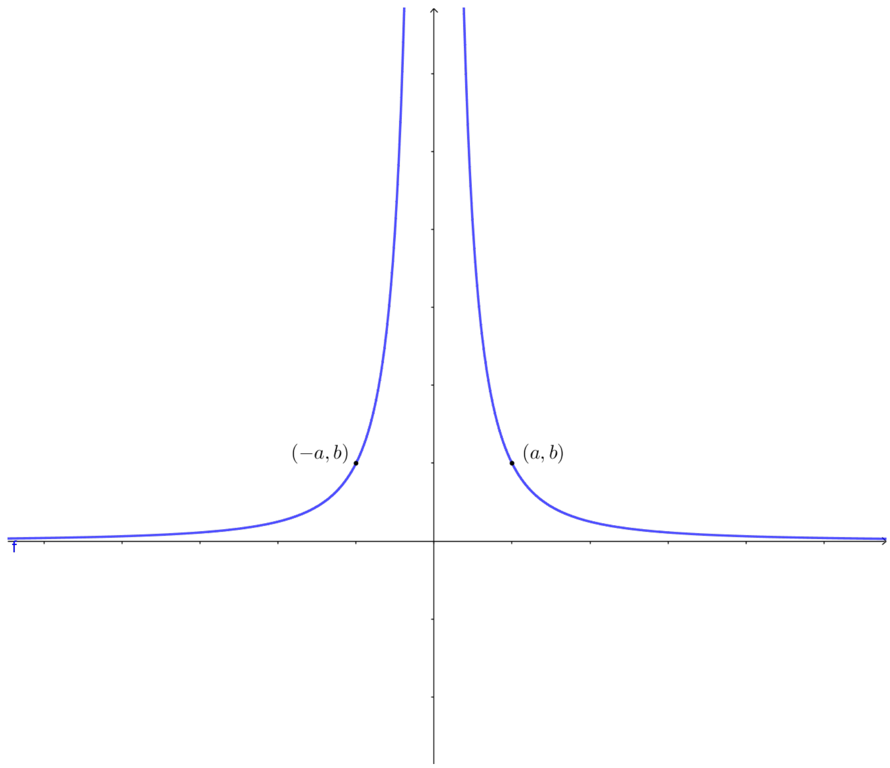


Figura 3: Exemplo de função par

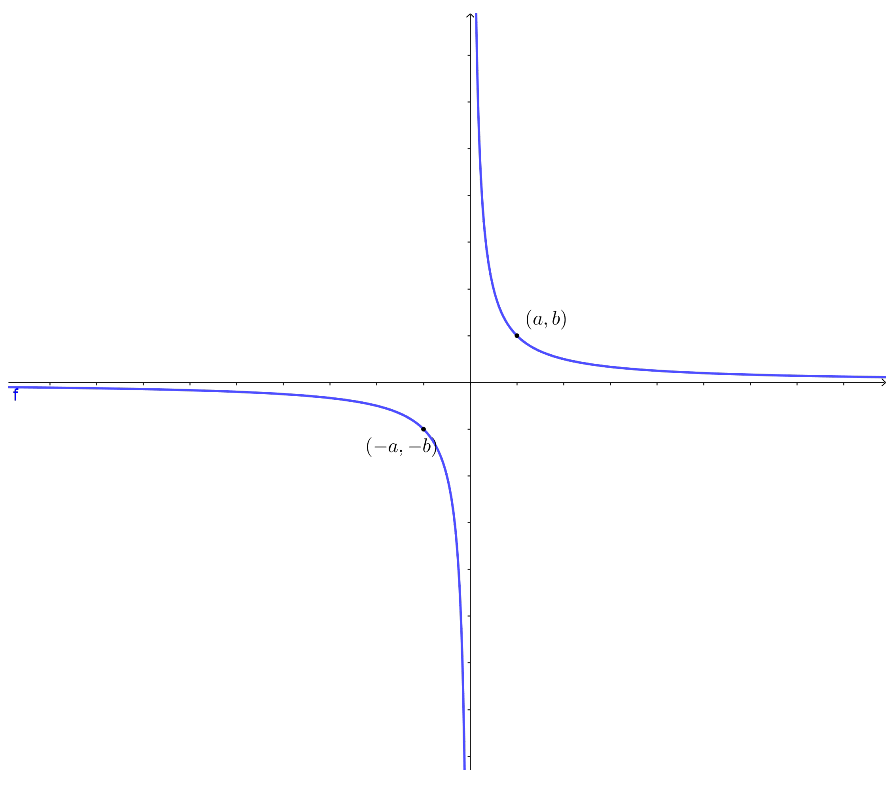


Figura 4: Exemplo de função ímpar

Crescimento e decrescimento de funções

Seja f uma função e A um subconjunto do domínio de f. Suponha que $x_1, x_2 \in A$.

- Dizemos que f é uma função **crescente** em A se para $x_1 < x_2$ temos que $f(x_1) < f(x_2)$.
- Dizemos que f é uma função **decrescente** se para $x_1 < x_2$ temos que $f(x_1) > f(x_2)$.

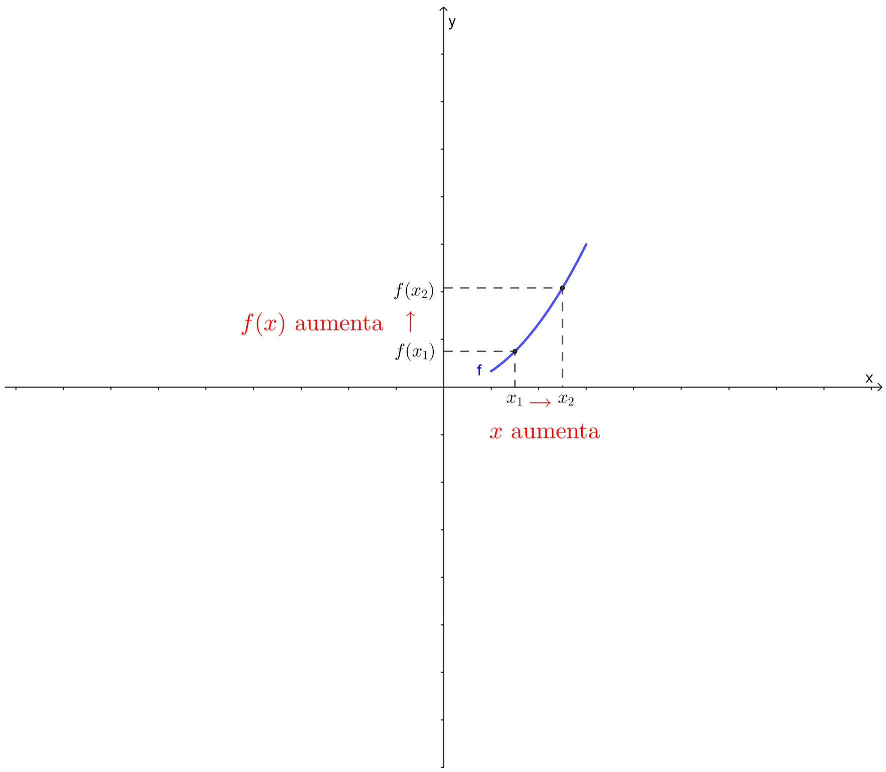


Figura 5: Função crescente

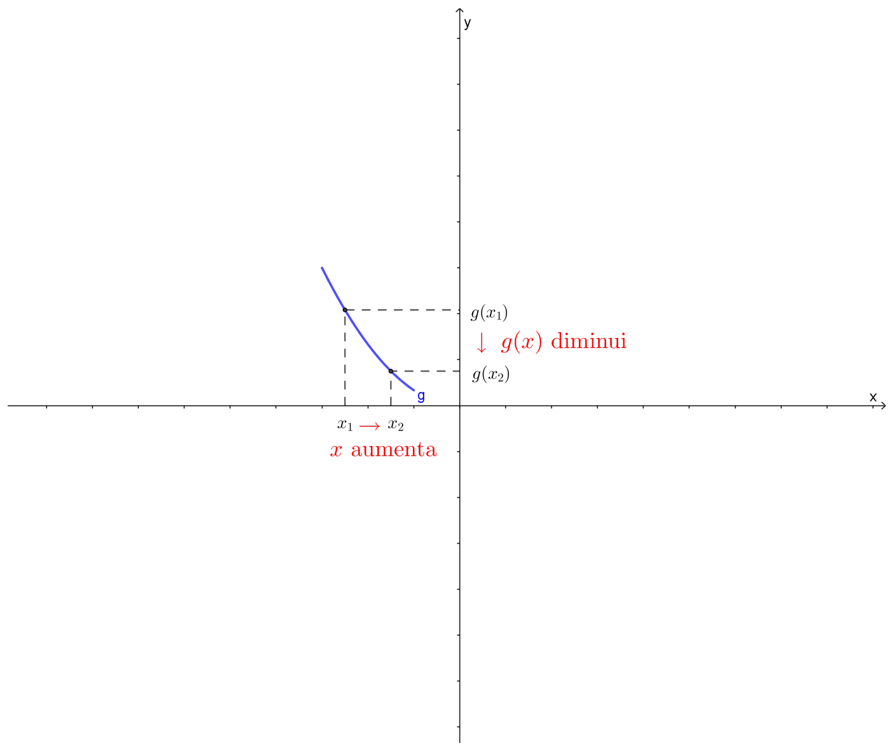


Figura 6: Função decrescente

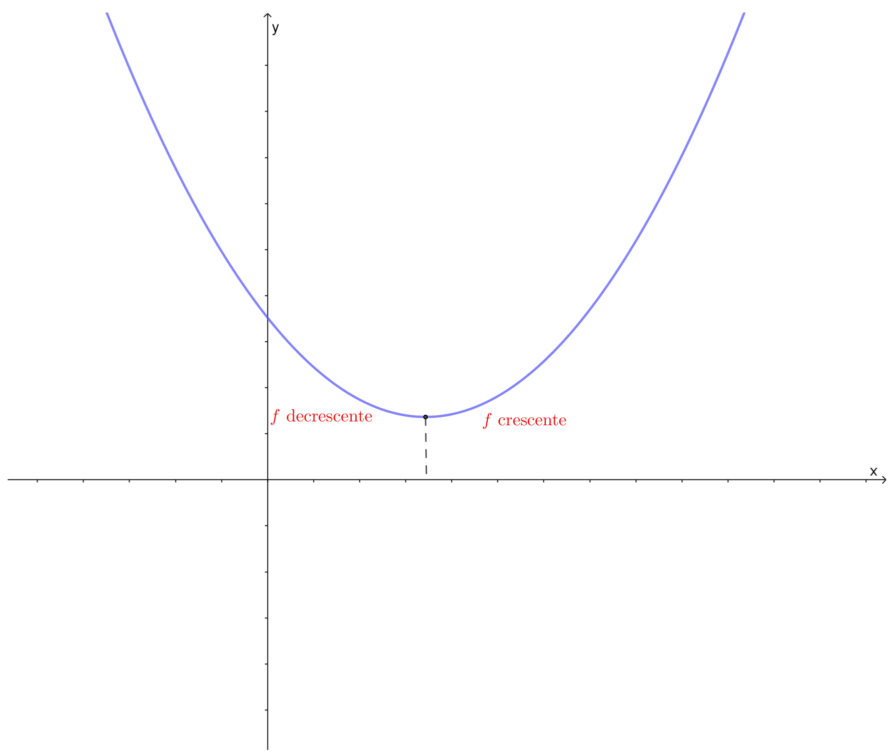


Figura 7: Função monótona

Exemplos de algumas funções elementares

- Função constante: $f(x) = k$ com $c \in \mathbb{R}$.

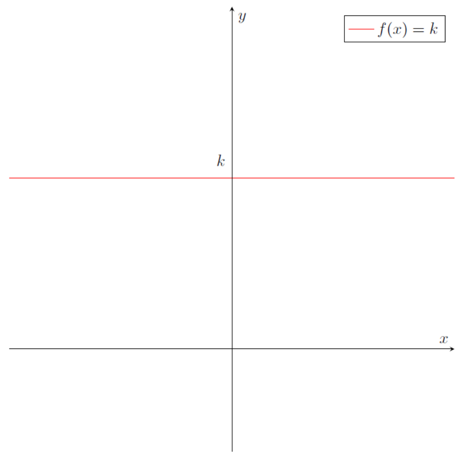


Figura 8: Exemplo de função constante

- Função afim (ou função do $1^{\underline{o}}$ grau): $f(x) = a\,x + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

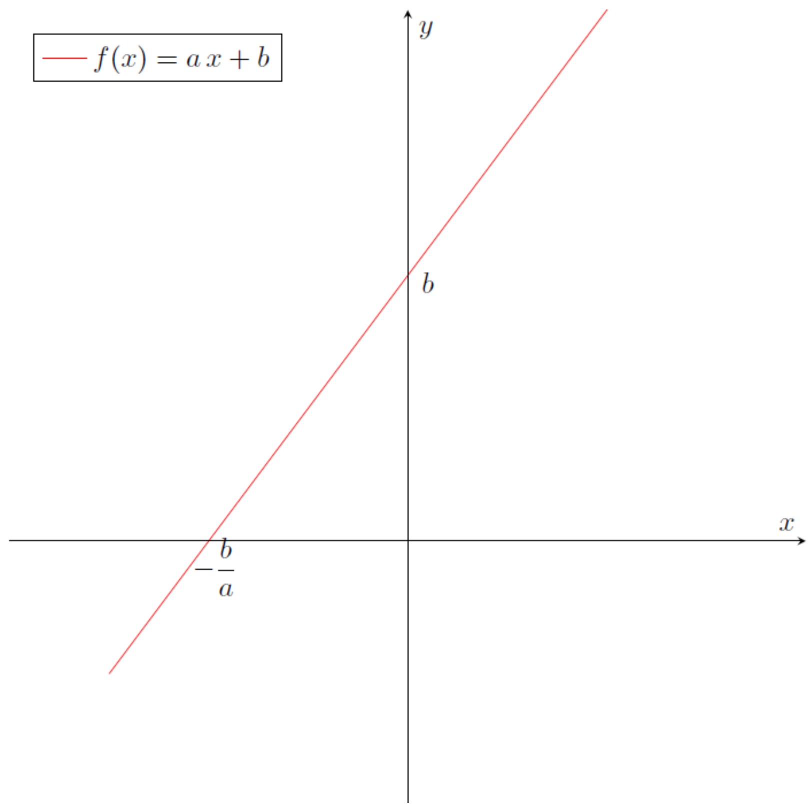


Figura 9: Exemplo de função afim

OBS.: O gráfico de uma função afim é sempre uma reta.

OBS.: Quando $b = 0$ essa equação se reduz a $y = a\,x$, chamada função linear.

- Função potências inteiras: $f(x) = x^p$, onde $p \in \mathbb{Z}$ com $p \neq 0$.

  $*$ $p > 0$ e p par

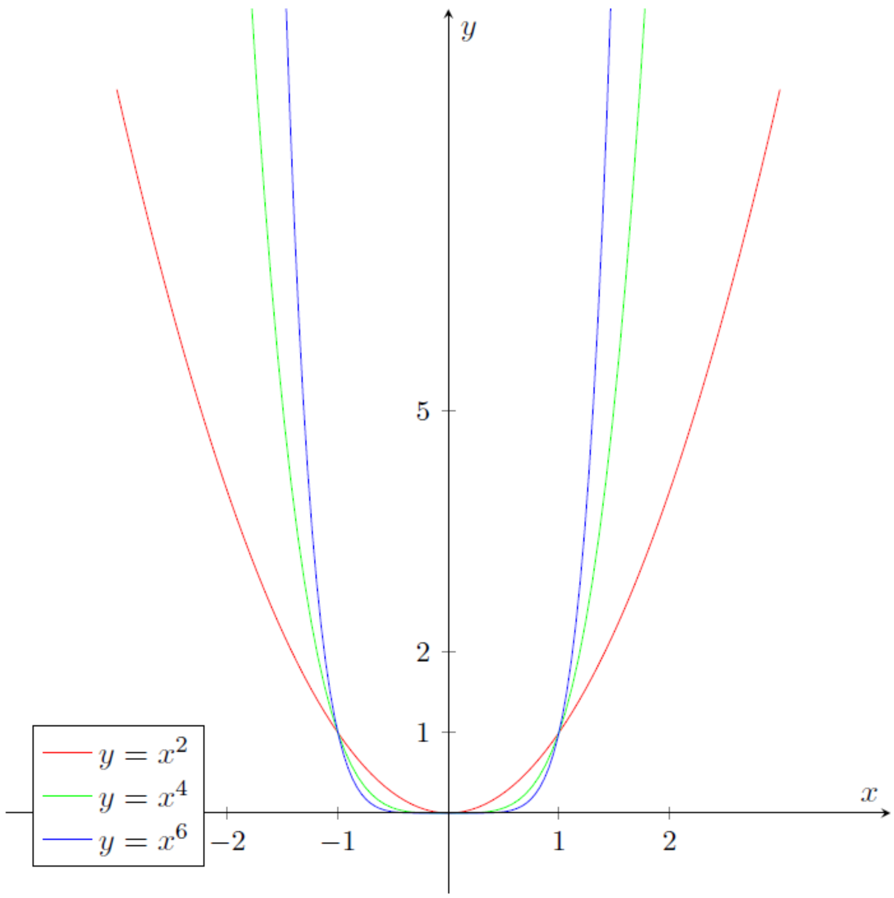


Figura 10: Exemplos de funções de potência inteira par e positiva

∗ $p > 0$ e p ímpar

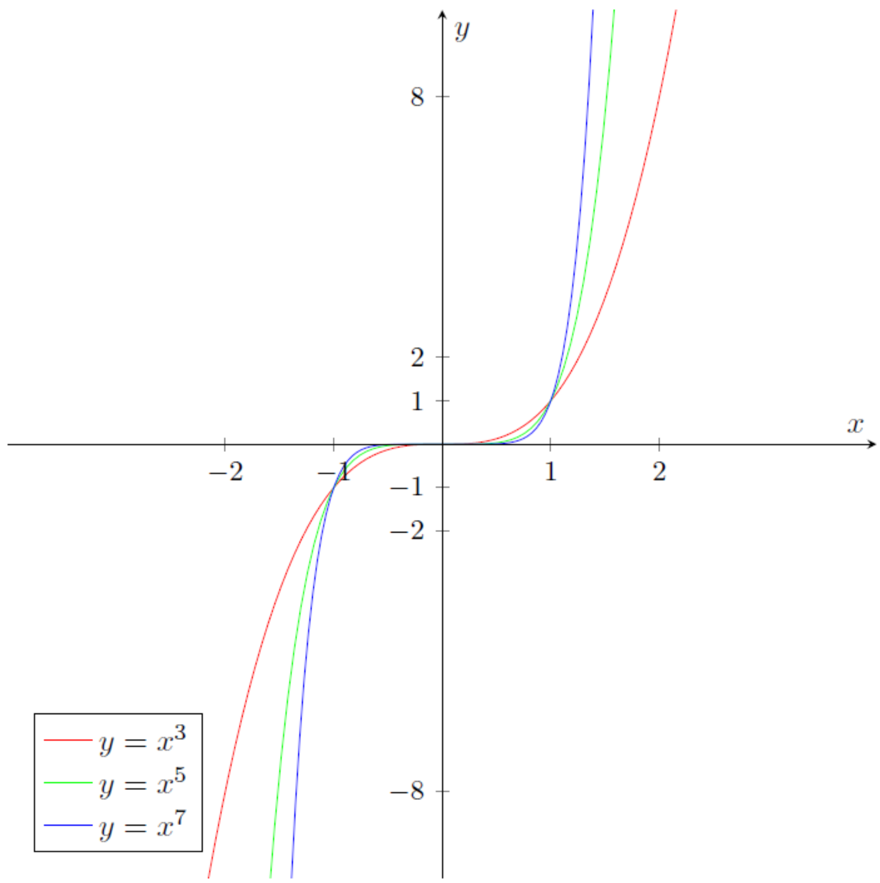


Figura 11: Exemplos de funções de potência inteira ímpar e positiva

$*$ $p < 0$ e p par

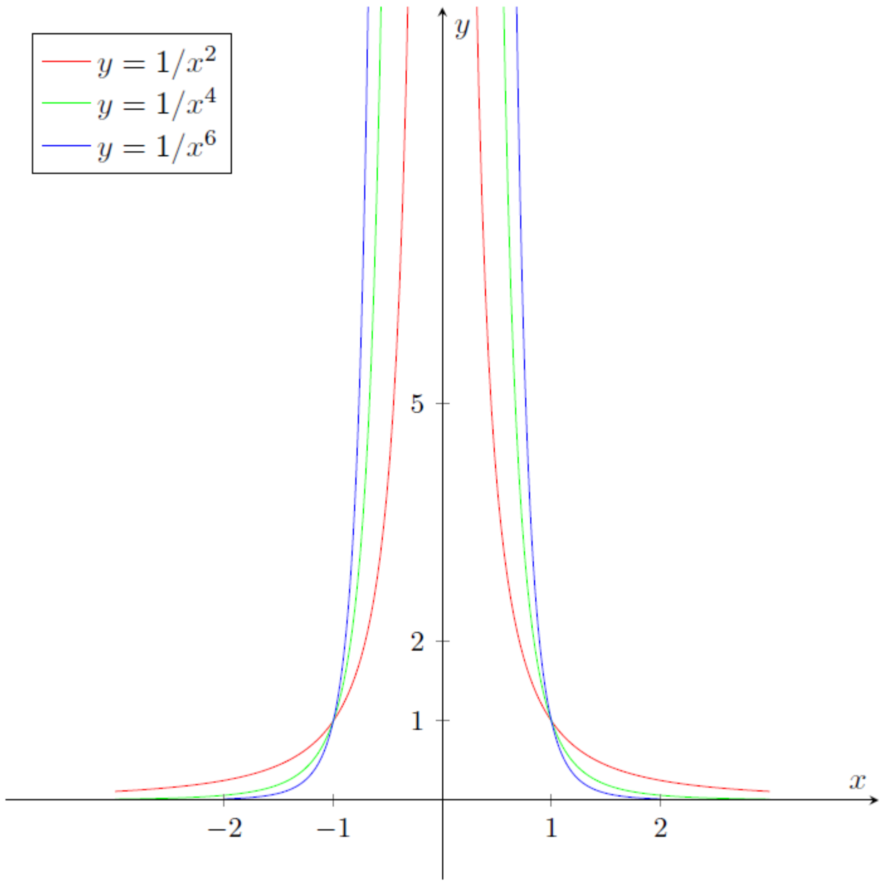


Figura 12: Exemplos de funções de potência inteira par e negativa

$*$ $p < 0$ e p ímpar

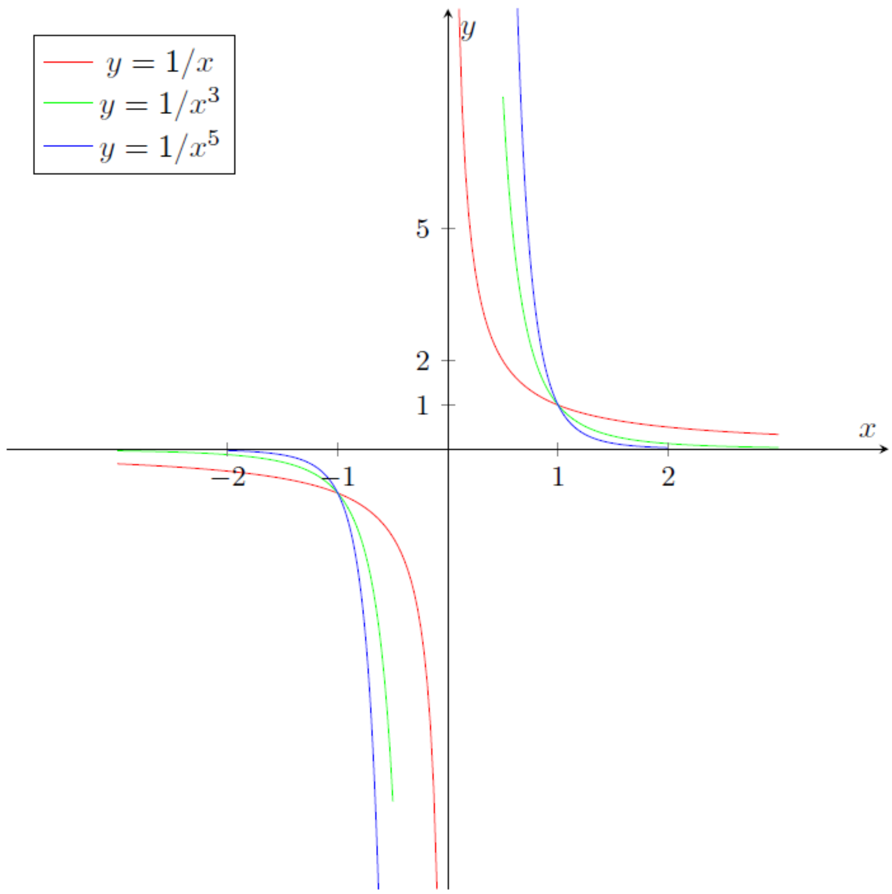


Figura 13: Exemplos de funções de potência inteira ímpar e positiva

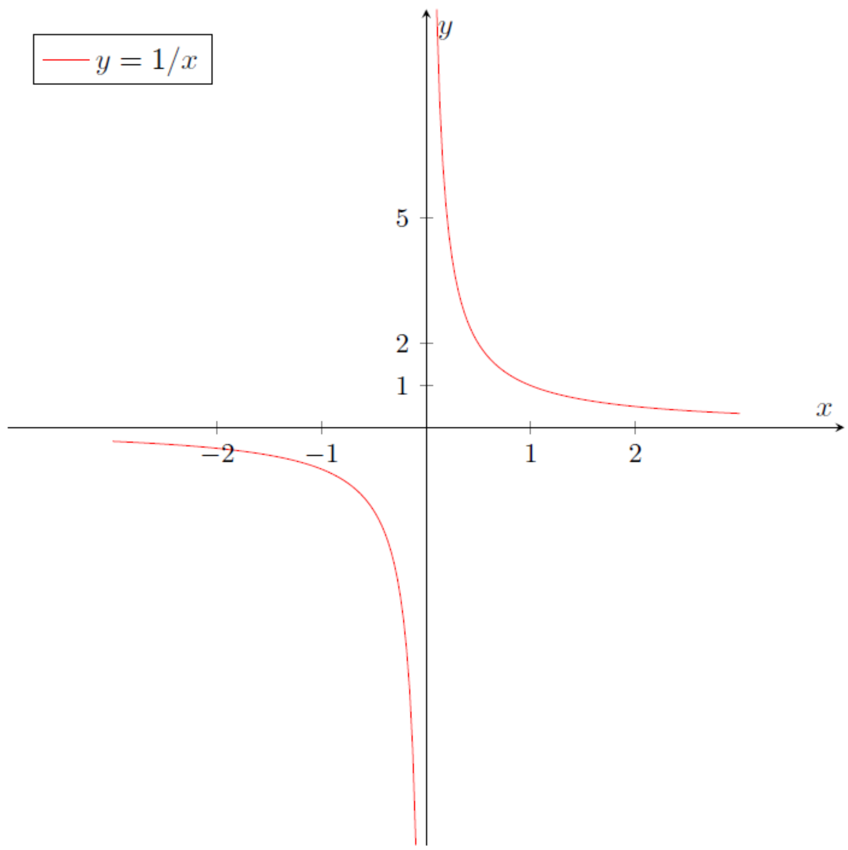


Figura 14: Função recíproca ou hipérbole equilátera

- Função quadrática (ou função do 2º grau): $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

