

ALGORITMOS EM GRAFOS

Bacharelado em Sistemas da Informação

Prof. Marco André Abud Kappel

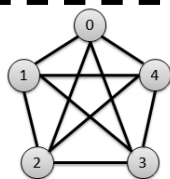
Aula 6 – Árvore Geradora Mínima

Árvores Geradoras Mínimas

- Nas últimas aulas:



Grafos



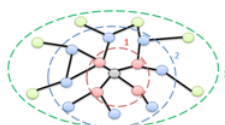
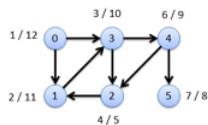
- Simples
- Completo
- Regular
- Cíclico
- Não direcionado
- Conexo

Representações computacionais

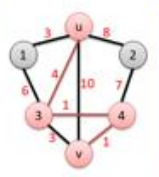
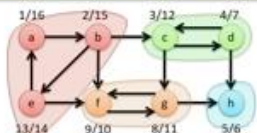
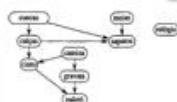


	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	0
2	0	1	0	1	0	0
3	0	1	1	0	0	0
4	1	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0

Percursos em grafos



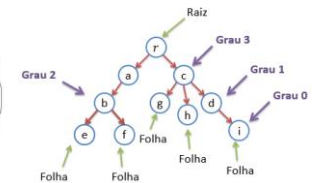
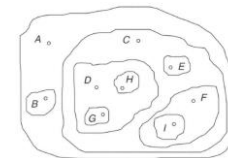
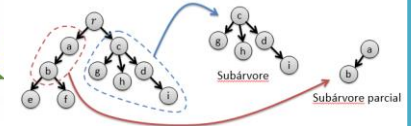
Algoritmos em grafos



Árvores Geradoras Mínimas

Hoje

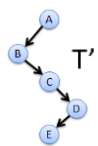
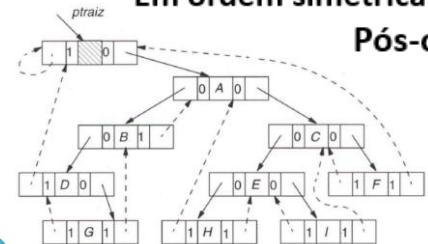
Árvores



Pré-ordem:

Em ordem simétrica:

Pós-ordem



Árvores Geradoras Mínimas

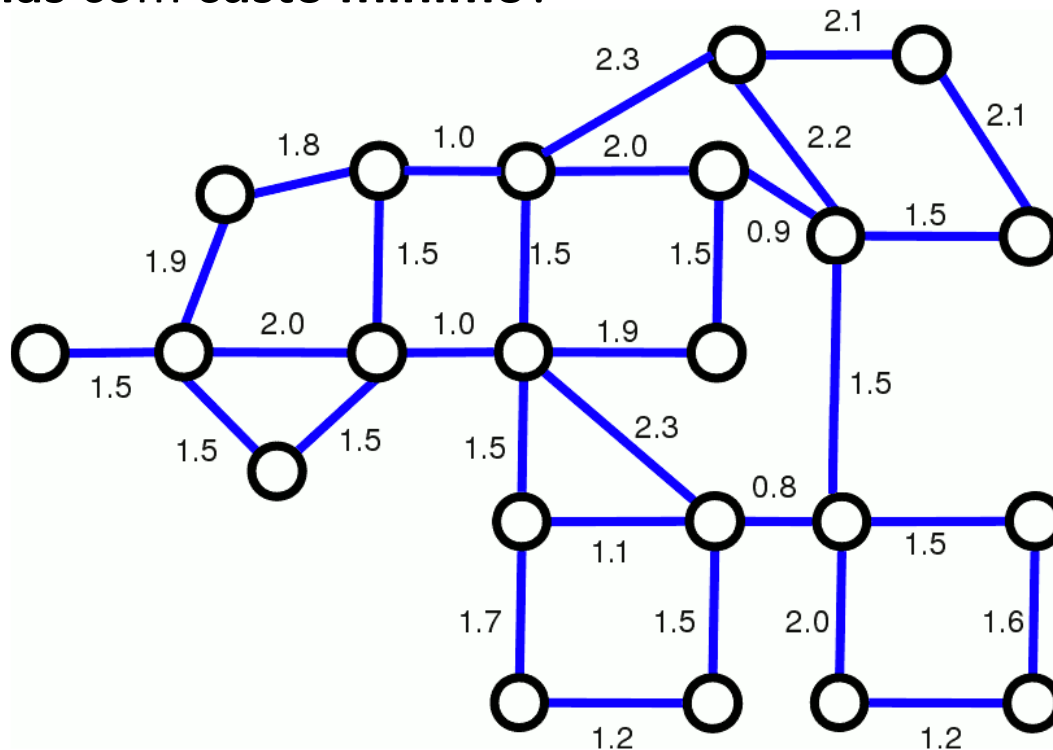
- **Introdução**

- Em muitos problemas que envolvem a **conexão** entre **diversos locais**, é necessário que se descubra como **ligar todos os locais** usando ligações com o **menor peso possível**.
- Esse peso pode ser o **custo financeiro** de uma viagem, o **comprimento de um fio**, etc.
- Para resolver esse tipo de problema, o sistema pode ser modelado como um **grafo** e a solução é encontrada na forma de uma **árvore geradora mínima** (MST – Minimum Spanning Tree).
- **Aplicações:** Projetos de redes de comunicação, projeto de rodovias, ferrovias, projeto de rede de transmissão de energia, etc.

Árvores Geradoras Mínimas

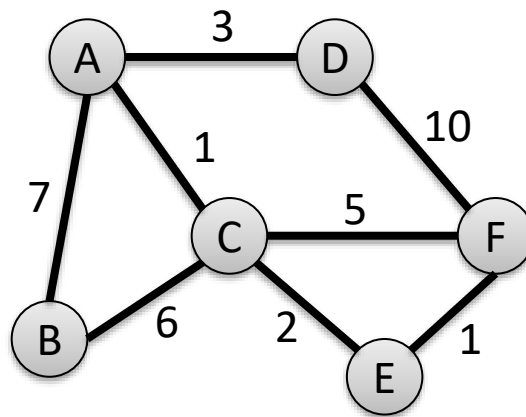
- **Exemplo:**

- Se os **vértices** são **ilhas**, as **arestas** representam a possibilidades de construir uma **ponte entre duas linhas**, e os **pesos** são os **custos** para a construção, quais pontes devemos construir para **conectar todas as ilhas** com **custo mínimo**?



Árvores Geradoras Mínimas

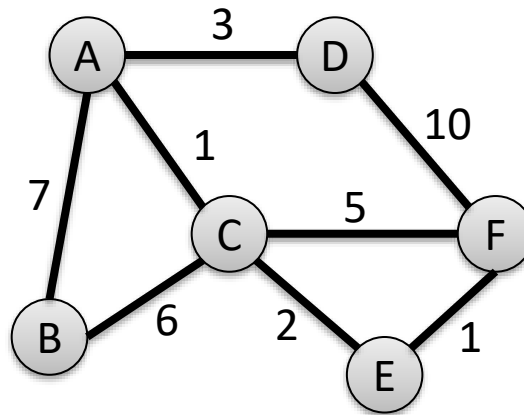
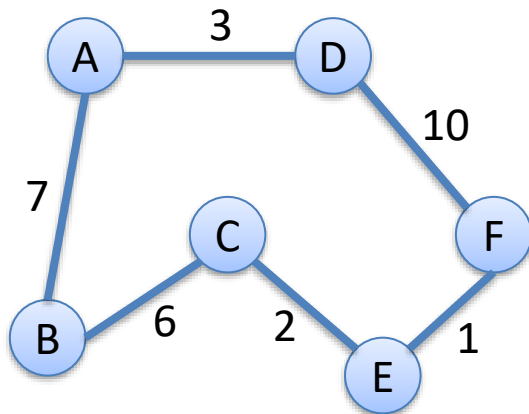
- Definições
 - **Subgrafo gerador** é um subgrafo de um grafo G que contém **todos** os **vértices** de G .



Árvores Geradoras Mínimas

- Definições

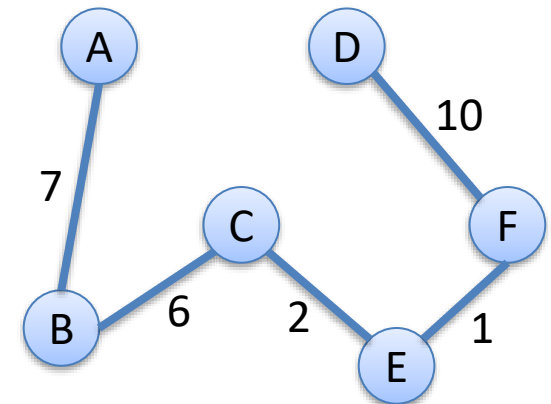
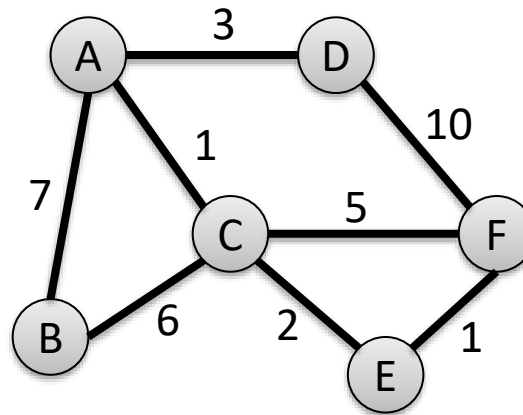
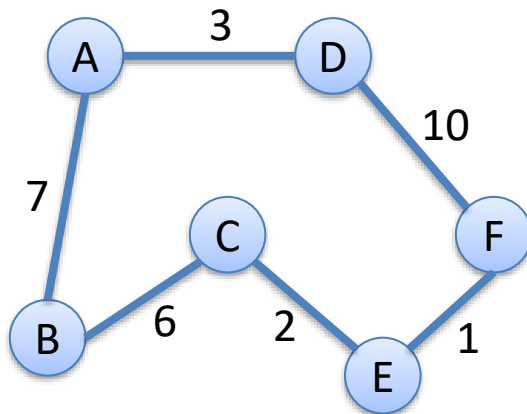
- **Subgrafo gerador** é um subgrafo de um grafo G que contém **todos os vértices** de G .



Árvores Geradoras Mínimas

- Definições

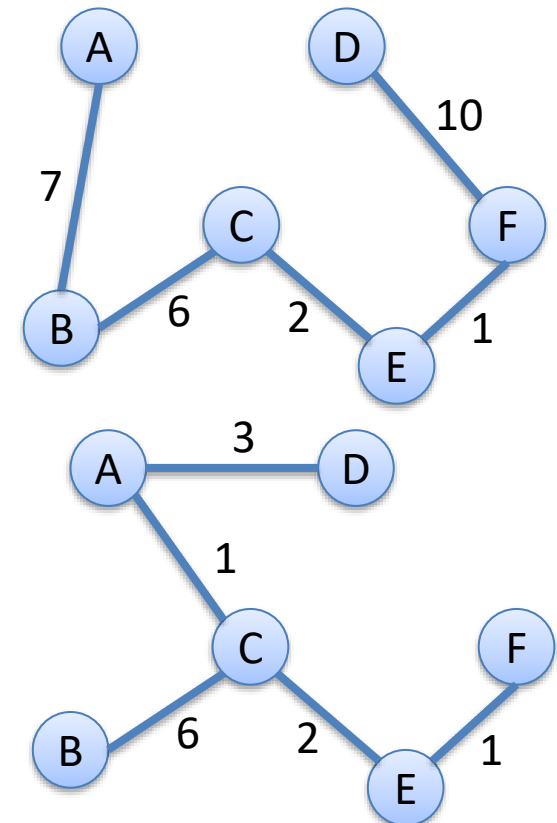
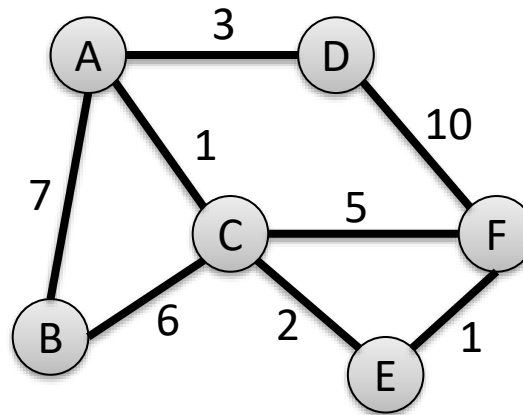
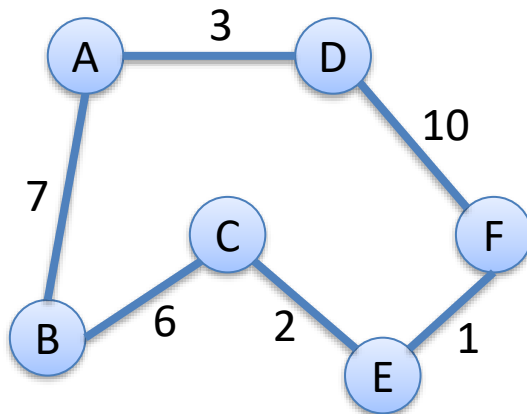
- **Subgrafo gerador** é um subgrafo de um grafo G que contém **todos os vértices** de G .



Árvores Geradoras Mínimas

- Definições

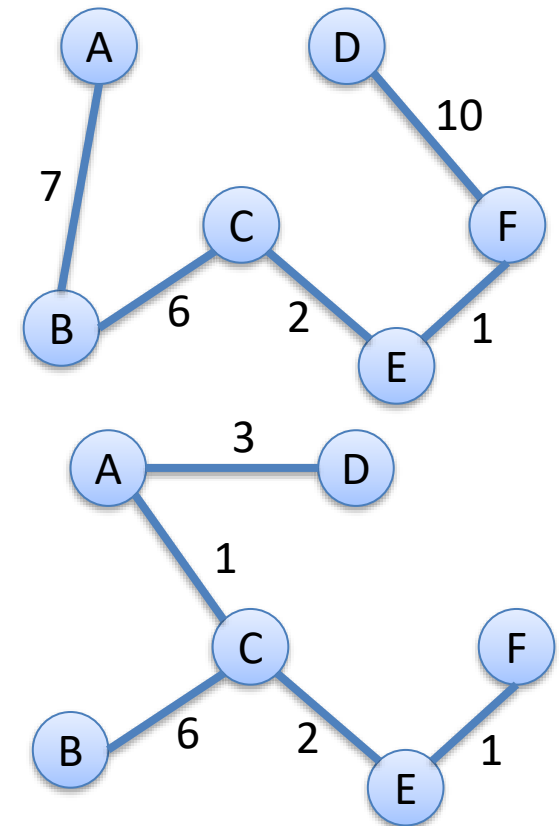
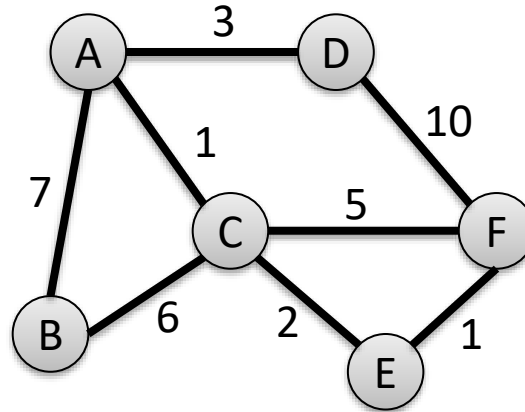
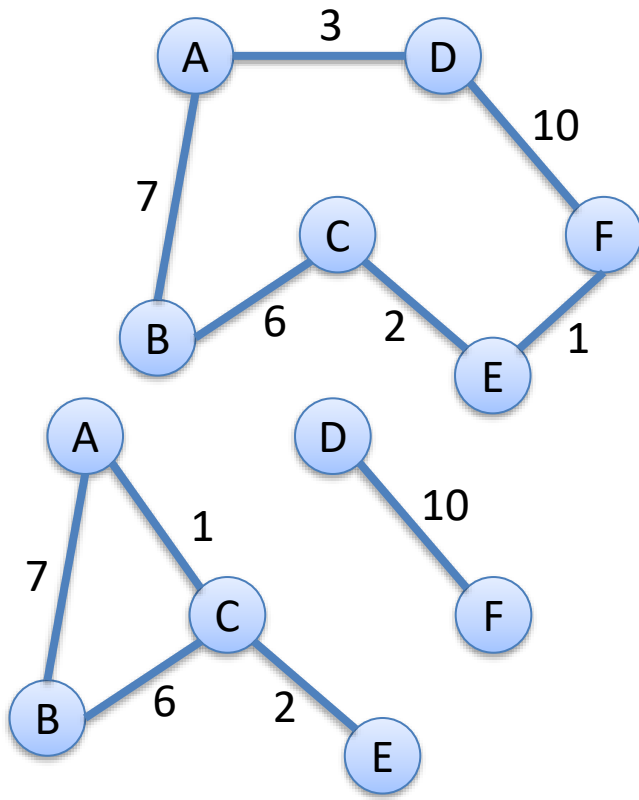
- **Subgrafo gerador** é um subgrafo de um grafo G que contém **todos os vértices** de G .



Árvores Geradoras Mínimas

- Definições

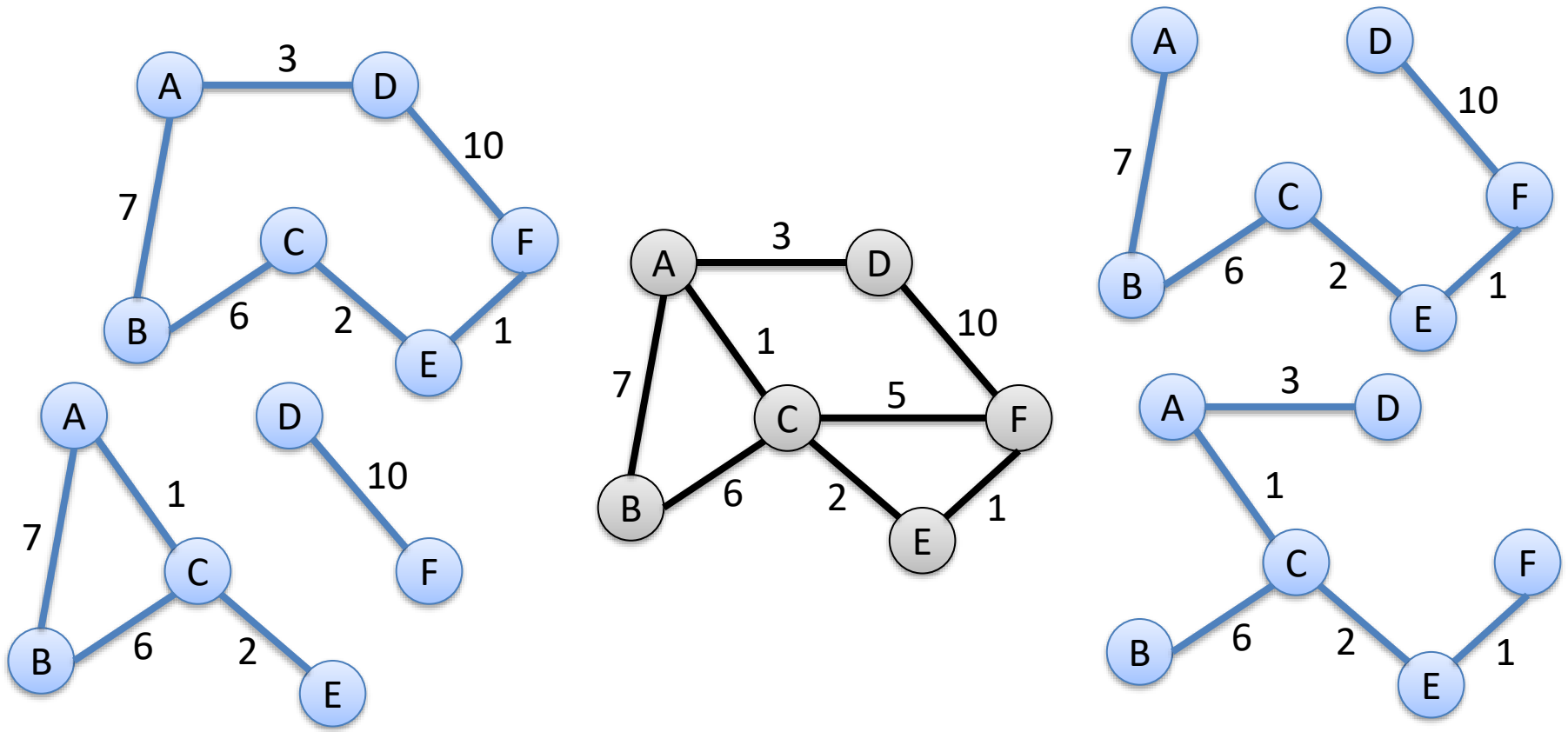
- Subgrafo gerador** é um subgrafo de um grafo G que contém **todos os vértices** de G .



Árvores Geradoras Mínimas

- Definições

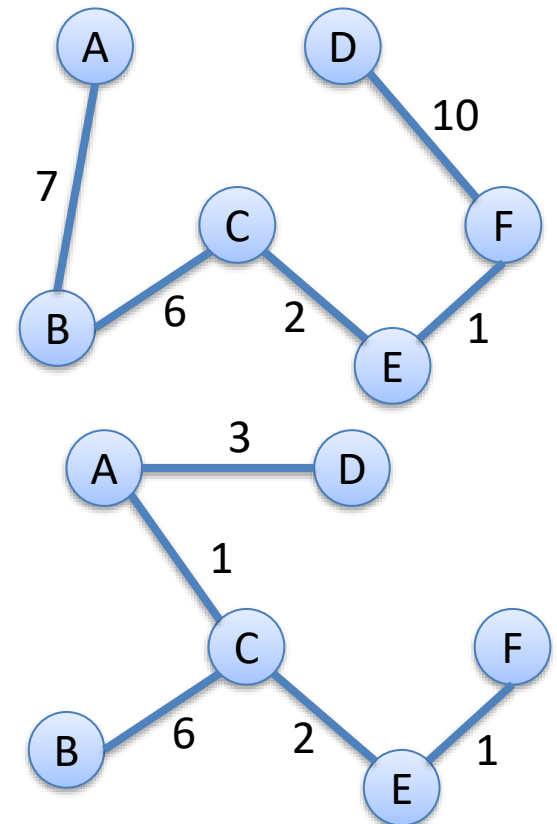
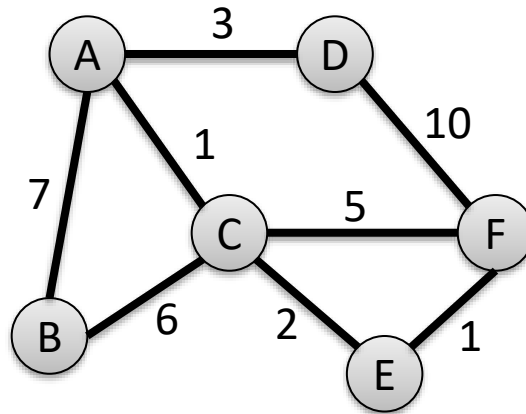
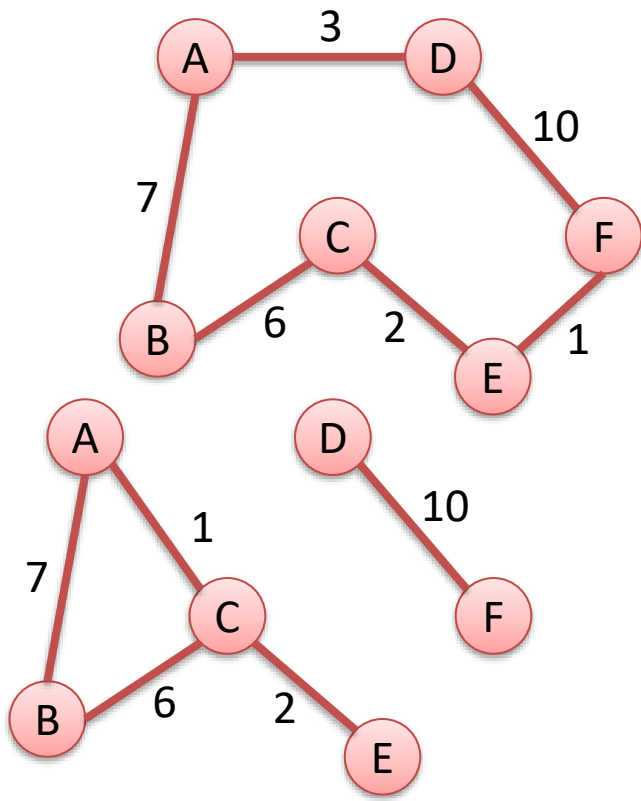
- **Árvore geradora** é um subgrafo gerador **conexo** e **sem ciclos**.



