

ALGORITMOS EM GRAFOS

Bacharelado em Sistemas da Informação

Prof. Marco André Abud Kappel

Aula 1 – Introdução a Grafos

Revisão

- **Listas lineares**

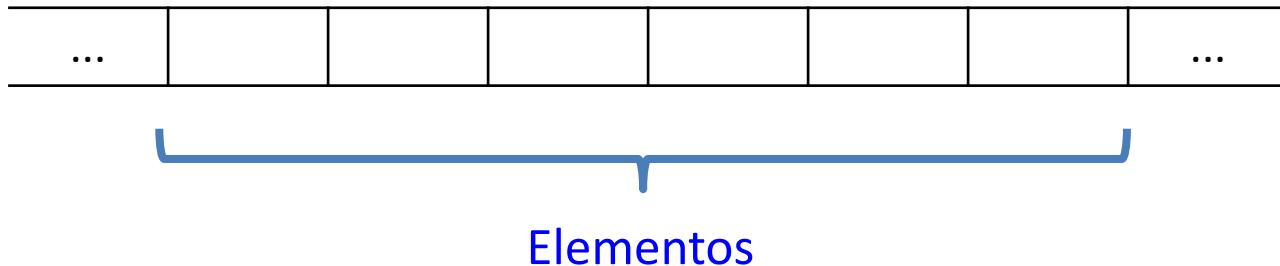
- Dentre as estruturas de dados **não primitivas**, as listas lineares são as de manipulação mais **simples**.
- As **propriedades** estruturais decorrem apenas da **posição relativa** entre os nós dentro de uma **sequência linear**.
- Uma lista agrupa informações sobre um conjunto de elementos que se relacionam **sequencialmente** entre si.
- Cada nó possui apenas um **antecessor** e um **sucessor**.
- **Ex:** lista de alunos, funcionários de uma empresa, listas de compras, itens em estoque, etc...

Revisão

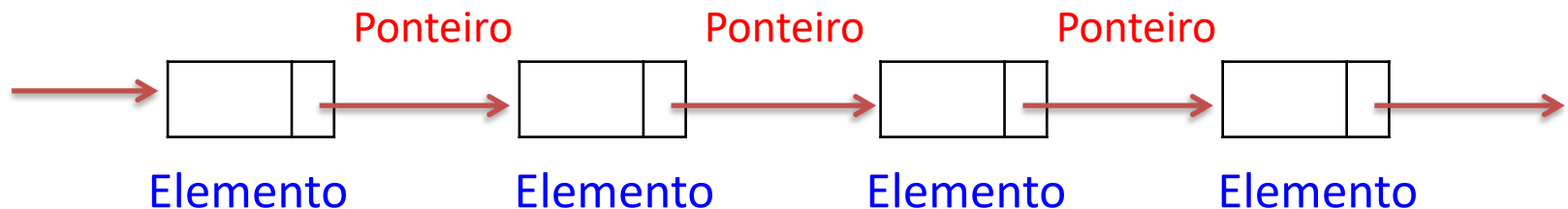
- Listas lineares

- Classificação quanto à **posição relativa** na **memória**:

- **Listas Sequenciais**: Ocupam posições contínuas de memória.



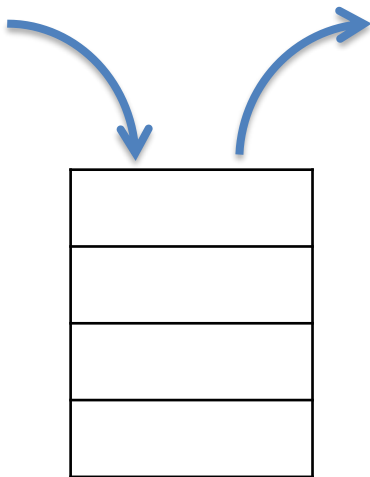
- **Listas encadeadas**: Elementos dispersos na memória.