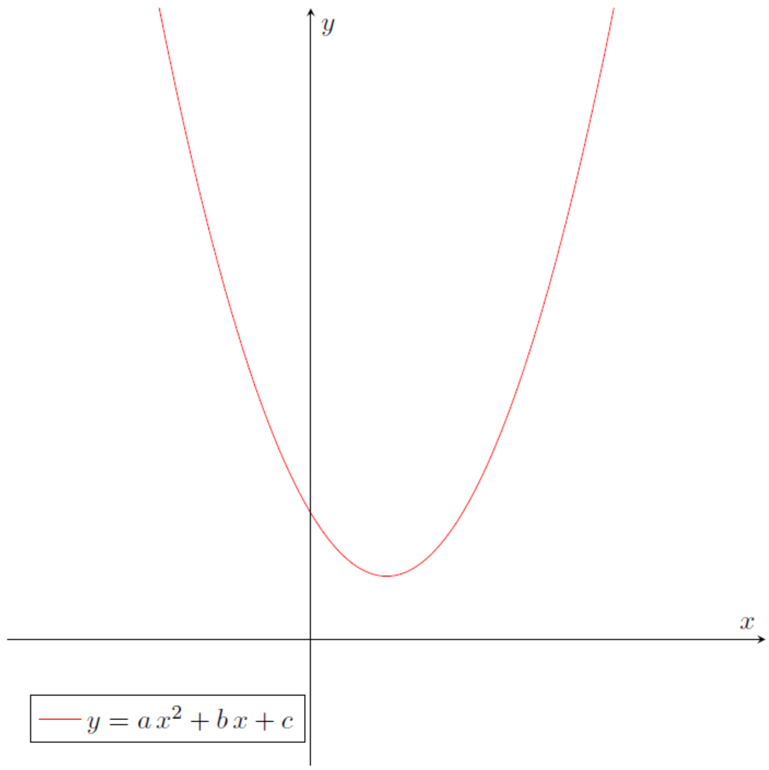


Figura 15: Exemplo de uma função quadrática

OBS.: O gráfico de uma função quadrática é sempre uma parábola.

OBS.: Para o esboço da parábola é importante determinar as interseções com os eixos coordenados, o vértice que é dado por

$$V = (x_v, y_v) = \left(\frac{-b}{2\,a}, \frac{-\Delta}{4\,a} \right),$$

e o eixo de simetria dado por $x = x_v$.

- Função Modular: $f(x) = |x|$

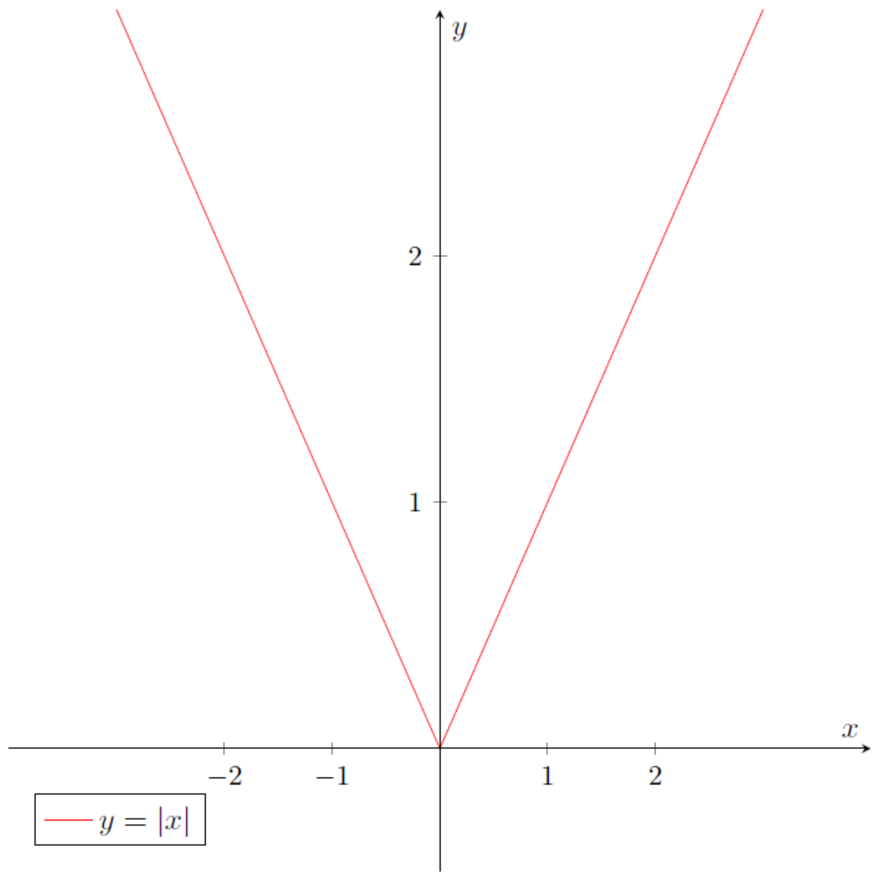


Figura 16: Função módulo

Propriedades:

$*$ $|x|^2 = x^2$

$*$ $|x| = \sqrt{x^2}$

$*$ $|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a$

$*$ $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

$*$ $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ ou $x \geq a$

- Função raiz quadrada: $f(x) = \sqrt{x}$

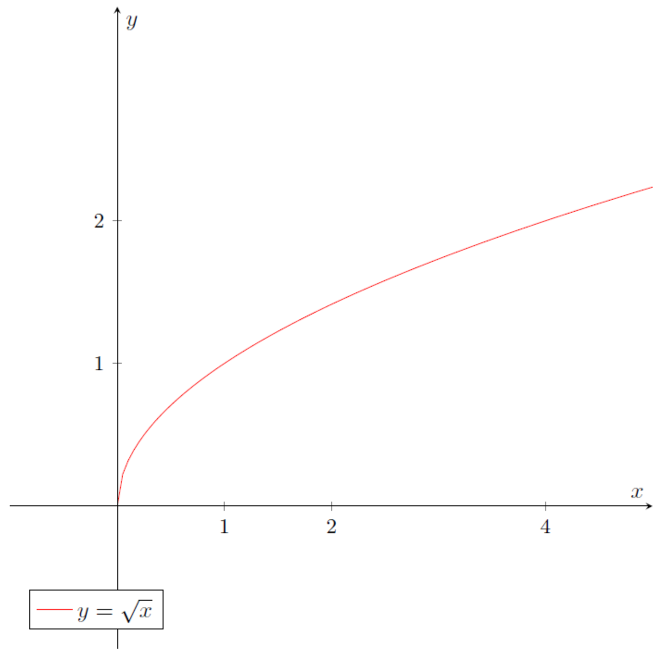


Figura 17: Função raiz quadrada

- Função raiz cúbica: $f(x) = \sqrt[3]{x}$

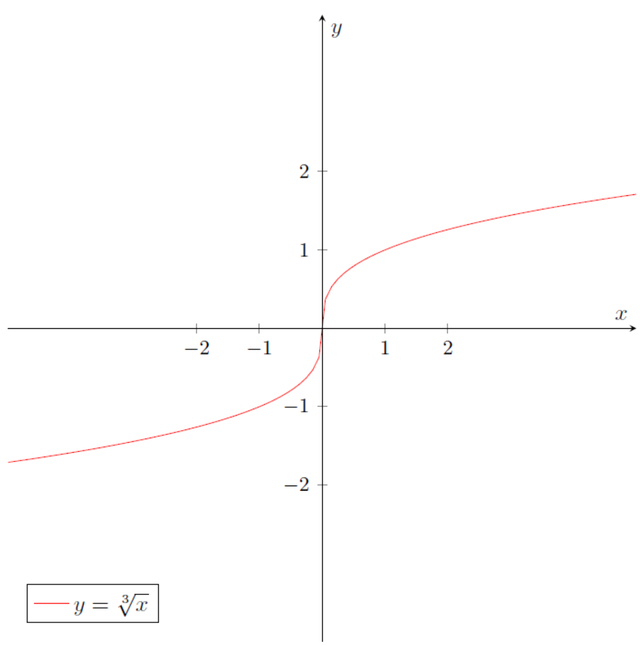


Figura 18: Função raiz cúbica

- Funções exponenciais e logarítmicas

$$f(x) = a^x \qquad g(x) = \log_a x$$

A função logarítmica natural é definida e denotada por

$$g(x) = \log_e x = \ln x$$

e a função exponencial natural é definida e denotada por

$$f(x) = e^x = \exp(x).$$

É comum nos referirmos as funções exponencial natural e logarítmica natural simplesmente por exponencial e logarítmica, recpectivamente.

Essas funções serão estudadas mais tarde e por isso, neste momento, não entraremos em detalhes.

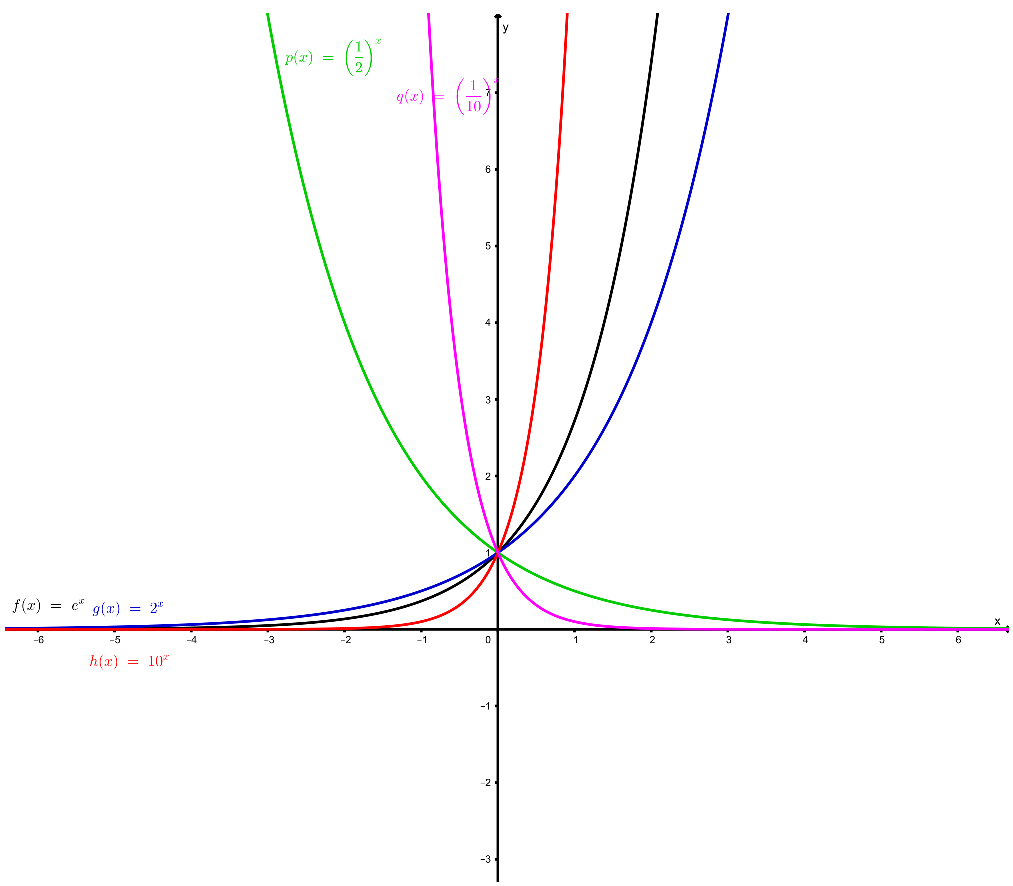


Figura 19: Exemplos de funções exponenciais

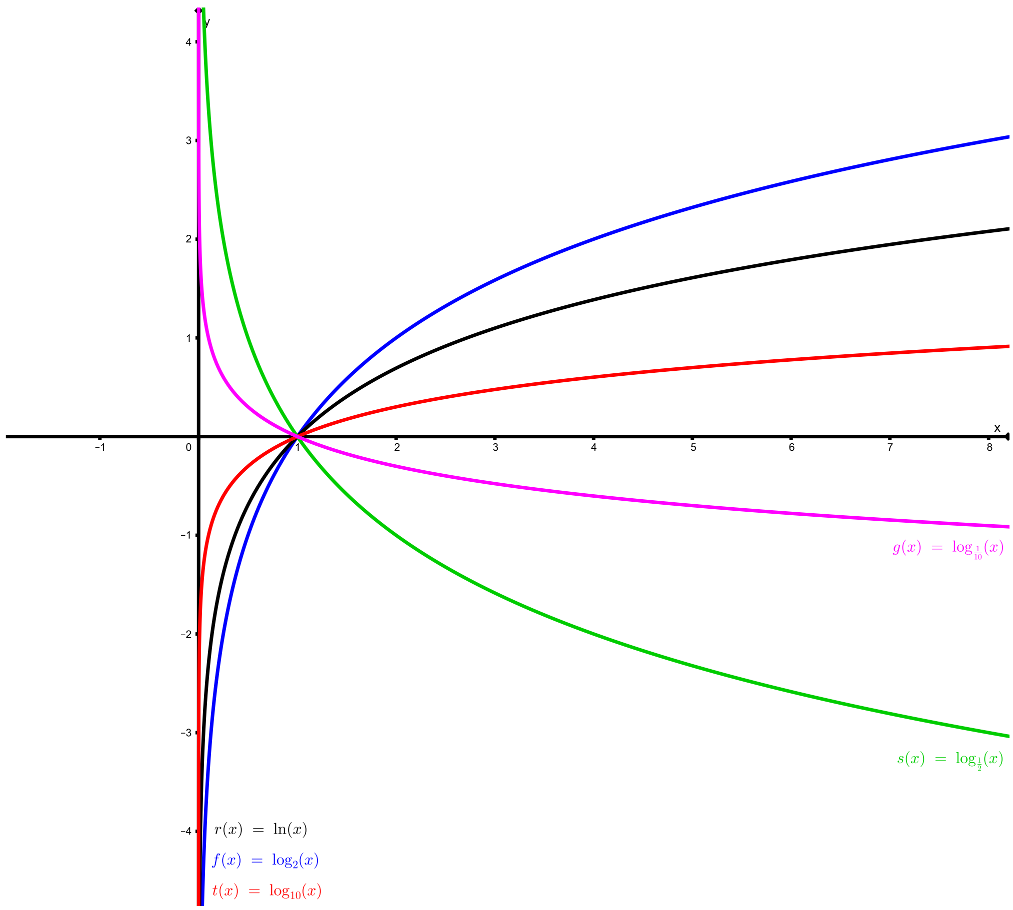


Figura 20: Exemplos de funções logarítmicas

- Funções trigonométricas

$$f(x) = \operatorname{sen} x = \sin x \qquad g(x) = \cos x$$

As funções seno e cosseno e as demais funções trigonométricas,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg} x = \tan x \\
&\operatorname{cotg} x = \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \\
&\sec x = \frac{1}{\cos x} \\
&\operatorname{cossec} x = \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}
\end{aligned}$$

serão estudadas mais adiante.

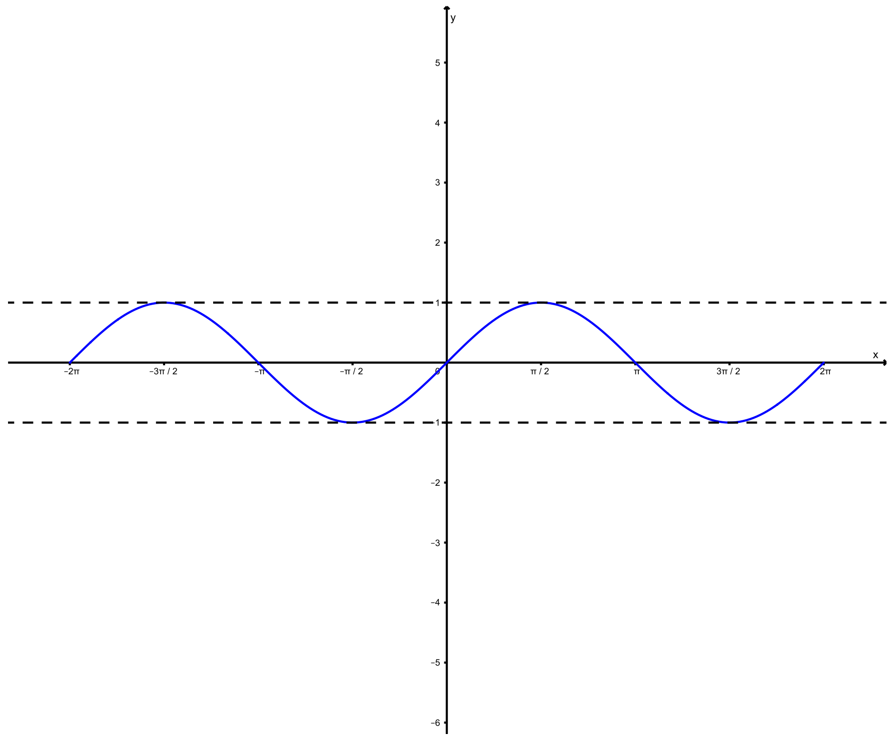


Figura 21: Função seno

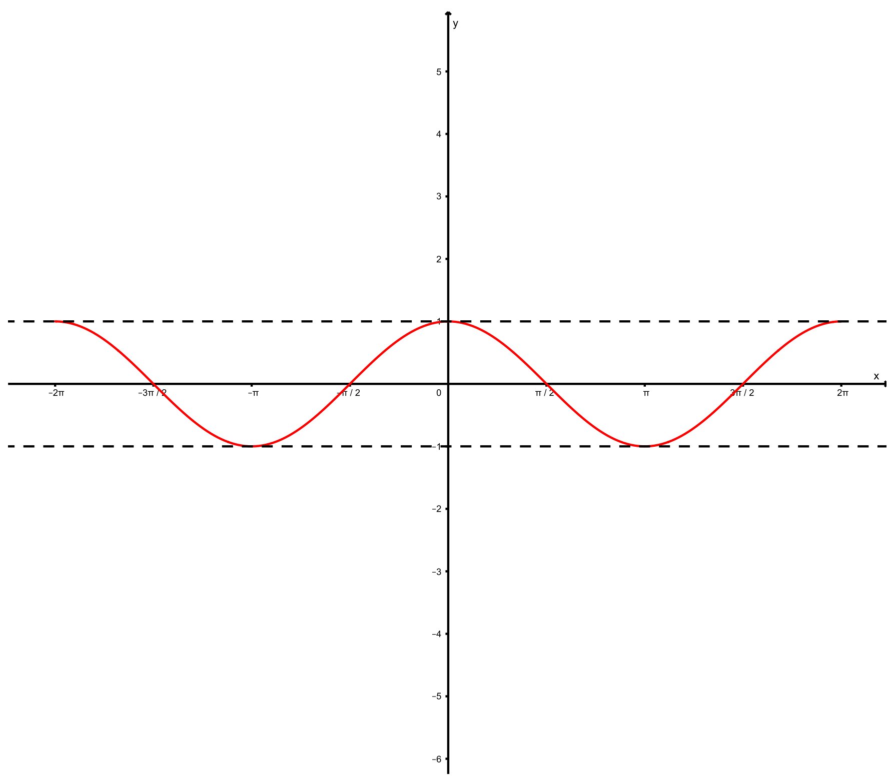


Figura 22: Função cosseno

OBS.: Também estudaremos algumas funções polinomiais ($p(x) = a_n\, x^n + \cdots + a_1\, x + a_0$, onde $a_i \in \mathbb{R}$ para $i = 0, \cdots, n$), racionais ($f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, onde $p(x)$ e $q(x)$ são funções polinomiais) e algébricas (funções construídas por meio de operações algébricas com funções polinomiais).

Operações com funções

Sejam f e g duas funções reais de variável real tais que $D_f \cap D_g \neq \emptyset$

- Adição de funções: $(f+g)\colon D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$, onde $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- Diferença de funções: $(f-g)\colon D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$, onde $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- Produto de uma constante por uma função: $(k\, f)\colon D_f \to \mathbb{R}$, onde $(k\, f)(x) = k\, f(x)$ e $k \in \mathbb{R}$
- Produto de funções: $(f\, g)\colon D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$, onde $(f\, g)(x) = f(x)\, g(x)$
- Quaciente de funções: $\left(\dfrac{f}{g}\right)\colon D_f \cap D_g - \{x \in \mathbb{R}\colon g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$, onde $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

OBS.: Sejam f e g duas funções. Dizemos que f e g são **iguais** (denotado por $f = g$) se $D_f = D_g$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D_f$.

Função composta

Sejam f e g duas funções tais que $Im(f) \subset D(g)$. A função **composta de g e f** é dada por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

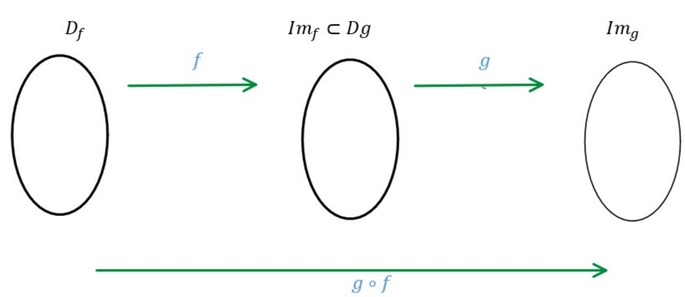


Figura 23: Função composta

OBS.: O domínio da composta é o conjunto

$$D(g \circ f) = \{x \in D(f)\colon f(x) \in D(g)\}.$$

Funções Inversíveis

Considere a função $f\colon A \to B$.

A função f é dita **injetora** se

$$u \neq v \Rightarrow f(u) \neq f(v), \forall u, v \in A$$

A função f é dita **sobrejetora** se o conjunto imagem é igual ao contradomínio, isto é, $Im_f = B$. Se a função f é injetora e sobrejetora, dizemos que f é bijetora.

Se existe $g\colon B \to A$ tal que $(f \circ g)(x) = x$, para todo $x \in B$ e $(g \circ f)(x) = x$, para todo $x \in A$, então g é chamada de **função inversa** e é denotada por f^{-1}.

Proposição: Seja $f\colon A \to B$ uma função. A função f é bijetora se, e somente se, existe a função inversa $f^{-1}\colon B \to A$.

OBS.: Quando existe a função inversa dizemos que f é inversível.

OBS.: Se $f\colon A \to B$ é inversível, então para $\alpha \in A$ e $\beta \in B$ temos:

$$f(\alpha) = \beta \Leftrightarrow f^{-1}(\beta) = \alpha.$$

OBS.: $D_f = Im_{f^{-1}}$ e $Im_f = D_{f^{-1}}$.

OBS.: $(f \circ f^{-1}) = I$ e $(f^{-1} \circ f) = I$, onde I é a função identidade.

OBS.: Podemos obter o gráfico da inversa de uma função a partir do gráfico da função. Dado o ponto $(a, b) = (a, f(a))$ do gráfico de f, obtemos o ponto $(b, a) = (b, f^{-1}(b))$ do gráfico de f^{-1}. Então o gráfico de f^{-1} é a reflexão do gráfico de f em relação à reta diagonal $y = x$.

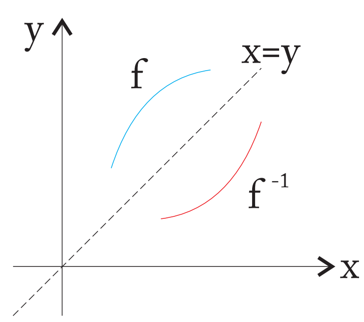


Figura 24: Gráfico de uma função e sua inversa

Gráficos obtidos de outros gráficos

Para esboçar o gráfico de:	O gráfico de $y = f(x)$ deve ser:
$g(x) = f(-x)$	Refletido em torno do eixo O_y
$g(x) = -f(x)$	Refletido em torno do eixo O_x
$g(x) = f(x+c)$, $c > 0$	Transladado c unidades para a esquerda
$g(x) = f(x-c)$, $c > 0$	Transladado c unidades para a direita
$g(x) = f(x)+c$, $c > 0$	Transladado c unidades para cima
$g(x) = f(x)-c$, $c > 0$	Transladado c unidades para baixo
$g(x) = f(c\,x)$, $c > 1$	Comprimido por um fator c horizontalmente
$g(x) = f(c^{-1}\,x)$, $c > 1$	Esticado por um fator c horizontalmente
$g(x) = c^{-1}\,f(x)$, $c > 1$	Comprimido por um fator c verticalmente
$g(x) = c\,f(x)$, $c > 1$	Esticado por um fator c verticalmente

- Translação horizontal: Se $g(x) = f(x+k)$, então o gráfico de g é a translação horizontal do gráfico de f de $|k|$ unidades, para a direita se k é negativo e, para a esquerda se k é positivo.