Árvores Geradoras Mínimas

- Definições

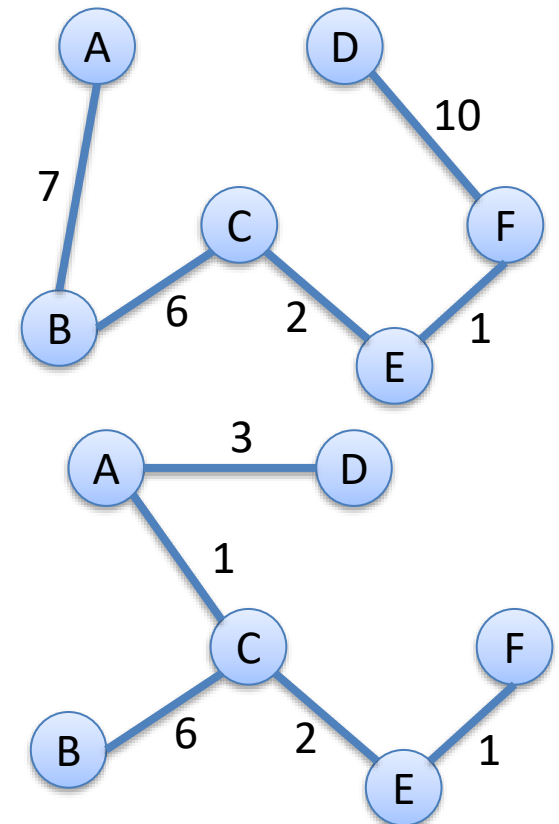
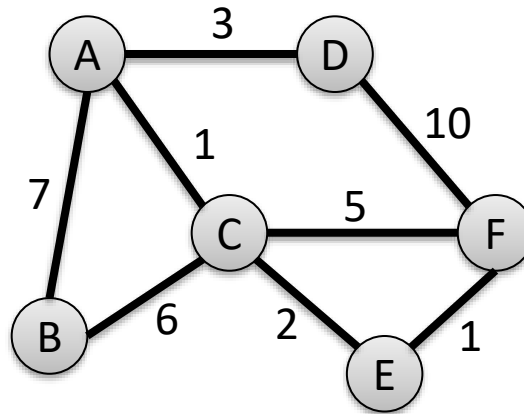
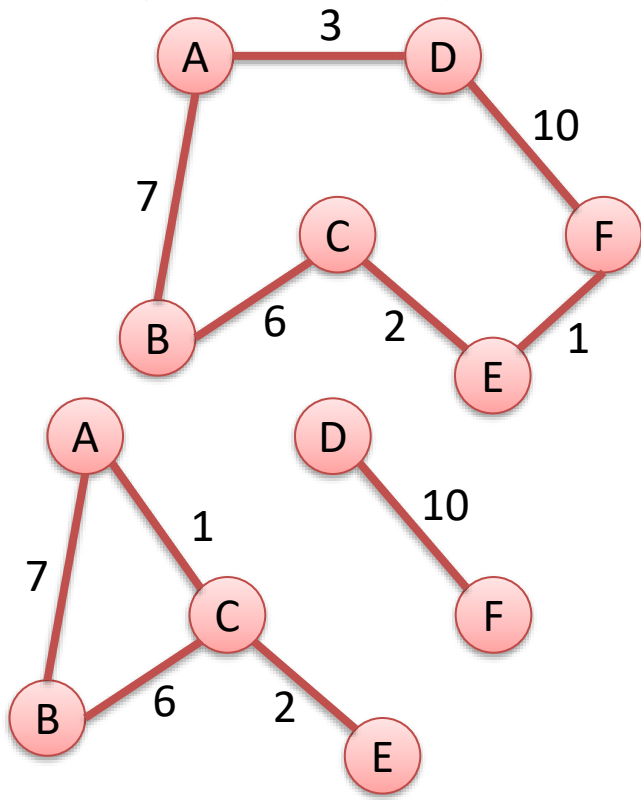
- **Árvore geradora** é um subgrafo gerador **conexo** e **sem ciclos**.



Árvores Geradoras Mínimas

- Definições

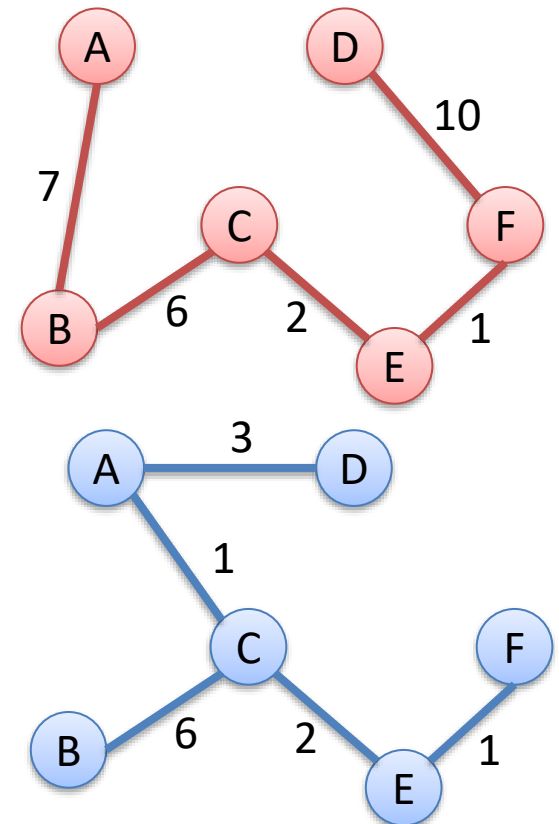
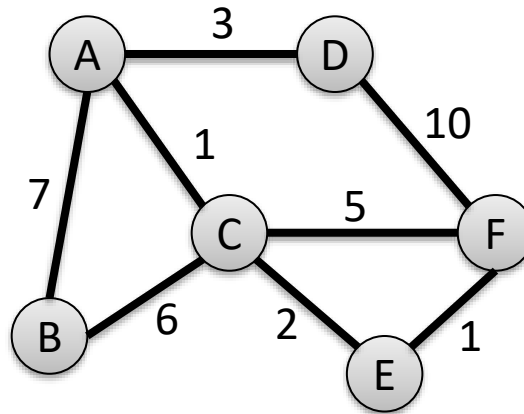
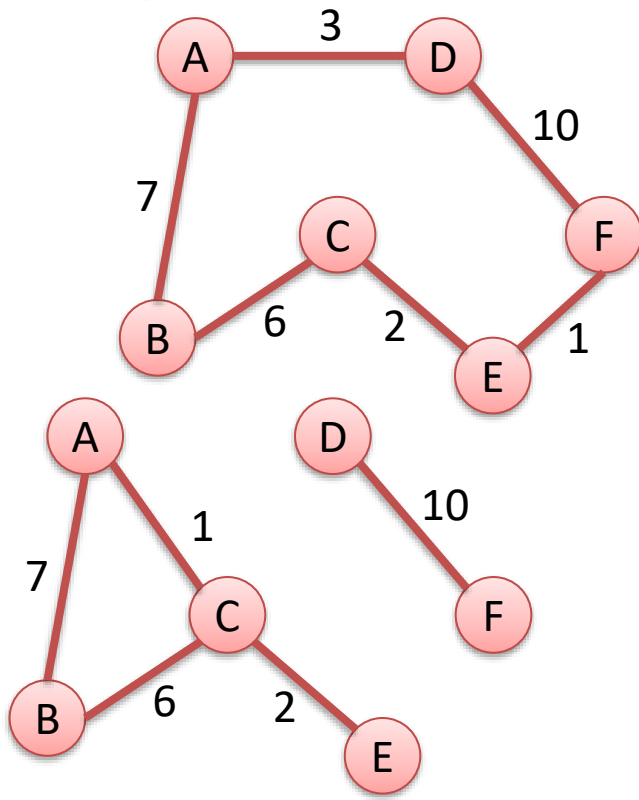
- **Árvore geradora mínima** é uma árvore geradora de um grafo ponderado cuja soma dos pesos das arestas é mínimo.



Árvores Geradoras Mínimas

- Definições

- **Árvore geradora mínima** é uma árvore geradora de um grafo ponderado cuja soma dos pesos das arestas é mínimo.



Árvores Geradoras Mínimas

- **Propriedades**

- Uma **árvore geradora mínima** T de um grafo G deve minimizar o peso total do grafo, dado por:

$$w(T) = \sum_{e \in T} w(e)$$

onde e são as arestas (u,v) do grafo.

- Todos os **algoritmos** que resolvem este problema são aplicações da **estratégia gulosa** (faz a melhor escolha do momento).
- As árvores geradoras mínimas possuem duas propriedades principais:
 1. Propriedade dos **ciclos**
 2. Propriedade das **partições**

Árvores Geradoras Mínimas

- **Propriedade dos ciclos**

- Seja T uma **árvore geradora** de um grafo **ponderado** G .
- Sejam e uma **aresta** de G **fora de** T , e C um **ciclo** formado por $e+T$.
- Se T é uma **árvore geradora mínima**, para **cada aresta** f em C :

$$peso(f) \leq peso(e)$$

- Se $peso(f) > peso(e)$, é possível obter uma árvore geradora de **menor peso total** trocando f por e .

Árvores Geradoras Mínimas

- **Propriedade dos ciclos**

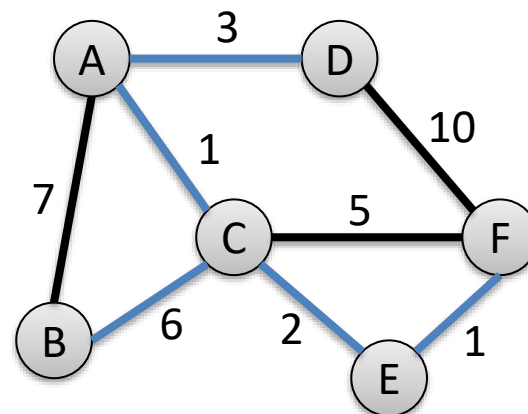
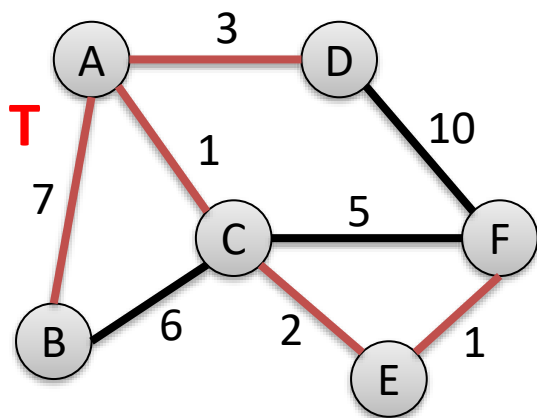
- **Exemplo:**

Considerando o ciclo (A,B,C), temos:

Seja $f = AB$ e $e = BC$,

$$\begin{aligned} \text{peso}(f) &> \text{peso}(e) \\ 7 &> 6 \end{aligned}$$

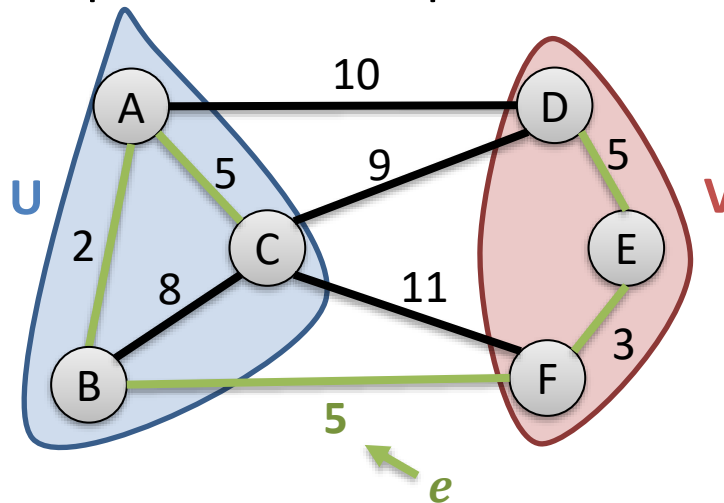
Para obter uma árvore geradora de menor peso basta trocar f por e .



Árvores Geradoras Mínimas

- **Propriedade das partições**

- Considere uma partição dos vértices de G em dois subconjuntos disjuntos U e V .
- Seja e a aresta de peso mínimo que conecta U a V .



- Existe uma árvore geradora mínima de G que contém e .

Árvores Geradoras Mínimas

- **Algoritmo de Prim**
 - Segue uma **lógica gulosa** similar ao algoritmo de **Dijkstra**.
 - Parte de um **vértice arbitrário** e segue **aumentando a árvore** aos poucos.
 - Em cada etapa, **adiciona à árvore** uma **aresta** que contribui com a quantidade **mínima** possível para o **peso da árvore**.
 - No final, é formada uma **árvore geradora mínima** do grafo.

Árvores Geradoras Mínimas

- **Algoritmo de Prim**

- Começa com uma árvore A com apenas **nó inicial** u , onde vai ser formada a **árvore geradora mínima**.
- A árvore irá **crescer** até incluir todos os vértices do grafo.
- Para **todo nó z** pertencente ao grafo:
 - $p(z)$ é o **peso mínimo** de qualquer aresta que conecta z a um vértice da árvore A .
 - $s(z)$ é o nó de A , **adjacente** a z .
- A cada iteração, o método **adiciona à árvore A** o nó ligado a ela pela **aresta de menor peso**. Esse nó entrará na árvore como **filho** do nó de A **adjacente** a ele no grafo.

Árvores Geradoras Mínimas

- **Algoritmo de Prim**

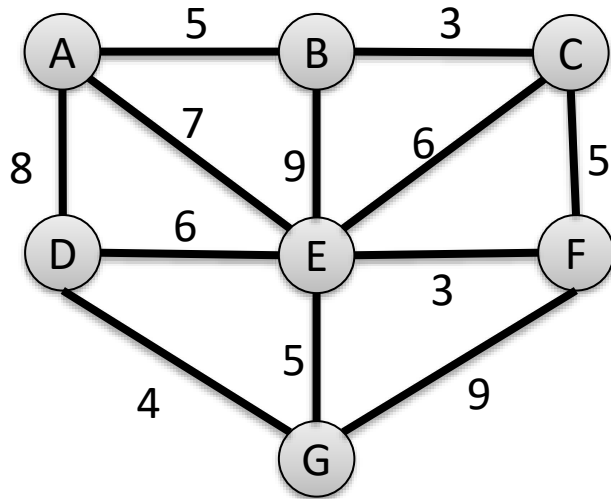
- Passo a passo:

1. Inicia a **árvore A** com o **nó de partida u** .
2. Atualize $p(z)$ para **cada nó z restante** fora de A.
3. Preencha $s(z)$ com o **nó adjacente** correspondente ao peso em $p(z)$.
4. Adicione o **nó com aresta de menor peso** na árvore A como filho do nó indicado em $s(z)$.
5. Se A ainda não possui **todos os nós**, volte ao **passo 2**.

Árvores Geradoras Mínimas

- **Algoritmo de Prim**

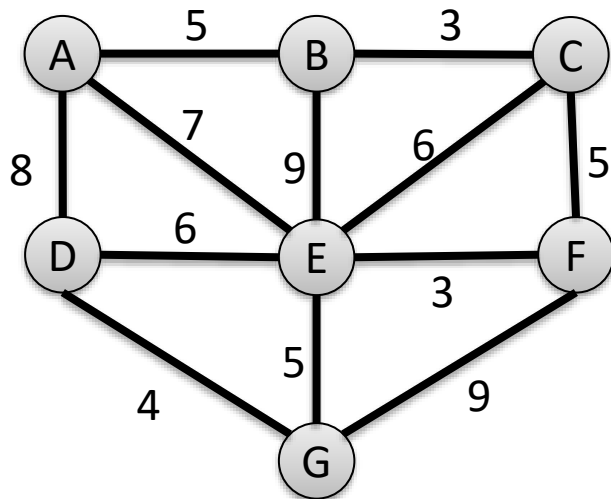
– Exemplo:



Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Prim**

– Exemplo:



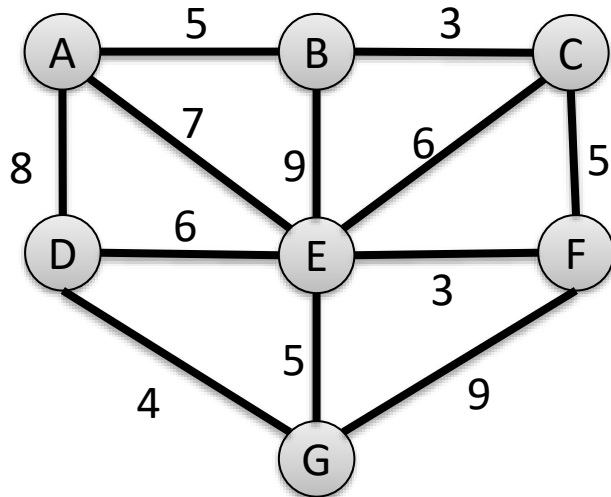
	A	B	C	D	E	F	G
A							
B							
C							
D							
E							
F							
G							

	A	B	C	D	E	F	G
p(z)							
s(z)							

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Prim**

– Exemplo:



	A	B	C	D	E	F	G
A	∞	5	∞	8	7	∞	∞
B	5	∞	3	∞	9	∞	∞
C	∞	3	∞	∞	6	5	∞
D	8	∞	∞	∞	6	∞	4
E	7	9	6	6	∞	3	5
F	∞	∞	5	∞	3	∞	9
G	∞	∞	∞	4	5	9	∞

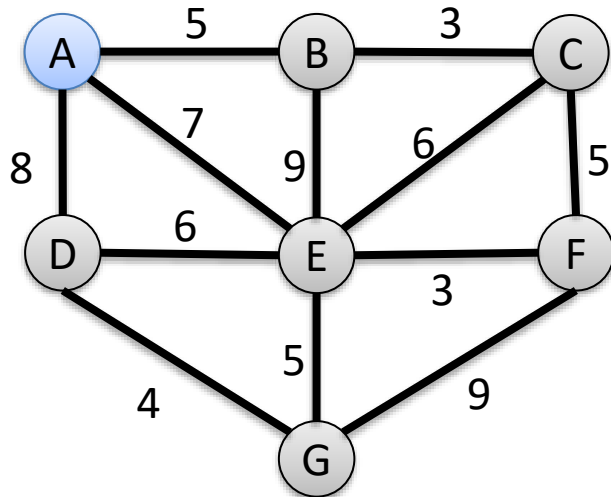
	A	B	C	D	E	F	G
p(z)							
s(z)							

A

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Prim**

– Exemplo:



A

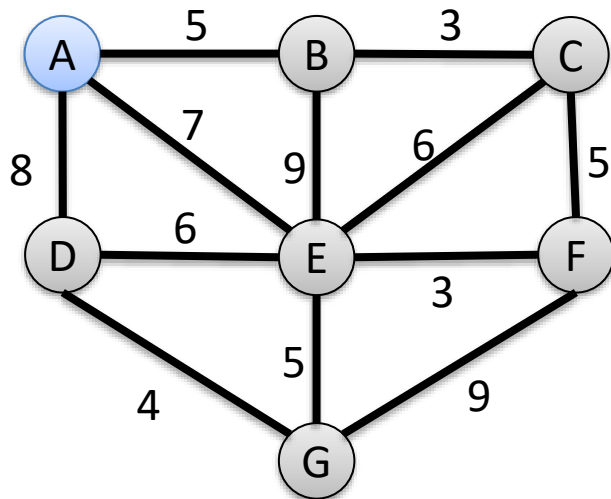
	A	B	C	D	E	F	G
A	∞	5	∞	8	7	∞	∞
B	5	∞	3	∞	9	∞	∞
C	∞	3	∞	∞	6	5	∞
D	8	∞	∞	∞	6	∞	4
E	7	9	6	6	∞	3	5
F	∞	∞	5	∞	3	∞	9
G	∞	∞	∞	4	5	9	∞

	A	B	C	D	E	F	G
p(z)							
s(z)							

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Prim**

– Exemplo:



A

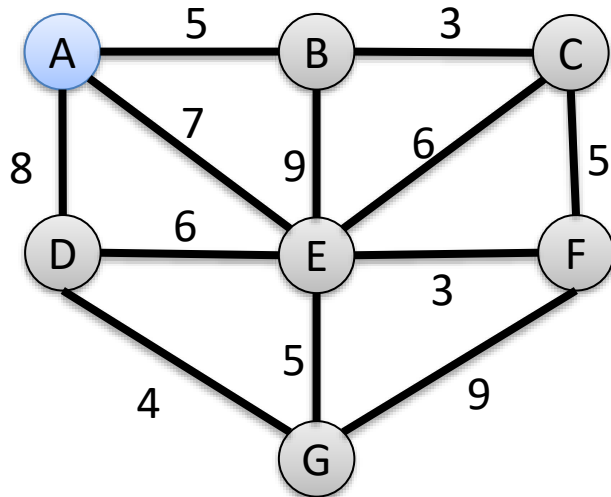
	A	B	C	D	E	F	G
A	∞	5	∞	8	7	∞	∞
B	5	∞	3	∞	9	∞	∞
C	∞	3	∞	∞	6	5	∞
D	8	∞	∞	∞	6	∞	4
E	7	9	6	6	∞	3	5
F	∞	∞	5	∞	3	∞	9
G	∞	∞	∞	4	5	9	∞

	A	B	C	D	E	F	G
p(z)	-	5	∞	8	7	∞	∞
s(z)	-	A	A	A	A	A	A

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Prim**

– Exemplo:



A

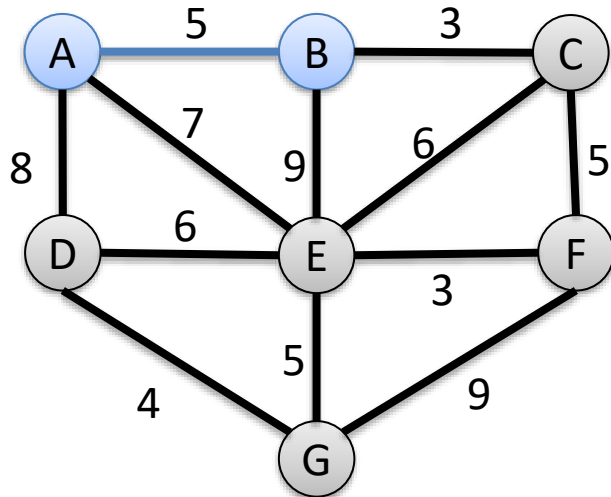
	A	B	C	D	E	F	G
A	∞	5	∞	8	7	∞	∞
B	5	∞	3	∞	9	∞	∞
C	∞	3	∞	∞	6	5	∞
D	8	∞	∞	∞	6	∞	4
E	7	9	6	6	∞	3	5
F	∞	∞	5	∞	3	∞	9
G	∞	∞	∞	4	5	9	∞

	A	B	C	D	E	F	G
p(z)	-	5	∞	8	7	∞	∞
s(z)	-	A	A	A	A	A	A

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Prim**

– Exemplo:



A

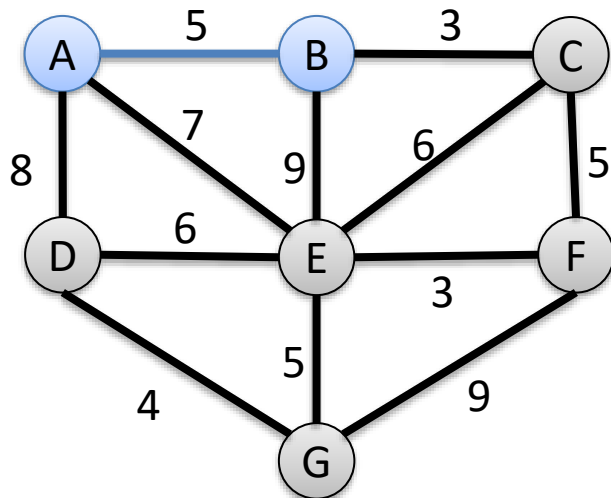
	A	B	C	D	E	F	G
A	∞	5	∞	8	7	∞	∞
B	5	∞	3	∞	9	∞	∞
C	∞	3	∞	∞	6	5	∞
D	8	∞	∞	∞	6	∞	4
E	7	9	6	6	∞	3	5
F	∞	∞	5	∞	3	∞	9
G	∞	∞	∞	4	5	9	∞

	A	B	C	D	E	F	G
p(z)	-	5	∞	8	7	∞	∞
s(z)	-	A	A	A	A	A	A

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Prim**

– Exemplo:



A

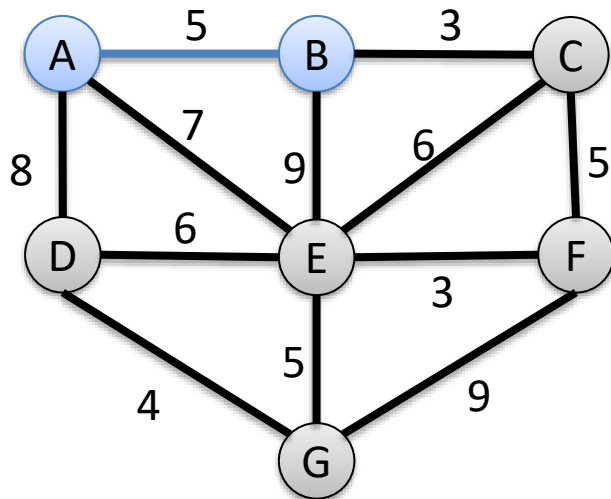
	A	B	C	D	E	F	G
A	∞	5	∞	8	7	∞	∞
B	5	∞	3	∞	9	∞	∞
C	∞	3	∞	∞	6	5	∞
D	8	∞	∞	∞	6	∞	4
E	7	9	6	6	∞	3	5
F	∞	∞	5	∞	3	∞	9
G	∞	∞	∞	4	5	9	∞

	A	B	C	D	E	F	G
p(z)	-	5					
s(z)	-	A					

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Prim**

– Exemplo:



A

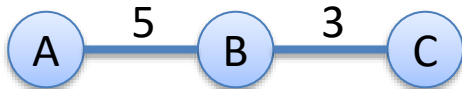
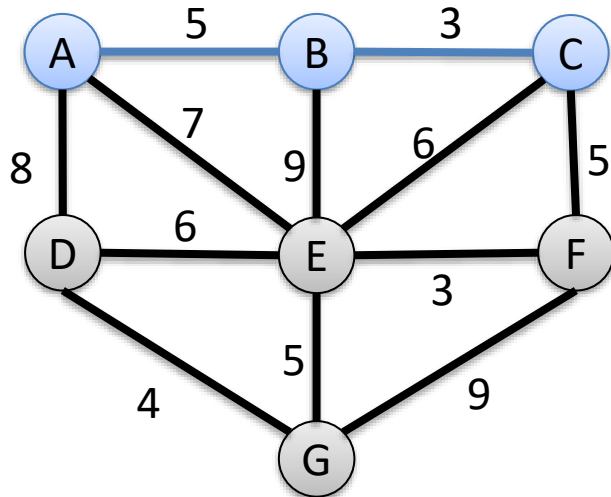
	A	B	C	D	E	F	G
A	∞	5	∞	8	7	∞	∞
B	5	∞	3	∞	9	∞	∞
C	∞	3	∞	∞	6	5	∞
D	8	∞	∞	∞	6	∞	4
E	7	9	6	6	∞	3	5
F	∞	∞	5	∞	3	∞	9
G	∞	∞	∞	4	5	9	∞