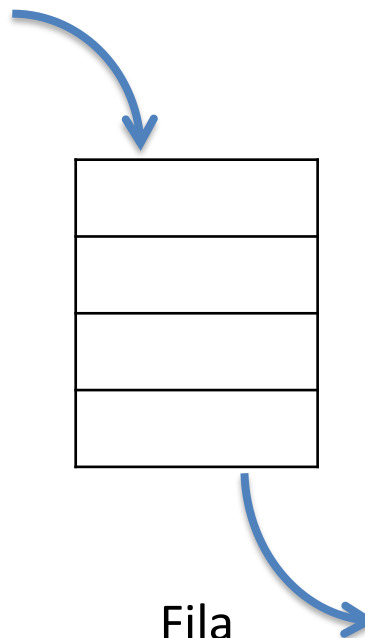
Revisão

- **Listas lineares**

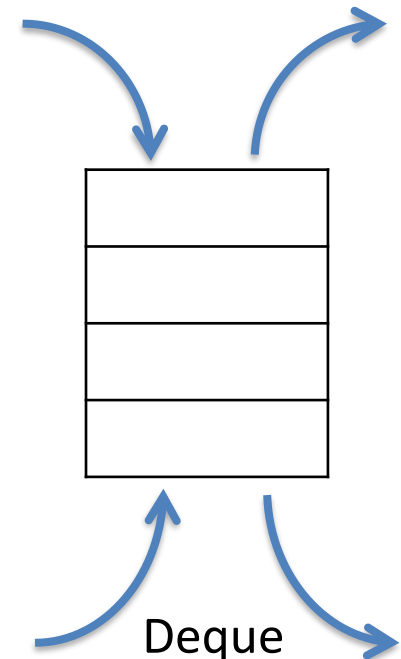
- **Casos particulares:** Decorrem de **restrições** na inserção e remoção.



Pilha



Fila



Deque

Revisão

- Listas lineares
 - Implementação

```
typedef struct NODE {  
    int x;  
    struct NODE *next;  
} NODE;  
  
typedef NODE* LISTNODEPTR;
```

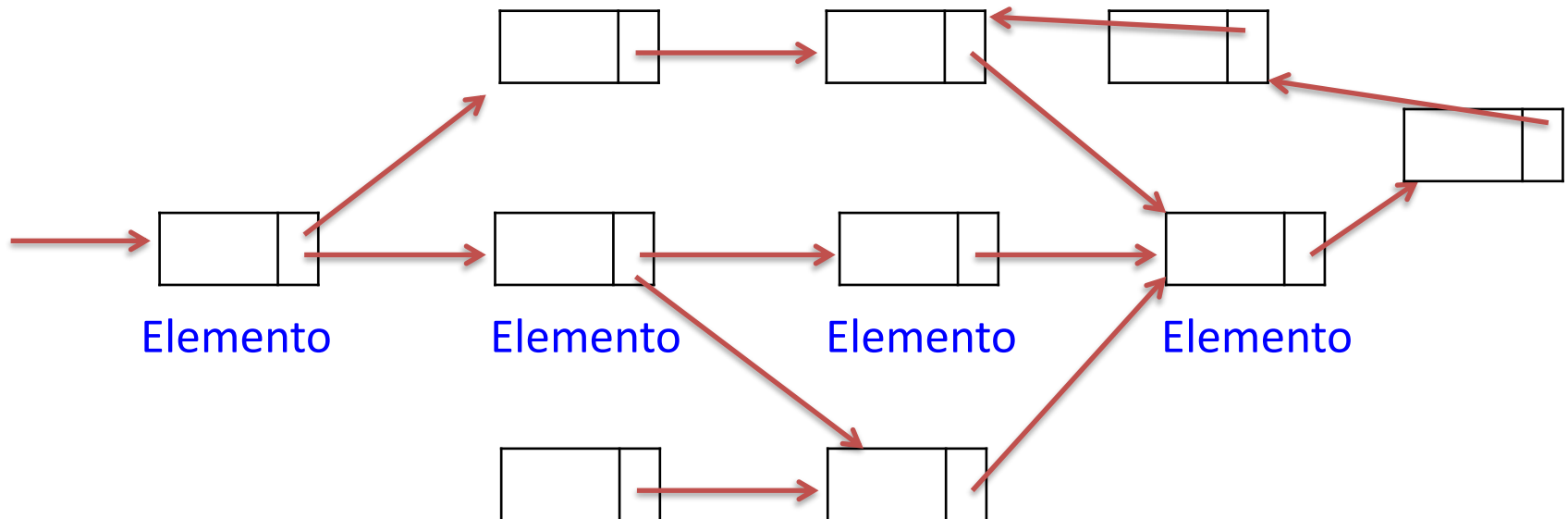
```
LISTNODEPTR criaNo(int x) {  
    LISTNODEPTR n = (LISTNODEPTR) malloc(sizeof(NODE));  
    if (n == NULL) {  
        printf("Erro no malloc");  
        exit(1);  
    }  
    n->x = x;  
    n->next = NULL;  
    return n;  
}
```

```
void freeNODE(LISTNODEPTR l) {  
    free(l);  
}
```