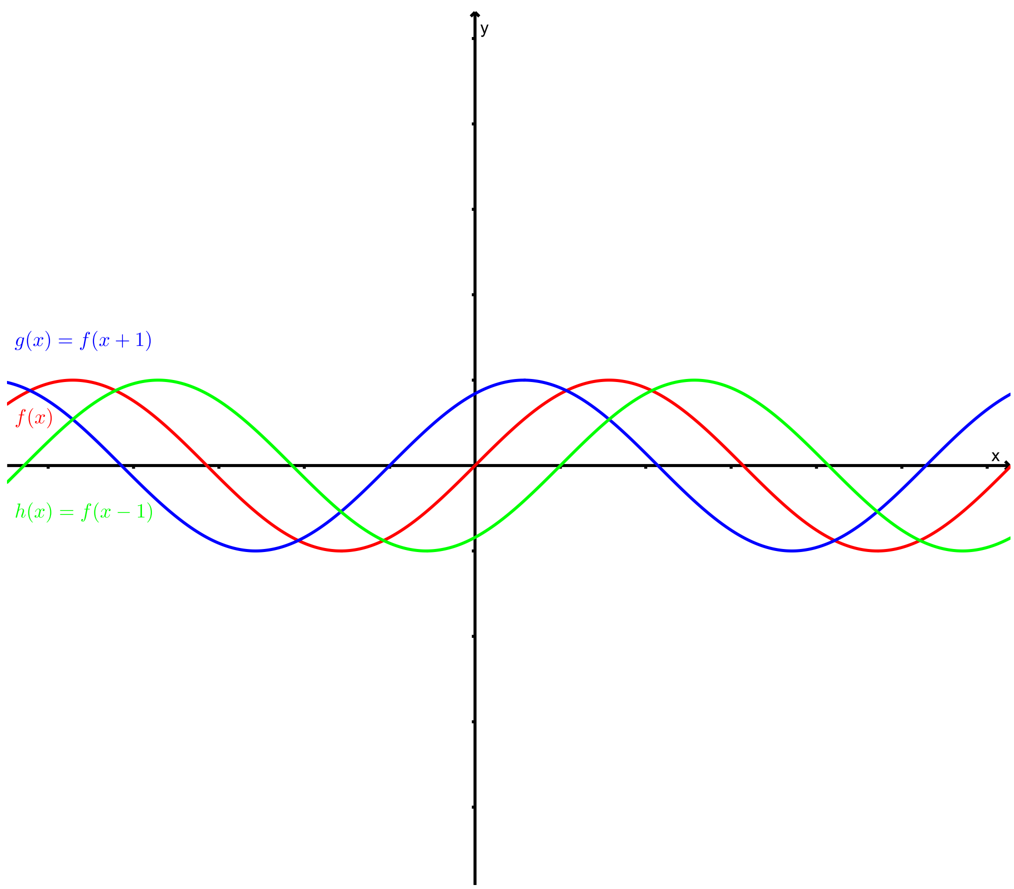


Figura 25: Exemplos de translações horizontais

- Translação vertical: Se $g(x) = f(x) + k$, então o gráfico de g é a translação vertical do gráfico de f de $|k|$ unidades, para baixo se k é negativo e, para cima se k é positivo.

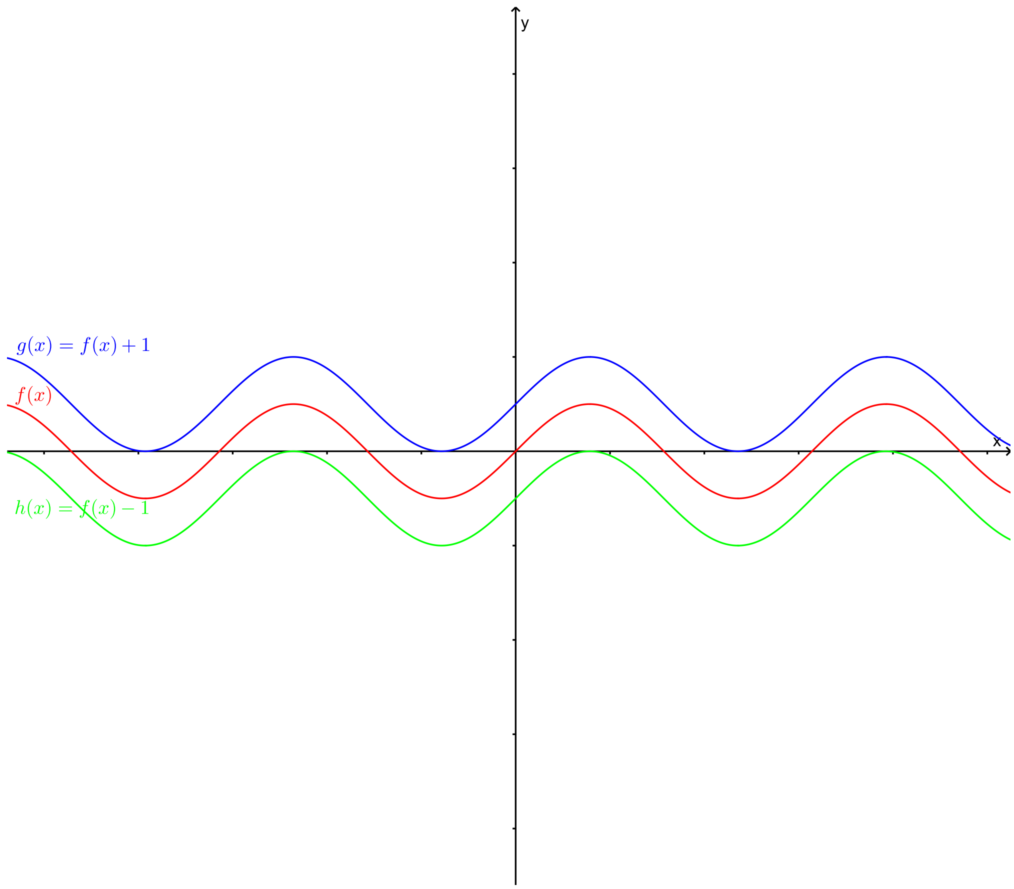


Figura 26: Exemplos de translações verticais

- Expansão/Contração vertical uniforme: Se $g(x) = k\,f(x)$, então o gráfico de g é a expansão vertical do gráfico de f de k unidades, se $k > 1$, ou g é a contração vertical do gráfico de f de k unidades, se $0 < k < 1$.

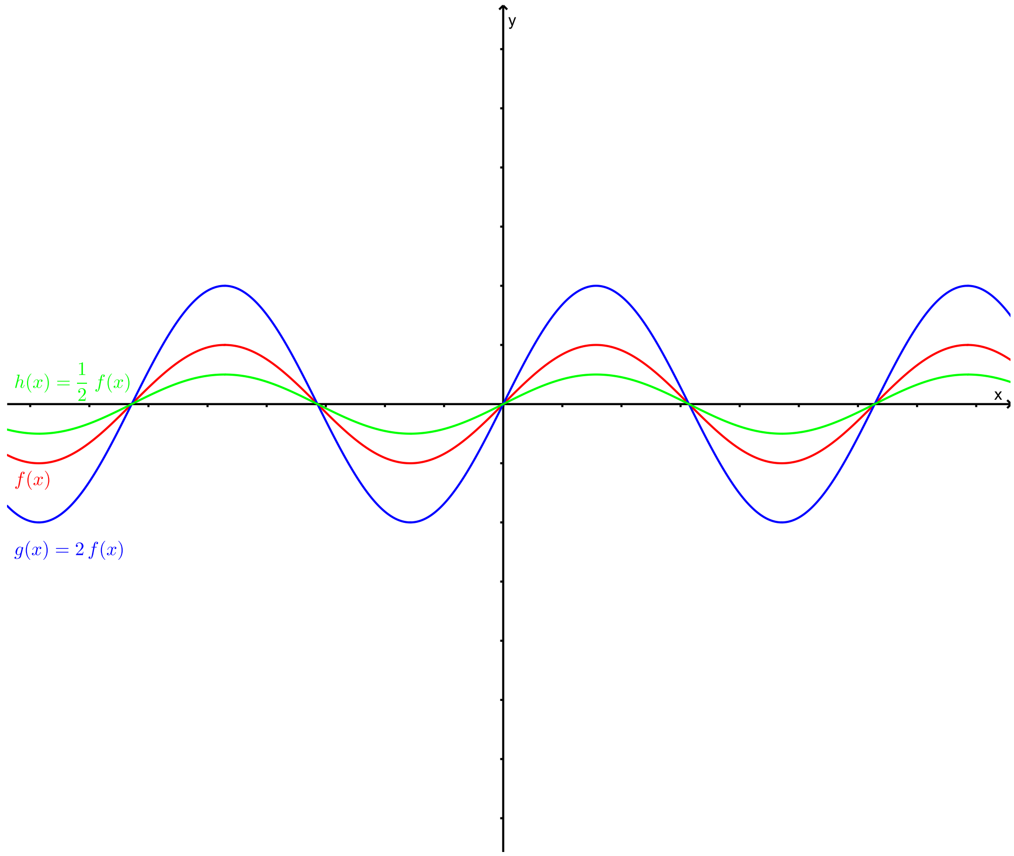


Figura 27: Exemplo de uma expansão vertical e de uma contração vertical

- Expansão/Contração horizontal uniforme: Se $g(x) = f(k\,x)$, então o gráfico de g é a contração horizontal do gráfico de f de k unidades, se $k > 1$, ou g é a expansão horizontal do gráfico de f de k unidades, se $0 < k < 1$.

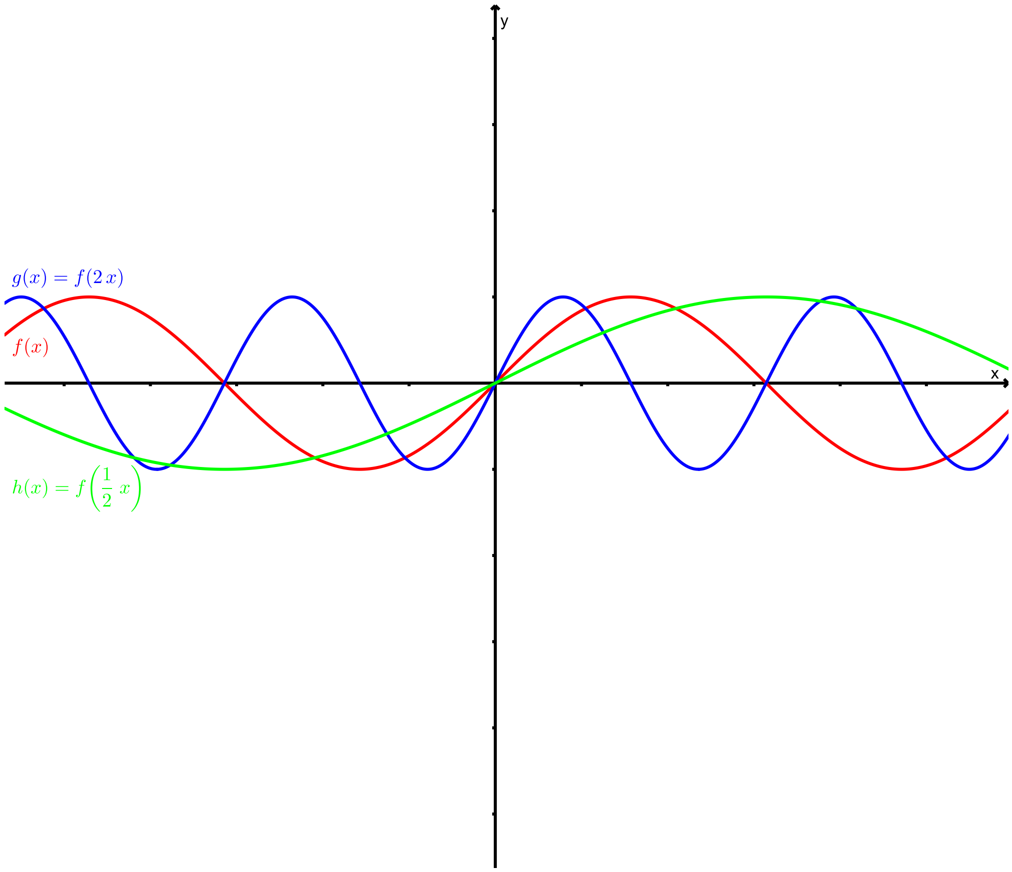


Figura 28: Exemplo de uma expansão horizontal e de uma contração horizontal

- Refexão: Se $g(x) = -f(x)$, então o gráfico de g é a reflexão do gráfico de f em relação ao eixo horizontal, e se $g(x) = f(-x)$, então o gráfico de g é a reflexão do gráfico de f em relação ao eixo vertical.

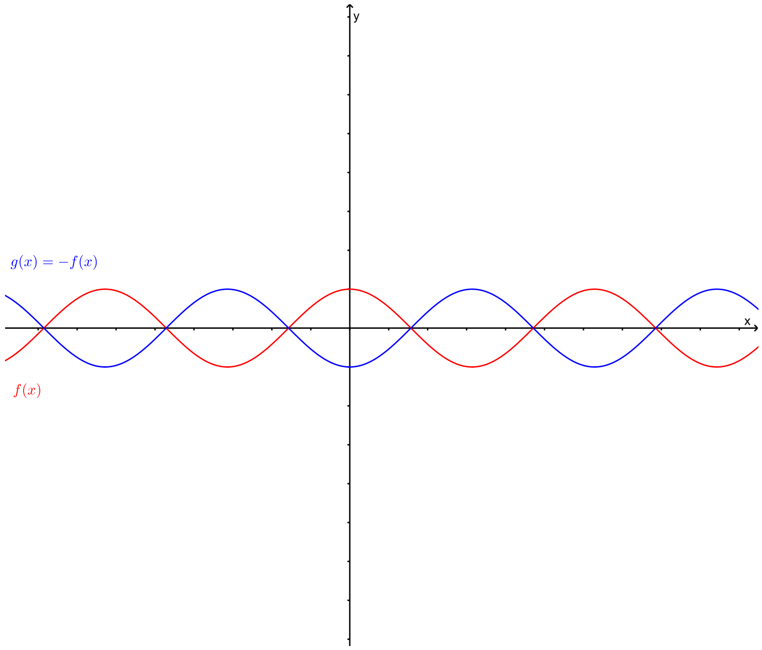


Figura 29: Exemplo de uma reflexão em torno do eixo x

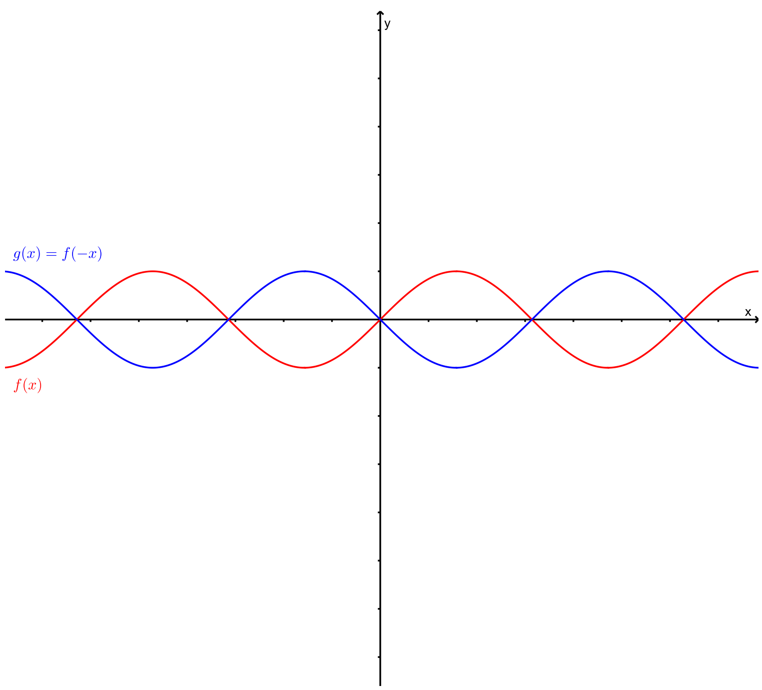


Figura 30: Exemplo de uma reflexão em torno do eixo y

Funções Exponenciais e Logarítmicas

Função exponencial de base a

Definição: Seja $a > 0$, $a \neq 1$. Definimos a função exponencial de base a por

$$f(x) = a^x.$$

OBS.: $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = (0, +\infty)$

Propriedades da função exponencial:

- $a^x\, a^t = a^{x+t}$.
- $(a^x)^t = (a^t)^x = a^{x\,t}$.
- $(a\,b)^x = a^x\, b^x$.
- $\dfrac{a^x}{a^t} = a^{x-t}$.
- $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$.
- Para $a > 1$ e $x < t$ temos que $a^x < a^t$ (f é **crescente** para $a > 1$).
- Para $0 < a < 1$ e $x < t$ temos que $a^x > a^t$ (f é **decrescente** para $0 < a < 1$).

OBS.: f é inversível.

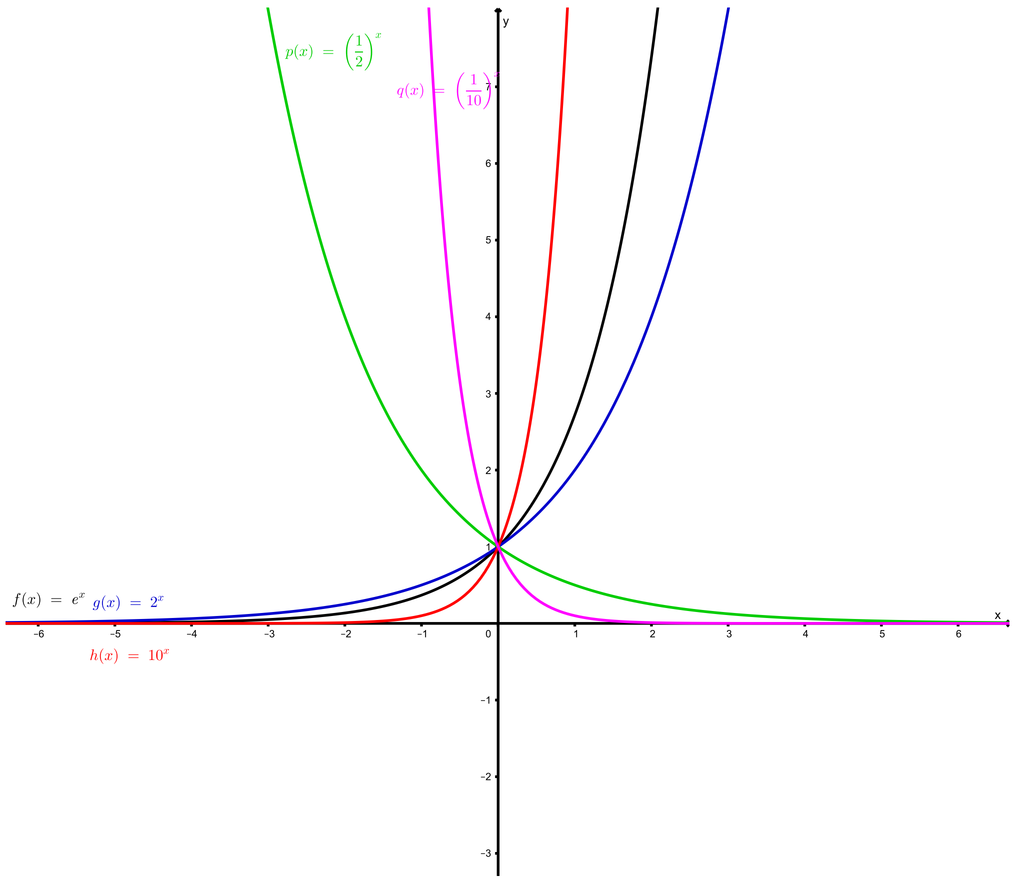


Figura 31: Gráfico de algumas funções exponenciais

Função logarítmo de base a

Definição: A função logarítmica de base a ($a > 0$ e $a \neq 1$), denotada por $g(x) = \log_a x$ (lê-se: logaritmo de x na base a, ou log de x na base a), é a função inversa da função exponencial de base a ($f(x) = a^x$).

OBS.: $Im(g) = \mathbb{R}$ e $D(g) = (0, +\infty)$.

OBS.: $a^{\log_a x} = x$ e $\log_a a^x = x$.

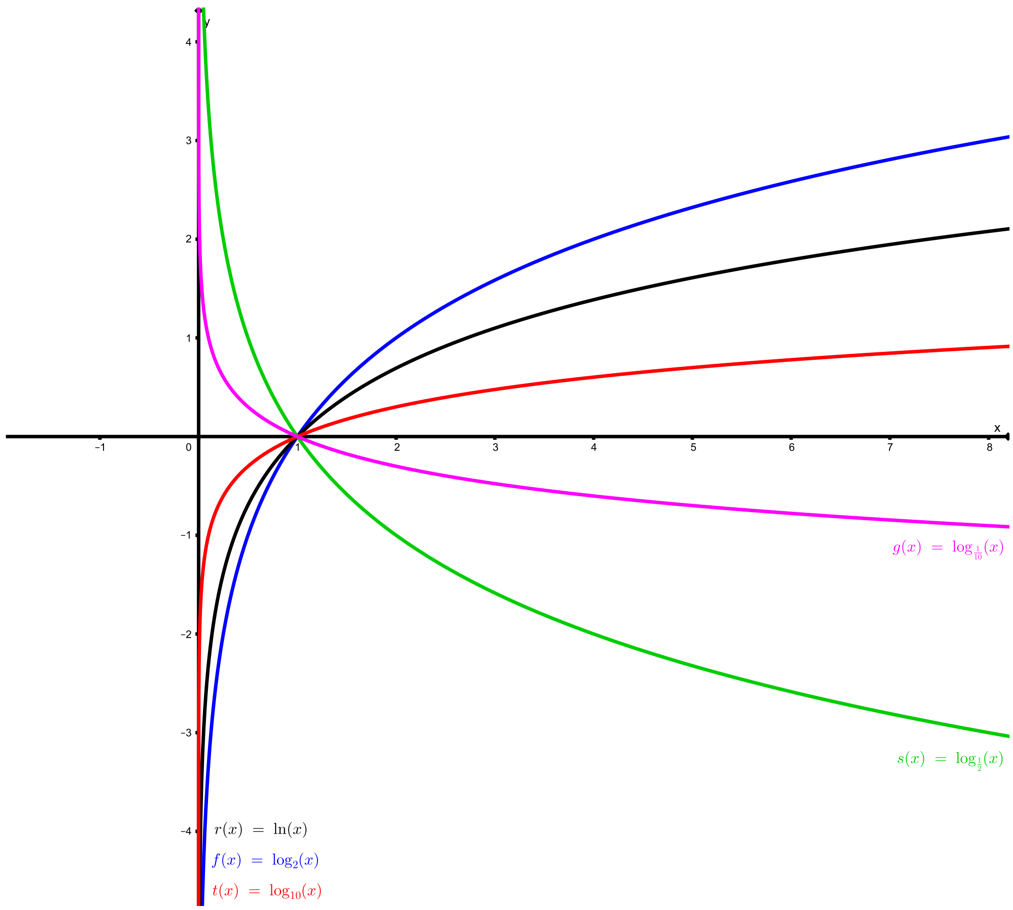


Figura 32: Gráfico de algumas funções logarítmicas

Propriedades da função logarítmica:

- $\log_a x + \log_a t = \log_a x\, t$.
- $\log_a \left(\dfrac{x}{t}\right) = \log_a x - \log_a t$.
- $\log_a x^t = t\, \log_a x$..
- Para $a > 1$ e $x < t$, temos que $\log_a x < \log_a t$ (g é **crescente** para $a > 1$).
- Para $0 < a < 1$ e $x < t$, temos que $\log_a x > \log_a t$ (g é **decrescente** para $0 < a < 1$).
- Mudança de Base $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ ($b > 0$ e $b \neq 1$)

Função exponencial e logarítmica

No Cálculo Diferencial e Integral podemos simplificar muitas contas quando escolhemos uma base cuja inclinação da reta tangente na origem é 1.