	A	B	C	D	E	F	G
p(z)	-	5	3	8	7	∞	∞
s(z)	-	A	B	A	A	A	A

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Prim**

– Exemplo:



A

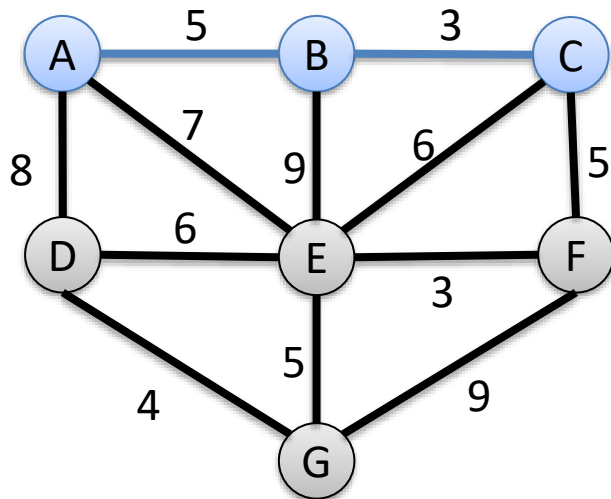
	A	B	C	D	E	F	G
A	∞	5	∞	8	7	∞	∞
B	5	∞	3	∞	9	∞	∞
C	∞	3	∞	∞	6	5	∞
D	8	∞	∞	∞	6	∞	4
E	7	9	6	6	∞	3	5
F	∞	∞	5	∞	3	∞	9
G	∞	∞	∞	4	5	9	∞

	A	B	C	D	E	F	G
p(z)	-	5	3	8	7	∞	∞
s(z)	-	A	B	A	A	A	A

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Prim**

– Exemplo:



A

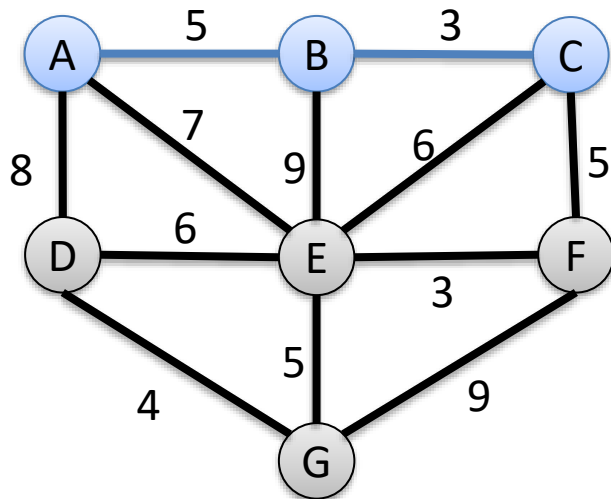
	A	B	C	D	E	F	G
A	∞	5	∞	8	7	∞	∞
B	5	∞	3	∞	9	∞	∞
C	∞	3	∞	∞	6	5	∞
D	8	∞	∞	∞	6	∞	4
E	7	9	6	6	∞	3	5
F	∞	∞	5	∞	3	∞	9
G	∞	∞	∞	4	5	9	∞

	A	B	C	D	E	F	G
p(z)	-	5	3				
s(z)	-	A	B				

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Prim**

– Exemplo:



A

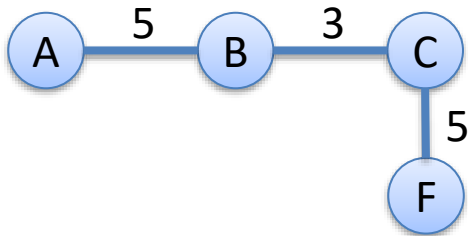
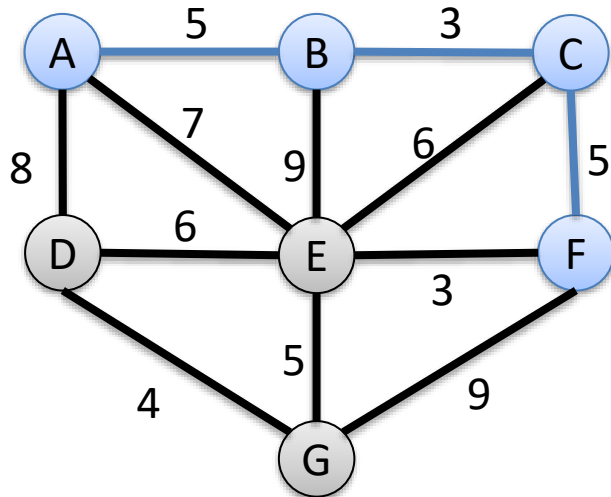
	A	B	C	D	E	F	G
A	∞	5	∞	8	7	∞	∞
B	5	∞	3	∞	9	∞	∞
C	∞	3	∞	∞	6	5	∞
D	8	∞	∞	∞	6	∞	4
E	7	9	6	6	∞	3	5
F	∞	∞	5	∞	3	∞	9
G	∞	∞	∞	4	5	9	∞

	A	B	C	D	E	F	G
p(z)	-	5	3	8	6	5	∞
s(z)	-	A	B	A	C	C	A

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Prim**

– Exemplo:



A

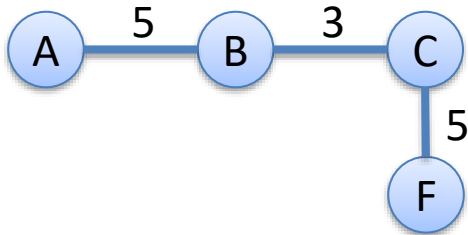
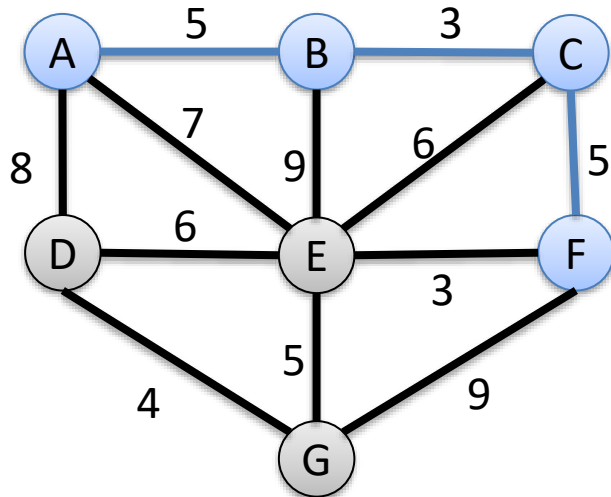
	A	B	C	D	E	F	G
A	∞	5	∞	8	7	∞	∞
B	5	∞	3	∞	9	∞	∞
C	∞	3	∞	∞	6	5	∞
D	8	∞	∞	∞	6	∞	4
E	7	9	6	6	∞	3	5
F	∞	∞	5	∞	3	∞	9
G	∞	∞	∞	4	5	9	∞

	A	B	C	D	E	F	G
p(z)	-	5	3	8	6	5	∞
s(z)	-	A	B	A	C	C	A

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Prim**

– Exemplo:



A

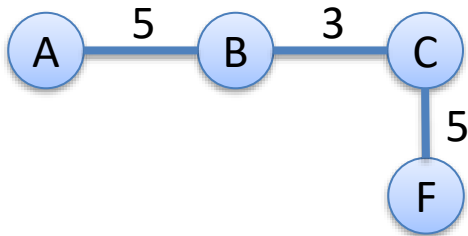
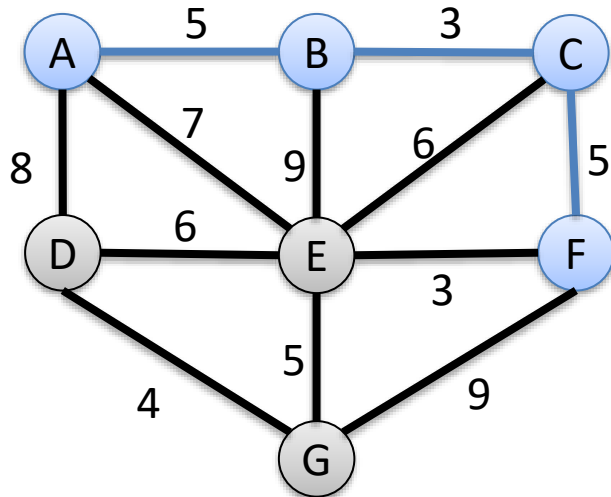
	A	B	C	D	E	F	G
A	∞	5	∞	8	7	∞	∞
B	5	∞	3	∞	9	∞	∞
C	∞	3	∞	∞	6	5	∞
D	8	∞	∞	∞	6	∞	4
E	7	9	6	6	∞	3	5
F	∞	∞	5	∞	3	∞	9
G	∞	∞	∞	4	5	9	∞

	A	B	C	D	E	F	G
p(z)	-	5	3			5	
s(z)	-	A	B			C	

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Prim**

– Exemplo:



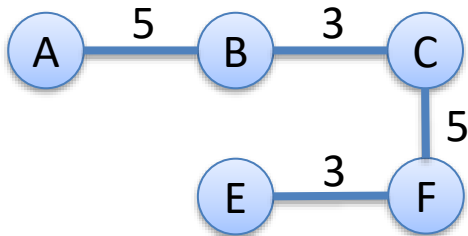
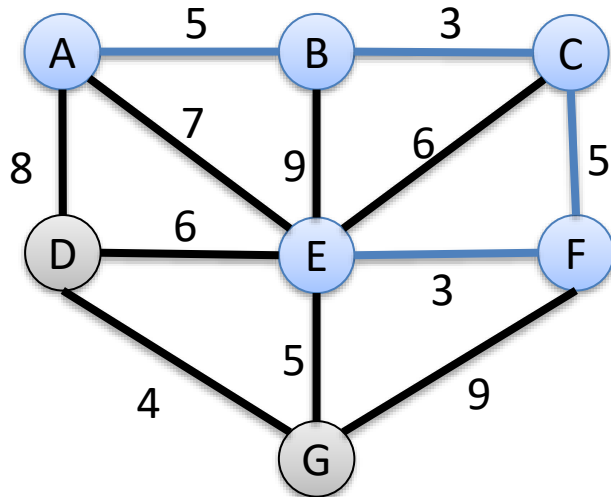
	A	B	C	D	E	F	G
A	∞	5	∞	8	7	∞	∞
B	5	∞	3	∞	9	∞	∞
C	∞	3	∞	∞	6	5	∞
D	8	∞	∞	∞	6	∞	4
E	7	9	6	6	∞	3	5
F	∞	∞	5	∞	3	∞	9
G	∞	∞	∞	4	5	9	∞

	A	B	C	D	E	F	G
p(z)	-	5	3	8	3	5	9
s(z)	-	A	B	A	F	C	F

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Prim**

– Exemplo:



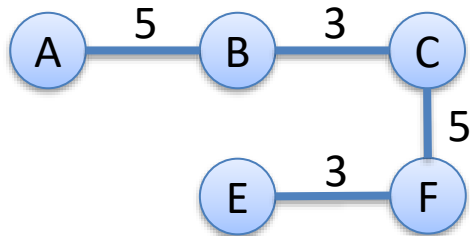
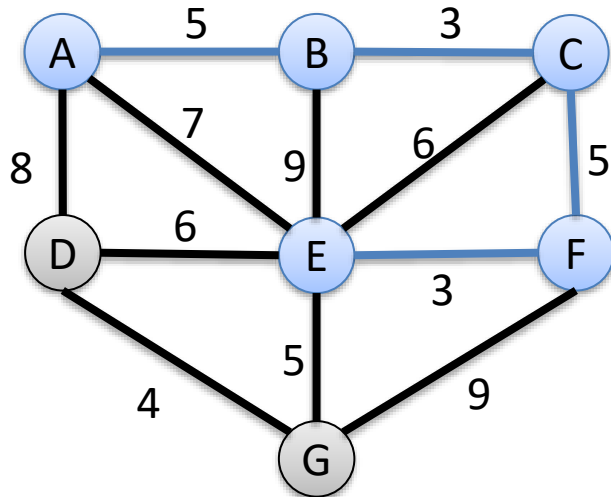
	A	B	C	D	E	F	G
A	∞	5	∞	8	7	∞	∞
B	5	∞	3	∞	9	∞	∞
C	∞	3	∞	∞	6	5	∞
D	8	∞	∞	∞	6	∞	4
E	7	9	6	6	∞	3	5
F	∞	∞	5	∞	3	∞	9
G	∞	∞	∞	4	5	9	∞

	A	B	C	D	E	F	G
p(z)	-	5	3	8	3	5	9
s(z)	-	A	B	A	F	C	F

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Prim**

– Exemplo:



A

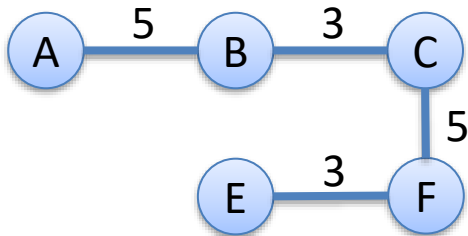
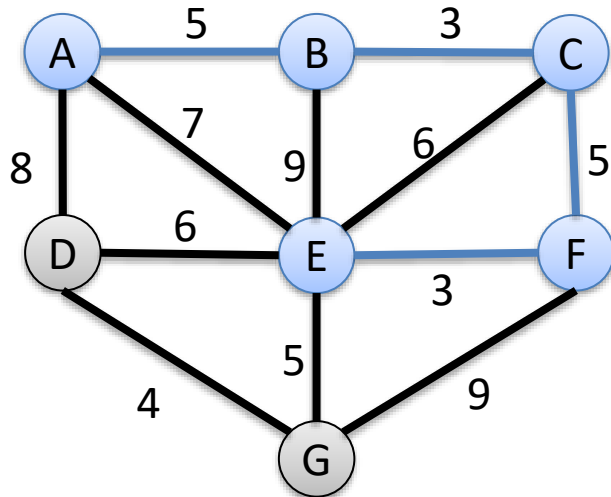
	A	B	C	D	E	F	G
A	∞	5	∞	8	7	∞	∞
B	5	∞	3	∞	9	∞	∞
C	∞	3	∞	∞	6	5	∞
D	8	∞	∞	∞	6	∞	4
E	7	9	6	6	∞	3	5
F	∞	∞	5	∞	3	∞	9
G	∞	∞	∞	4	5	9	∞

	A	B	C	D	E	F	G
p(z)	-	5	3		3	5	
s(z)	-	A	B		F	C	

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Prim**

– Exemplo:



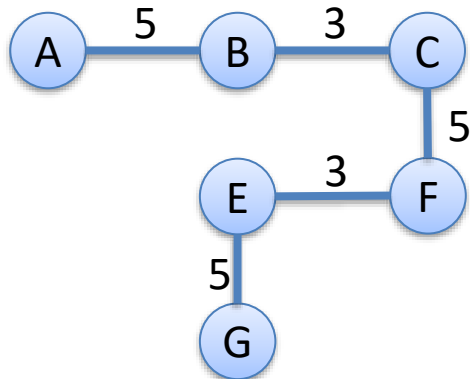
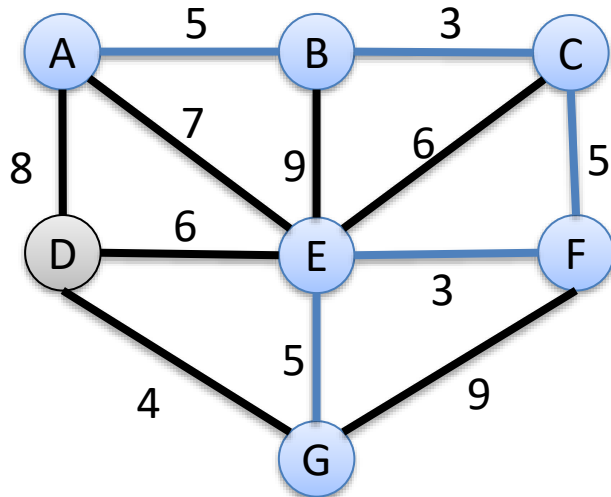
	A	B	C	D	E	F	G
A	∞	5	∞	8	7	∞	∞
B	5	∞	3	∞	9	∞	∞
C	∞	3	∞	∞	6	5	∞
D	8	∞	∞	∞	6	∞	4
E	7	9	6	6	∞	3	5
F	∞	∞	5	∞	3	∞	9
G	∞	∞	∞	4	5	9	∞

	A	B	C	D	E	F	G
p(z)	-	5	3	6	3	5	5
s(z)	-	A	B	E	F	C	E

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Prim**

– Exemplo:



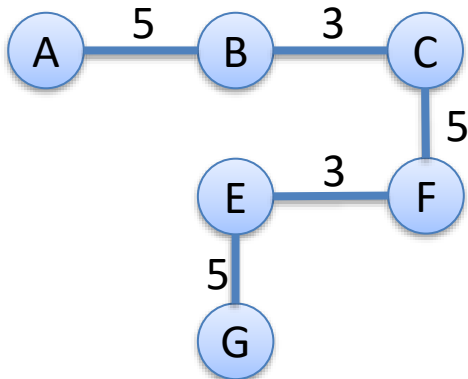
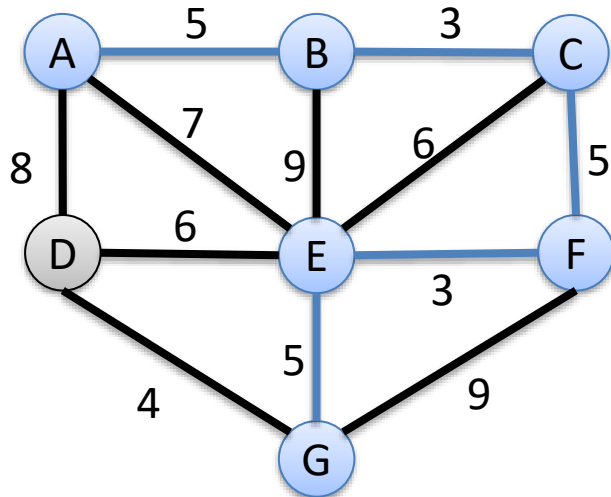
	A	B	C	D	E	F	G
A	∞	5	∞	8	7	∞	∞
B	5	∞	3	∞	9	∞	∞
C	∞	3	∞	∞	6	5	∞
D	8	∞	∞	∞	6	∞	4
E	7	9	6	6	∞	3	5
F	∞	∞	5	∞	3	∞	9
G	∞	∞	∞	4	5	9	∞

	A	B	C	D	E	F	G
p(z)	-	5	3	6	3	5	5
s(z)	-	A	B	E	F	C	E

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Prim**

– Exemplo:



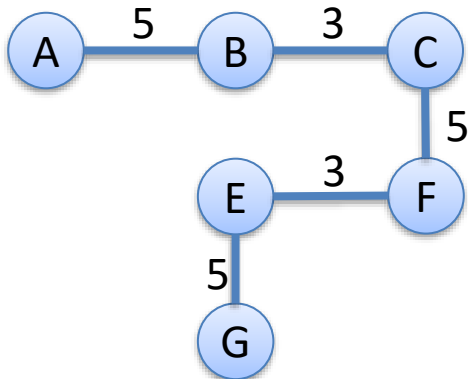
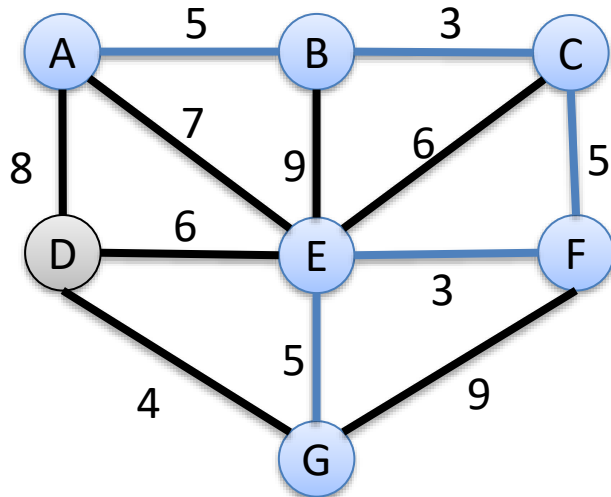
	A	B	C	D	E	F	G
A	∞	5	∞	8	7	∞	∞
B	5	∞	3	∞	9	∞	∞
C	∞	3	∞	∞	6	5	∞
D	8	∞	∞	∞	6	∞	4
E	7	9	6	6	∞	3	5
F	∞	∞	5	∞	3	∞	9
G	∞	∞	∞	4	5	9	∞

	A	B	C	D	E	F	G
p(z)	-	5	3		3	5	5
s(z)	-	A	B		F	C	E

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Prim**

– Exemplo:



A

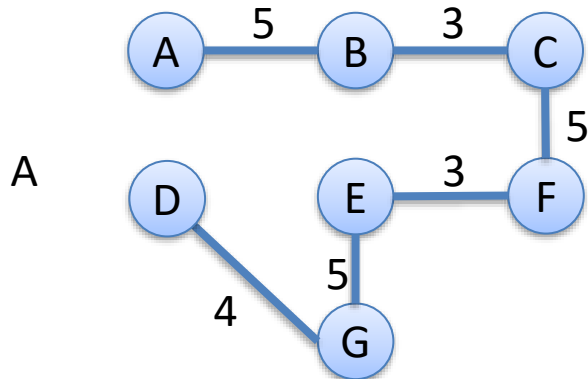
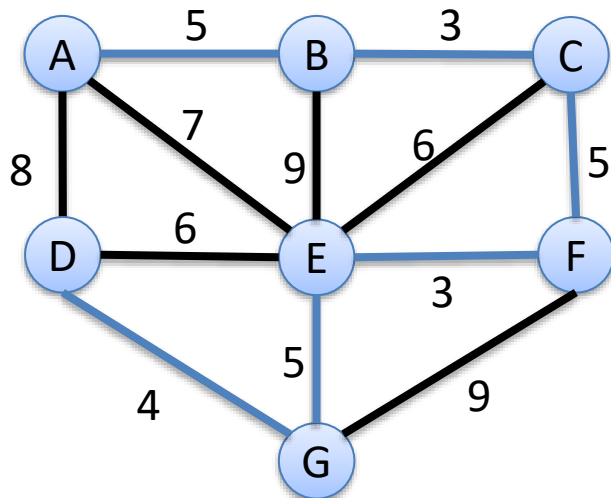
	A	B	C	D	E	F	G
A	∞	5	∞	8	7	∞	∞
B	5	∞	3	∞	9	∞	∞
C	∞	3	∞	∞	6	5	∞
D	8	∞	∞	∞	6	∞	4
E	7	9	6	6	∞	3	5
F	∞	∞	5	∞	3	∞	9
G	∞	∞	∞	4	5	9	∞

	A	B	C	D	E	F	G
p(z)	-	5	3	4	3	5	5
s(z)	-	A	B	G	F	C	E

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Prim**

– Exemplo:



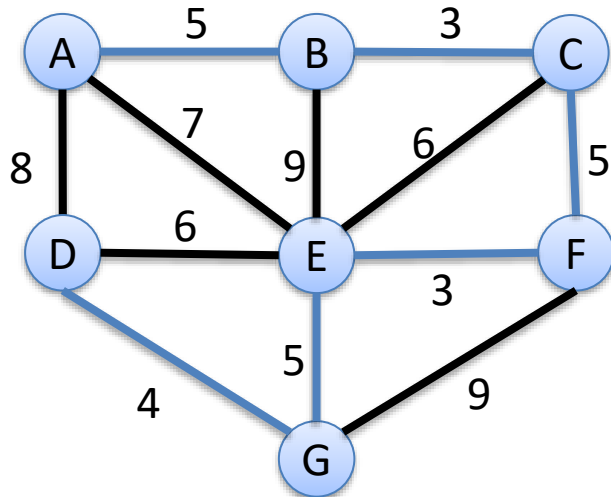
	A	B	C	D	E	F	G
A	∞	5	∞	8	7	∞	∞
B	5	∞	3	∞	9	∞	∞
C	∞	3	∞	∞	6	5	∞
D	8	∞	∞	∞	6	∞	4
E	7	9	6	6	∞	3	5
F	∞	∞	5	∞	3	∞	9
G	∞	∞	∞	4	5	9	∞

	A	B	C	D	E	F	G
p(z)	-	5	3	4	3	5	5
s(z)	-	A	B	G	F	C	E

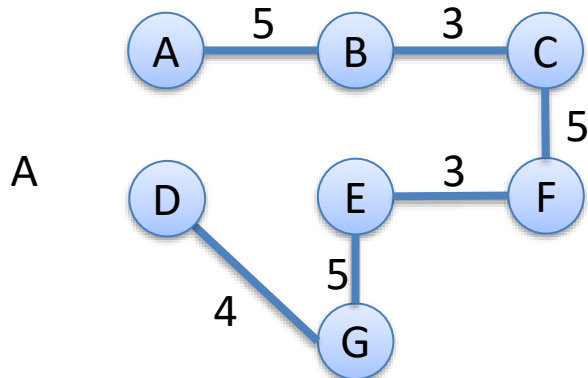
Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Prim**

– Exemplo:



	A	B	C	D	E	F	G
A	∞	5	∞	8	7	∞	∞
B	5	∞	3	∞	9	∞	∞
C	∞	3	∞	∞	6	5	∞
D	8	∞	∞	∞	6	∞	4
E	7	9	6	6	∞	3	5
F	∞	∞	5	∞	3	∞	9
G	∞	∞	∞	4	5	9	∞



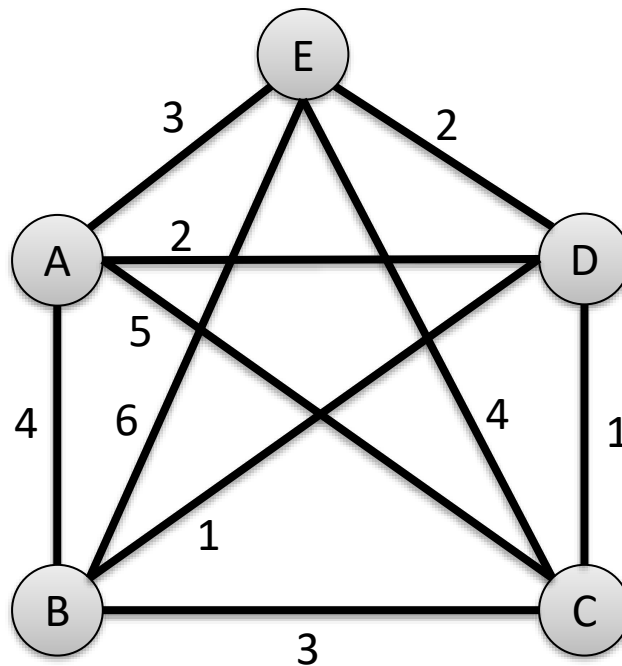
	A	B	C	D	E	F	G
p(z)	-	5	3	4	3	5	5
s(z)	-	A	B	G	F	C	E

FIM!