Introdução a grafos

- Listas não-lineares

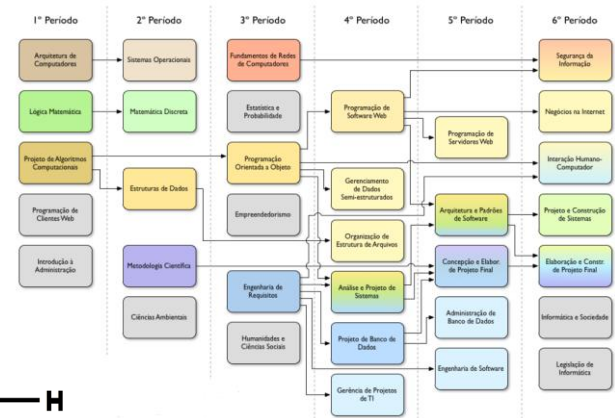
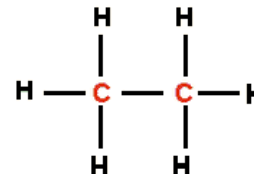
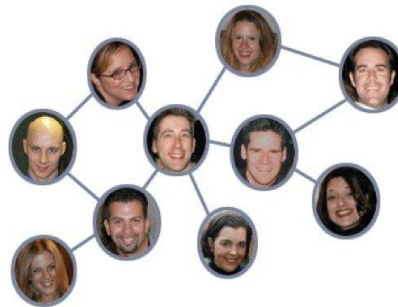
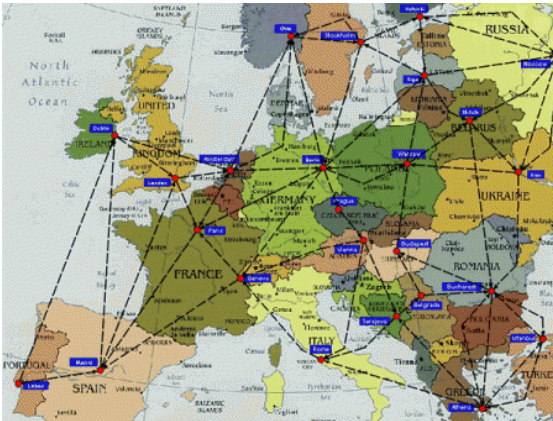
- Cada nó poderá ter vários sucessores.



Introdução a grafos

- **Motivação**

- Muitas aplicações em computação precisam considerar um conjunto de **conexões** entre **pares de objetos**.
- Provavelmente são as estruturas matemáticas **mais utilizadas** na ciência.



Introdução a grafos

- **Motivação**

- Nestes casos, diversas **perguntas** podem ser feitas:
 - Existe um **caminho** para ir de um objeto a outro, **seguindo as conexões**?
 - Qual é a **menor distância** entre um objeto e outro?
 - Quantos outros objetos podem ser **alcançados** a partir de um determinado objeto?
- **Grafos** são utilizados para **modelar** tais problemas.

Introdução a grafos

- **Motivação**

- Alguns **problemas** que podem ser resolvidos através de uma **modelagem em grafos**:
 - Ajudar **máquinas de busca** a **localizar informação** relevante na Web.
 - Descobrir qual é o **roteiro mais curto** para **visitar** as principais cidades de uma região turística.
 - Calcular como transmitir o **fluxo máximo** de informações por uma rede.

Introdução a grafos

- **Motivação**

- **Exemplos:**

| Grafo | Vértices | Arestas |
|-----------------------|---------------------|---------------------------|
| Cronograma | Tarefas | Restrições de preferência |
| Malha viária | Interseções de ruas | Ruas |
| Rede de água | Edificações | Canos |
| Rede telefônica | Telefones | Cabos |
| Redes de computadores | Computadores | Linhas |
| Software | Funções | Chamadas de função |
| Web | Páginas web | Links |
| Redes sociais | Pessoas | Relacionamentos |
| ... | | |

Definições e conceitos

Introdução a grafos

- **Definições**

- Um **grafo** $G = (V, E)$ é um conjunto **não vazio** de **vértices** V e **arestas** E .