Definição: A função logarítmica natural é definida e denotada por

$$g(x) = \log_e x = \ln x$$

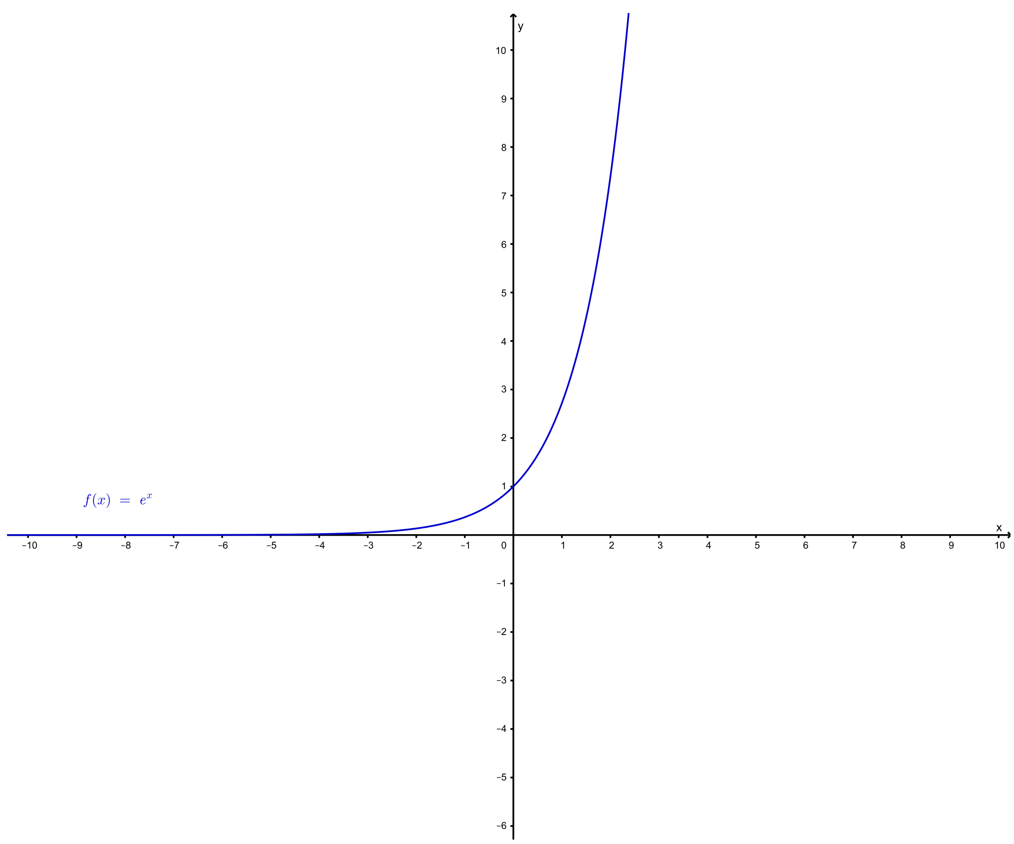
e a função exponencial natural é definida e denotada por

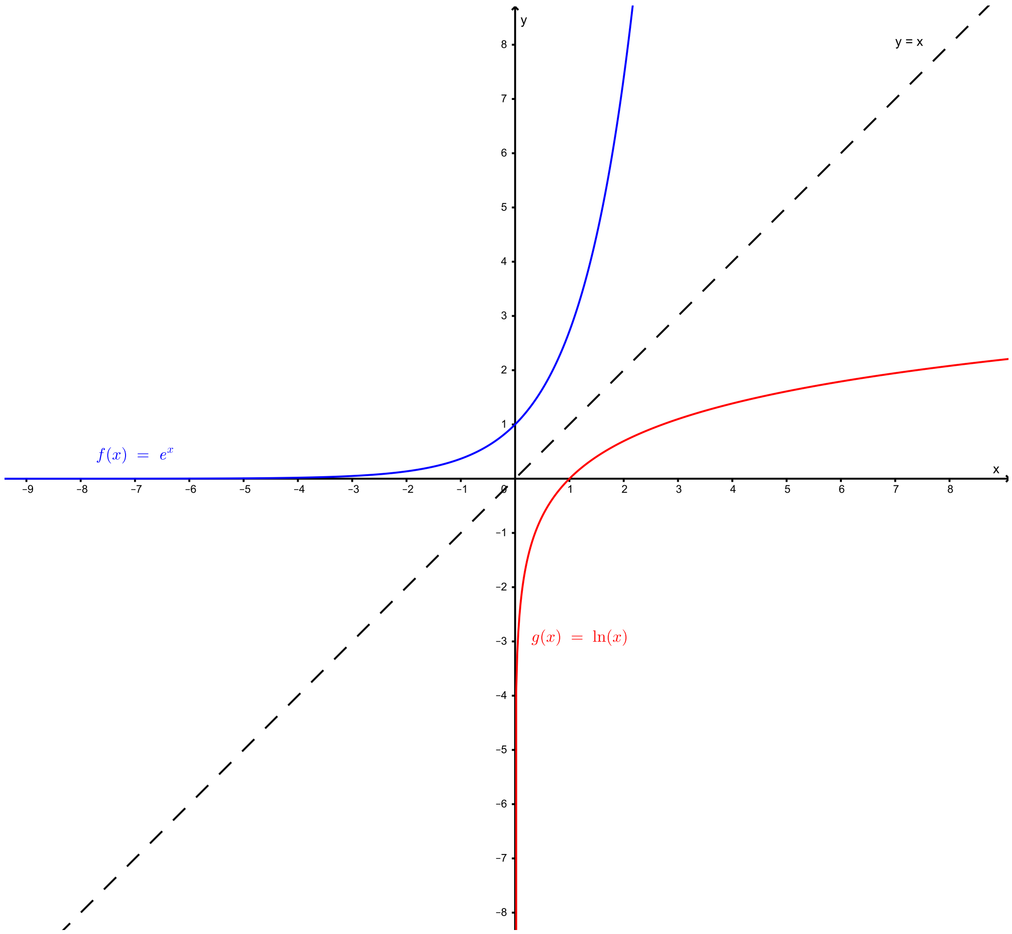
$$f(x) = e^x = \exp(x).$$

OBS.: É comum nos referirmos as funções exponencial natural e logarítmica natural simplesmente por exponencial e logarítmica, recpectivamente.

OBS.: $D(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = (0, +\infty)$, $D(g) = (0, +\infty)$ e $Im(g) = \mathbb{R}$.

OBS.: $e^{\ln x} = x$ e $\ln e^x = x$.





Propriedades:

- $e^x\, e^t = e^{x+t}$.
- $(e^x)^t = (e^t)^x = e^{x\,t}$.
- $\dfrac{e^x}{e^t} = e^{x-t}$.
- $\ln x + \ln t = \ln x\, t$.
- $\ln\left(\dfrac{x}{t}\right) = \ln x - \ln t$.
- $\ln x^t = t\, \ln x$.
- $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ $(a > 0 \text{ e } a \neq 1)$
- Para $x < t$ temos que $e^x < e^t$ (f é crescente).
- Para $x < t$, temos que $\ln x < \ln t$ (g é crescente).

Funções Trigonométricas

A trigonometria estabelece relações precisas entre os ângulos e os lados de um triângulo retângulo. Definiremos as relações trigonométricas básicas no triângulo retângulo e suas propriedades. Note que a noção de função trigonométrica será estudada posteriormente.

Medida angular

Ângulo é uma figura plana formada por duas semirretas de mesma origem. As semirretas são chamadas de lados do ângulo e o ponto de origem é chamado de vértice. Os ângulos serão medidos a partir de uma das semirretas retas, em sentido antihorário.

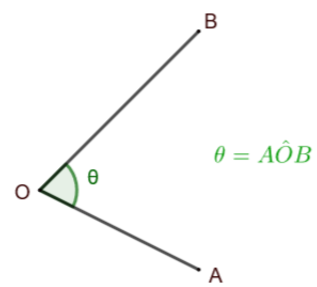


Figura 33: Ângulo

Assim como usamos uma unidade para medir comprimento, devemos usar uma unidade para medir ângulos. As unidades de medidas usuais para medir ângulos são graus e radianos.

Considere uma circunferência de raio r, isto é, de diâmetro $2\,r$, definimos:

- **Grau**

  1 grau (denotado por 1°): ângulo correspondente a $1/360$ de uma volta completa da circunferência, isto é, cada parte da circunferência é um arco de 1 grau. Assim, a volta completa na circunferência compreende um ângulo de 360 graus.

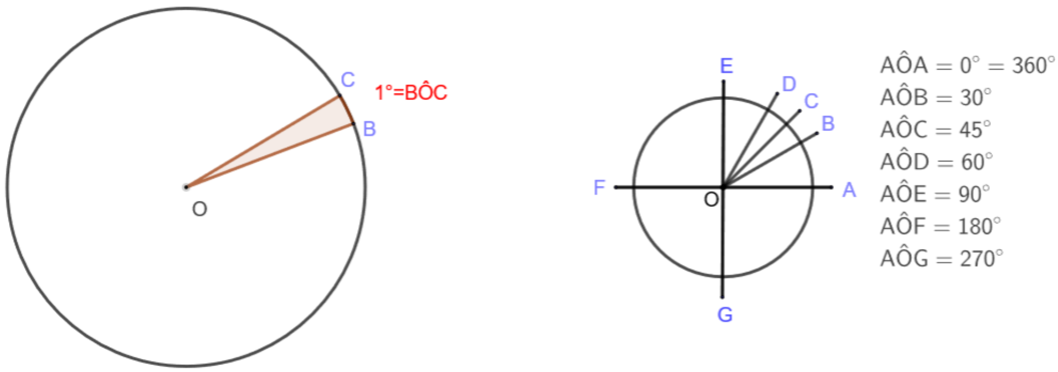


Figura 34: Medida angular em graus

- **Radiano**

  1 radiano (denotado por 1 rad): ângulo correspondente a um arco de comprimento igual ao raio da circunferência, isto é, um arco de comprimento r.

  Assim, temos que θ rad equivale a um arco de comprimento $r\,\theta$.

  Por definição, o número real π é a razão do comprimento da circunferência e seu diâmetro. Assim, tomando por S o comprimento da circunferência temos que

$$\pi = \frac{S}{2\,r} \Rightarrow S = 2\,\pi\,r$$

  Portanto, a volta completa na circunferência corresponde a $2\,\pi$ rad, pois:

$$\frac{1\,rad}{r} = \frac{\theta\,rad}{S} \Rightarrow \frac{1\,rad}{r} = \frac{\theta\,rad}{2\,\pi r} \Rightarrow \theta = 2\,\pi$$

OBS.: Dado um ângulo α em graus e β sua medida em radianos, usando uma regra de três simples, obtemos:

$$\frac{\pi\,(rad)}{180\,(graus)} = \frac{\beta\,(rad)}{\alpha\,(graus)} \Rightarrow \beta = \frac{\alpha\,\pi}{180}\,(rad)$$

$$\frac{\pi\,(rad)}{180\,(graus)} = \frac{\beta\,(rad)}{\alpha\,(graus)} \Rightarrow \alpha = \frac{\beta\,180}{\pi}\,(graus)$$

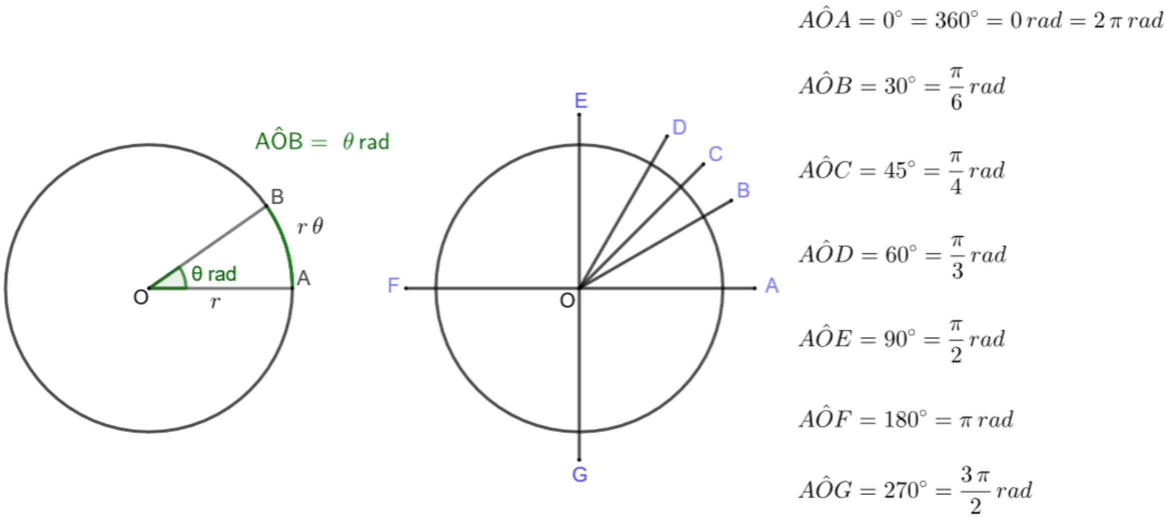


Figura 35: Medida angular em radianos

Algumas definições relacionadas ao ângulo:

- ângulo raso: ângulo de medida 180º.
- ângulo reto: ângulo de medida 90º.
- ângulo agudo: ângulo cuja medida está entre 0º e 90º.
- ângulo obtuso: ângulo cuja medida está entre 90º e 180º.
- ângulos congruentes: ângulo que possuem a mesma medida.
- ângulos complementares: par de ângulos cuja soma das medidas é 90º.
- ângulo suplementares: par de ângulo cuja soma das medidas é 180º.

Relações trigonométricas elementares e o Teorema de Pitágoras

Sabemos que um triângulo é um polígono com 3 lados e, portanto, 3 ângulos internos (cuja soma deve ser 180°). O triângulo pode ser classificado de acordo com a medida dos seus lados (equilátero, isósceles, escaleno) e também com relação à medida dos seus ângulos internos (acutângulo, retângulo e obtusângulo).

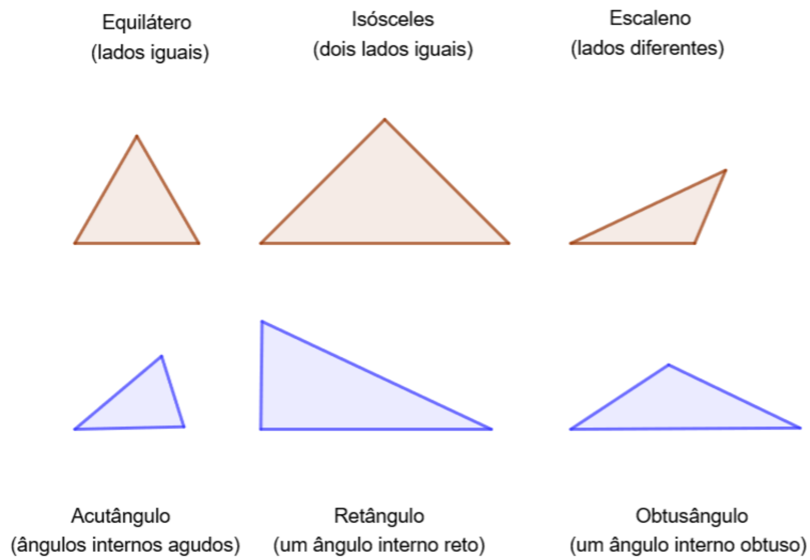


Figura 36: Classificação do triângulo com relação à medida dos lados e dos ângulos

As relações trigonométricas mais importantes são denominadas seno e cosseno. Elas estabelecem uma relação entre as medidas dos lados de um triângulo **retângulo** com um ângulo de referência.

Considere então um triângulo retângulo. Chamaremos de θ o ângulo de referência. O lado oposto ao ângulo de 90º é chamado de **hipotenusa** e os outros dois lados de **catetos**. O cateto que fica em frente ao ângulo de referência θ é chamado de **cateto oposto** enquanto o outro é chamado de **cateto adjacente**. Vamos denominar o comprimento da hipotenusa de a, o comprimento do cateto oposto de b e do cateto adjacente de c.

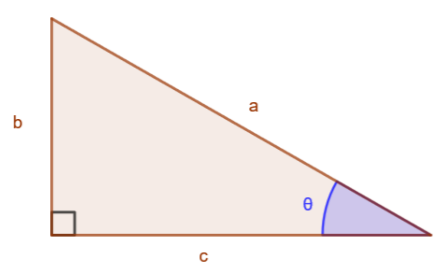


Figura 37: Triângulo retângulo

Teorema de Pitágoras

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Razões Trigonométricas

Para cada ângulo agudo θ no triângulo retângulo podemos definir as seguintes razões trigonométricas:

$$\operatorname{sen}\theta = \sin\theta = \frac{b}{a} \quad \rightarrow \quad \textbf{seno} \text{ do ângulo } \theta$$

$$\cos\theta = \frac{c}{a} \quad \rightarrow \quad \textbf{cosseno} \text{ do ângulo } \theta$$

Também podemos definir as outras razões trigonométricas:

$$\operatorname{tg}\theta = \tan\theta = \frac{b}{c} \quad \rightarrow \quad \textbf{tangente} \text{ do ângulo } \theta$$

$$\operatorname{cotg}\theta = \cot\theta = \frac{c}{b} \quad \rightarrow \quad \textbf{cotangente} \text{ do ângulo } \theta$$

$$\operatorname{cossec}\theta = \csc\theta = \frac{a}{b} \quad \rightarrow \quad \textbf{cossecante} \text{ do ângulo } \theta$$

$$\sec\theta = \frac{a}{c} \quad \rightarrow \quad \textbf{secante} \text{ do ângulo } \theta$$

OBS.: Os ângulos de 30º, 45º e 60º são considerados notáveis e de fácil determinação (veja tabela abaixo).

θ	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\operatorname{sen}\theta$	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
$\cos\theta$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
$\tan\theta$	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$
$\cot\theta$	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$
$\sec\theta$	$2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{2}$	2
$\csc\theta$	2	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}/3$

Círculo Trigonométrico

Considere a circunferência unitária (raio 1) centrada na origem do sistemas de eixos coordenados no plano cartesiano (chamado círculo trigonométrico). Note que os eixos coordenados dividem o círculo trigonométrico em 4 quadrantes. Considere $P = (a, b)$ um ponto qualquer desse círculo e θ o ângulo correspondente com vértice na origem medido no sentido anti-horário a partir do eixo das abscissas (eixo x).

OBS.: Um ângulo negativo será medido no sentido horário. Portanto, $-\theta$ é o ângulo correspondente a θ medido no sentido horário a partir do eixo das abscissas.

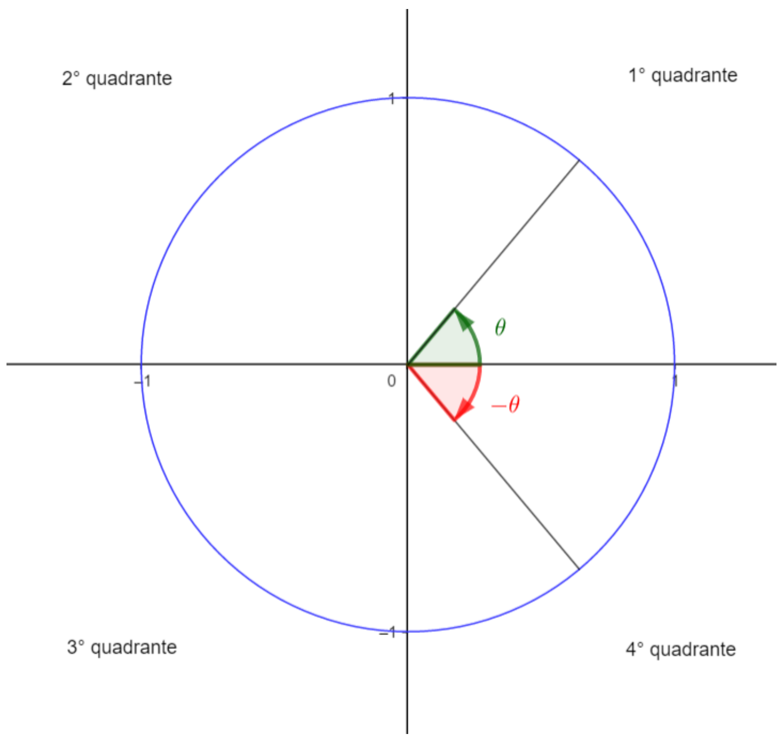


Figura 38: Os quatro quadrantes e a medida angular nos sentidos horário e anti horário

Verificaremos as relações trigonométricas tomando P em cada um dos quadrantes:

- **Primeiro Quadrante**

  Considere $P = (a, b)$ no primeiro quadrante, portanto θ é um ângulo agudo $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

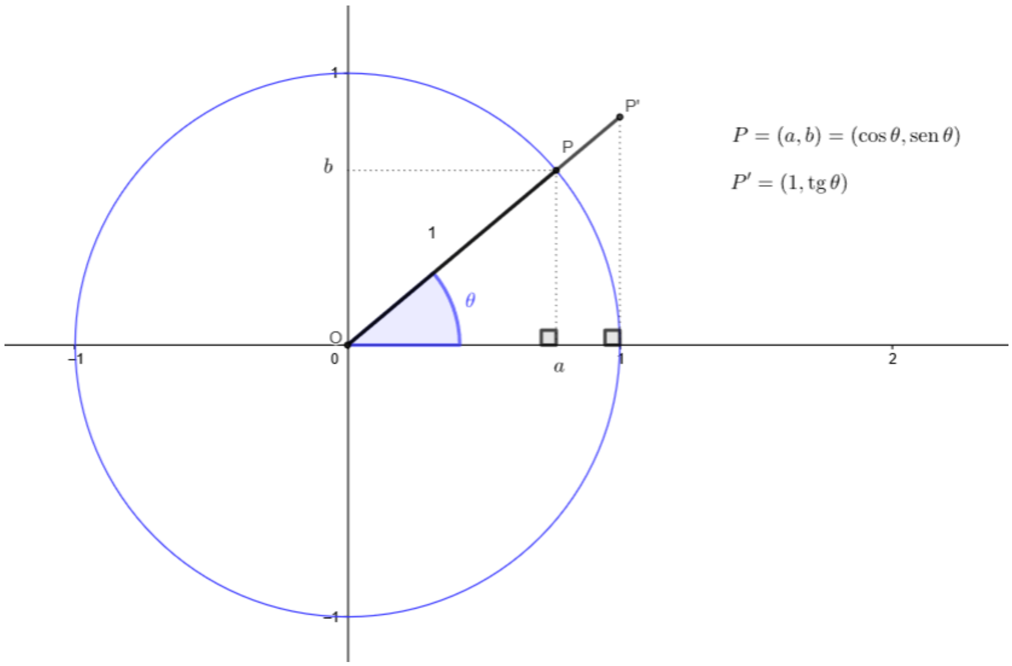


Figura 39: As relações trigonométricas no 1° quadrante

Temos que:

$$\operatorname{sen}\theta = b \quad \cos\theta = a \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a}$$

- **Segundo Quadrante:**

  Considere $P = (a, b)$ no segundo quadrante, isto é, θ é um ângulo obtuso $\left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$. Pela congruência dos triângulos da figura abaixo:

$$\operatorname{sen}(\pi - \theta) = b = \operatorname{sen}\theta$$

$$-\cos(\pi - \theta) = -(-a) = a = \cos\theta$$

  Logo,

$$\operatorname{sen}\theta = b, \quad \cos\theta = a \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a}$$

  Observe também que podemos determinar a tangente do ângulo θ no círculo trigonométrico por semelhança de triângulo.

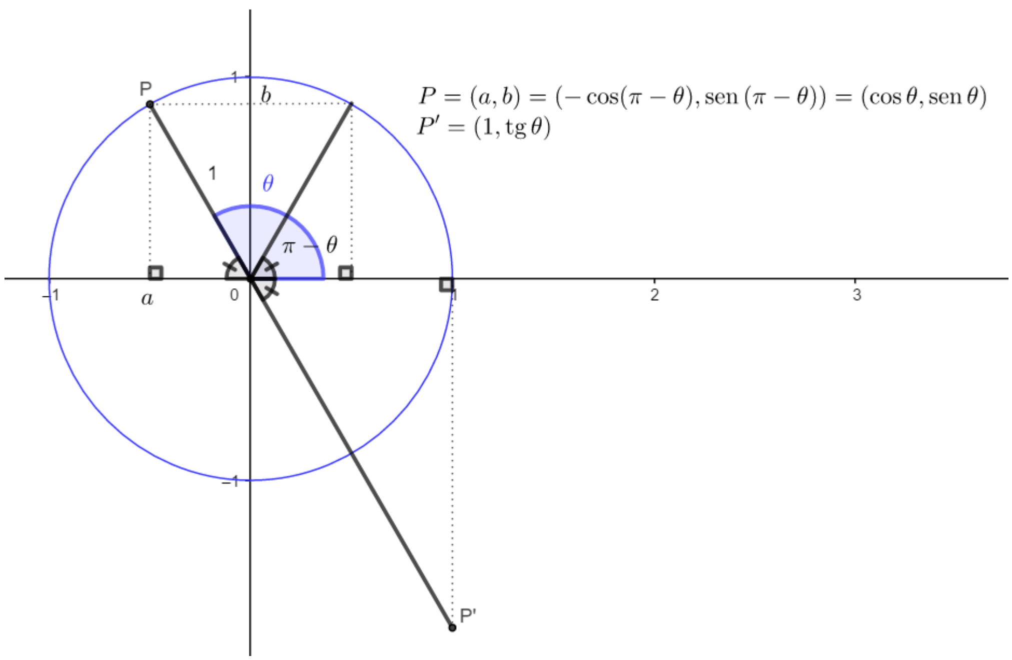


Figura 40: As relações trigonométricas no 2° quadrante

  Consequentemente:

$$\operatorname{tg}\theta = -\operatorname{tg}(\pi - \theta)$$

$$\operatorname{cotg}\theta = -\operatorname{cotg}(\pi - \theta)$$

$$\operatorname{cossec}\theta = \operatorname{cossec}(\pi - \theta)$$

$$\sec\theta = -\sec(\pi - \theta)$$

- Terceiro Quadrante

  Considere $P = (a, b)$ no terceiro quadrante, isto é, $\pi < \theta < \dfrac{3\,\pi}{2}$.
  Pela congruência dos triângulos da figura abaixo:

  $$-\operatorname{sen}(\theta - \pi) = -(-b) = b = \operatorname{sen}\theta$$

  $$-\cos(\theta - \pi) = -(-a) = a = \cos\theta$$

  Logo,

  $$\operatorname{sen}\theta = b, \quad \cos\theta = a \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a}$$

  Observe também que podemos determinar a tangente do ângulo θ no círculo trigonométrico por semelhança de triângulo.