Árvores Geradoras Mínimas

- **Exercício 1:**

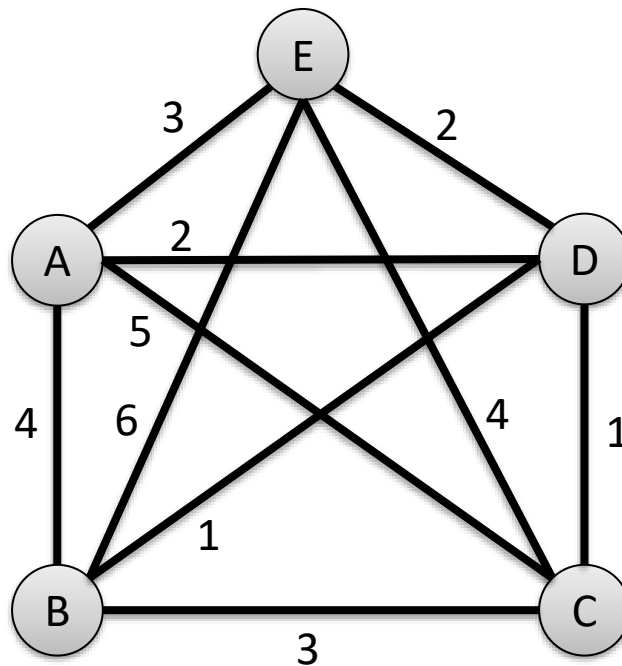
- Aplique o algoritmo de Prim para identificar uma árvore geradora mínima para o grafo abaixo, partindo do nó A.



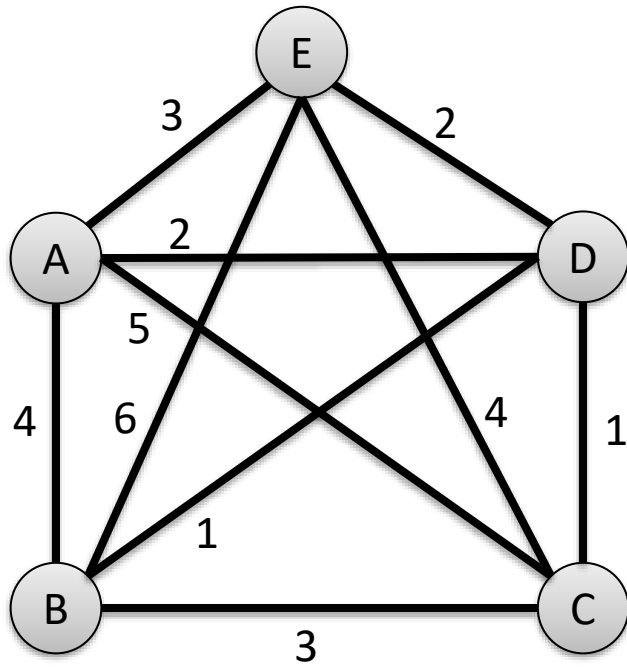
Árvores Geradoras Mínimas

- **Exercício 1:**

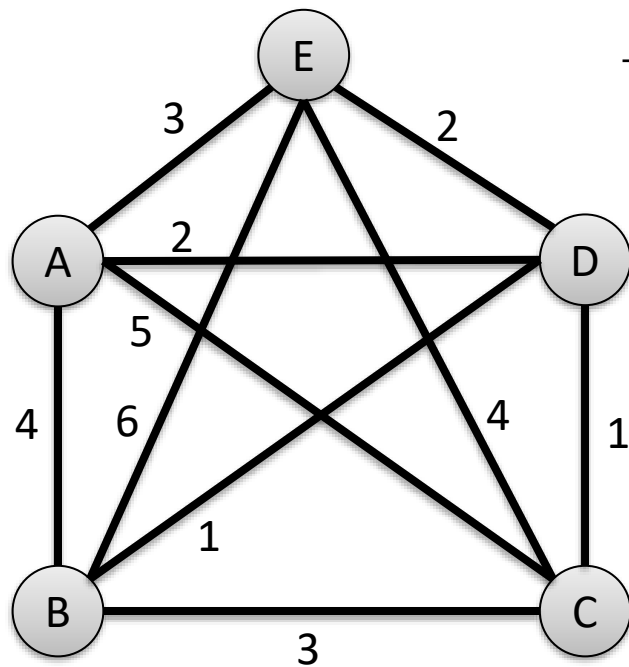
- Aplique o algoritmo de Prim para identificar uma árvore geradora mínima para o grafo abaixo, partindo do nó A.



- **Exercício 1:**



• **Exercício 1:**



	A	B	C	D	E
A					
B					
C					
D					
E					

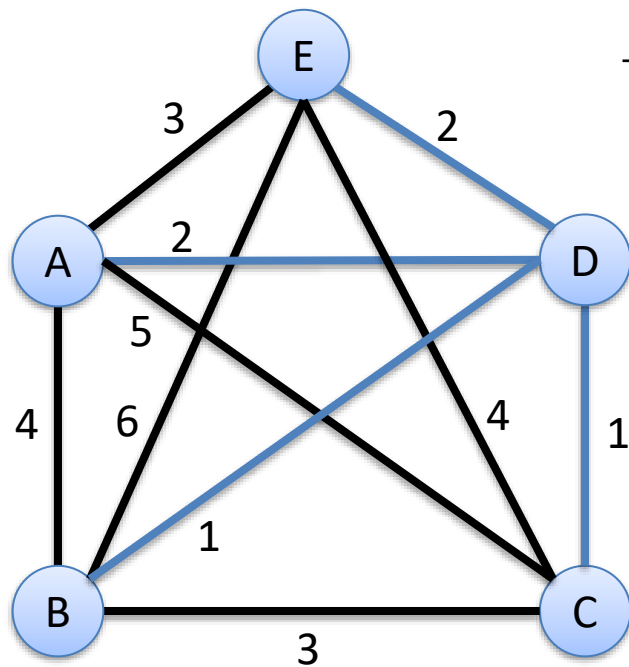
	A	B	C	D	E
p(z)					
s(z)					

	A	B	C	D	E
p(z)					
s(z)					

	A	B	C	D	E
p(z)					
s(z)					

	A	B	C	D	E
p(z)					
s(z)					

• Exercício 1:



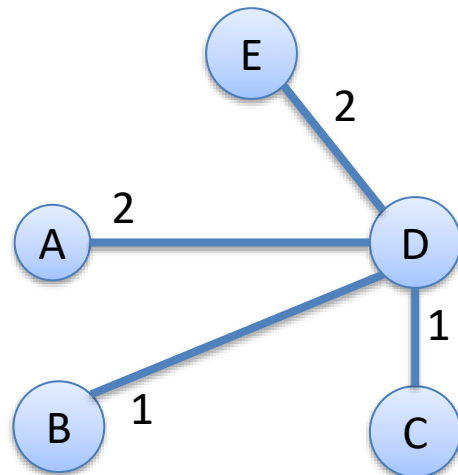
	A	B	C	D	E
A	∞	4	5	2	3
B	4	∞	3	1	6
C	5	3	∞	1	4
D	2	1	1	∞	2
E	3	6	4	2	∞

	A	B	C	D	E
p(z)	-	4	5	2	3
s(z)	-	A	A	A	A

	A	B	C	D	E
p(z)	-	4	1	2	2
s(z)	-	A	D	A	D

	A	B	C	D	E
p(z)	-	1	1	2	2
s(z)	-	D	D	A	D

	A	B	C	D	E
p(z)	-	1	1	2	2
s(z)	-	D	D	A	D



Árvores Geradoras Mínimas

- **Algoritmo de Kruskal**

- Apesar de também ser um algoritmo baseado em uma **lógica gulosa**, é um pouco mais **complexo** que o algoritmo de Prim.
- Inicialmente, o algoritmo cria um **novo grafo F** com **todos** os **vértices** de G e **nenhuma aresta**. O grafo F corresponde a uma **floresta de árvores**.
- As **arestas** do grafo original são **ordenadas** de forma **crescente** por **peso** em uma lista.
- Em cada etapa, a **aresta de menor peso** (u,v) é **retirada** da lista. Se **não formar um ciclo**, os nós **u** e **v** são **conectados** por esta aresta, **unindo duas árvores** da floresta F.
- Isso é feito até que **todas as arestas** tenham sido retiradas da lista.

Árvores Geradoras Mínimas

- **Algoritmo de Kruskal**

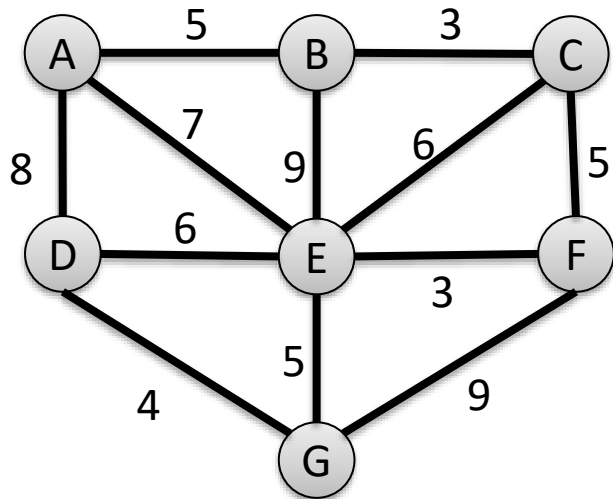
- Passo a passo:

1. Inicie a **floresta F** com todos os vértices de G .
2. Crie uma **lista de arestas ordenada** pelo **peso** de cada uma.
3. Retire da lista a aresta de **menor peso**.
4. Verifique se **conectar os nós** da floresta irá **gerar um ciclo** (basta verificar se existe uma **árvore que contenha ambos os nós** (u,v) da aresta).
5. Se não formar ciclo, **conecte** as árvores respectivas aos nós da aresta.
6. Se ainda existem **arestas não retiradas da lista**, volte ao **passo 3**.

Árvores Geradoras Mínimas

- **Algoritmo de Kruskal**

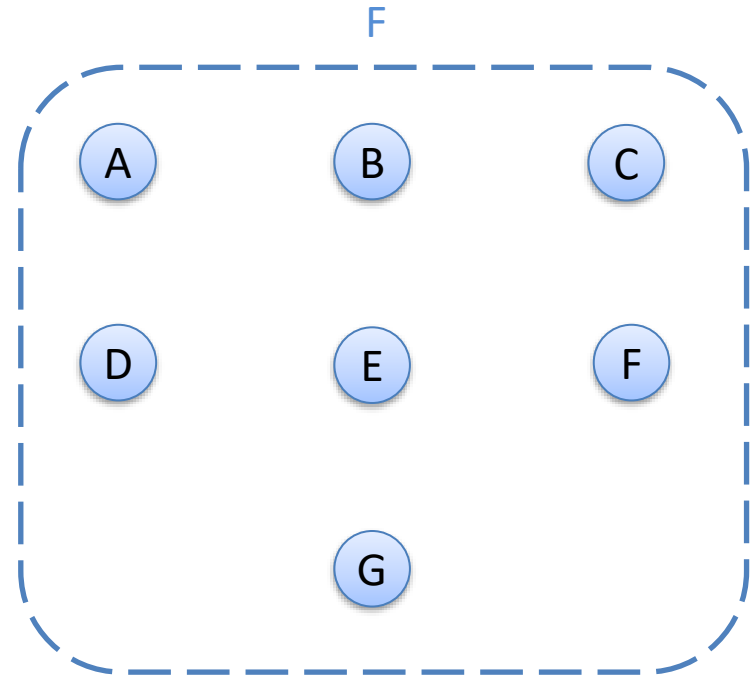
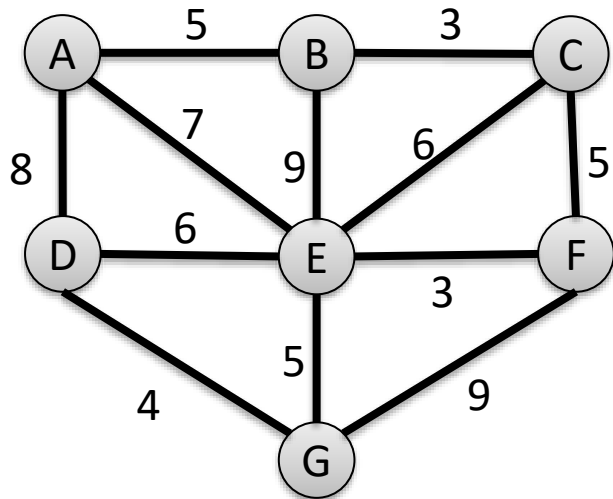
— Exemplo:



Árvores Geradoras Mínimas

- **Algoritmo de Kruskal**

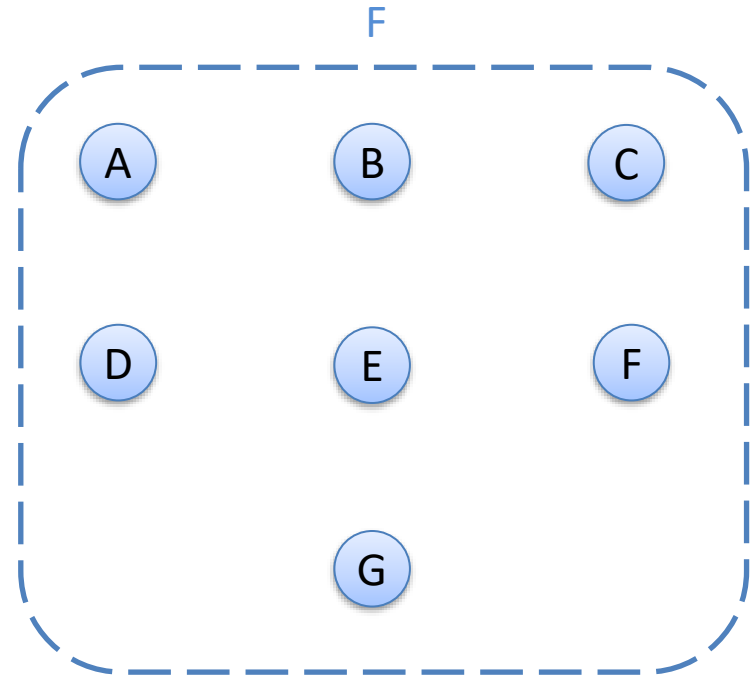
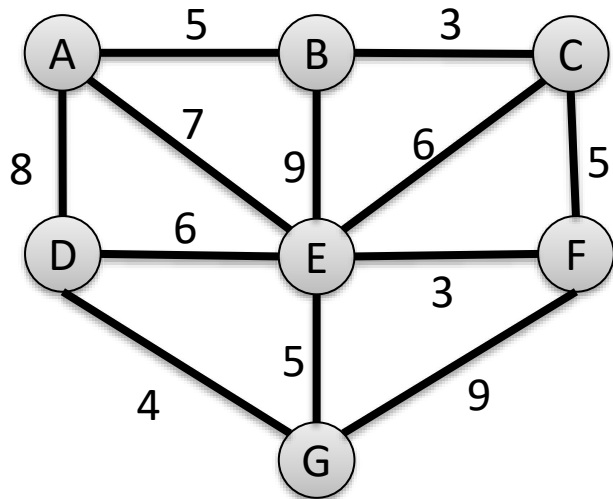
- Exemplo:

[illegible]

Árvores Geradoras Mínimas

- **Algoritmo de Kruskal**

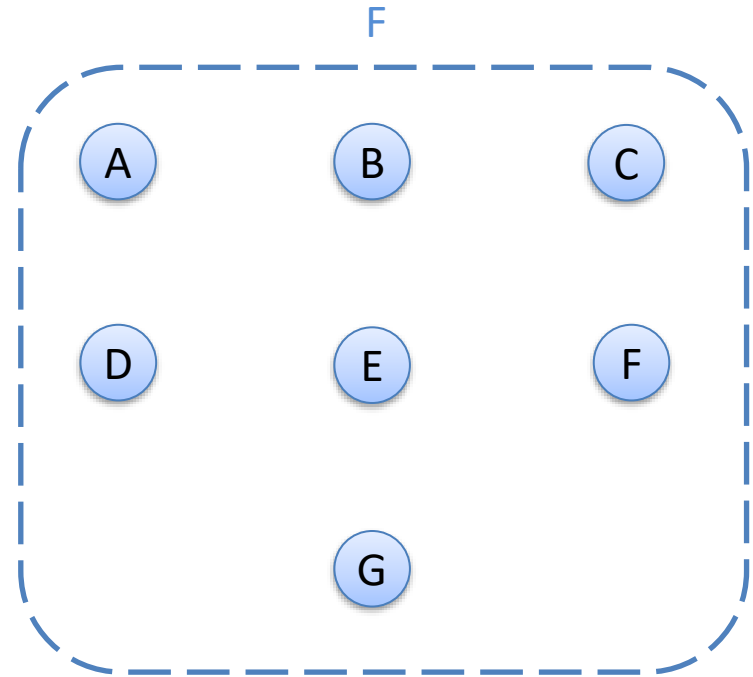
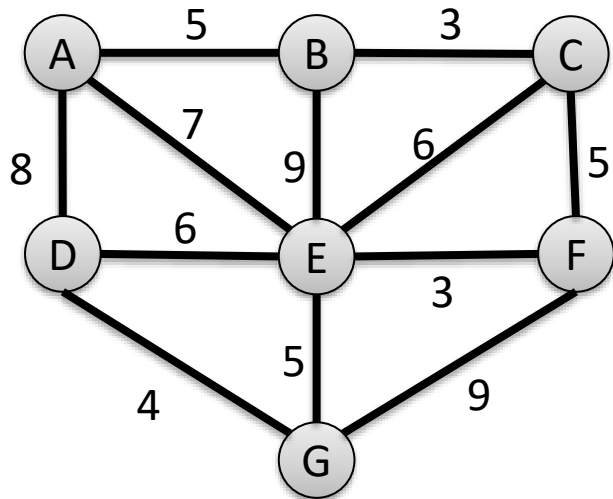
- Exemplo:

[illegible]

Árvores Geradoras Mínimas

- **Algoritmo de Kruskal**

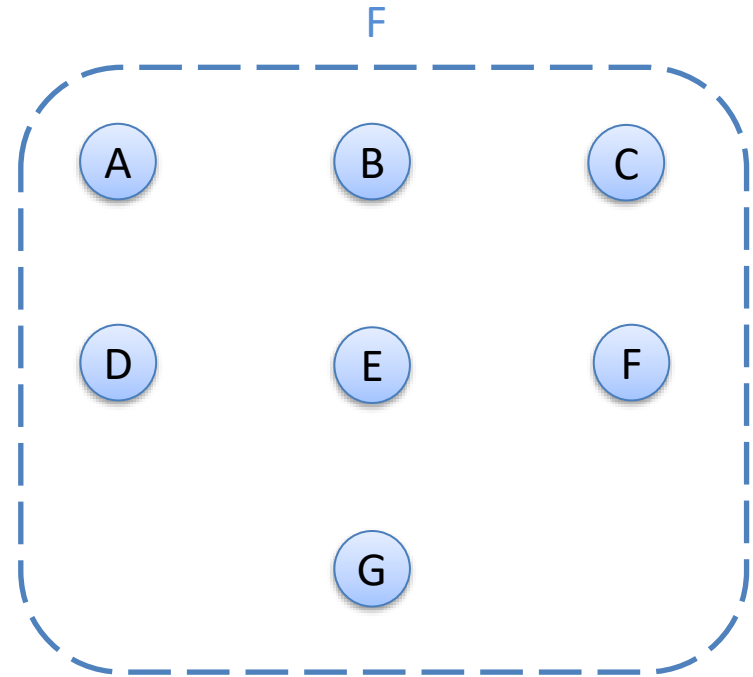
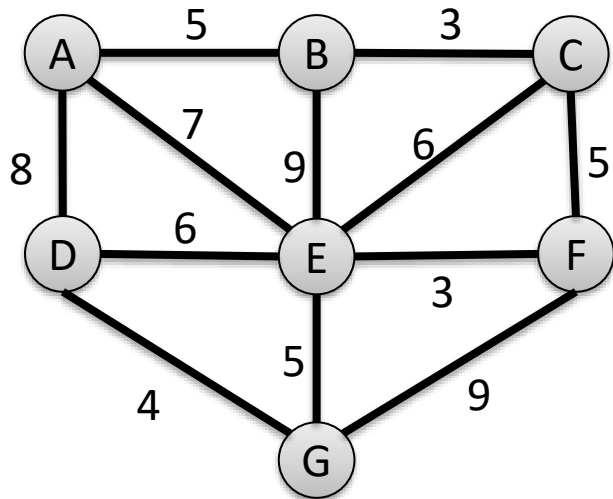
- Exemplo:

[illegible]

Árvores Geradoras Mínimas

- **Algoritmo de Kruskal**

- Exemplo:

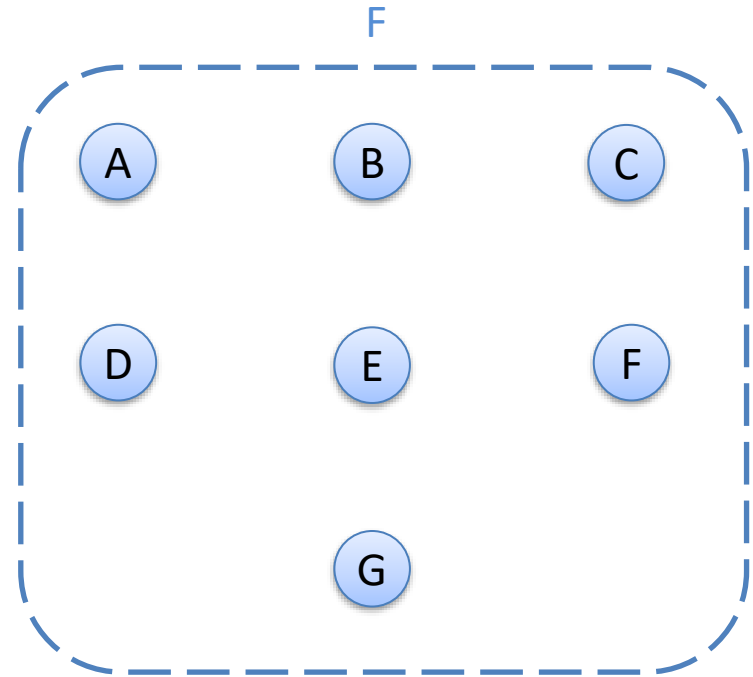
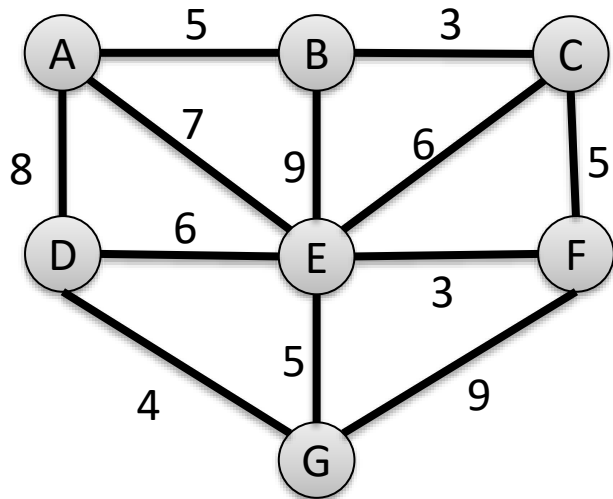


arestas	BC	EF	DG								
peso	3	3	4								

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Kruskal**

– Exemplo:

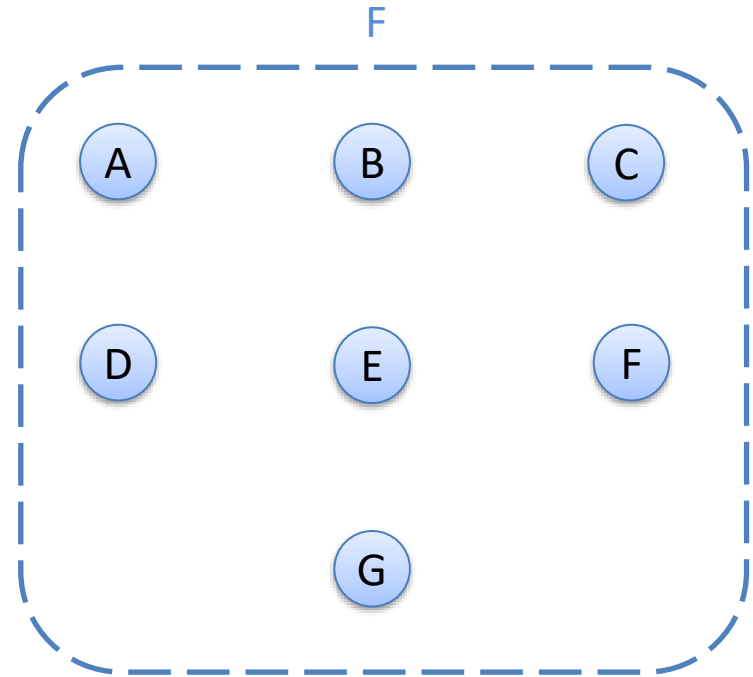
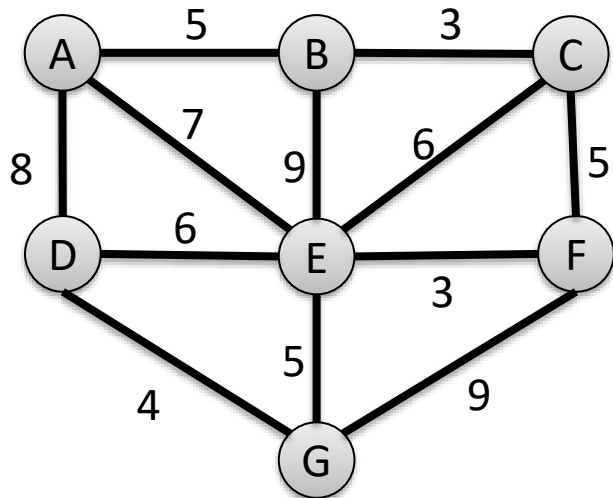


arestas	BC	EF	DG	AB								
peso	3	3	4	5								

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Kruskal**

– Exemplo:

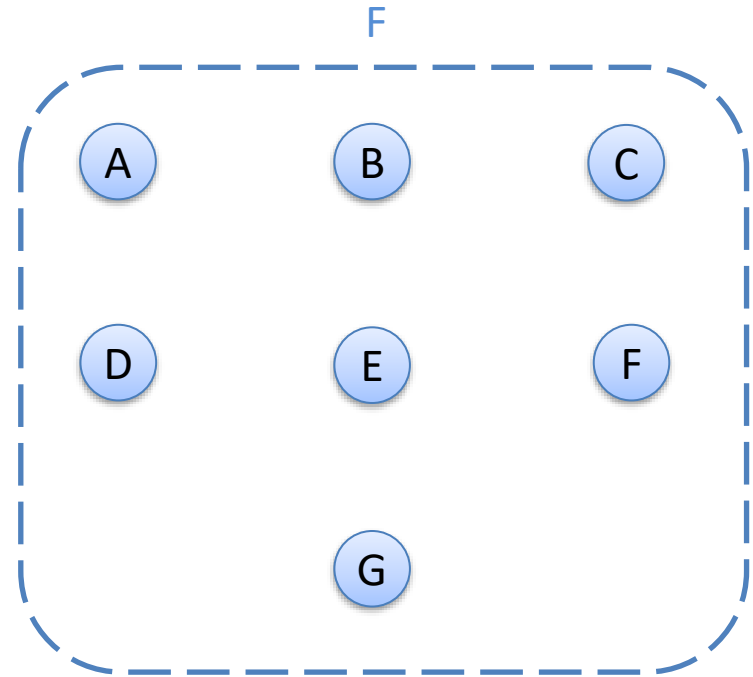
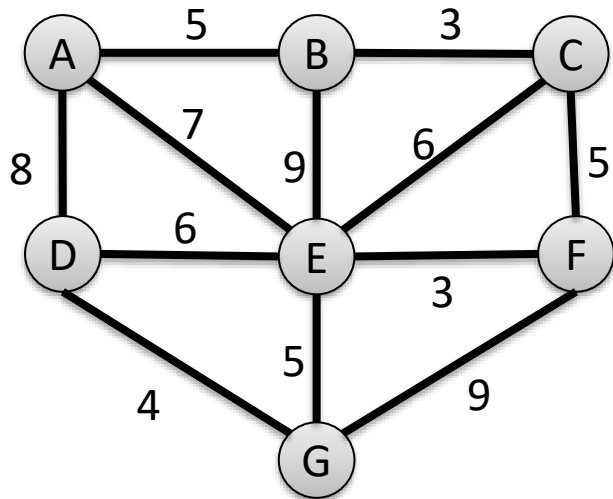


arestas	BC	EF	DG	AB	CF							
peso	3	3	4	5	5							

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Kruskal**

– Exemplo:

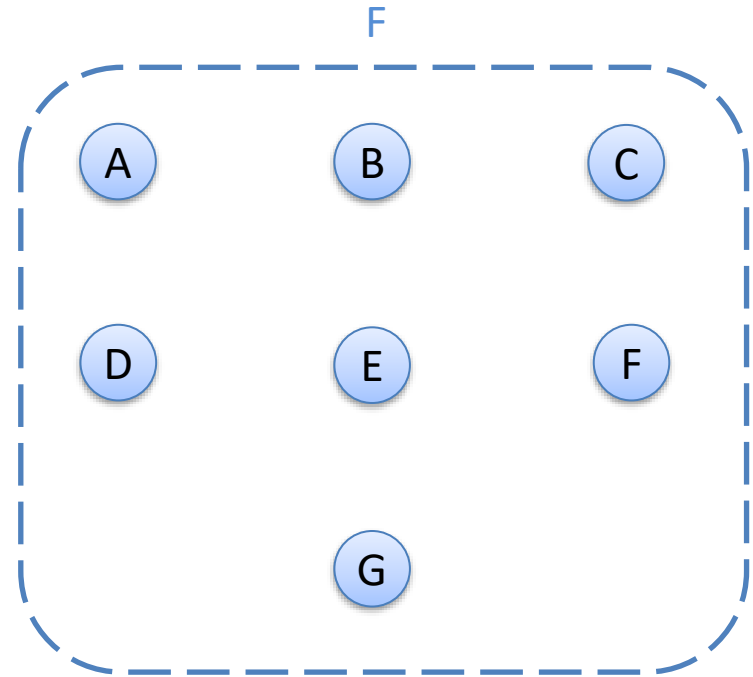
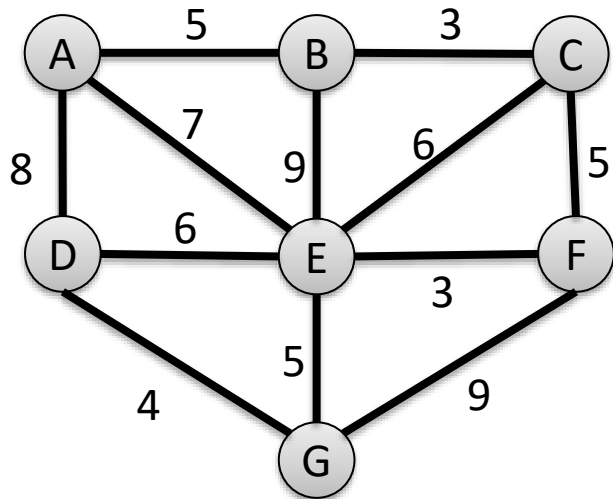


arestas	BC	EF	DG	AB	CF	EG						
peso	3	3	4	5	5	5						

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Kruskal

– Exemplo:

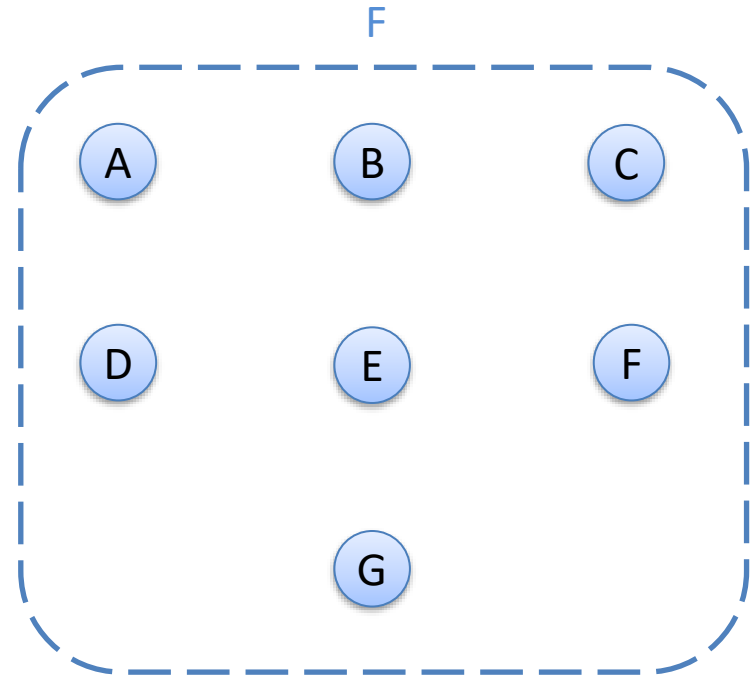
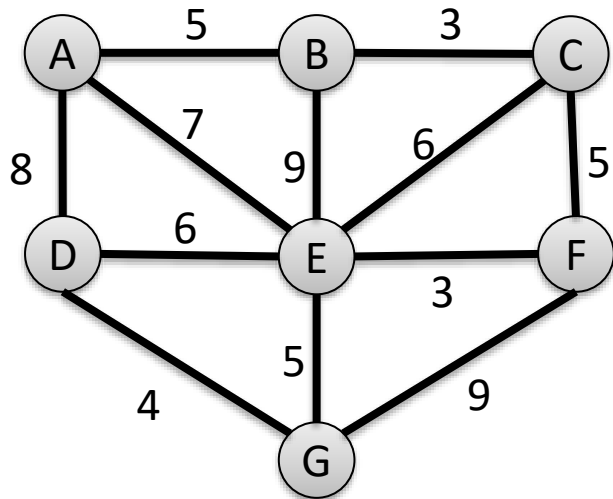


arestas	BC	EF	DG	AB	CF	EG	CE					
peso	3	3	4	5	5	5	6					

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Kruskal**

– Exemplo:

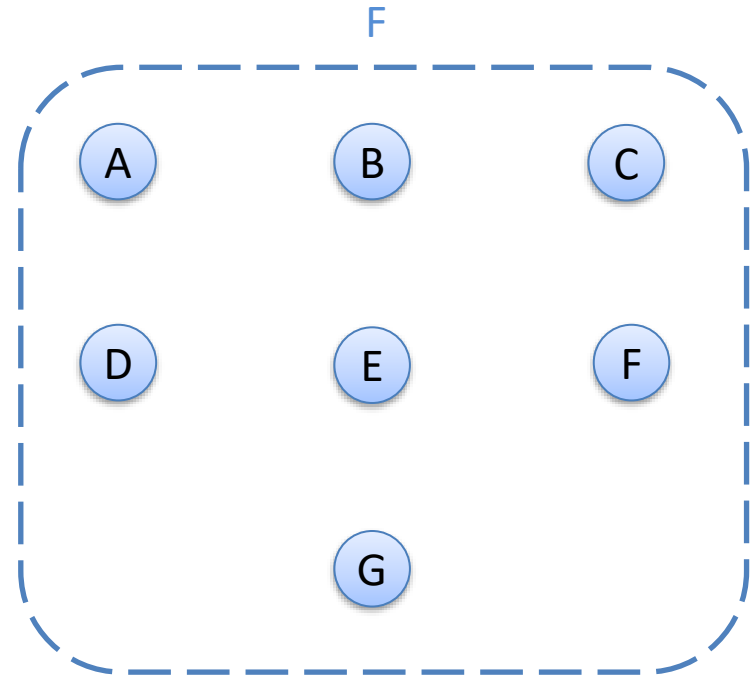
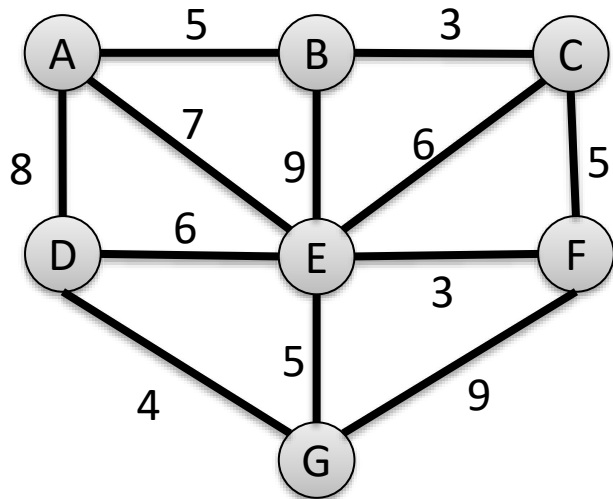


arestas	BC	EF	DG	AB	CF	EG	CE	DE				
peso	3	3	4	5	5	5	6	6				

Árvores Geradoras Mínimas

- **Algoritmo de Kruskal**

– Exemplo:

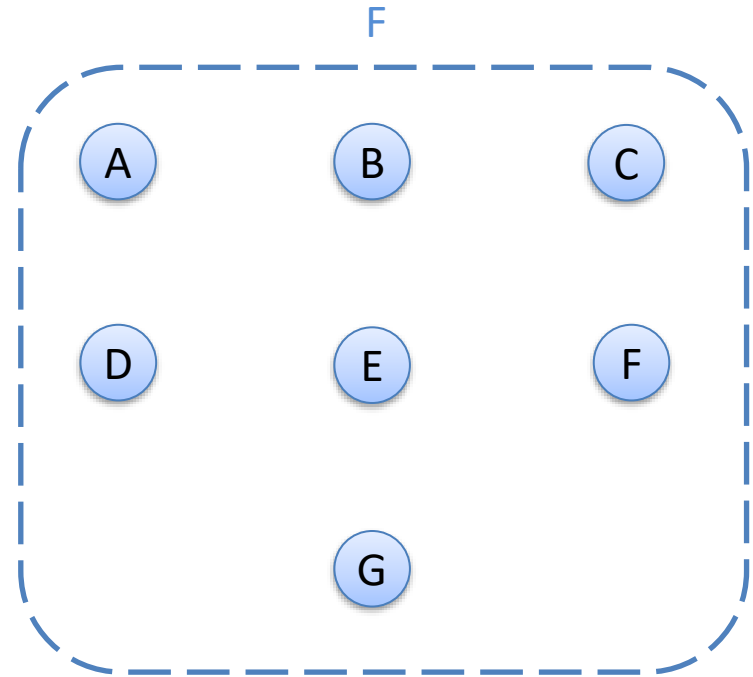
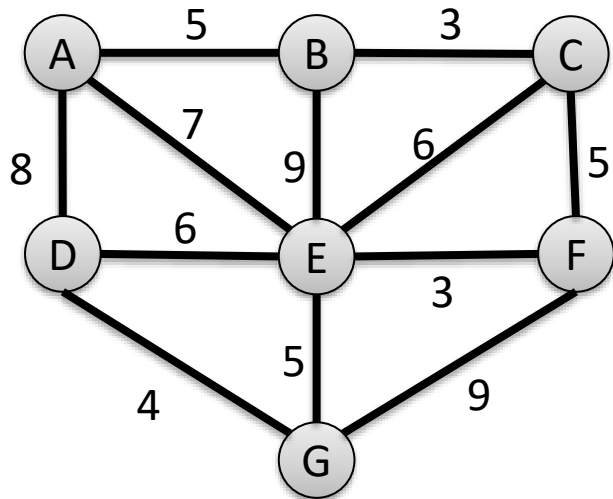


arestas	BC	EF	DG	AB	CF	EG	CE	DE	AE			
peso	3	3	4	5	5	5	6	6	7			

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Kruskal**

– Exemplo:

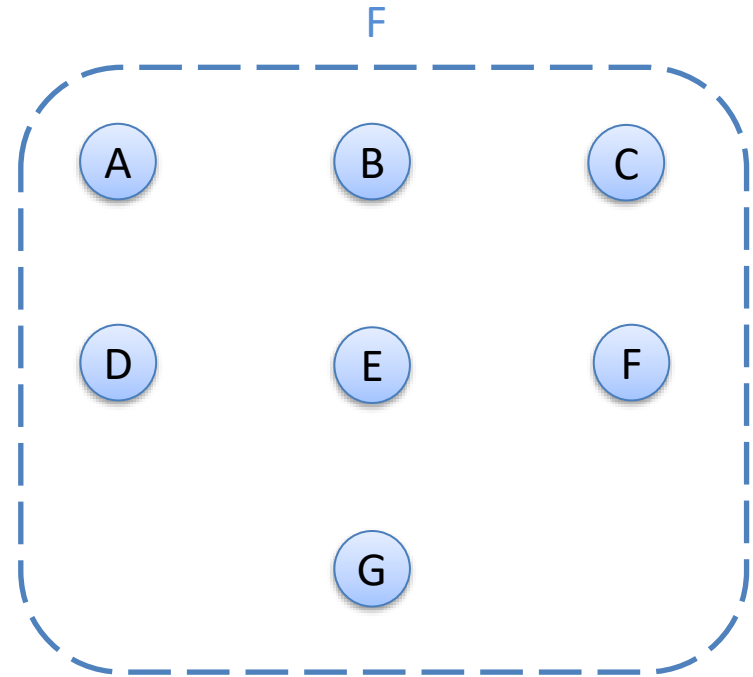
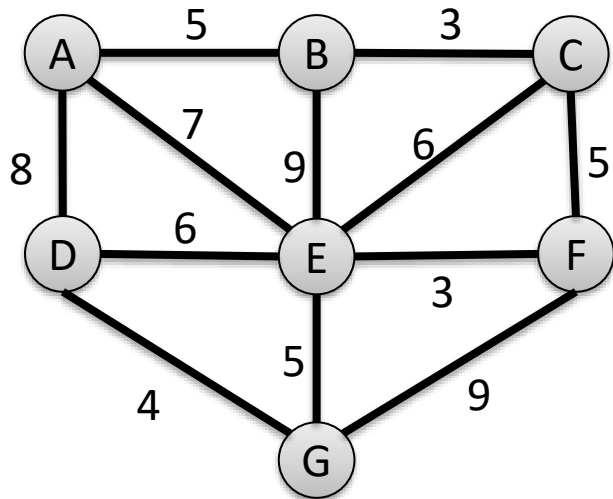


arestas	BC	EF	DG	AB	CF	EG	CE	DE	AE	AD		
peso	3	3	4	5	5	5	6	6	7	8		

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Kruskal

– Exemplo:

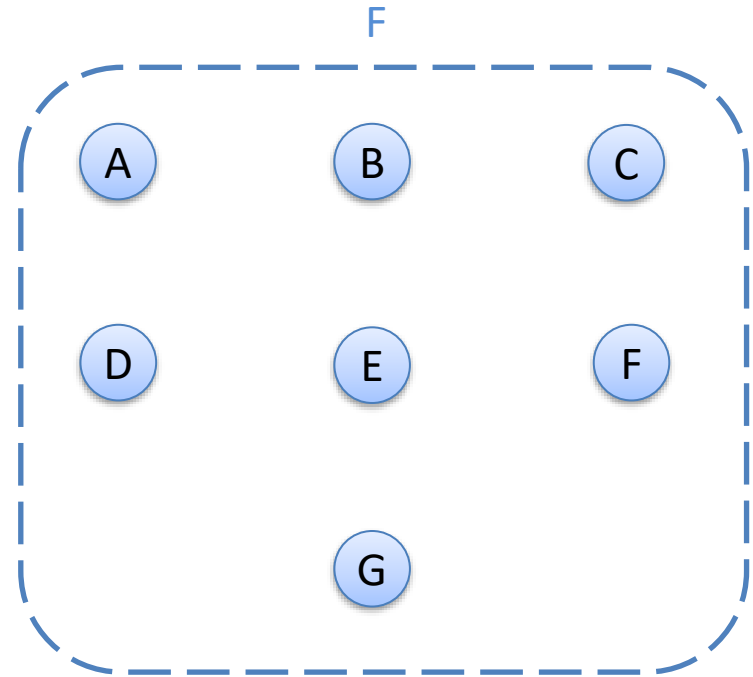
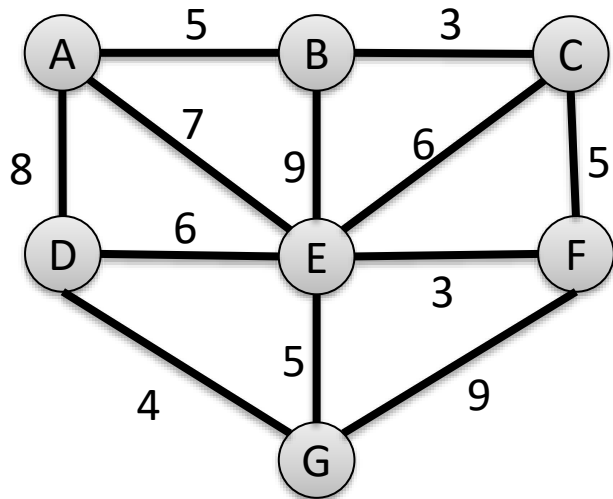


arestas	BC	EF	DG	AB	CF	EG	CE	DE	AE	AD	BE	
peso	3	3	4	5	5	5	6	6	7	8	9	

Árvores Geradoras Mínimas

- **Algoritmo de Kruskal**

– Exemplo:

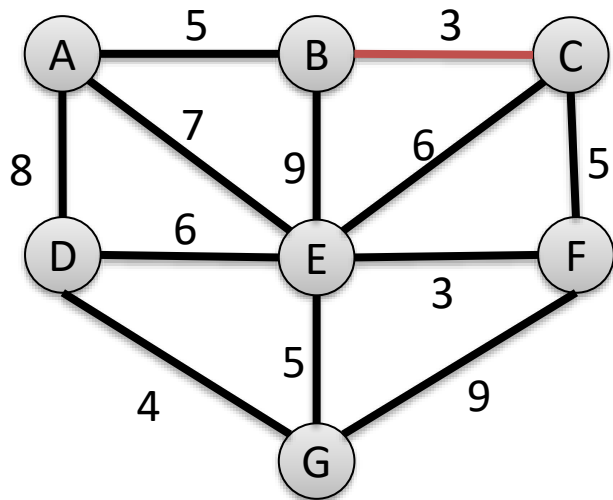


arestas	BC	EF	DG	AB	CF	EG	CE	DE	AE	AD	BE	FG
peso	3	3	4	5	5	5	6	6	7	8	9	9

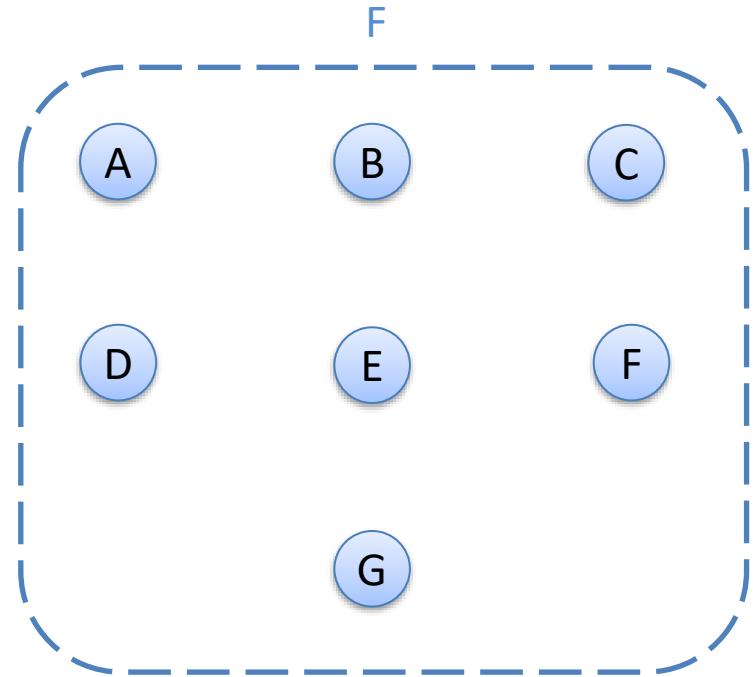
Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Kruskal

– Exemplo:



Forma ciclo?