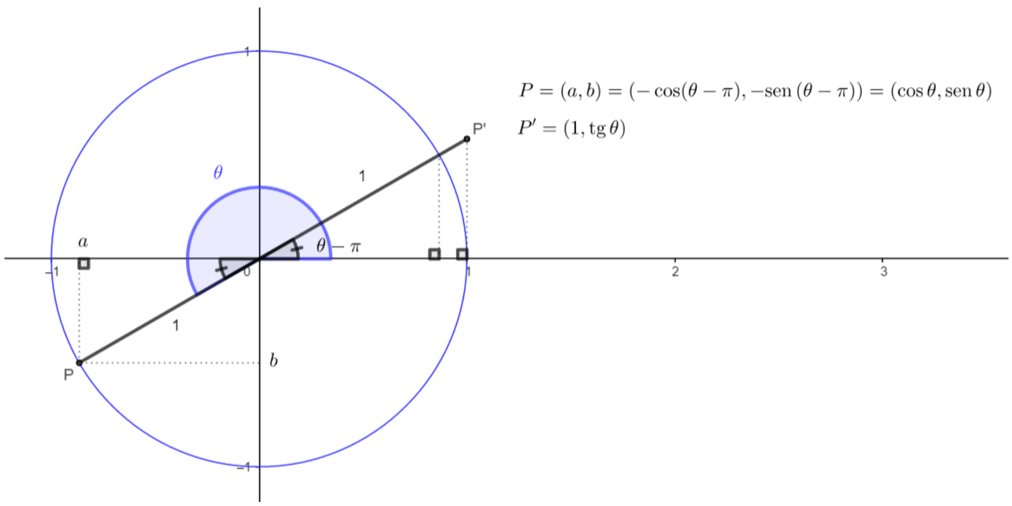


Figura 41: As relações trigonométricas no 3° quadrante

  Consequentemente:

  $$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\theta - \pi)$$

  $$\operatorname{cotg}\theta = \operatorname{cotg}(\theta - \pi)$$

  $$\operatorname{cossec}\theta = -\operatorname{cossec}(\theta - \pi)$$

  $$\sec\theta = -\sec(\theta - \pi)$$

- Quarto quadrante

  Considere $P = (a, b)$ no quarto quadrante, isto é, $\dfrac{3\,\pi}{2} < \theta < 2\,\pi$.
  Pela congruência dos triângulos da figura abaixo:

$$-\mathrm{sen}\,(2\,\pi - \theta) = -(-b) = b = \mathrm{sen}\,\theta$$

$$\cos(2\,\pi - \theta) = a = \cos\theta$$

  Logo,

$$\mathrm{sen}\,\theta = b, \quad \cos\theta = a \quad \text{e} \quad \mathrm{tg}\,\theta = \frac{b}{a}$$

  Observe também que podemos determinar a tangente do ângulo θ no círculo trigonométrico por semelhança de triângulo.

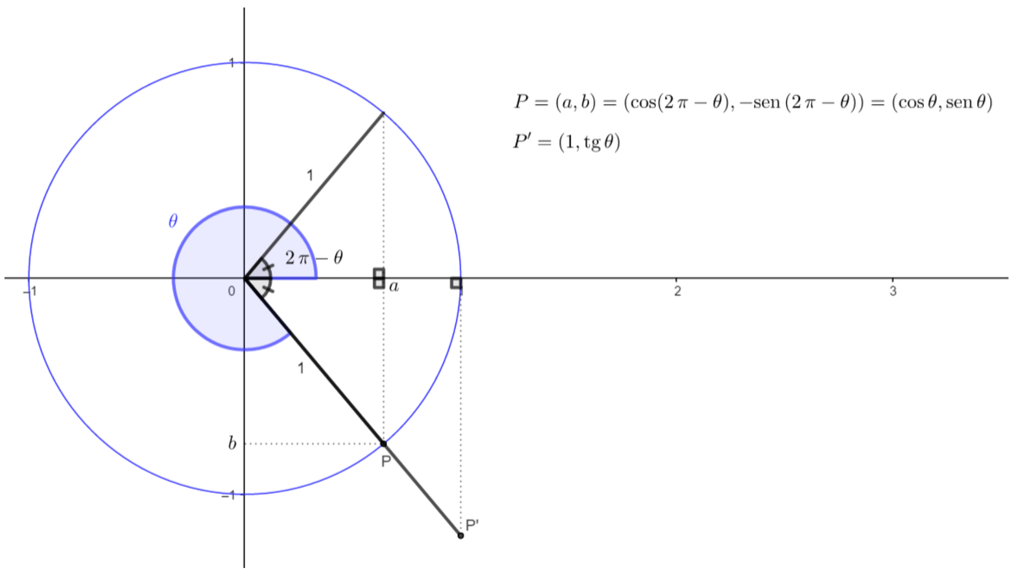


Figura 42: As relações trigonométricas no 4° quadrante

  Conseguentemente:

$$\mathrm{tg}\,\theta = -\mathrm{tg}\,(2\,\pi - \theta)$$

$$\mathrm{cotg}\,\theta = -\mathrm{cotg}\,(2\,\pi - \theta)$$

$$\mathrm{cossec}\,\theta = -\mathrm{cossec}\,(2\,\pi - \theta)$$

$$\sec\theta = \sec(2\,\pi - \theta)$$

OBS.: Os ângulos 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\,\pi}{2}$ e $2\,\pi$ são triviais e podem ser verificados pelo leitor.

OBS.: Acabamos de ver que para obter o seno ou o cosseno de um determinado ângulo no círculo trigonométrico basta determinar as projeções do ponto P sobre os eixo coordenados y e x respectivamente.

OBS.: Em todos os casos acima vimos que podemos determinar a tangente do ângulo θ no círculo trigonométrico por semelhança de triângulo. Também podemos determinar a cotangente, a secante e a cossecante dessa forma. Segue abaixo como fazer para θ no primeiro quadrante:

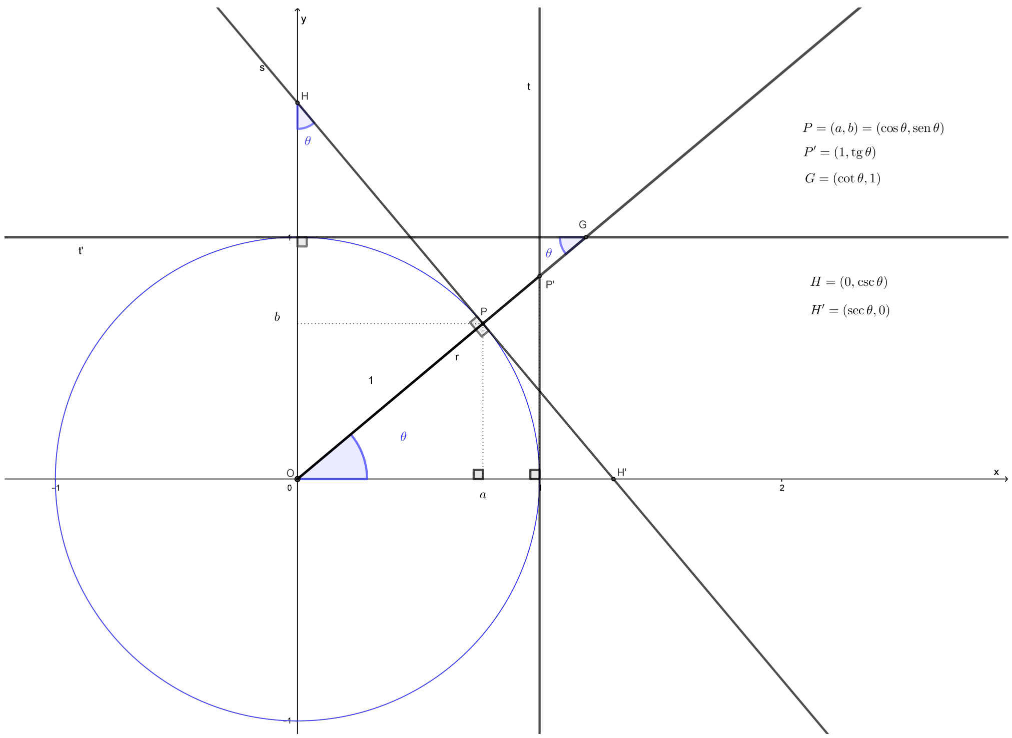


Figura 43: Determinação da tangente e da cotangente

Na figura, r é a semireta com origem no centro do círculo que passa por P, t é a reta tangente ao círculo passando por $(1, 0)$ (paralela ao eixo vertical), t' é a reta tangente ao círculo passando por $(0, 1)$ (paralela ao eixo horizontal) e s é a reta tangente ao círculo passando por P.

Assim, o valor da cossecante é o segmento que liga o centro da círculo ao ponto em que a reta tangente s toca o eixo vertical. Observe que existem três ângulos, 0, π e $2\,\pi$ em que não existe cossecante definida, pois a reta tangente s não toca o eixo vertical.

A secante de θ é definida pelo segmento que liga o centro até o ponto em que a reta s intercepta o eixo horizontal. Observe que não existe secante para os ângulos de $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\,\pi}{2}$, pois a reta s não toca o eixo horizontal.

A cotangente é determinada através do ponto G que é a interseção da reta t' com a semireta r. A cotangente não existe para ângulos 0, π e $2\,\pi$, pois nesses ângulos a semirreta será paralela a t', logo, não a interseção entre elas.

Círculo Trigonométrico

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\,\pi/2$	$2\,\pi$
$\operatorname{sen}\theta$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1

θ no 1°quadrante	$\operatorname{sen}\theta > 0$	$\cos\theta > 0$
θ no 2°quadrante	$\operatorname{sen}\theta > 0$	$\cos\theta < 0$
θ no 3°quadrante	$\operatorname{sen}\theta < 0$	$\cos\theta < 0$
θ no 4°quadrante	$\operatorname{sen}\theta < 0$	$\cos\theta > 0$

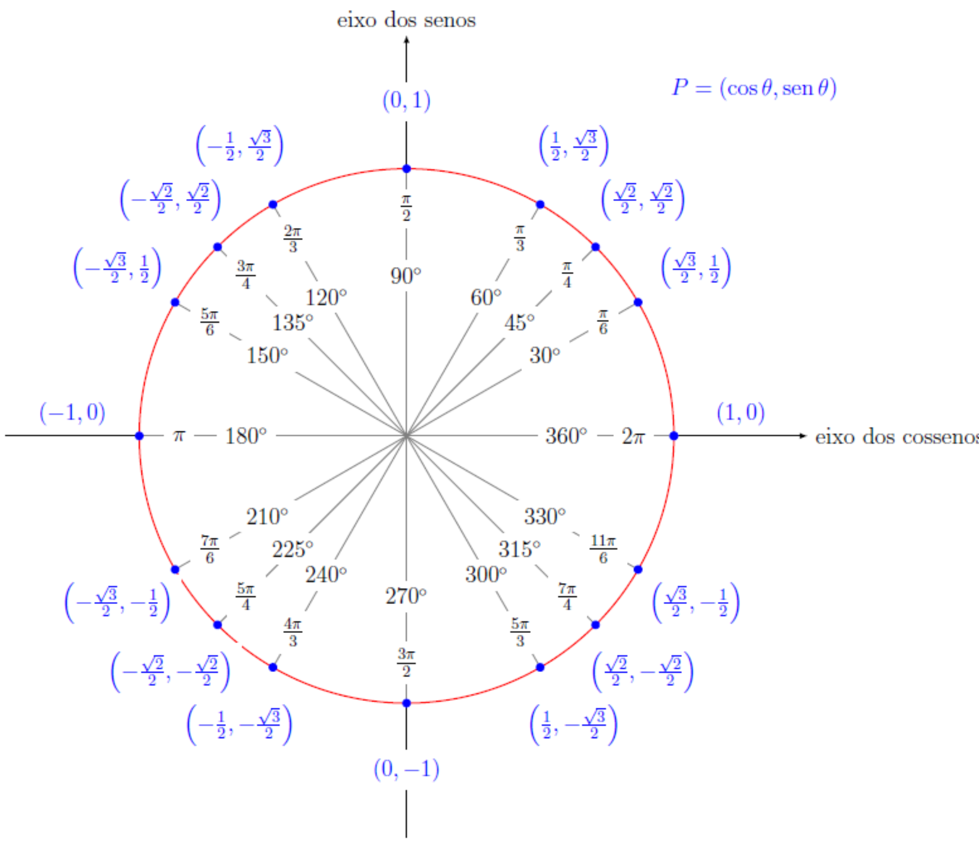


Figura 44: Círculo Trigonométrico Fundamental: seno e cosseno

Código latex: https://texample.net/tikz/examples/unit-circle/ (14/07/2021)

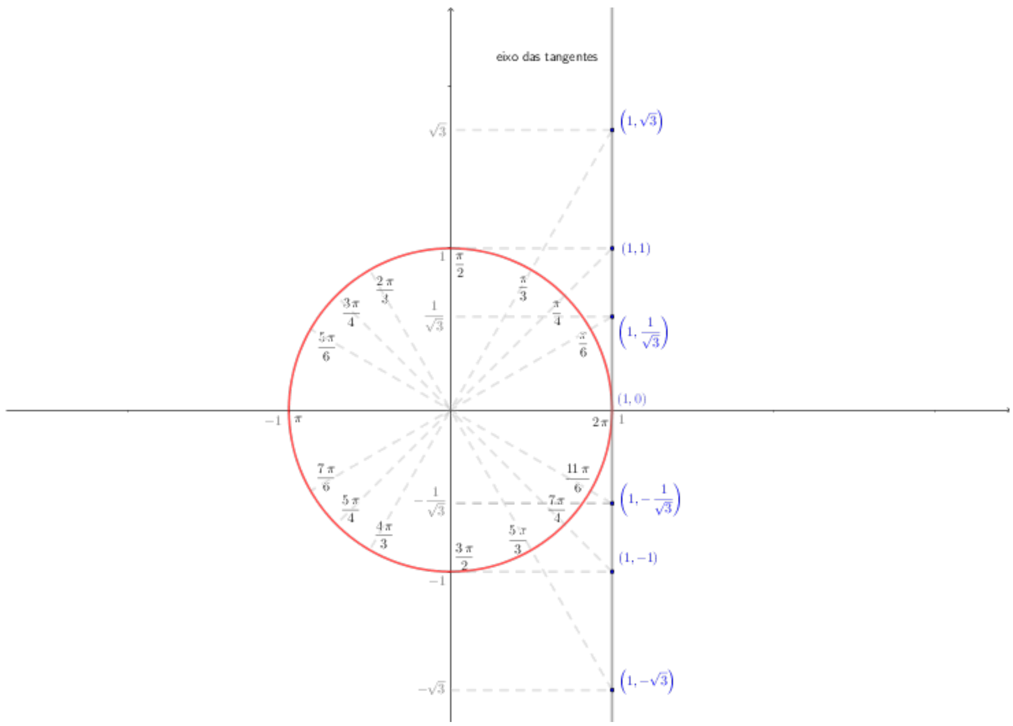


Figura 45: Círculo Trigonométrico Fundamental: tangente

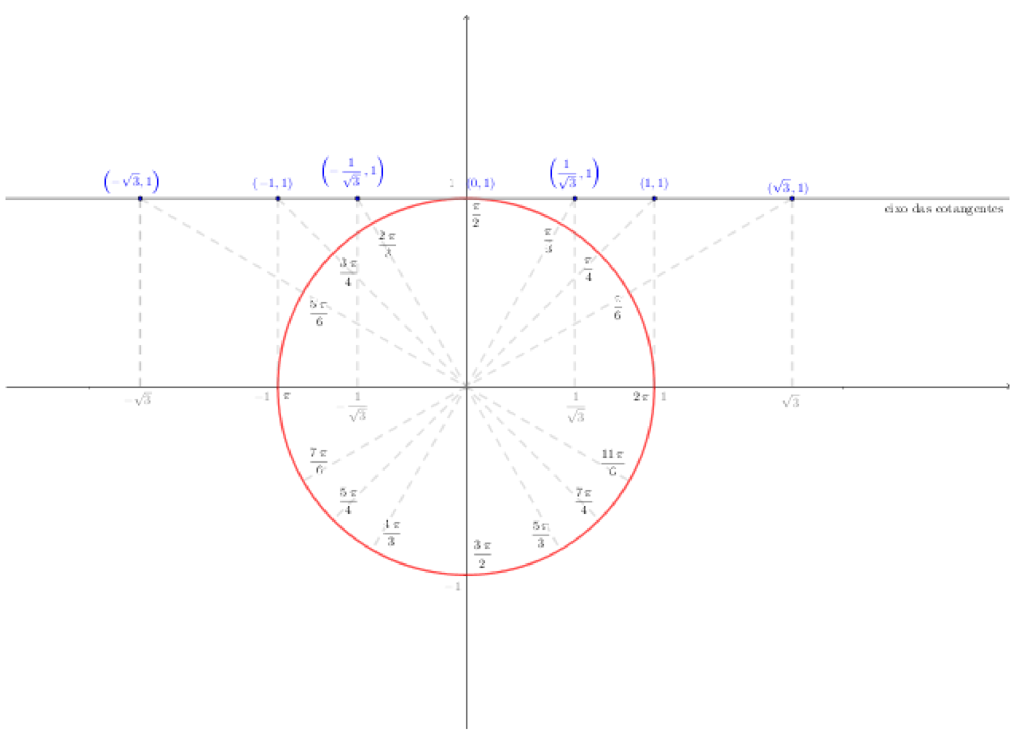


Figura 46: Círculo Trigonométrico Fundamental: cotangente

Identidades Trigonométricas

As identidades trigonométricas mais importantes são:

- $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$ (Identidade Fundamental)
- $\text{tg}^2\theta + 1 = \sec^2\theta$
- $\text{cotg}^2\theta + 1 = \text{cossec}^2\theta$
- $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$
- $\text{sen}^2\theta = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$
- $\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$
- $\text{sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}\,\alpha\,\cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$
- $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$
- $\text{sen}\,\alpha\,\cos\beta = \dfrac{\text{sen}(\alpha+\beta)+\text{sen}(\alpha-\beta)}{2}$
- $\cos\alpha\,\cos\beta = \dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$
- $\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta = \dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$
- $\text{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\text{tg}\,\alpha+\text{tg}\,\beta}{1-\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta}$
- $\text{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\text{tg}\,\alpha-\text{tg}\,\beta}{1+\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta}$

Funções Trigonométricas

Para estudar as funções trigonométricas usaremos o ciclo trigonométrico fundamental para o ângulo variável $\theta = x$.

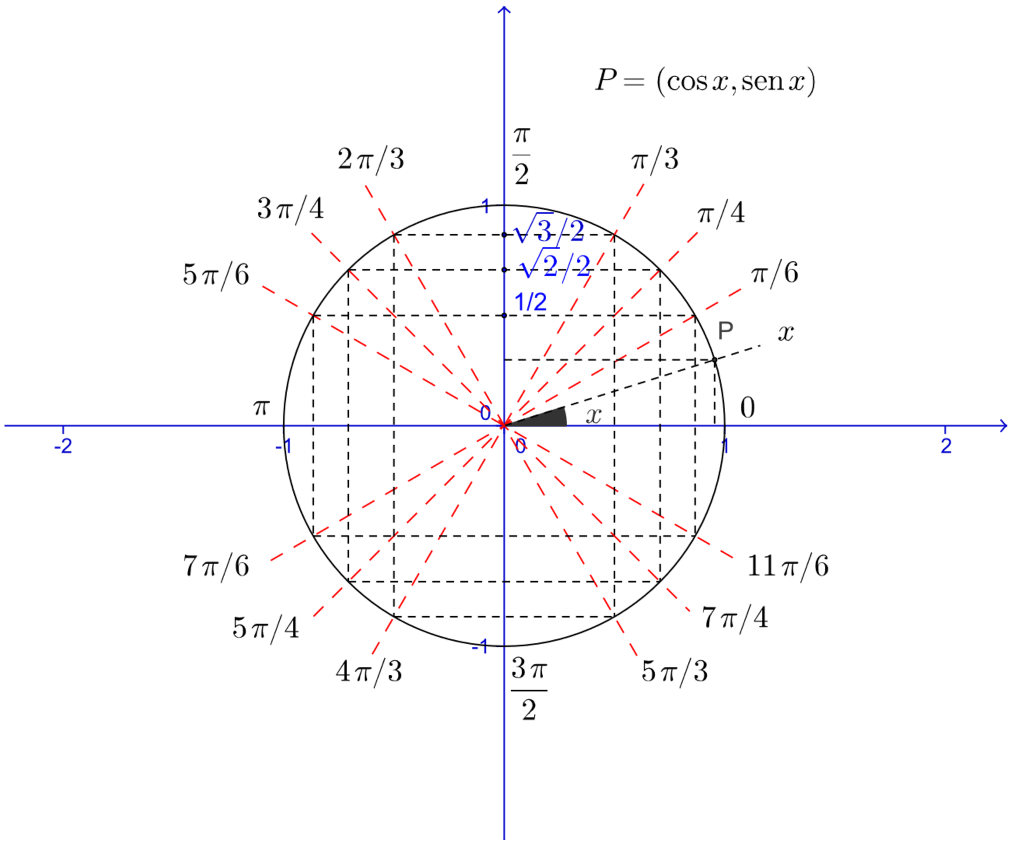


Figura 47: Ciclo Trigonométrico Fundamental

Definiremos a seguir as funções trigonométricas.

Funções seno e cosseno - gráficos e propriedades

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\,\pi/2$	$2\,\pi$
$\operatorname{sen} x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1

- $f(x) = \operatorname{sen} x = \sin x$

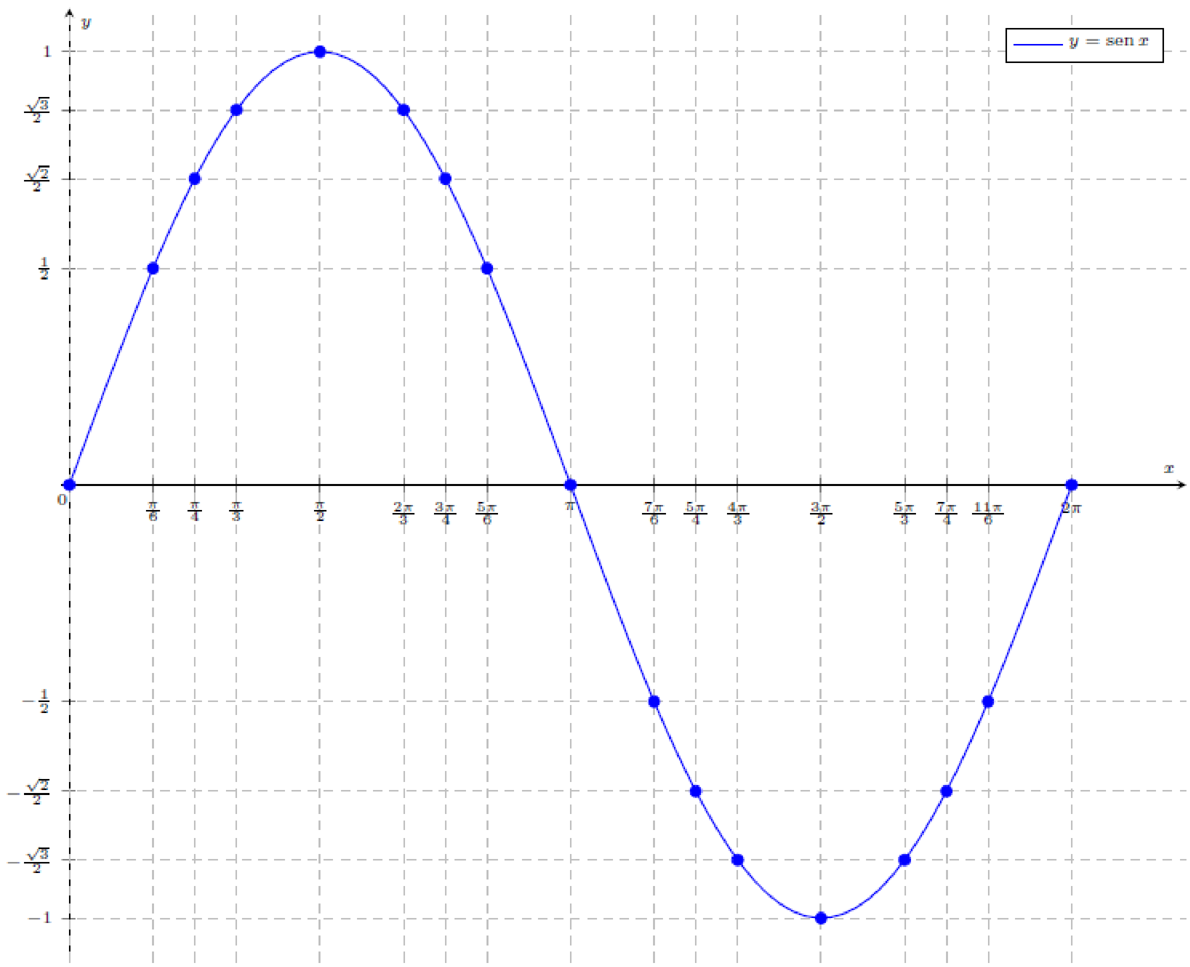


Figura 48: Gráfico da função seno no intervalo $[0, 2\,\pi]$

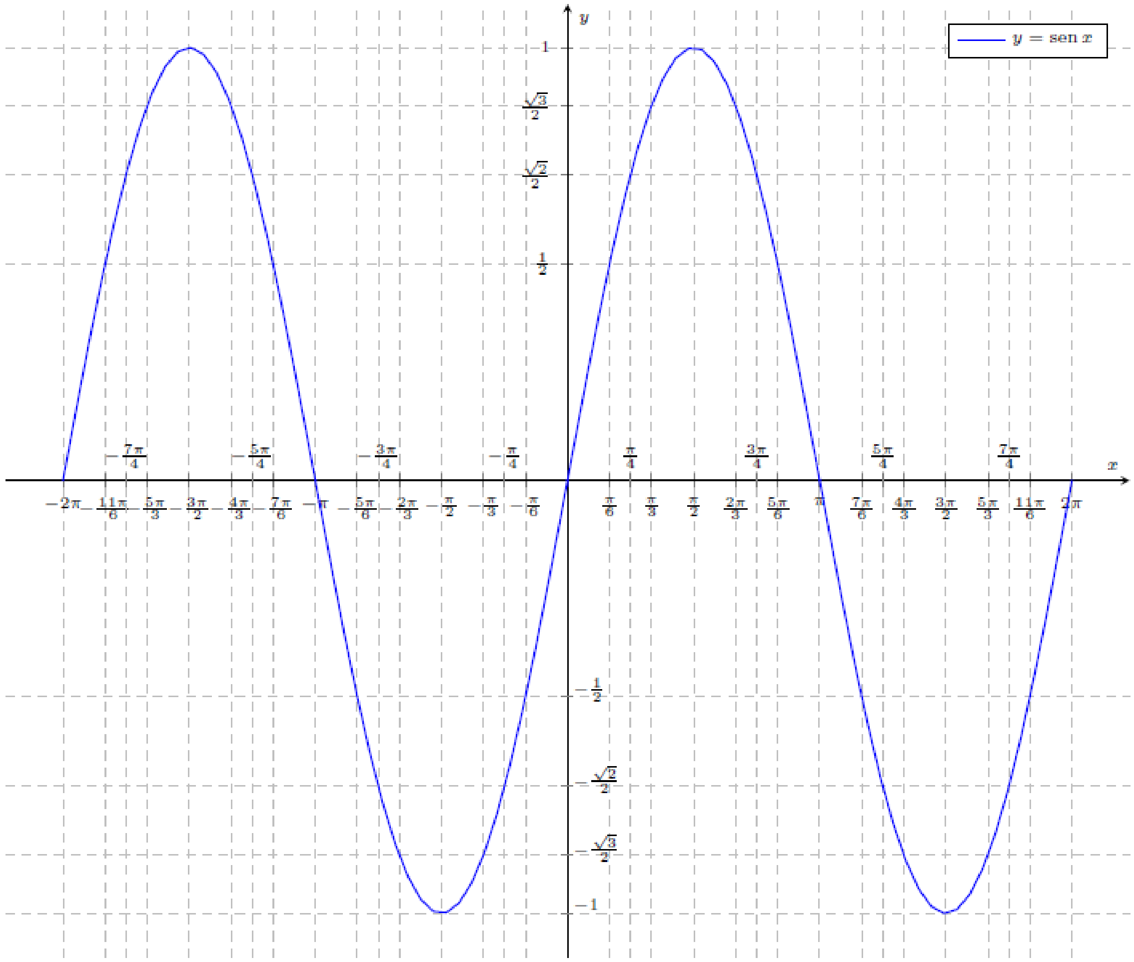


Figura 49: Gráfico da função seno: senóide

- $f(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

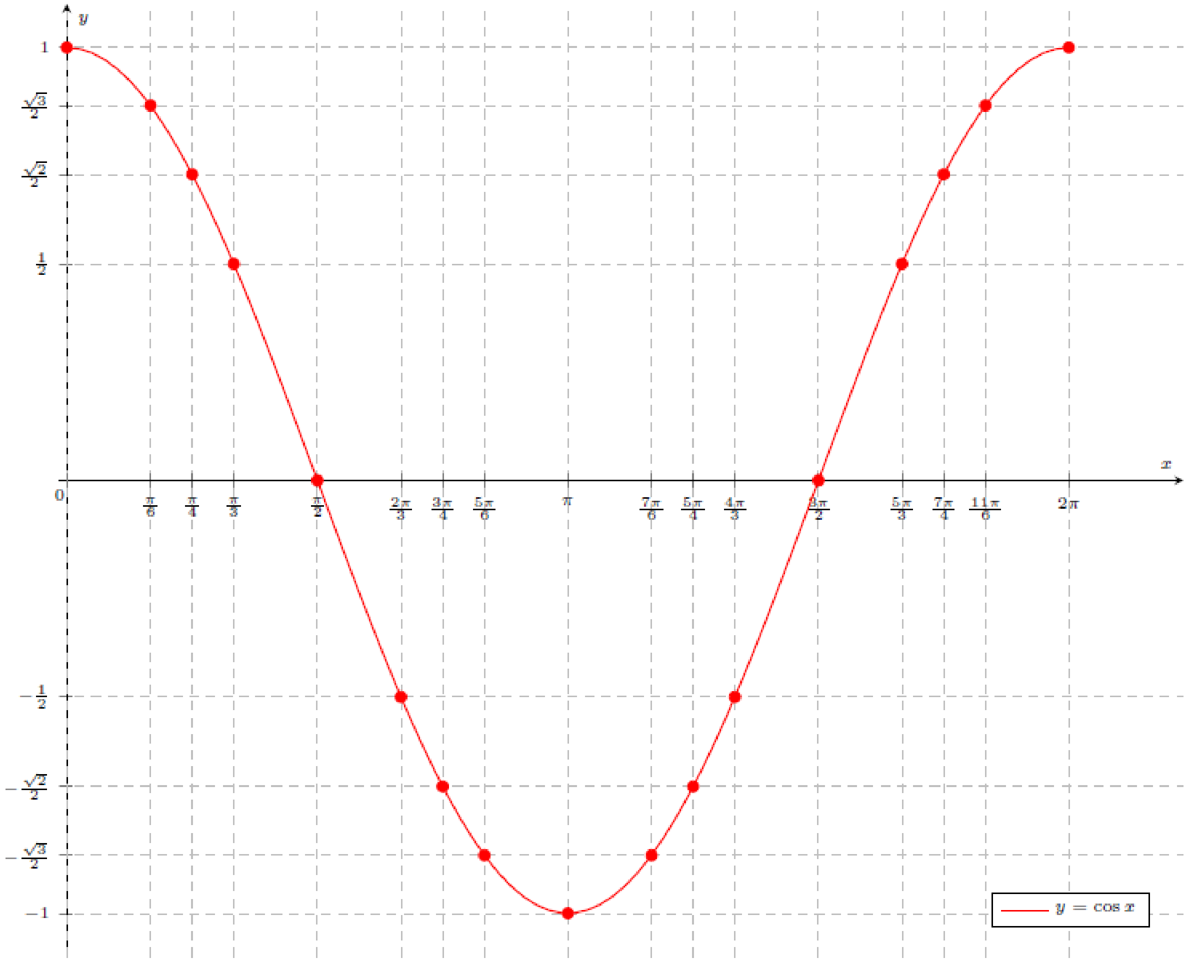


Figura 50: Gráfico da função cosseno no intervalo $[0, 2\,\pi]$

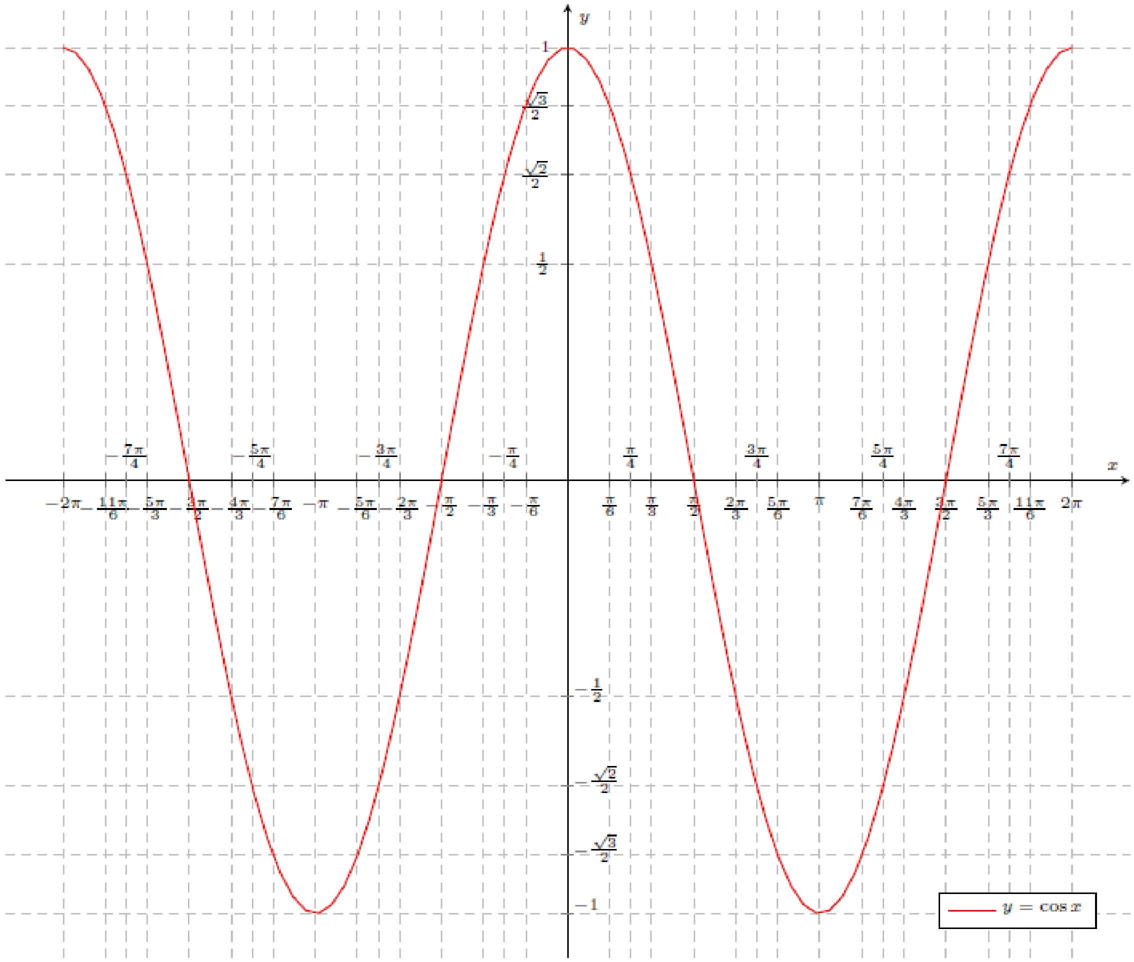


Figura 51: Gráfico da função cosseno

OBS.: As funções seno e cosseno tem como domínio $D_f = \mathbb{R}$ e como imagem $Im_f = [-1, 1]$.

OBS.: $\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow x = k\,\pi$ e $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

OBS.: As funções seno e cosseno são limitadas.

$$|f(x)| \leq 1, \forall x$$

OBS.: As funções seno e cosseno são periódicas de período $2\,\pi$.

$$f(x + 2\,\pi) = f(x), \quad \forall x$$

OBS.: A função seno é ímpar e a função cosseno é par.

Funções tangente e cotangente - gráficos e propriedades

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\,\pi/2$	$2\,\pi$
$\operatorname{tg} x$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$	0
$\operatorname{cotg} x$	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0	$\nexists$	0	$\nexists$

- $f(x) = \operatorname{tg} x = \tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

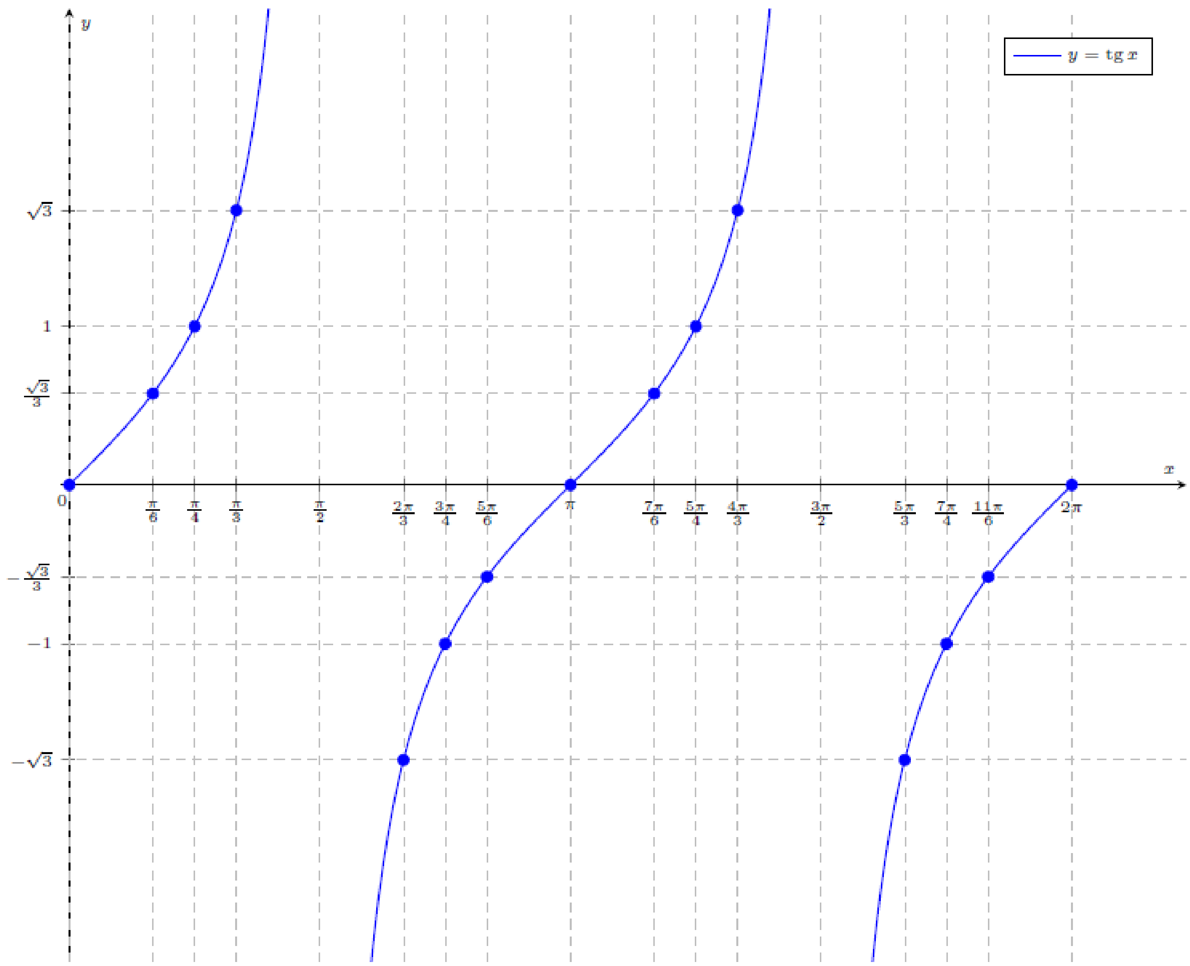


Figura 52: Gráfico da função tangente em $[0, 2\,\pi/2] \cap D_f$

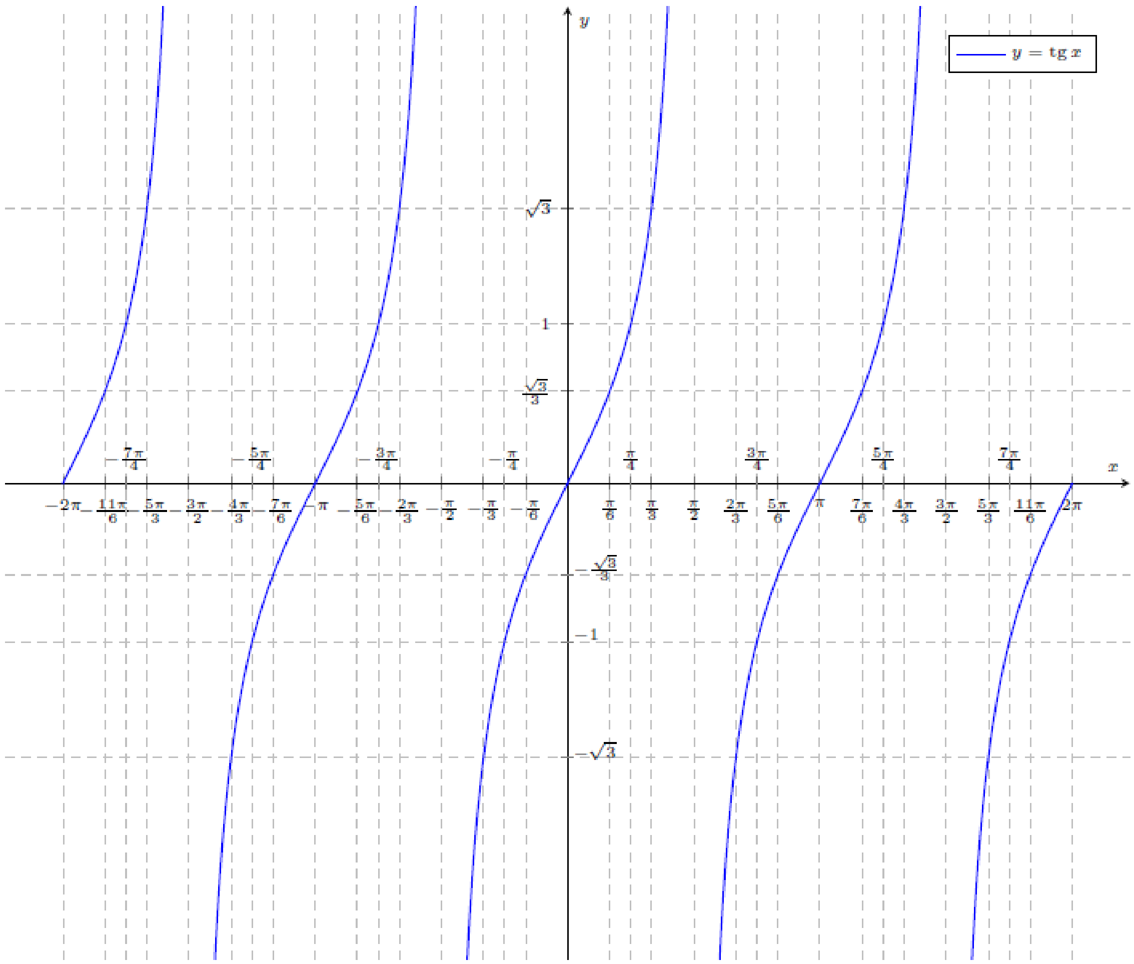


Figura 53: Gráfico da função tangente

- $g(x) = \operatorname{cotg} x = \cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

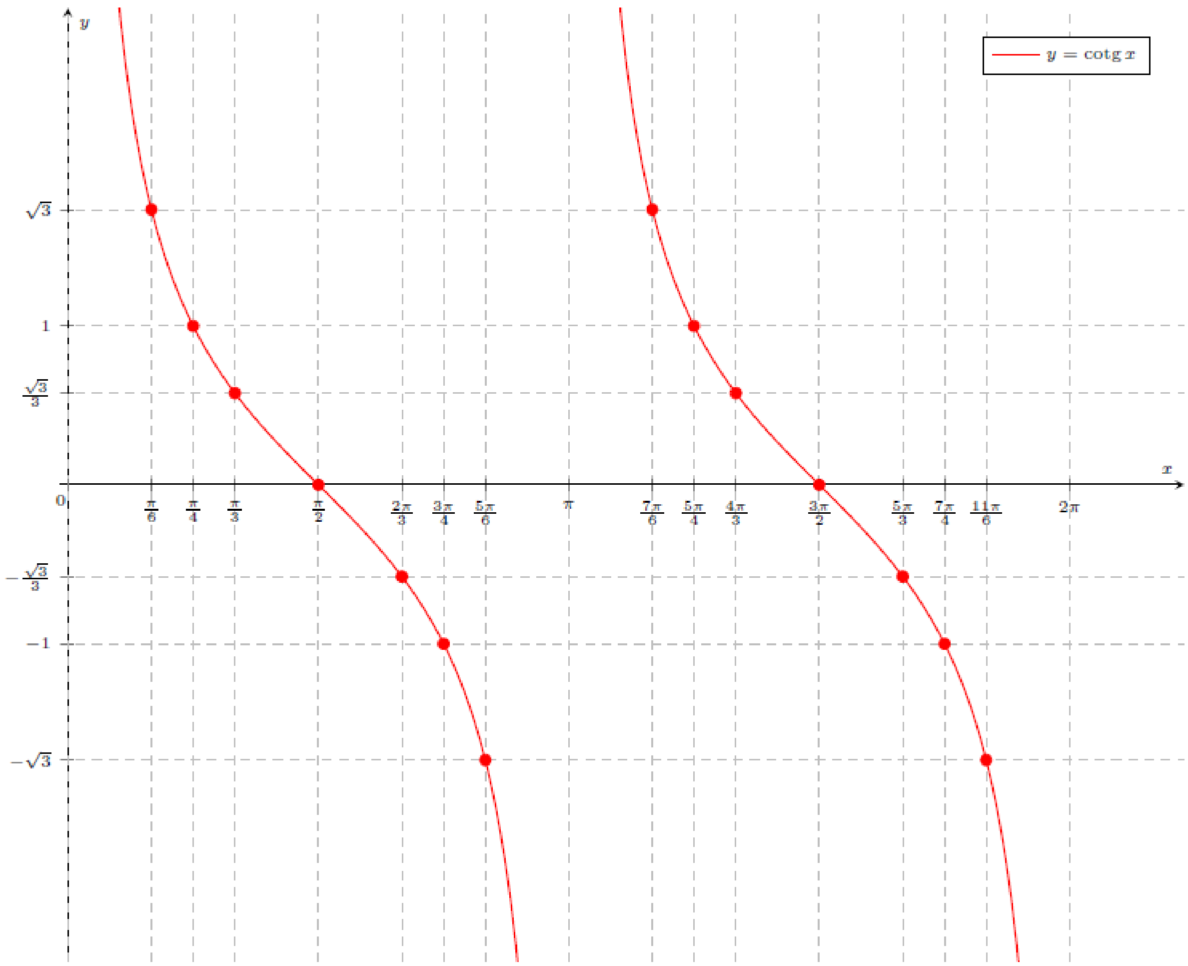


Figura 54: Gráfico da função cotangente de $(0, 2\,\pi) \cap D_g$

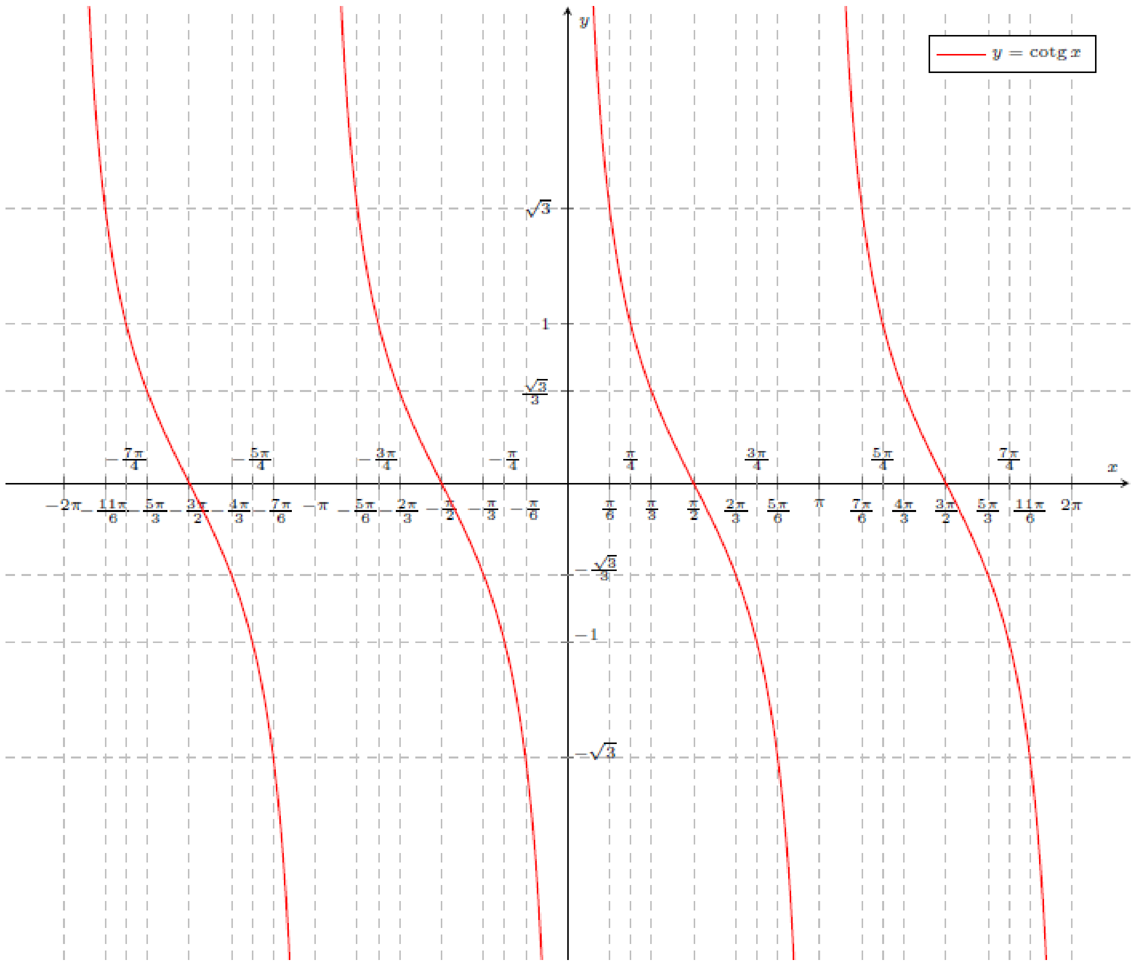


Figura 55: Gráfico da função cotangente

OBS.: A função tangente tem como domínio $D_f = \{x \in \mathbb{R} \colon x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ e como imagem $Im_f = \mathbb{R}$. A função cotangente tem como domínio $D_g = \{x \in \mathbb{R} \colon x \neq k\,\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ e como imagem $Im_g = \mathbb{R}$.