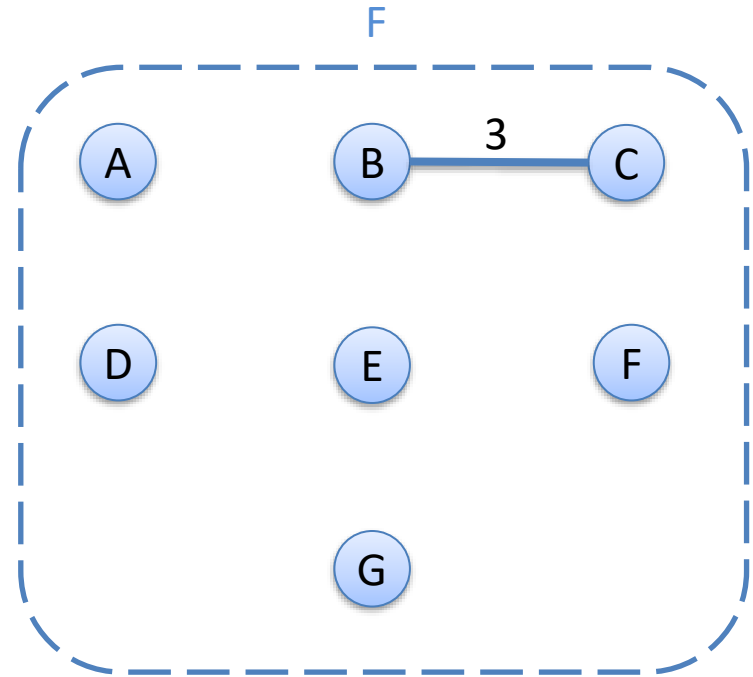
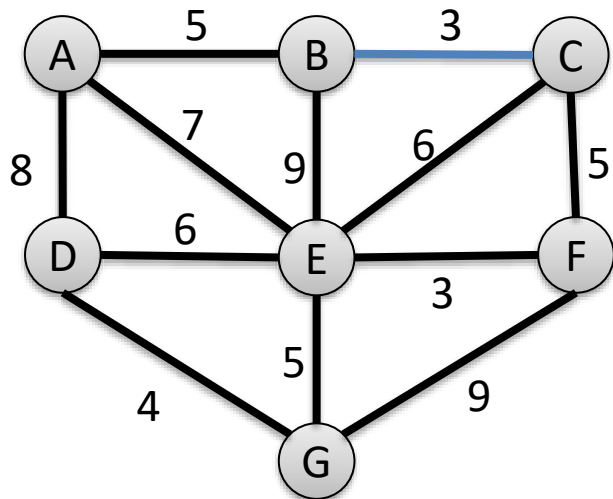


arestas	BC	EF	DG	AB	CF	EG	CE	DE	AE	AD	BE	FG
peso	3	3	4	5	5	5	6	6	7	8	9	9

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Kruskal

– Exemplo:



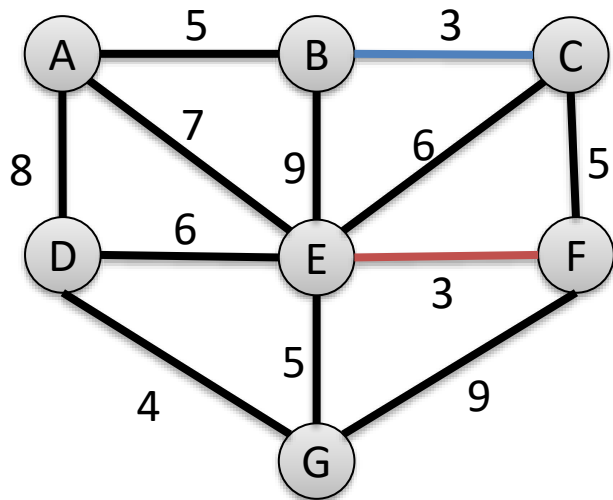
Forma ciclo? **Não!**

arestas	BC	EF	DG	AB	CF	EG	CE	DE	AE	AD	BE	FG
peso	3	3	4	5	5	5	6	6	7	8	9	9

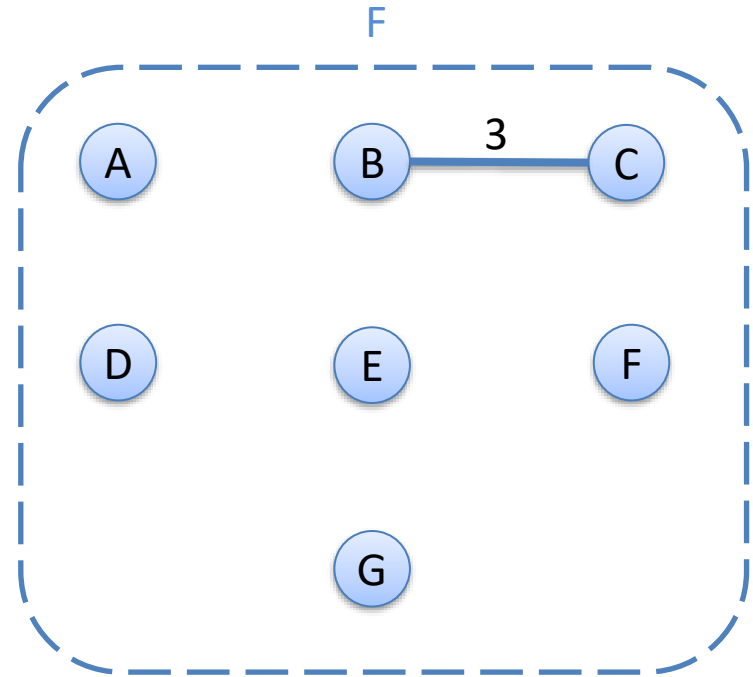
Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Kruskal**

– Exemplo:



Forma ciclo?

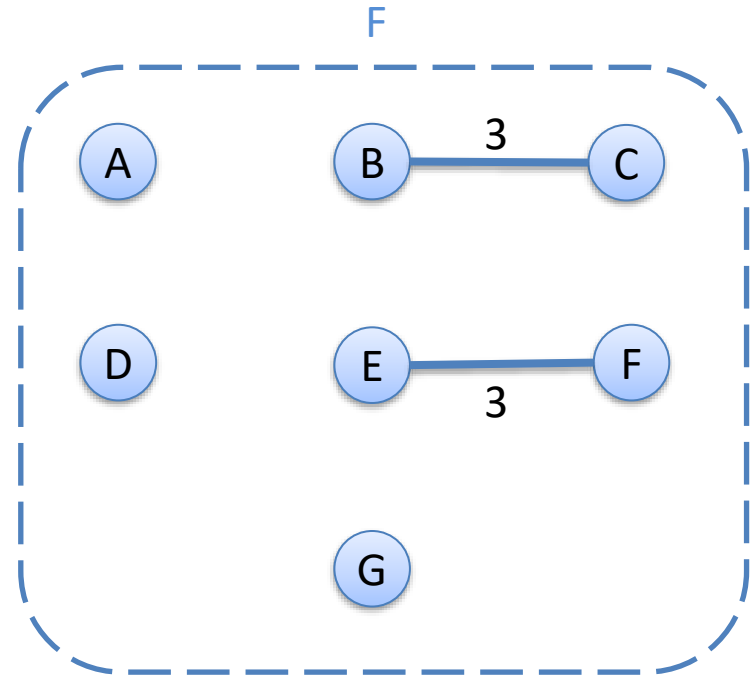
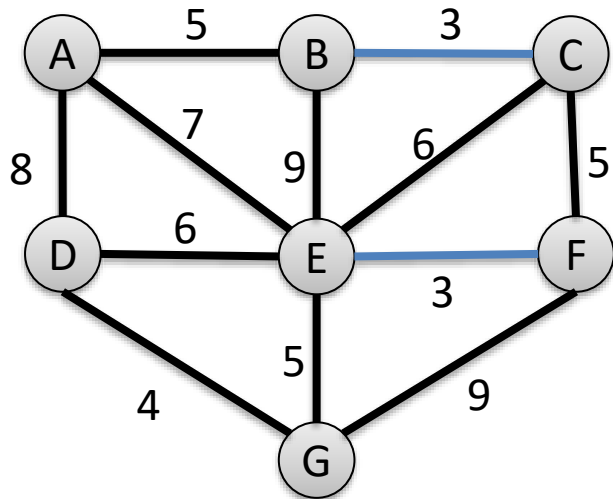


arestas	BC	EF	DG	AB	CF	EG	CE	DE	AE	AD	BE	FG
peso	3	3	4	5	5	5	6	6	7	8	9	9

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Kruskal

– Exemplo:



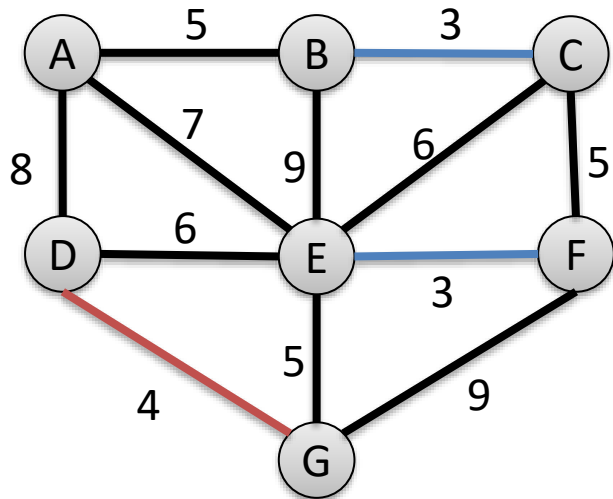
Forma ciclo? **Não!**

arestas	BC	EF	DG	AB	CF	EG	CE	DE	AE	AD	BE	FG
peso	3	3	4	5	5	5	6	6	7	8	9	9

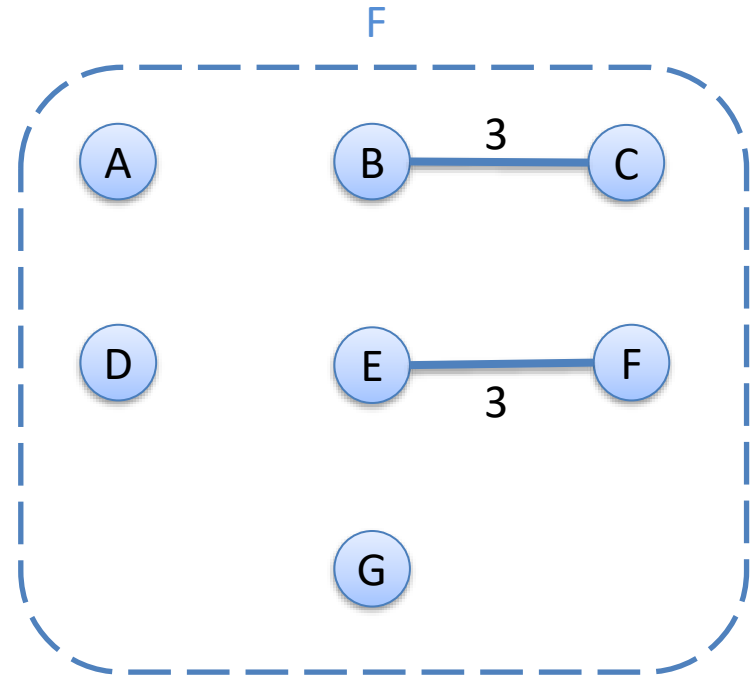
Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Kruskal**

– Exemplo:



Forma ciclo?

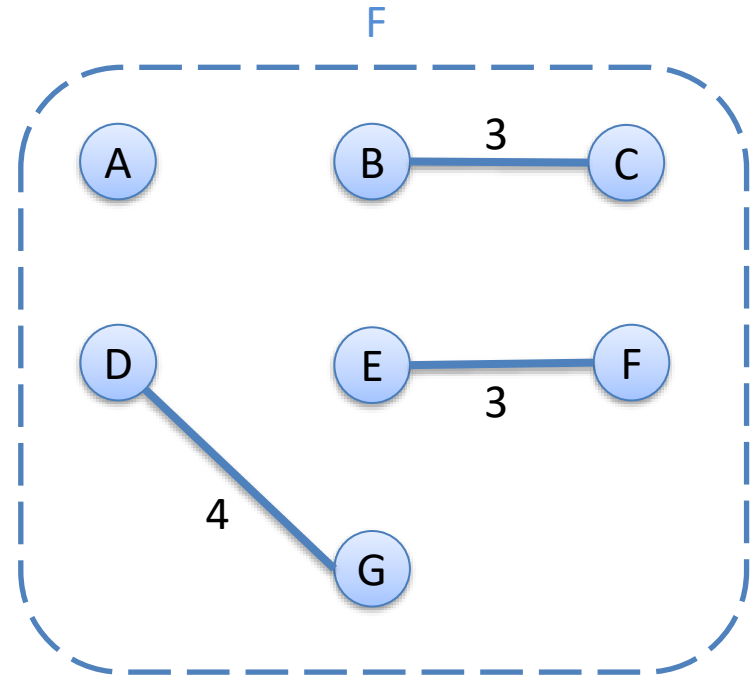
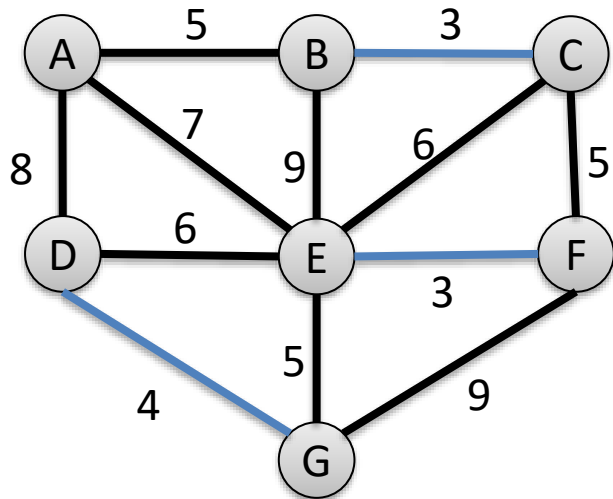


arestas	BC	EF	DG	AB	CF	EG	CE	DE	AE	AD	BE	FG
peso	3	3	4	5	5	5	6	6	7	8	9	9

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Kruskal

– Exemplo:



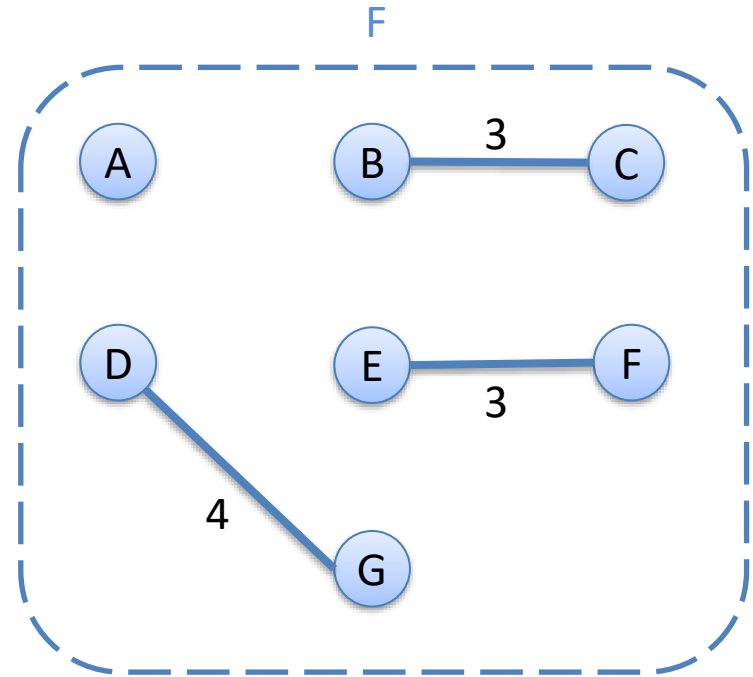
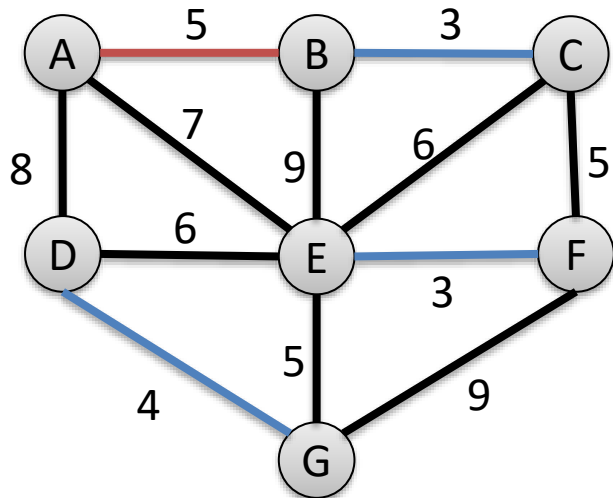
Forma ciclo? **Não!**

arestas	BC	EF	DG	AB	CF	EG	CE	DE	AE	AD	BE	FG
peso	3	3	4	5	5	5	6	6	7	8	9	9

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Kruskal

– Exemplo:



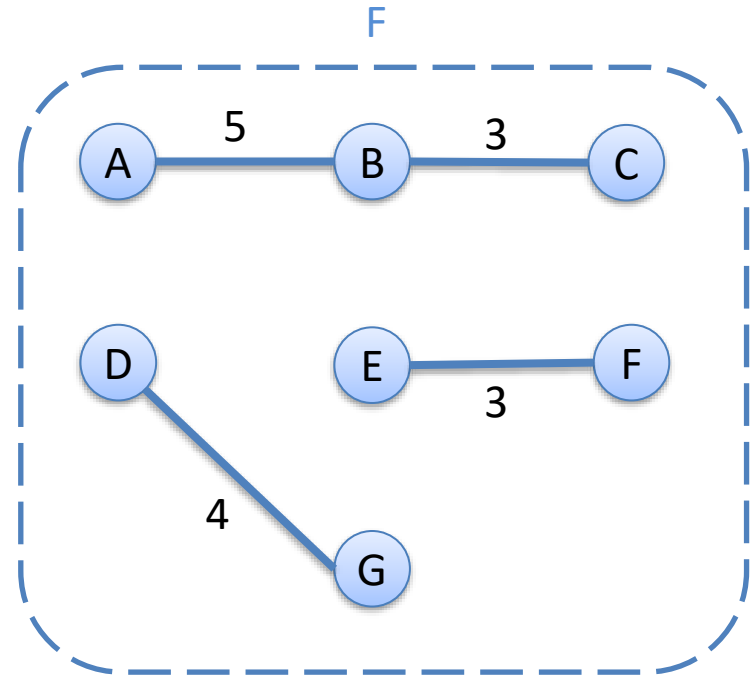
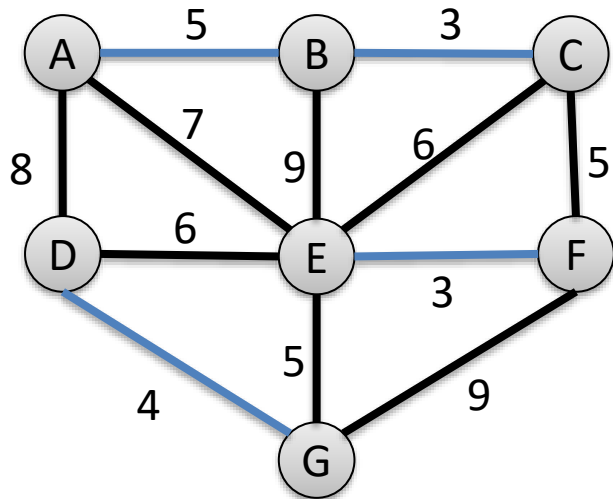
Forma ciclo?

arestas	BC	EF	DG	AB	CF	EG	CE	DE	AE	AD	BE	FG
peso	3	3	4	5	5	5	6	6	7	8	9	9

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Kruskal

– Exemplo:



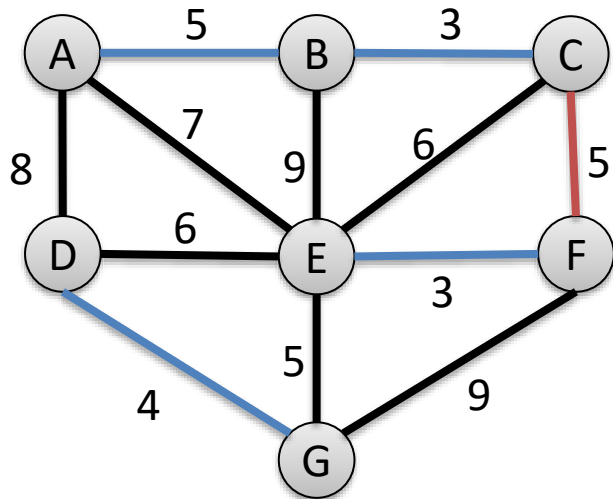
Forma ciclo? **Não!**

arestas	BC	EF	DG	AB	CF	EG	CE	DE	AE	AD	BE	FG
peso	3	3	4	5	5	5	6	6	7	8	9	9

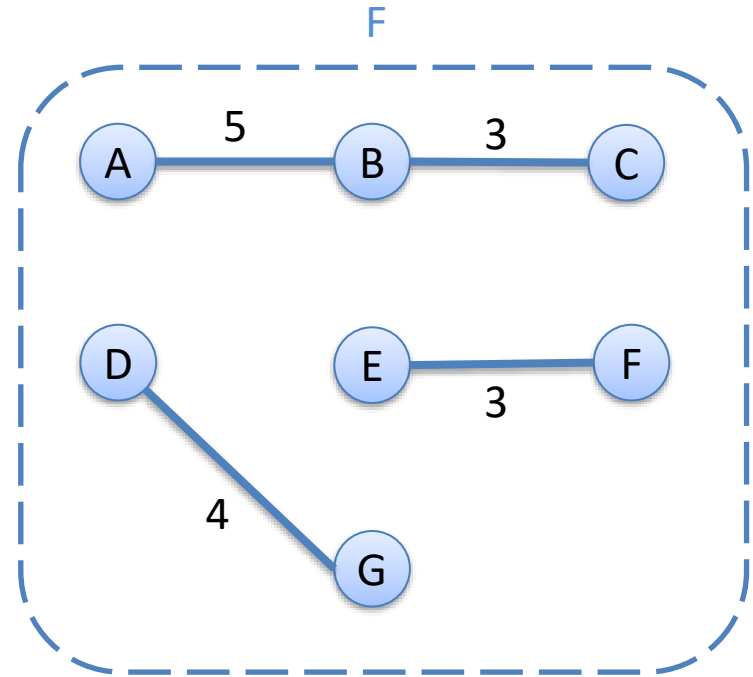
Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Kruskal**

– Exemplo:



Forma ciclo?

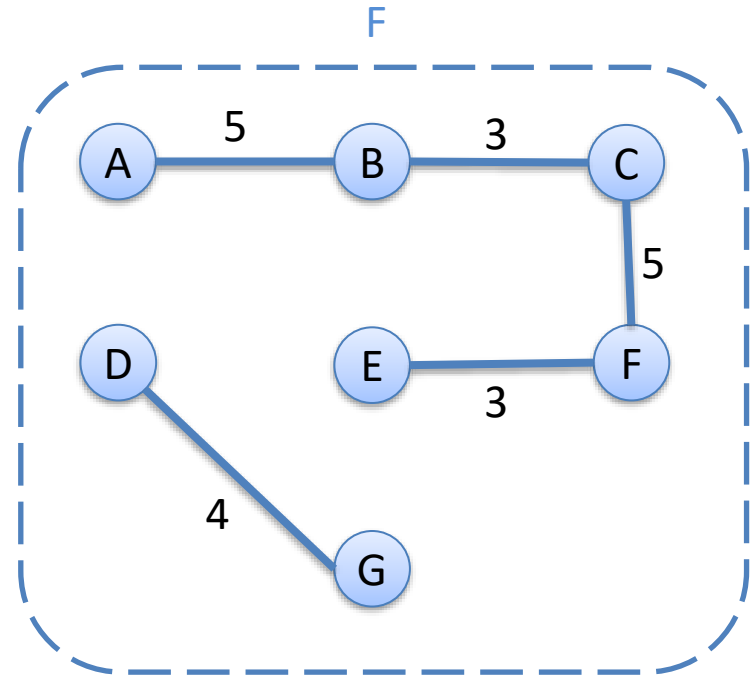
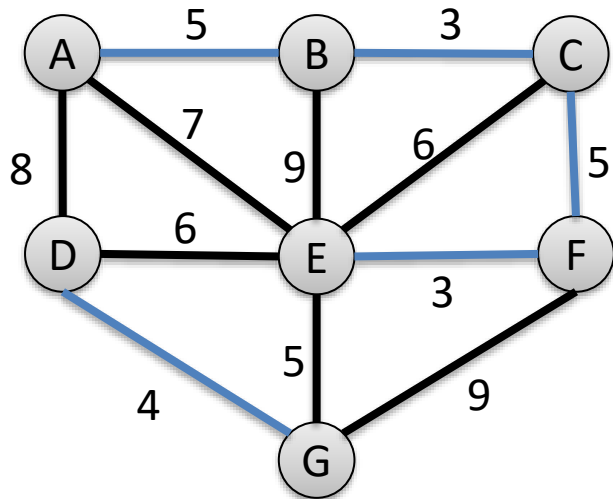


arestas	BC	EF	DG	AB	CF	EG	CE	DE	AE	AD	BE	FG
peso	3	3	4	5	5	5	6	6	7	8	9	9

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Kruskal

– Exemplo:



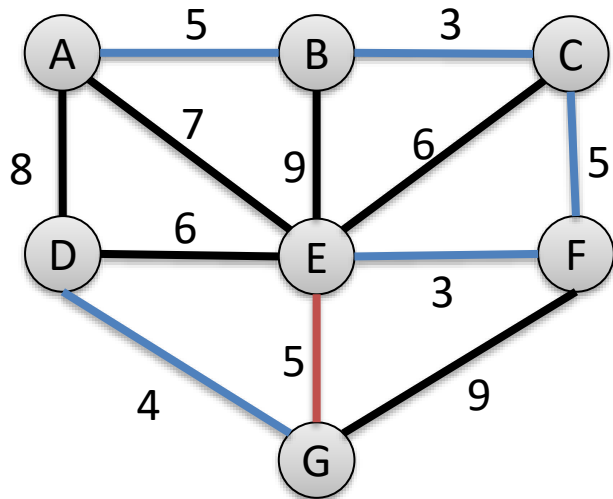
Forma ciclo? **Não!**

arestas	BC	EF	DG	AB	CF	EG	CE	DE	AE	AD	BE	FG
peso	3	3	4	5	5	5	6	6	7	8	9	9

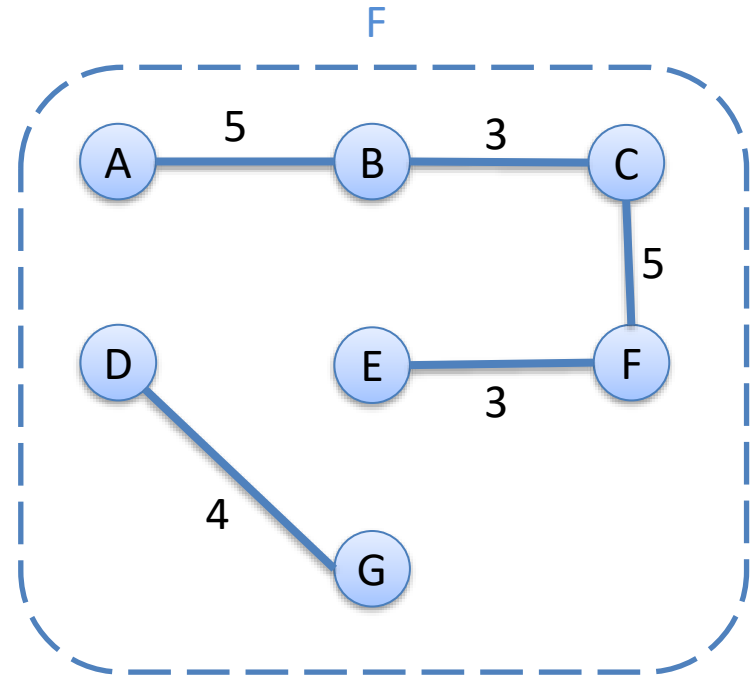
Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Kruskal**

– Exemplo:



Forma ciclo?