OBS.: $\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = k\,\pi$ e $\operatorname{cotg} x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

OBS.: As funções tangente e cotangente são ímpares.

Funções secante e cossecante - gráficos e propriedades

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\,\pi/2$	$2\,\pi$
$\sec x$	1	$2/\sqrt{3}$	$2/\sqrt{2}$	2	$\nexists$	-1	$\nexists$	1
$\operatorname{cossec} x$	$\nexists$	2	$2/\sqrt{2}$	$2/\sqrt{3}$	1	$\nexists$	-1	$\nexists$

- $f(x) = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

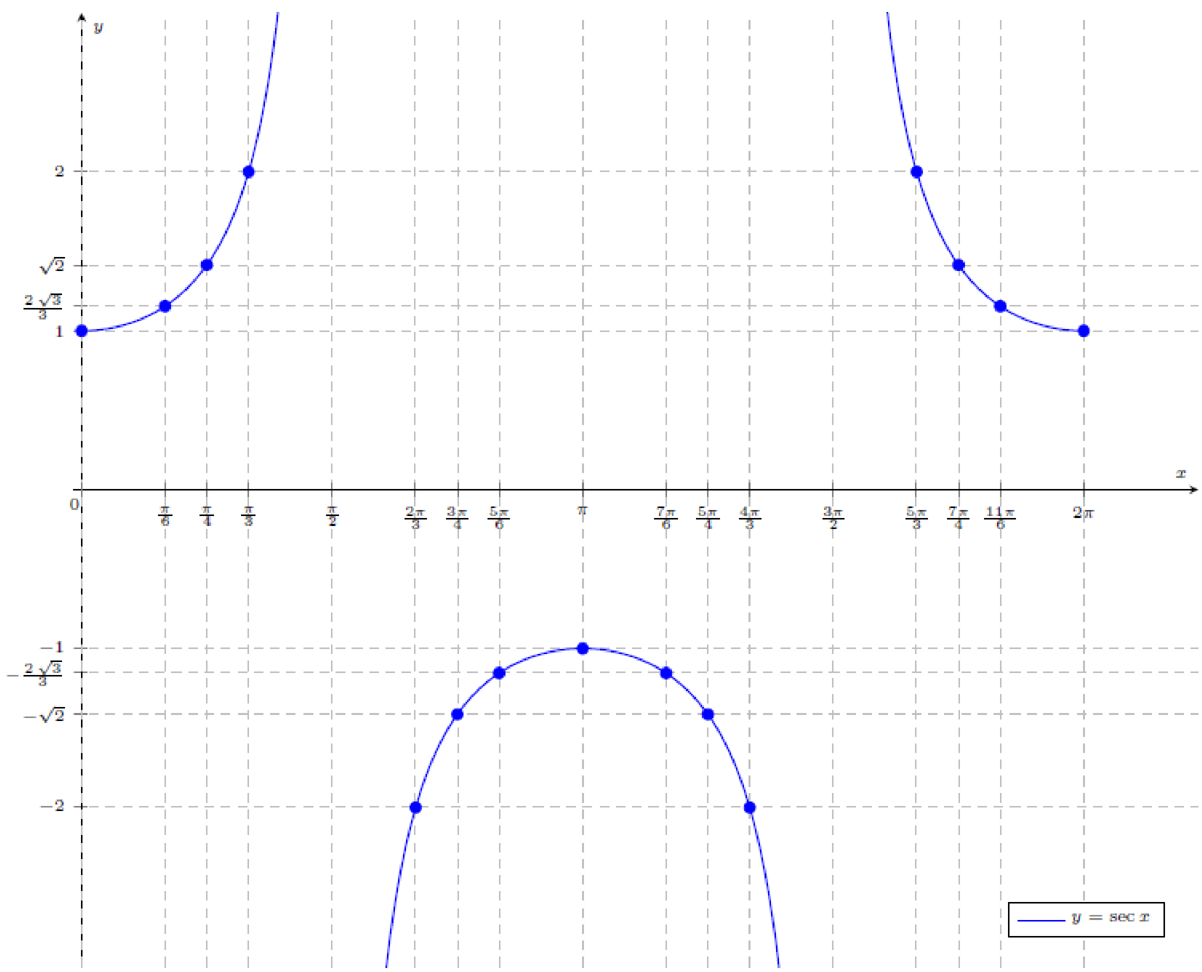


Figura 56: Gráfico da função secante em $[0, 2\,\pi] \cap D_f$

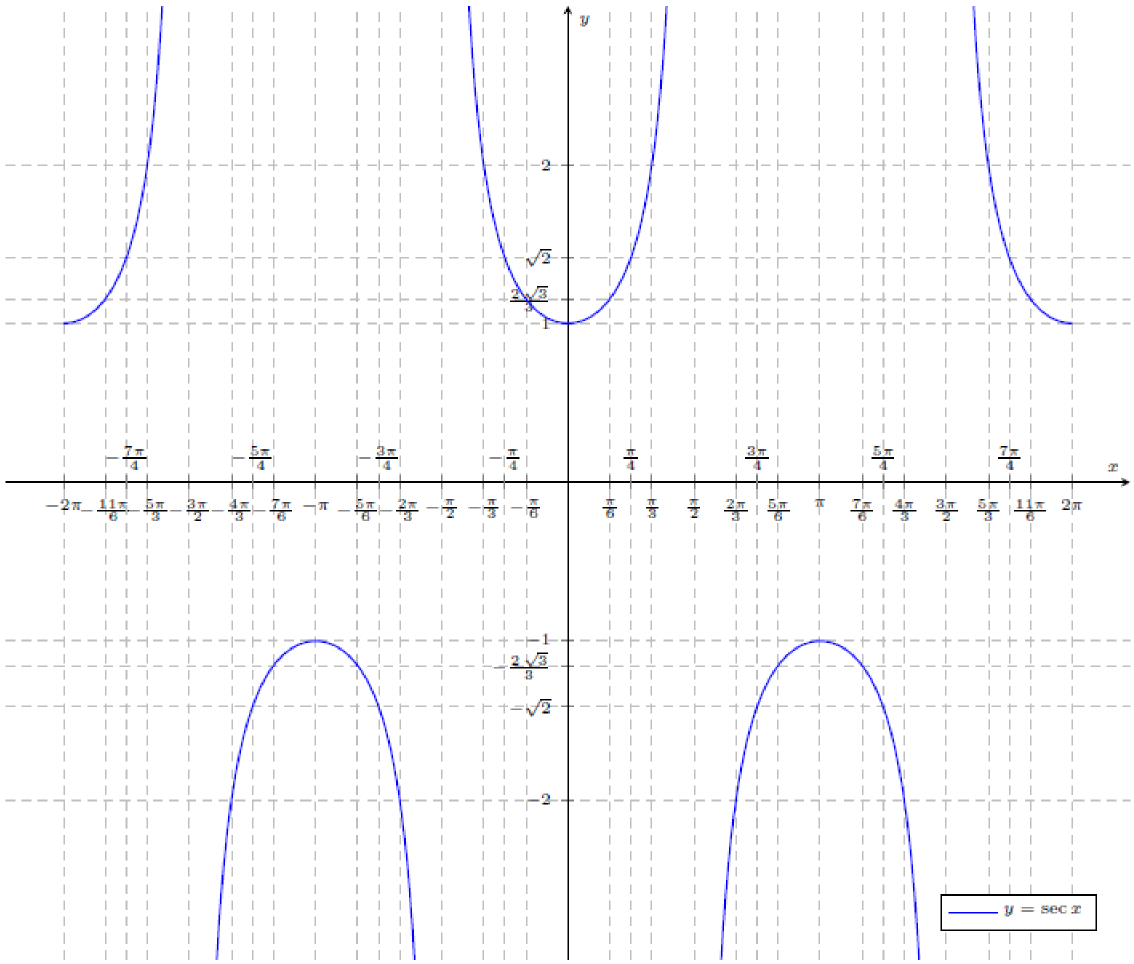


Figura 57: Gráfico da função secante

- $g(x) = \text{cossec}\, x = \csc x = \dfrac{1}{\text{sen}\, x} = \sec(x - \dfrac{\pi}{2})$

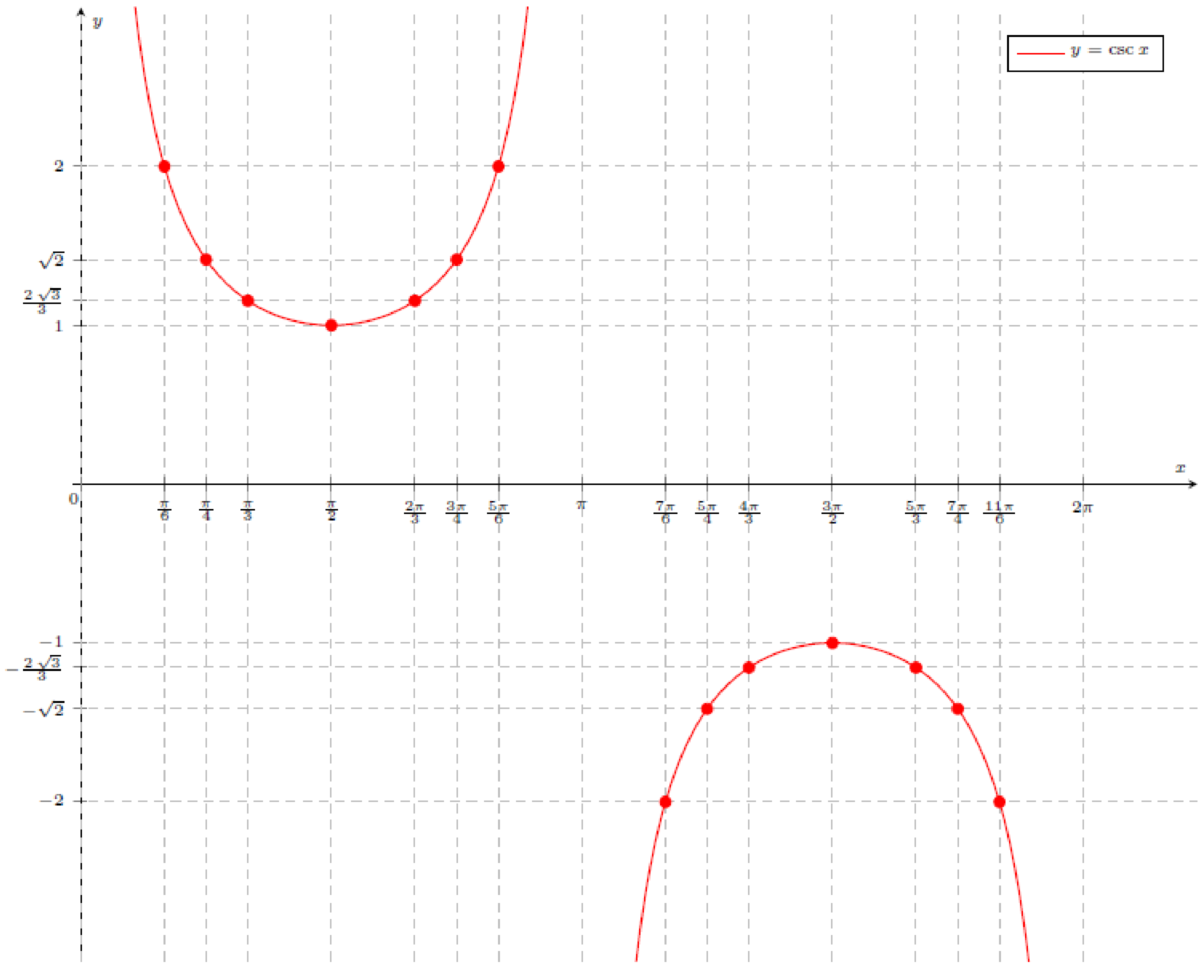


Figura 58: Gráfico da função cossecante em $(0, 2\,\pi) \cap D_g$

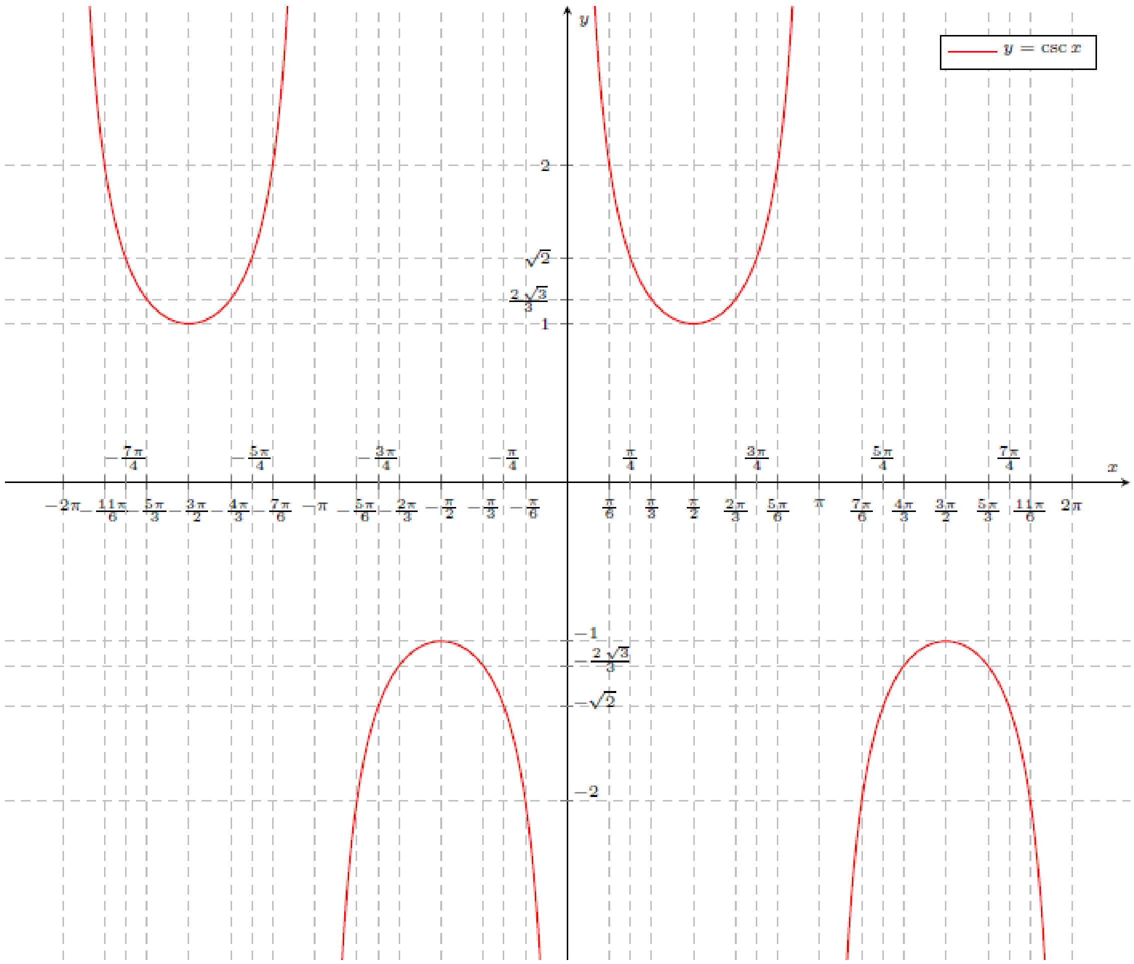


Figura 59: Gráfico da função cossecante

OBS.: A função secante tem como domínio $D_f = \{x \in \mathbb{R} \colon x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ e como imagem $Im_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. A função cossecante tem como domínio $D_g = \{x \in \mathbb{R} \colon x \neq k\,\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ e como imagem $Im_g = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

OBS.: A função secante é par e a função cossecante é ímpar.

Funções Trigonométricas Inversas

Função arco seno

Considere a função seno, $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (domínio fundamental da função seno).

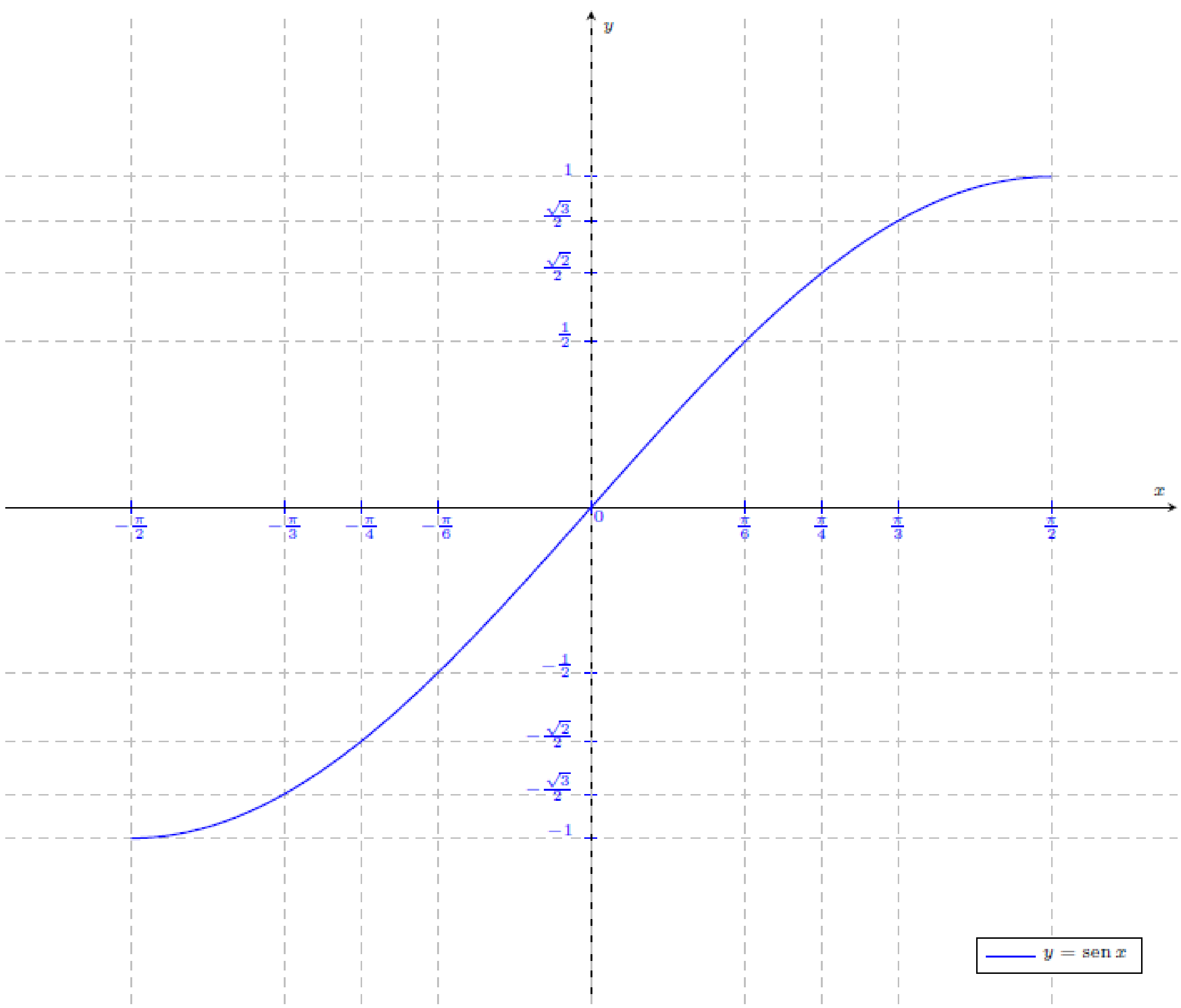


Figura 60: Gráfico da função seno no seu domínio fundamental

A função inversa da função seno é denominada **função arco seno** e será denotada por

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arcsen} x = \operatorname{sen}^{-1} x.$$

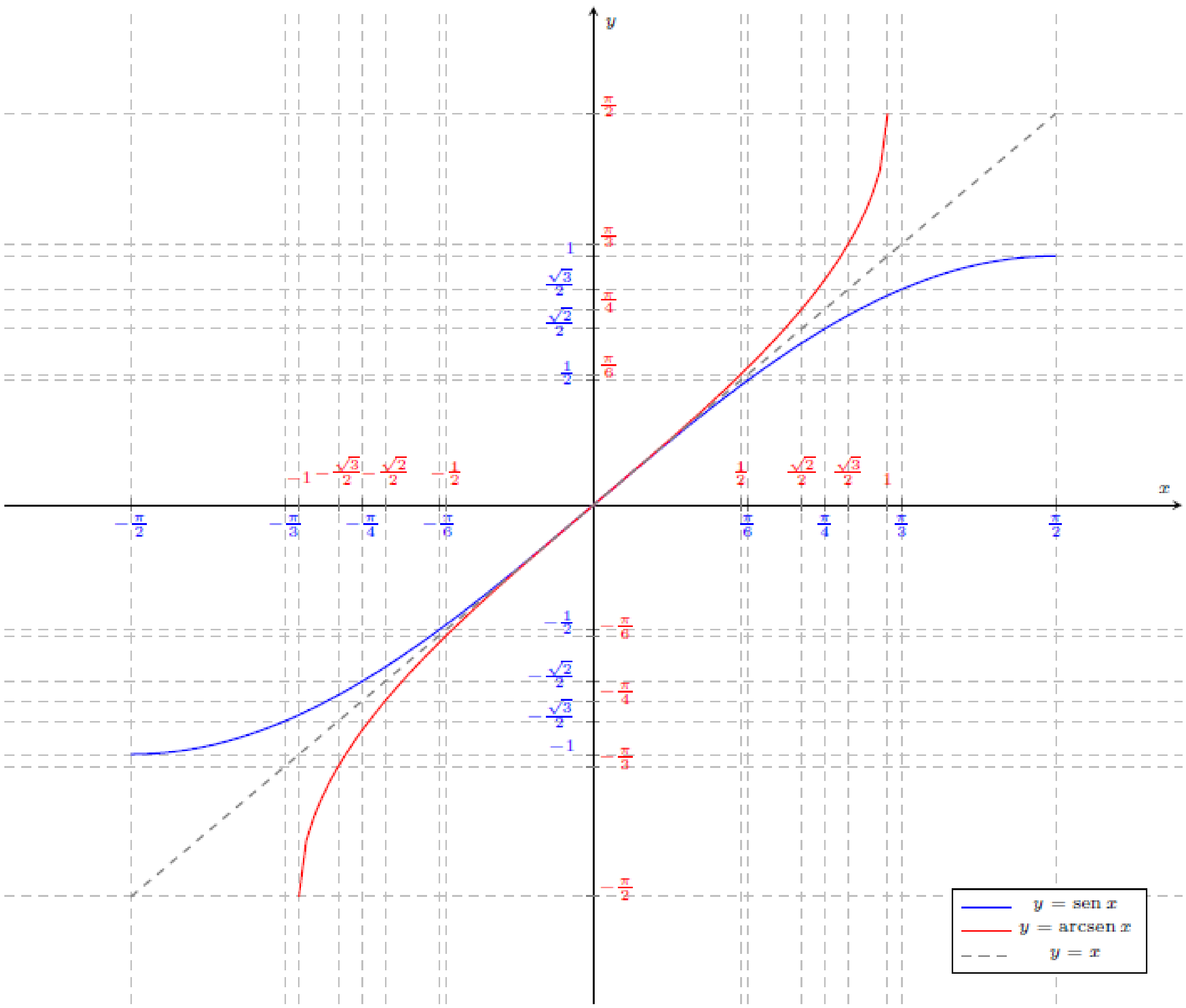


Figura 61: Gráfico da função seno e sua inversa

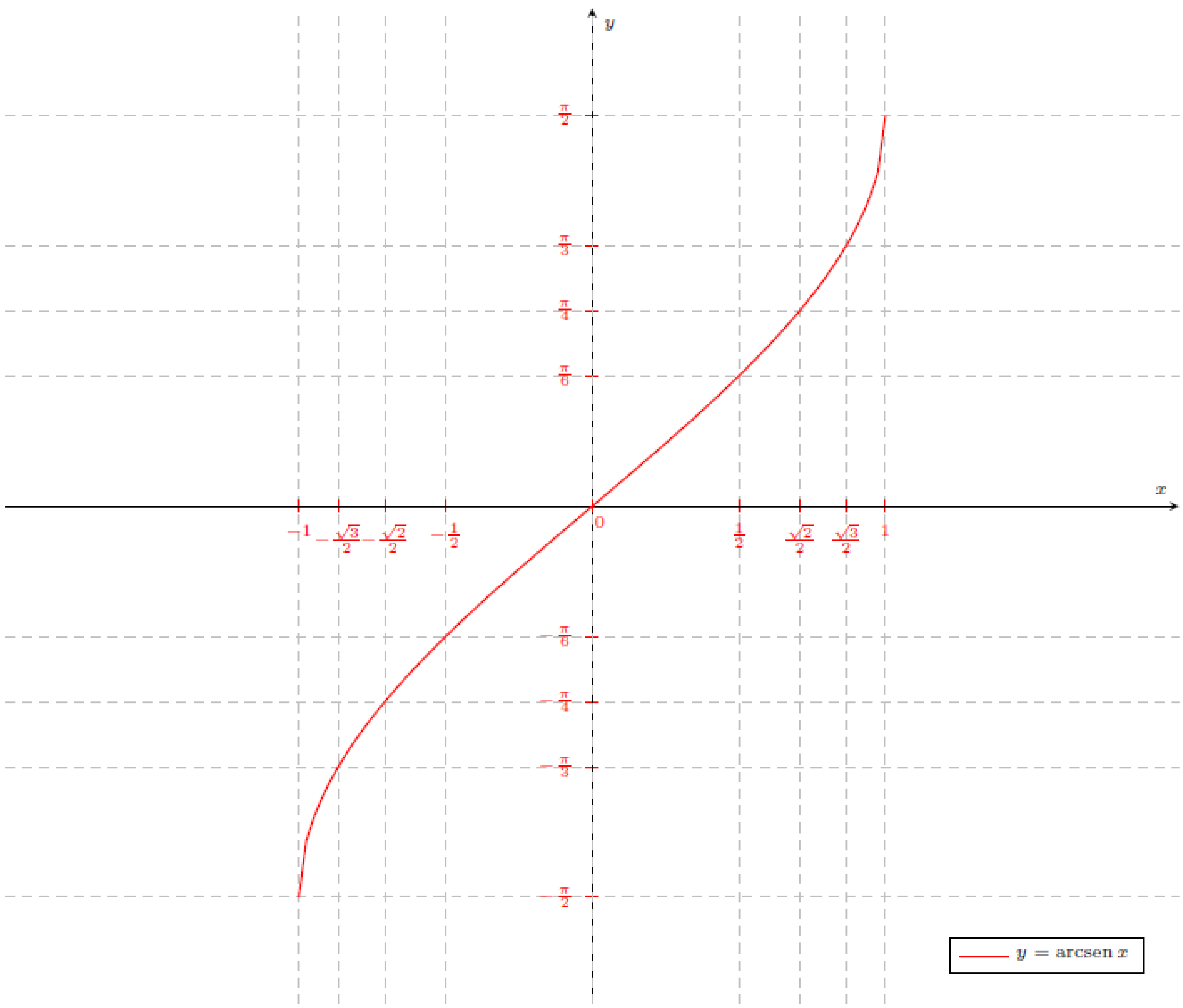


Figura 62: Gráfico da função arco seno

x	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	-1
$\text{arcsen}\, x$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$-\pi/2$

Função arco cosseno

Considere a função cosseno, $g(x) = \cos x$, $x \in [0, \pi]$ (domínio fundamental da função cosseno).