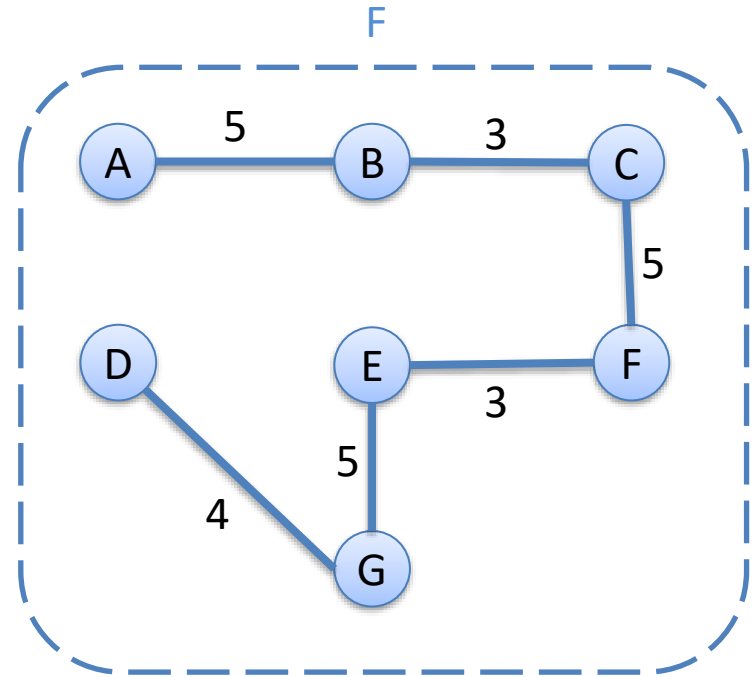
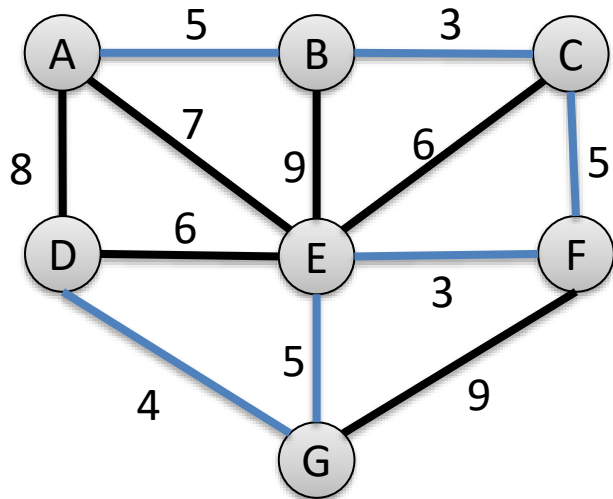


arestas	BC	EF	DG	AB	CF	EG	CE	DE	AE	AD	BE	FG
peso	3	3	4	5	5	5	6	6	7	8	9	9

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Kruskal

– Exemplo:



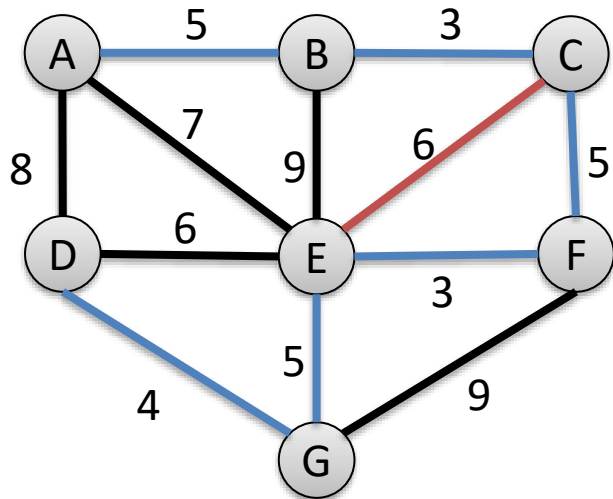
Forma ciclo? **Não!**

arestas	BC	EF	DG	AB	CF	EG	CE	DE	AE	AD	BE	FG
peso	3	3	4	5	5	5	6	6	7	8	9	9

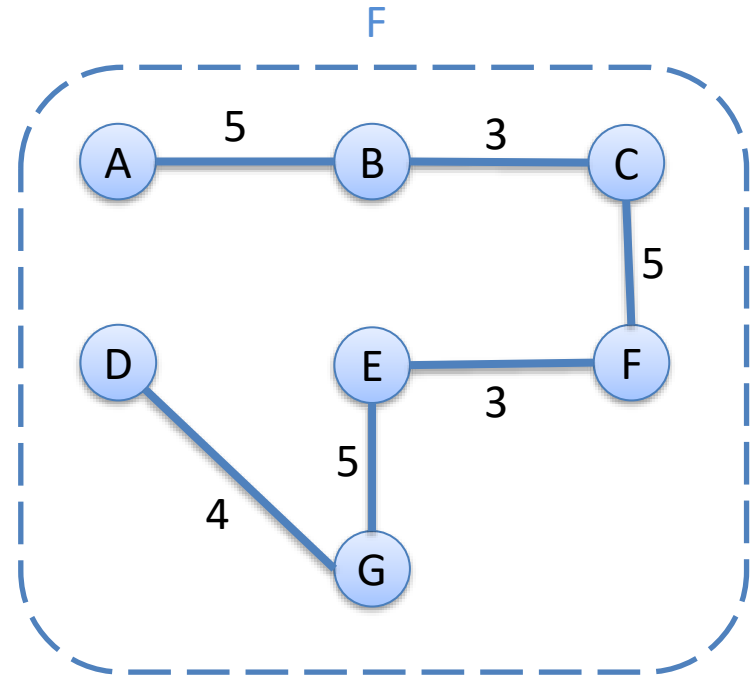
Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Kruskal**

– Exemplo:



Forma ciclo?

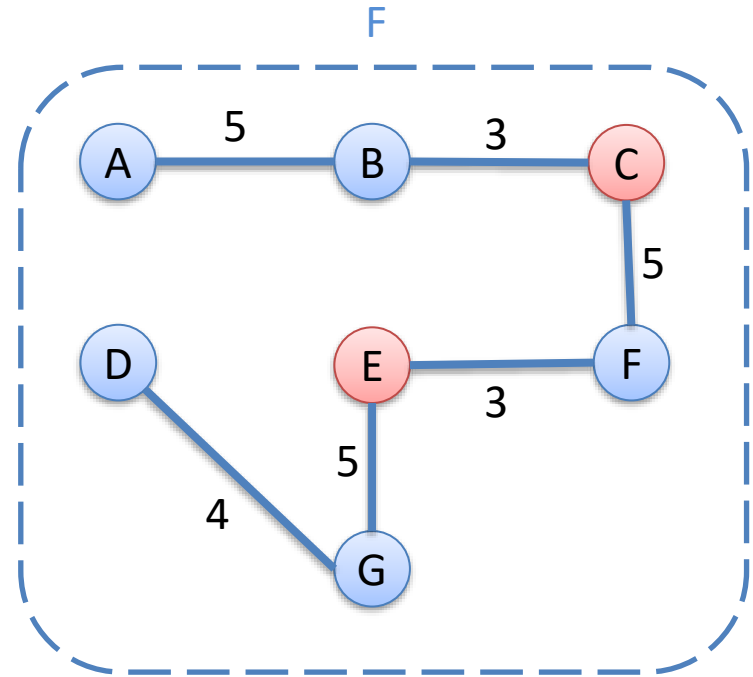
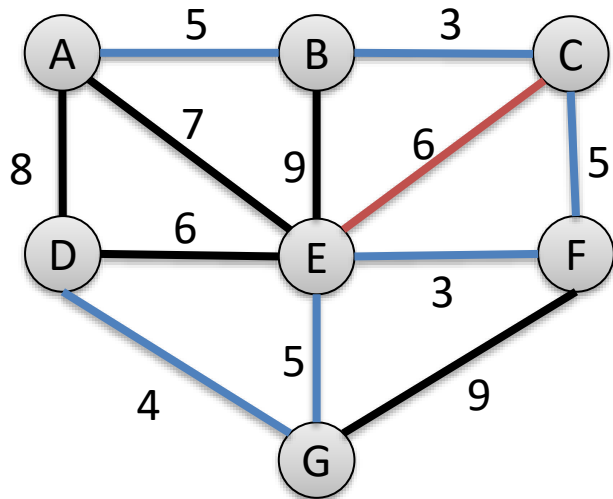


arestas	BC	EF	DG	AB	CF	EG	CE	DE	AE	AD	BE	FG
peso	3	3	4	5	5	5	6	6	7	8	9	9

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Kruskal

– Exemplo:



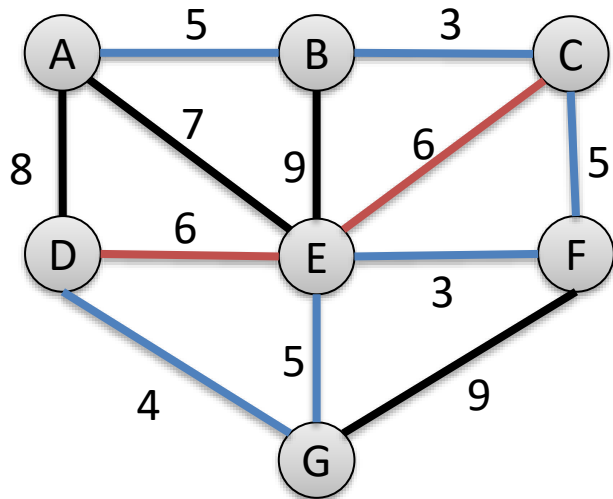
Forma ciclo? **Sim...**

arestas	BC	EF	DG	AB	CF	EG	CE	DE	AE	AD	BE	FG
peso	3	3	4	5	5	5	6	6	7	8	9	9

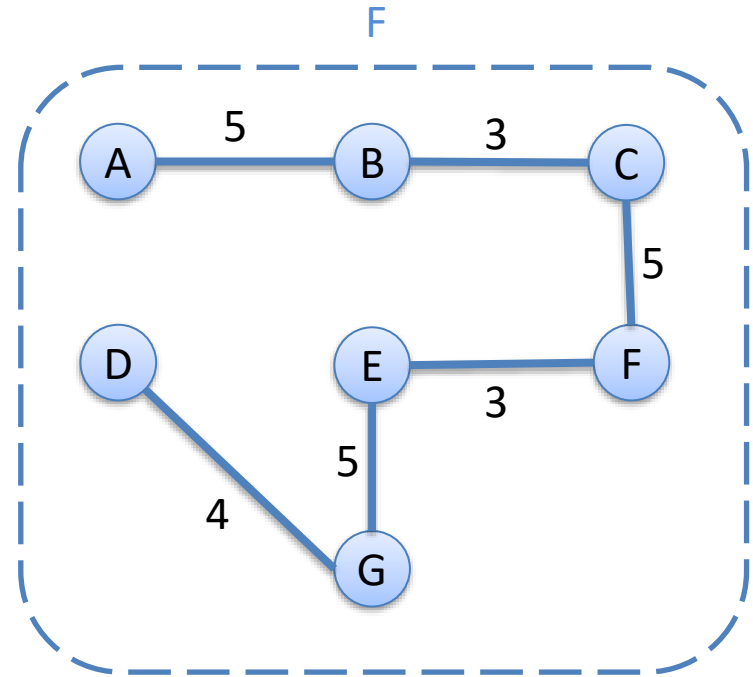
Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Kruskal**

– Exemplo:



Forma ciclo?

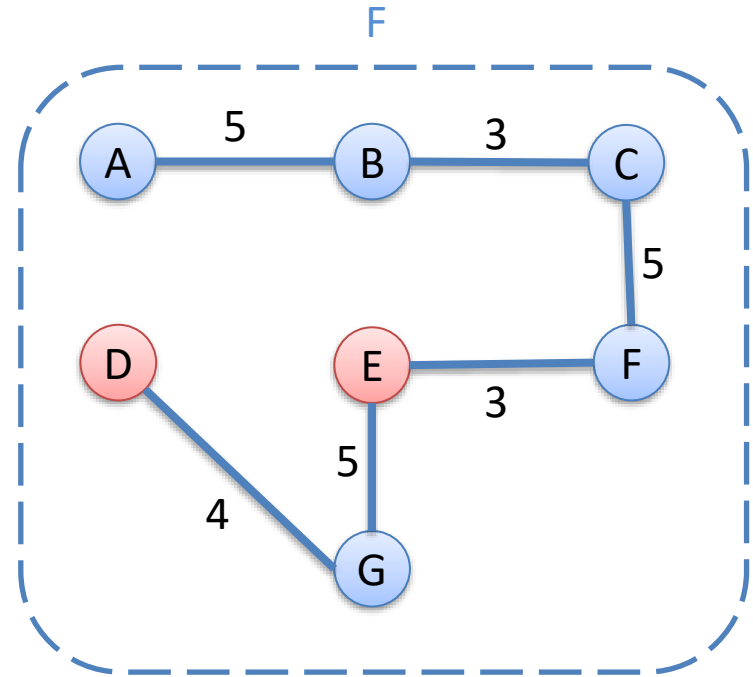
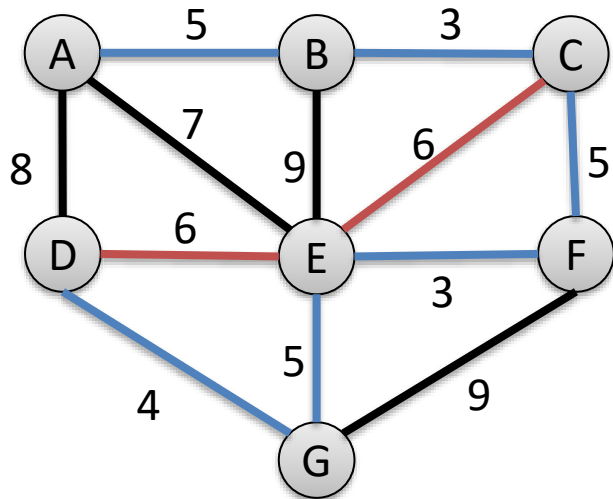


arestas	BC	EF	DG	AB	CF	EG	CE	DE	AE	AD	BE	FG
peso	3	3	4	5	5	5	6	6	7	8	9	9

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Kruskal

– Exemplo:



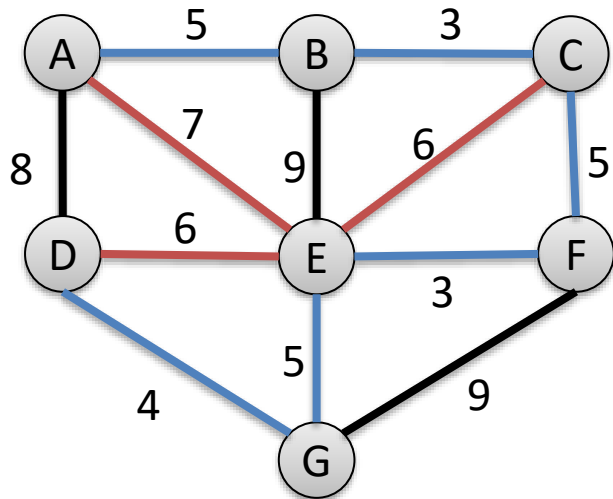
Forma ciclo? **Sim...**

arestas	BC	EF	DG	AB	CF	EG	CE	DE	AE	AD	BE	FG
peso	3	3	4	5	5	5	6	6	7	8	9	9

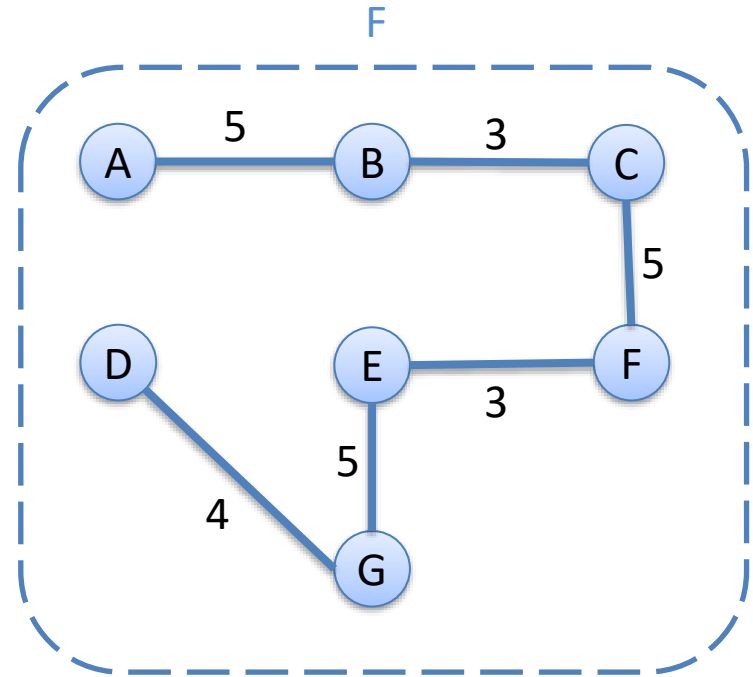
Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Kruskal**

– Exemplo:



Forma ciclo?

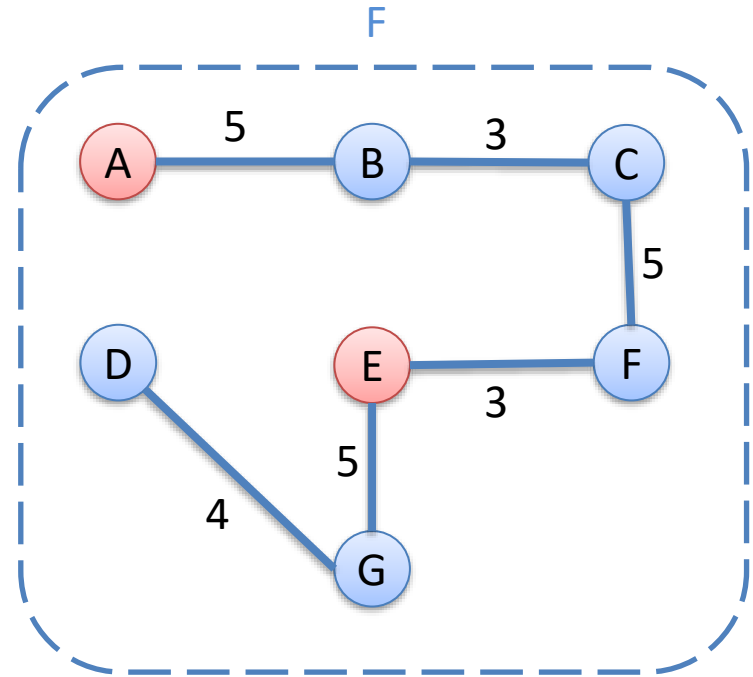
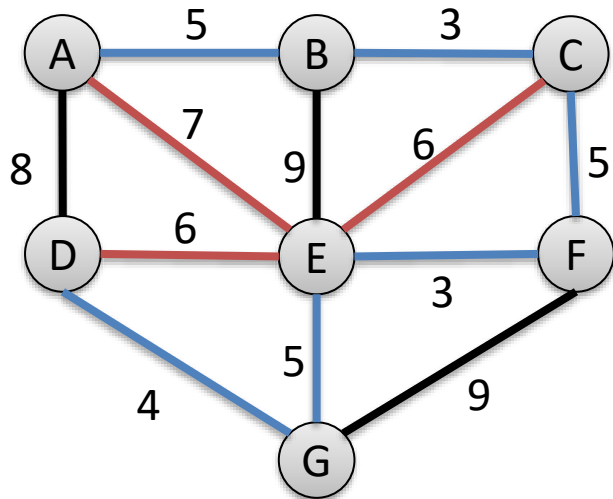


arestas	BC	EF	DG	AB	CF	EG	CE	DE	AE	AD	BE	FG
peso	3	3	4	5	5	5	6	6	7	8	9	9

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Kruskal

– Exemplo:



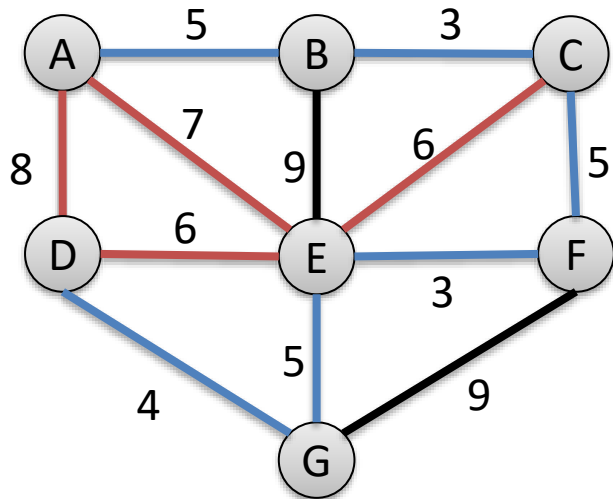
Forma ciclo? **Sim...**

arestas	BC	EF	DG	AB	CF	EG	CE	DE	AE	AD	BE	FG
peso	3	3	4	5	5	5	6	6	7	8	9	9

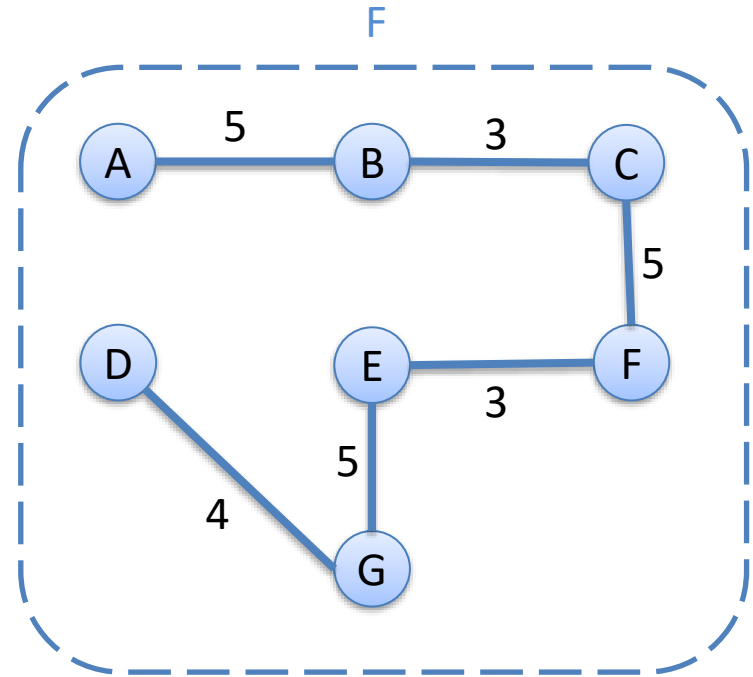
Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Kruskal**

– Exemplo:



Forma ciclo?