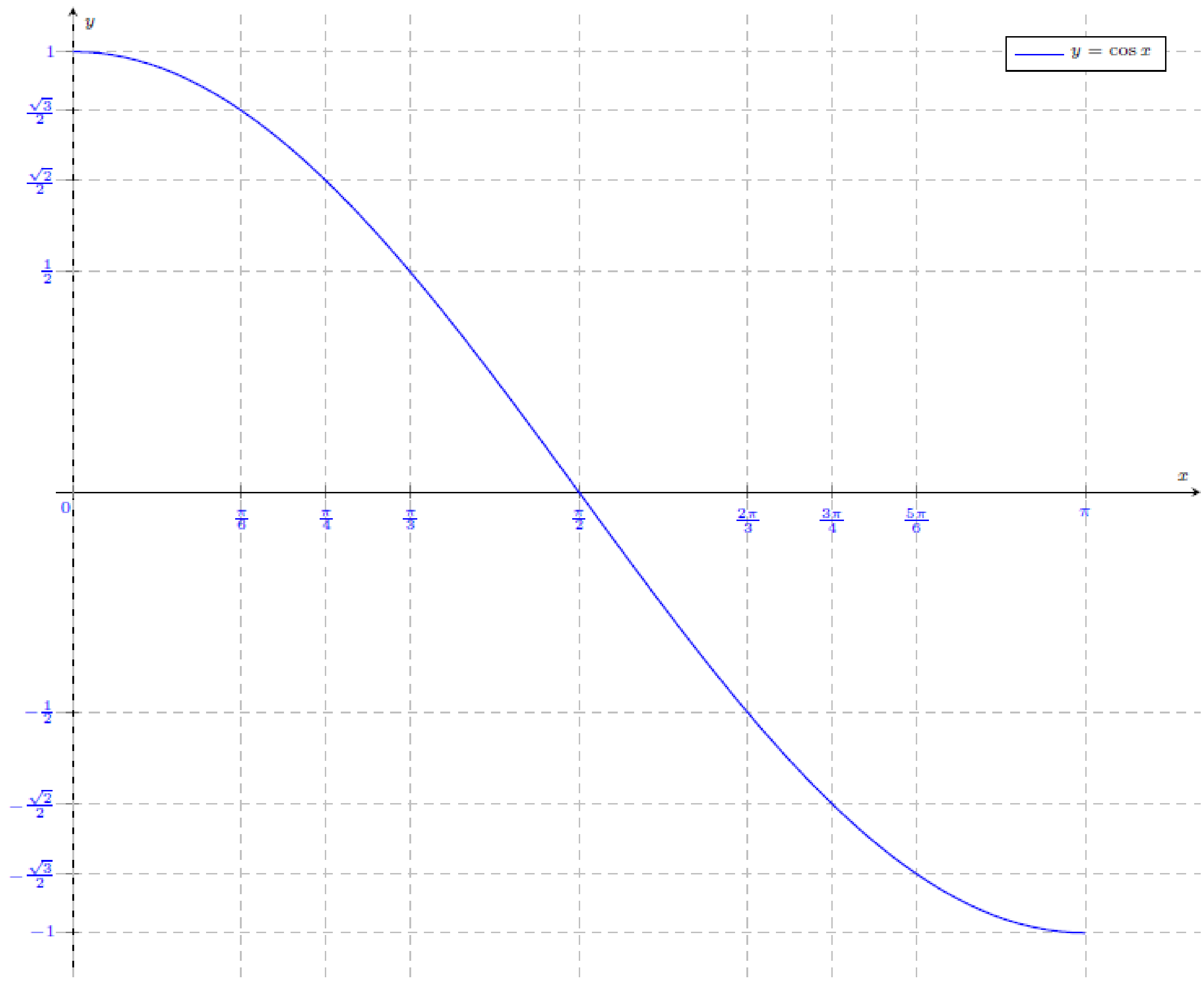


Figura 63: Gráfico da função cosseno no seu domínio fundamental

A função inversa da função cosseno é denominada **função arco cosseno** e será denotada por

$$g^{-1}(x) = \arccos x = \cos^{-1}\, x.$$

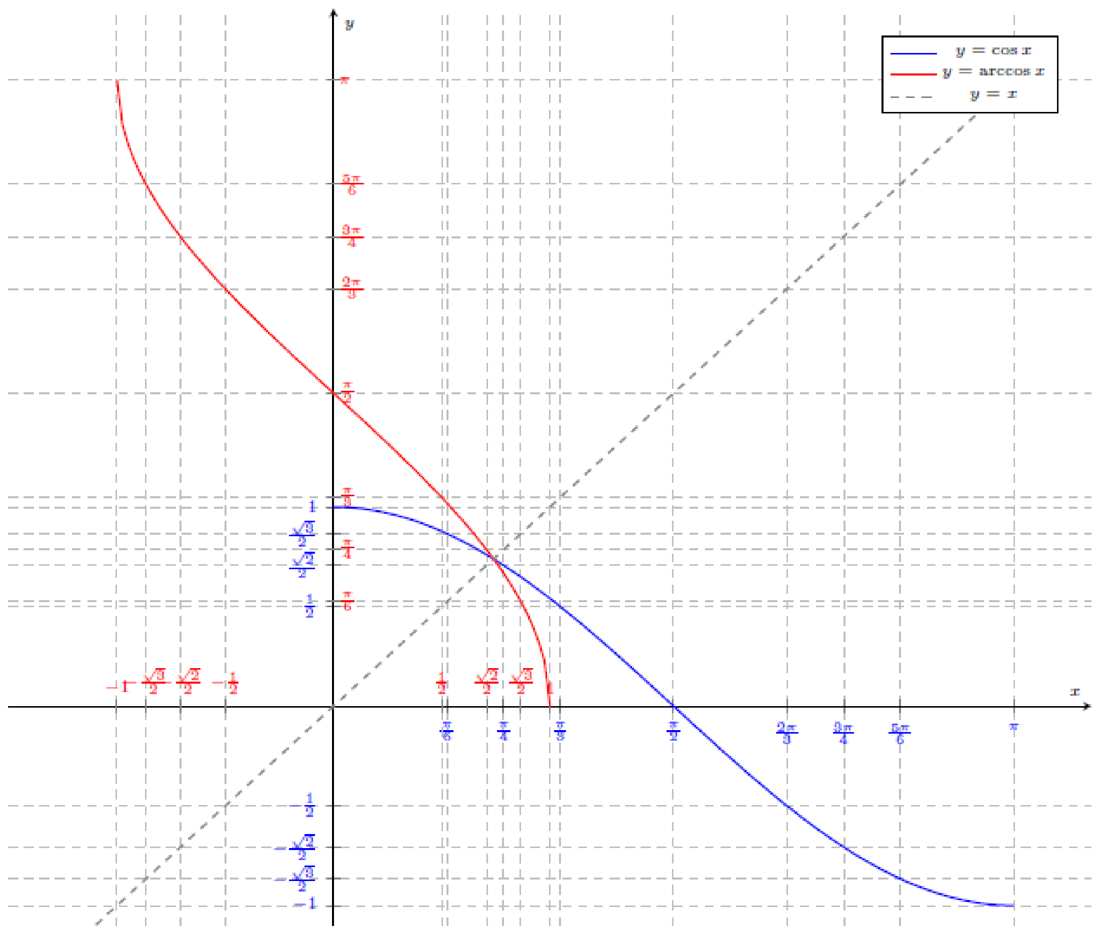


Figura 64: Gráfico da função cosseno e sua inversa

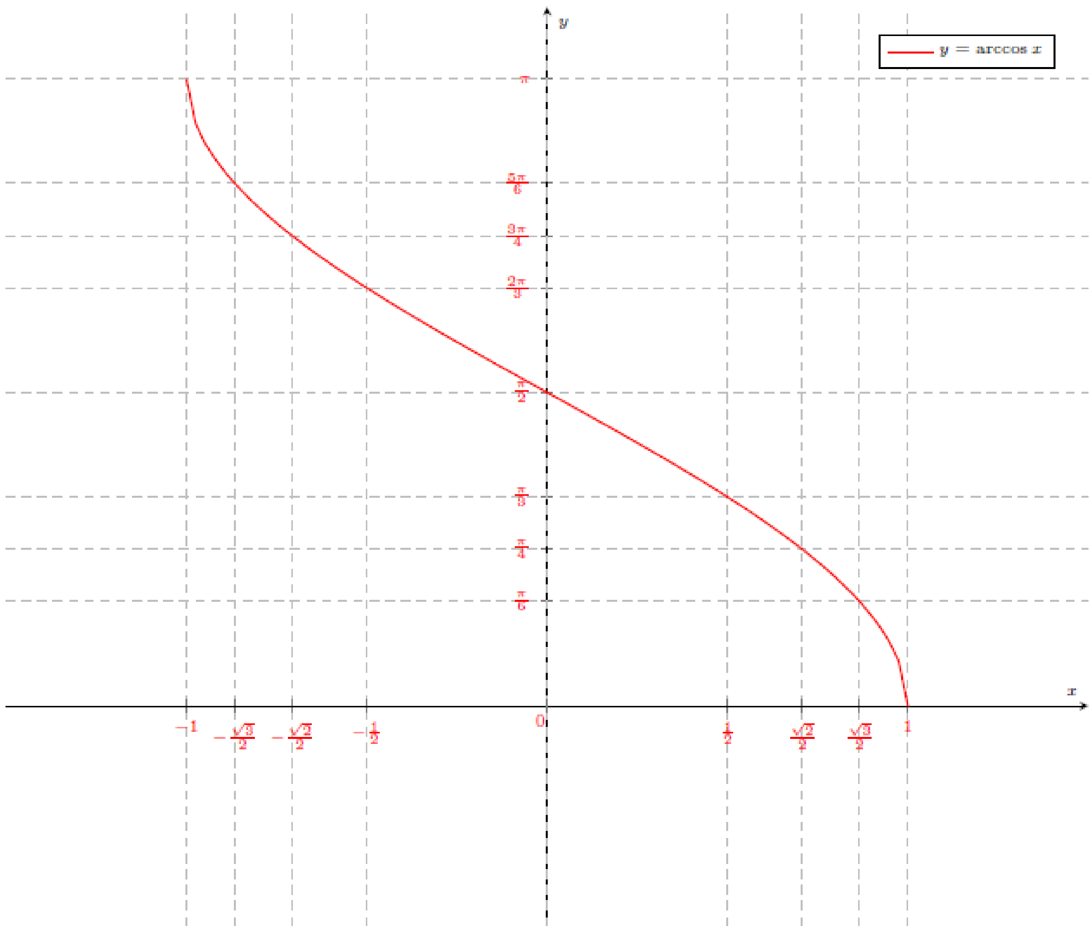


Figura 65: Gráfico da função arco cosseno

x	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\arccos x$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π

Função arco tangente

Considere a função tangente, $h(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (domínio fundamental da função tangente).

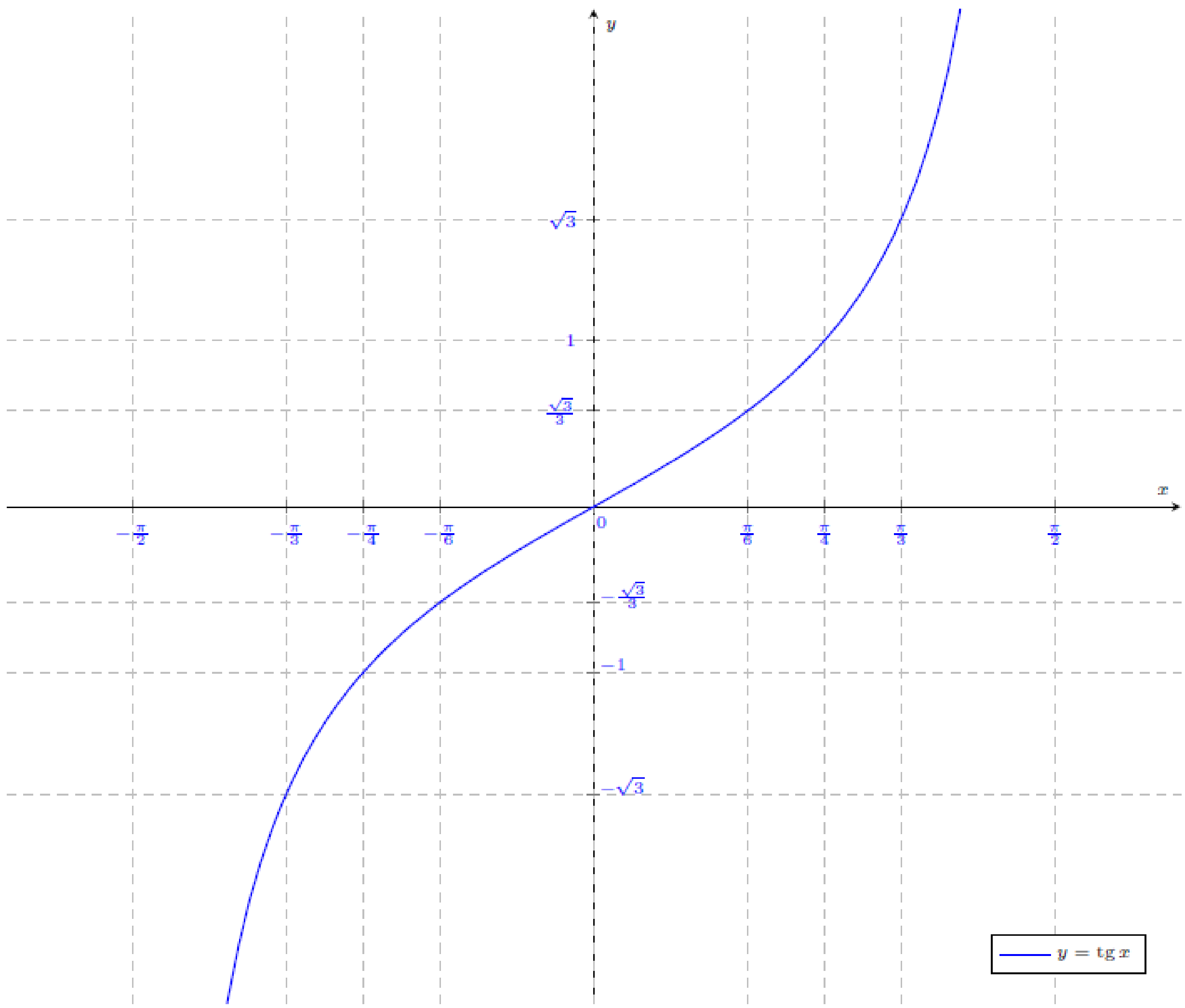


Figura 66: Gráfico da função tangente no seu domínio fundamental

A função inversa da função tangente é denominada **função arco tangente** e será denotada por $h^{-1}(x) = \text{arctg}\, x = \text{tg}^{-1}\, x$.

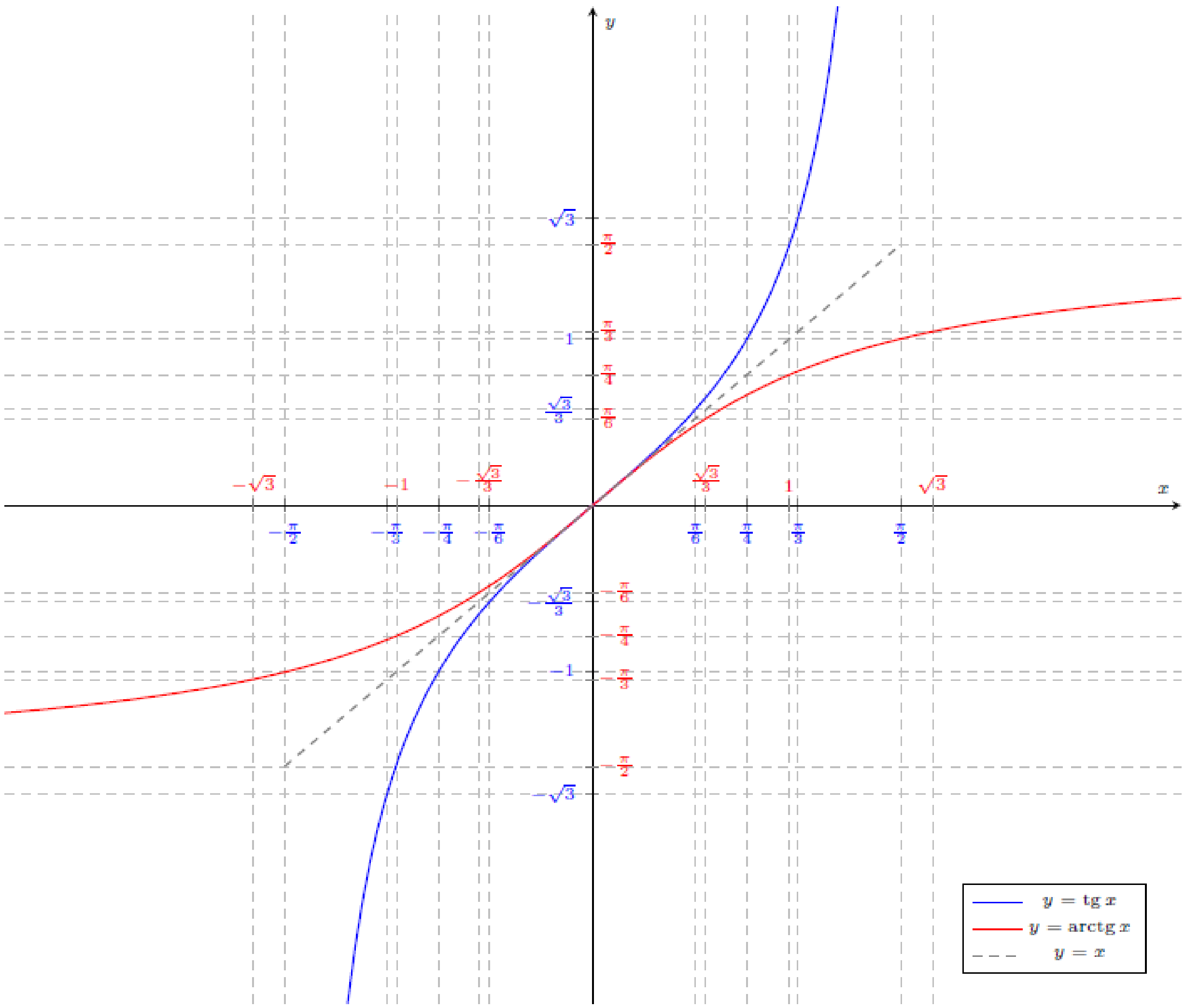


Figura 67: Gráfico da função tangente e sua inversa

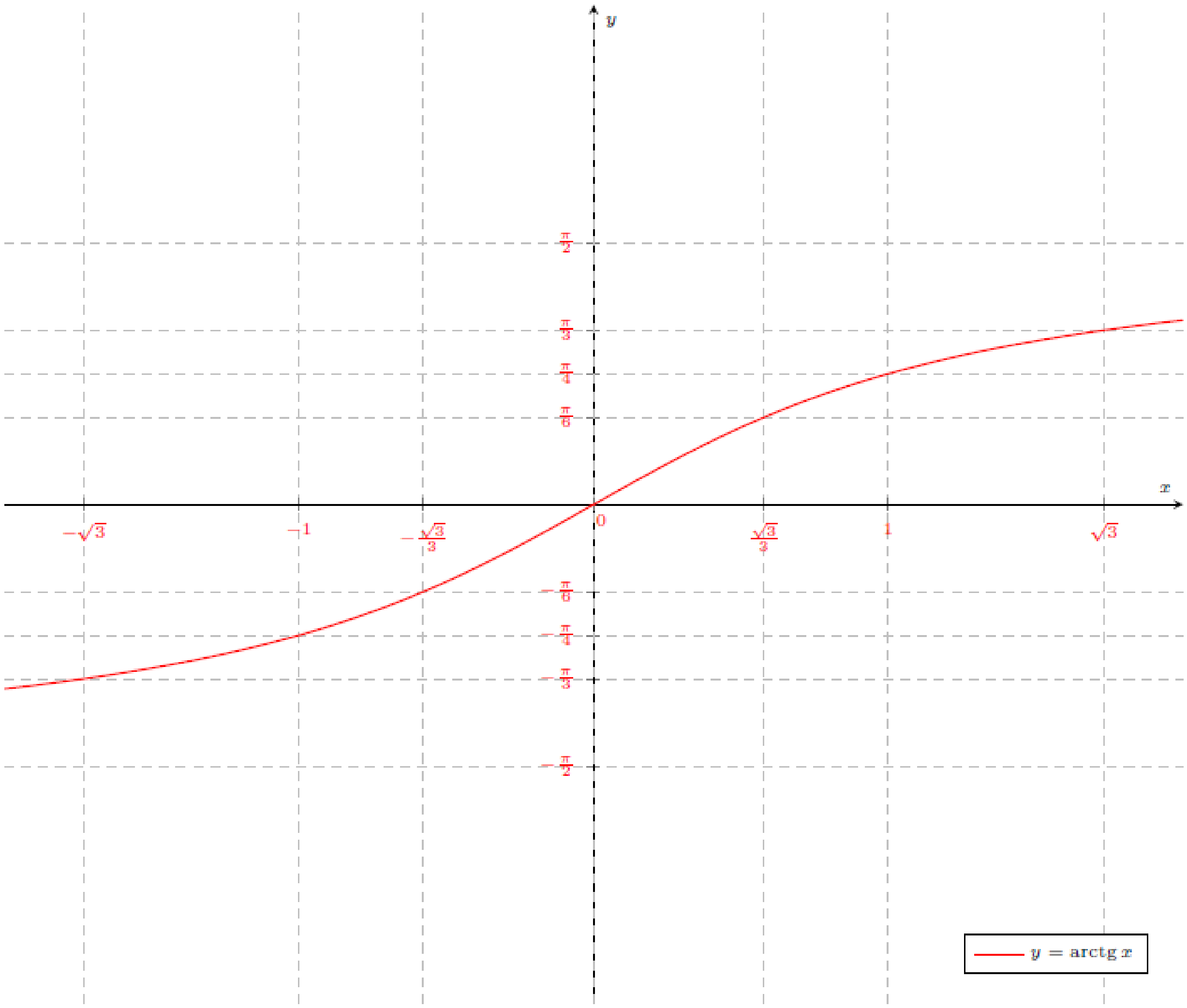


Figura 68: Gráfico da função arco tangente

x	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-1
$\operatorname{arctg} x$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$-\pi/4$

OBS.: Podemos também definir as funções inversas das demais funções trigonométricas.

Referências Bibliográficas

[1] FLEMMING, Diva M.; Gonçalves, Mirian B. Cálculo A. 6.ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006

[2] MEDEIROS, Valeria Zuma. Pré-Cálculo. 2.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

[3] SIMMONS, George F. Cálculo com Geometria Analítica. São Paulo: McGraw-Hill, 1987. v.1.

[4] DOLCE, Osvaldo; IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. Fundamentos de matemática elementar: logaritmos. 9.ed. São Paulo: Atual, 2004. v.2.

[5] HAZZAN, Samuel; IEZZI, Gelson. Fundamentos de matemática elementar: conjuntos e funções. 8.ed. São Paulo: Atual, 2004. v.1.

[6] IEZZI, Nelson. Fundamentos de matemática elementar: trigonometria. 8.ed. São Paulo: Atual, 2004. v.3.

[7] IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos; MACHADO, Nilson José. Fundamentos de matemática elementar: limites, derivadas, noções de integral. 6.ed. São Paulo: Atual, 2005. v.8.

[8] SAFIER, Fred. Pré-Calculo. (Coleção Schaum). Porto Alegre: Bookman, 2003.

[9] SINGH, Simon. O último teorema de Fermat. Rio de Janeiro: BestBolso, 2014.