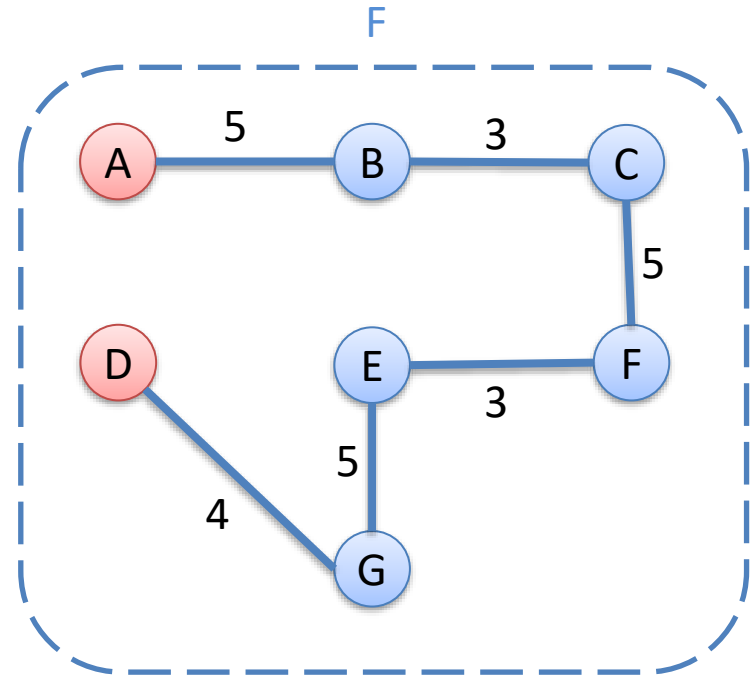
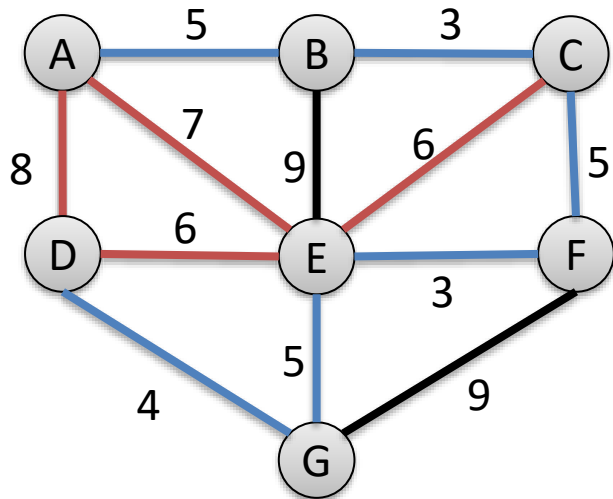


arestas	BC	EF	DG	AB	CF	EG	CE	DE	AE	AD	BE	FG
peso	3	3	4	5	5	5	6	6	7	8	9	9

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Kruskal

– Exemplo:



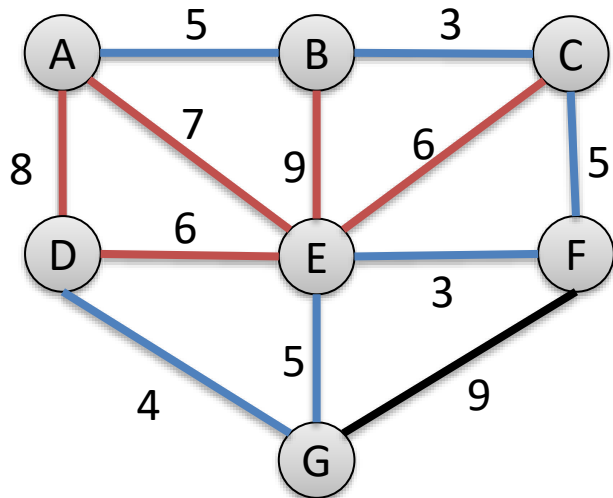
Forma ciclo? **Sim...**

arestas	BC	EF	DG	AB	CF	EG	CE	DE	AE	AD	BE	FG
peso	3	3	4	5	5	5	6	6	7	8	9	9

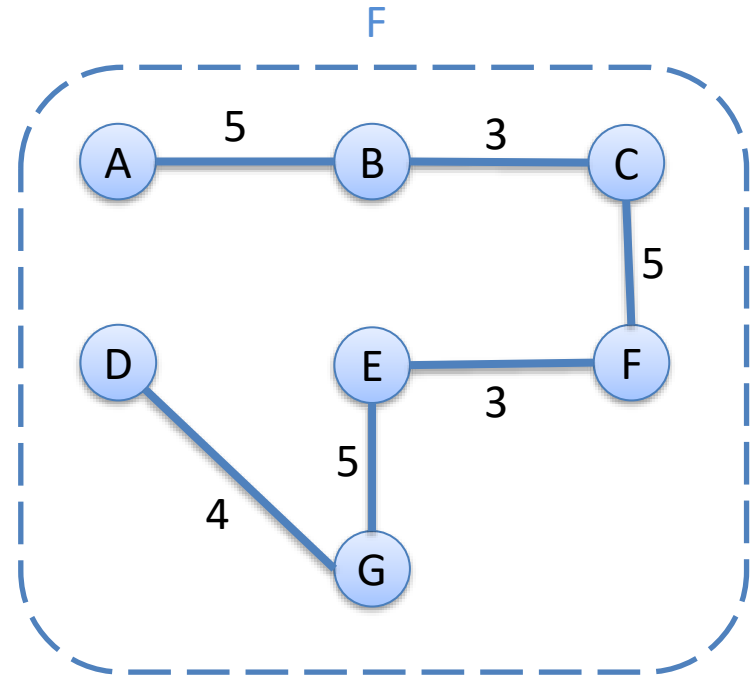
Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Kruskal**

– Exemplo:



Forma ciclo?

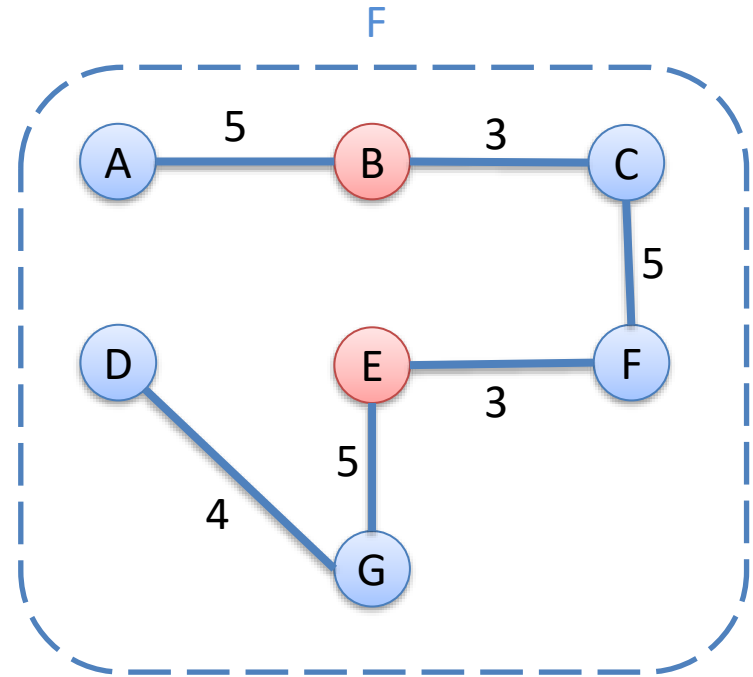
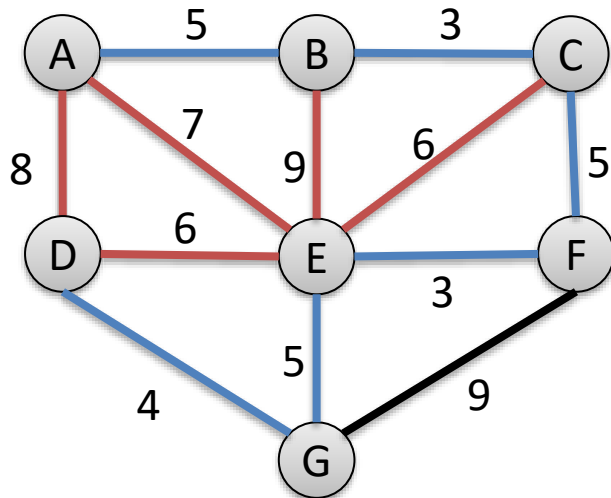


arestas	BC	EF	DG	AB	CF	EG	CE	DE	AE	AD	BE	FG
peso	3	3	4	5	5	5	6	6	7	8	9	9

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Kruskal

– Exemplo:



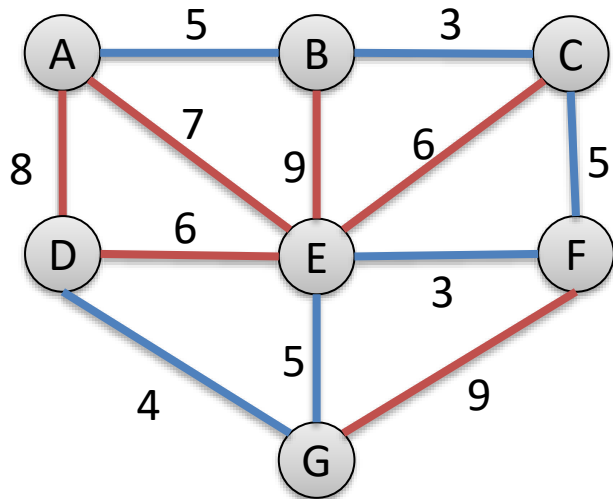
Forma ciclo? **Sim...**

arestas	BC	EF	DG	AB	CF	EG	CE	DE	AE	AD	BE	FG
peso	3	3	4	5	5	5	6	6	7	8	9	9

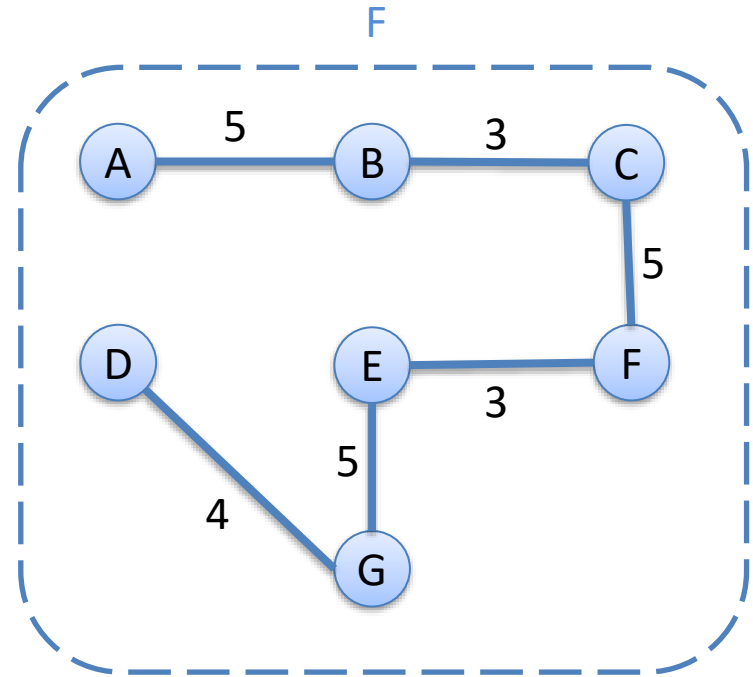
Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Kruskal**

– Exemplo:



Forma ciclo?

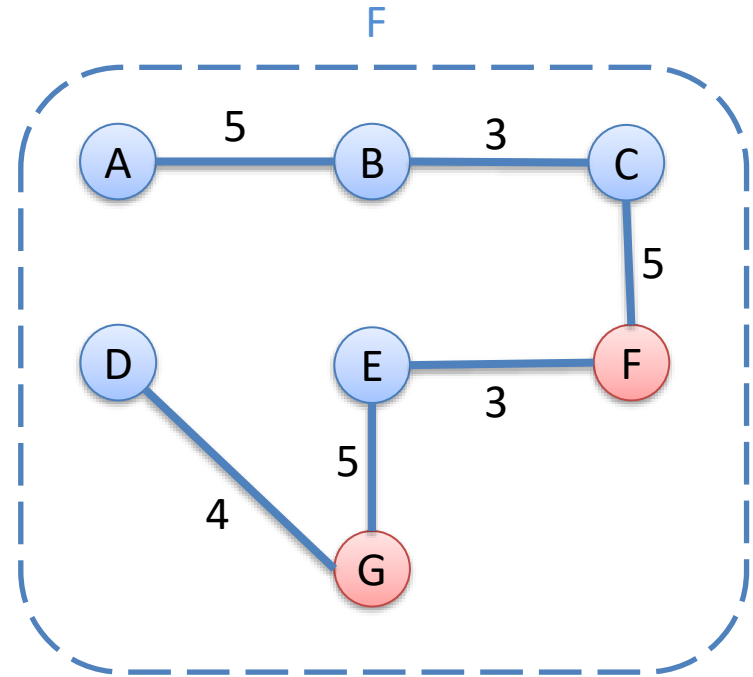
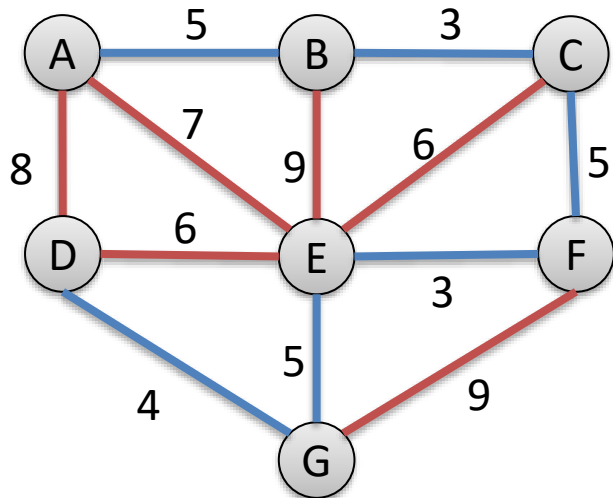


arestas	BC	EF	DG	AB	CF	EG	CE	DE	AE	AD	BE	FG
peso	3	3	4	5	5	5	6	6	7	8	9	9

Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Kruskal

– Exemplo:



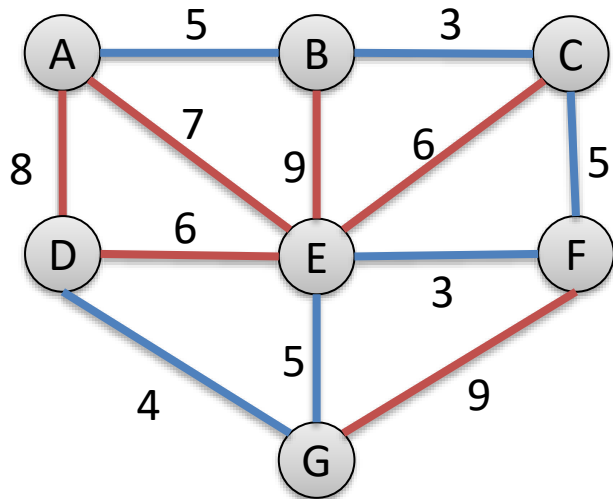
Forma ciclo? **Sim...**

arestas	BC	EF	DG	AB	CF	EG	CE	DE	AE	AD	BE	FG
peso	3	3	4	5	5	5	6	6	7	8	9	9

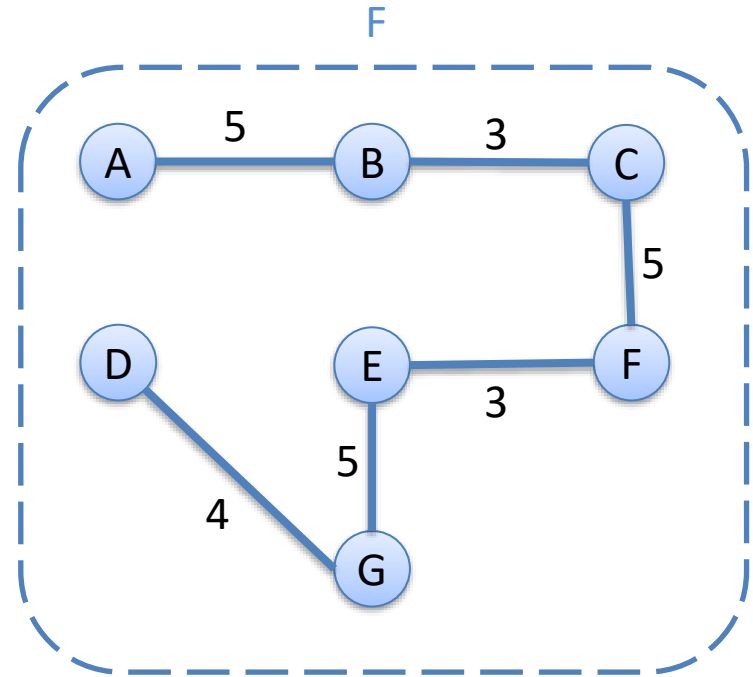
Árvores Geradoras Mínimas

- Algoritmo de Kruskal**

– Exemplo:



Forma ciclo?

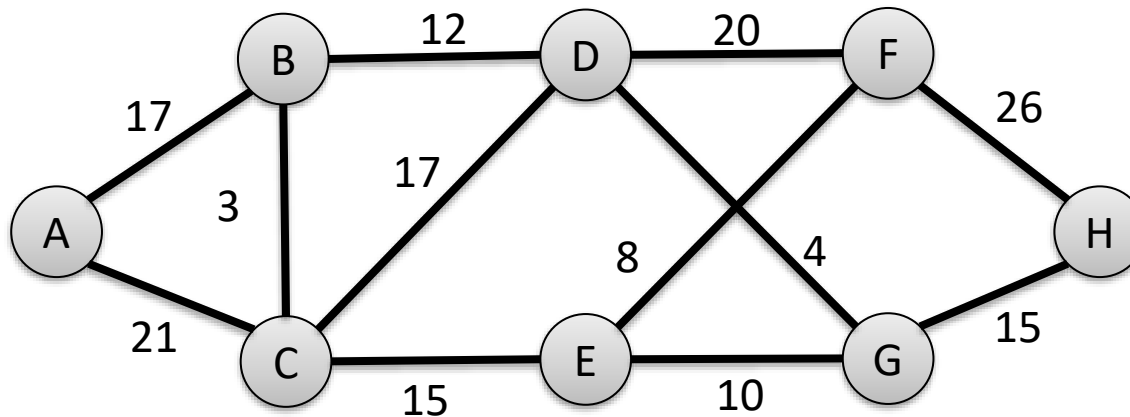


arestas	BC	EF	DG	AB	CF	EG	CE	DE	AE	AD	BE	FG
peso	3	3	4	5	5	5	6	6	7	8	9	9

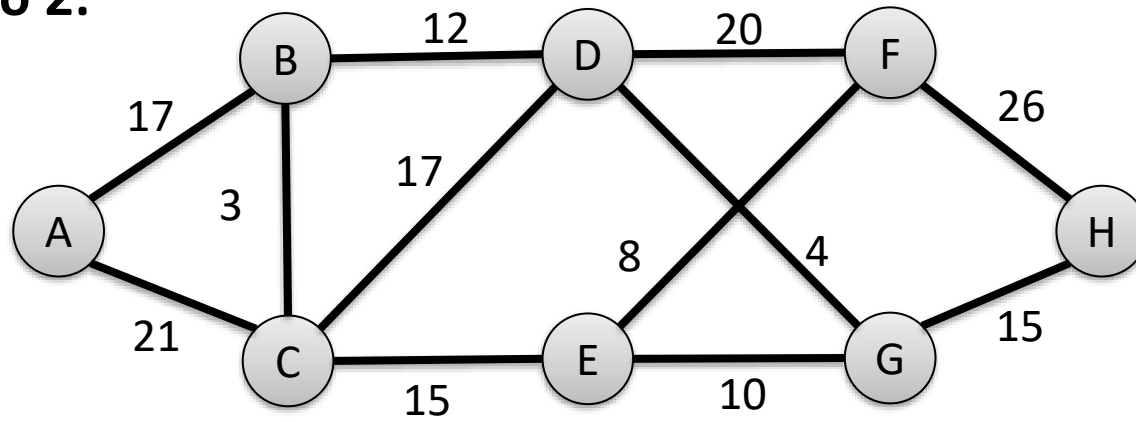
FIM!

Árvores Geradoras Mínimas

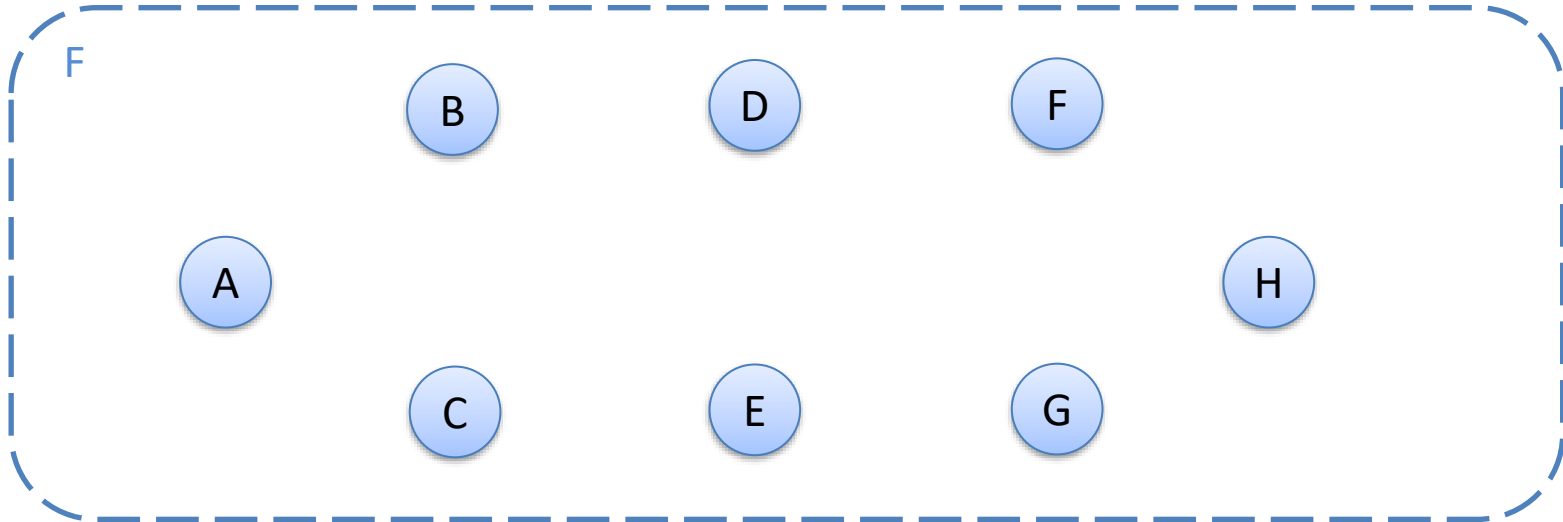
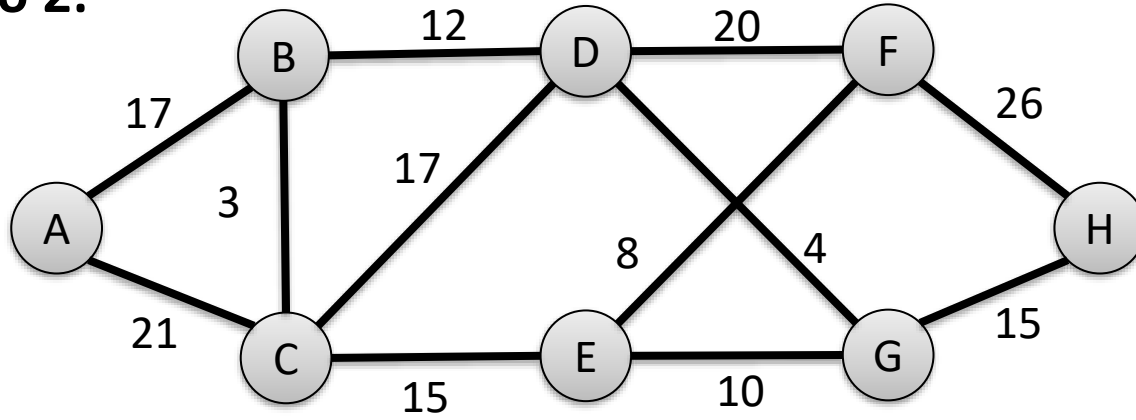
- **Exercício 2:**
 - Aplique o algoritmo de Kruskal para identificar uma árvore geradora mínima para o grafo abaixo:



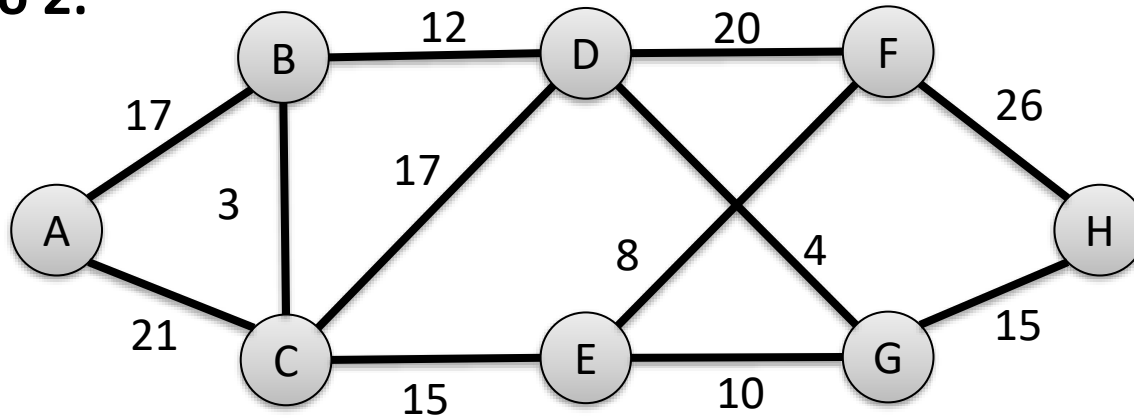
- Exercício 2:



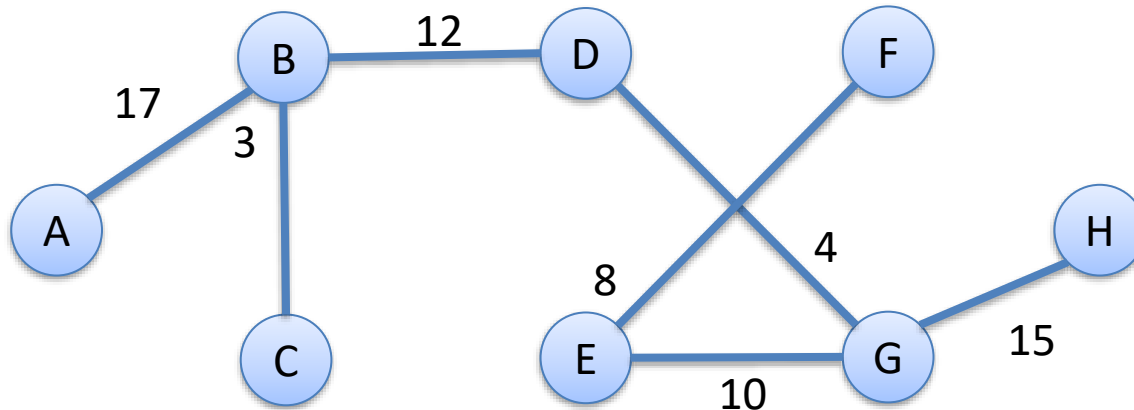
- **Exercício 2:**

[illegible]

• **Exercício 2:**



F



arestas	BC	DG	FE	EG	BD	CE	HG	AB	CD	DF	AC	FH
peso	3	4	8	10	12	15	15	17	17	20	21	26

Árvores Geradoras Mínimas

FIM