- $G(V, E)$:

- V

- Vértices (ou nós)

- Conjunto finito não vazio

- E

- Arestas

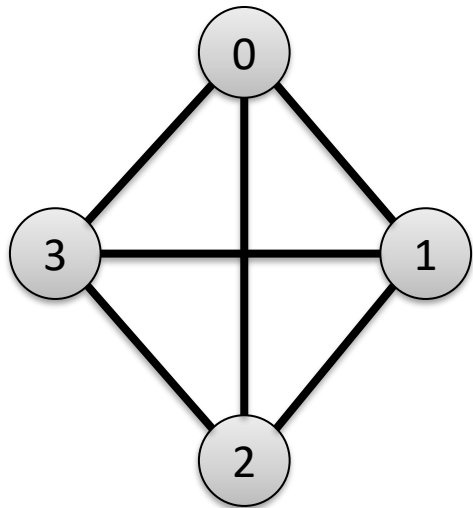
- Conjunto de pares de elementos de V

- Dois nós são **vizinhos** (ou **adjacentes**) se estão **conectados** por uma aresta.

Introdução a grafos

- Definições

- Exemplos:



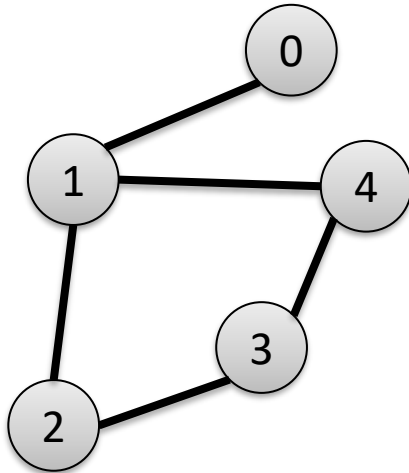
- **Vértices:** $V = \{0, 1, 2, 3\}$

- **Arestas:** $E = \{\{0,1\}, \{0,2\}, \{0,3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$

Introdução a grafos

- Definições

- Exemplos:



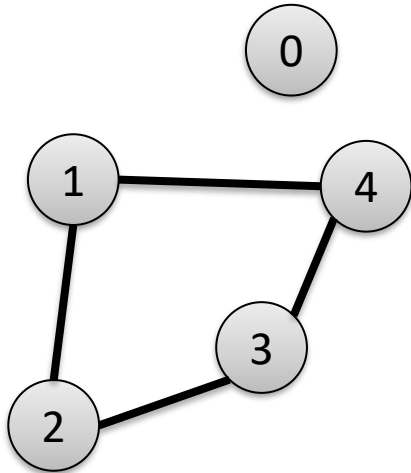
- Vértices: $V = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

- Arestas: $E = \{\{0,1\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{1,4\}\}$

Introdução a grafos

- **Definições**

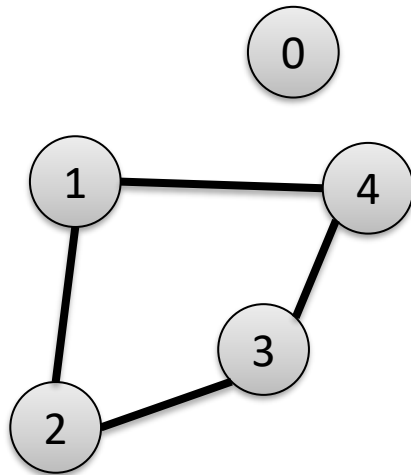
- **Exemplos:**



Introdução a grafos

- Definições

- Exemplos:



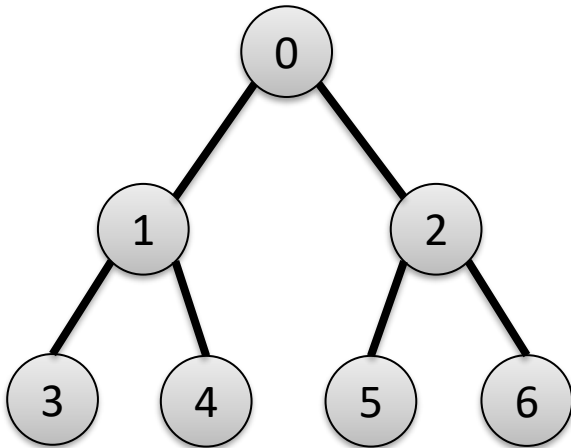
- Vértices: $V = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

- Arestas: $E = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{1,4\}\}$

Introdução a grafos

- **Definições**

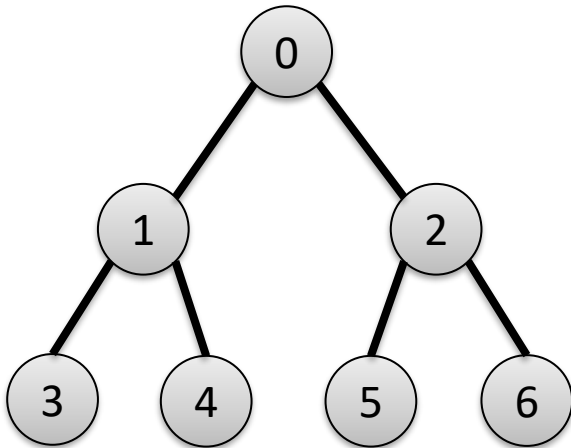
- **Exemplos:**



Introdução a grafos

- Definições

- Exemplos:

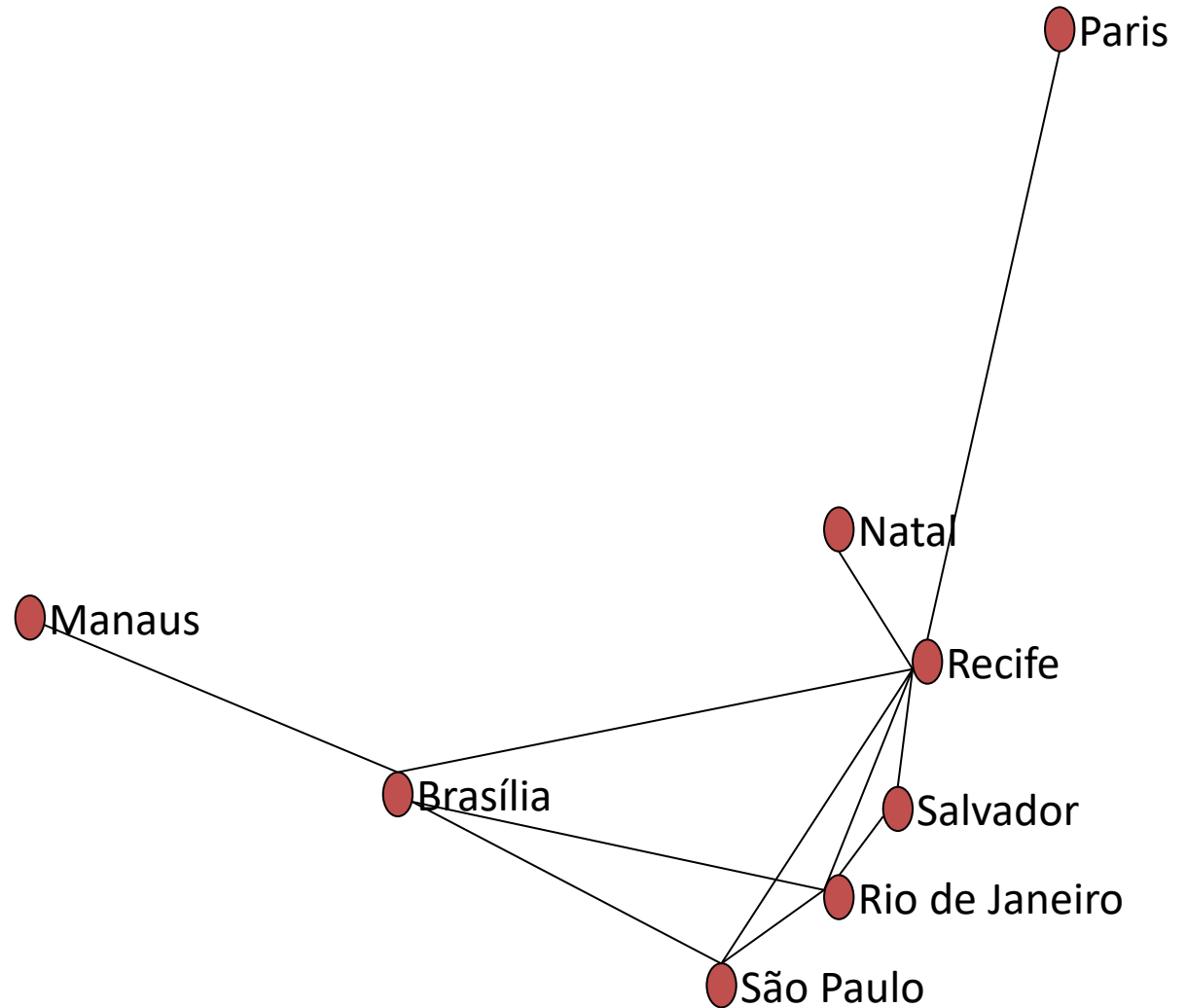


- **Vértices:** $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- **Arestas:** $E = \{\{0,1\}, \{0,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}\}$

Introdução a grafos

- **Definições**
 - **Exemplos:**



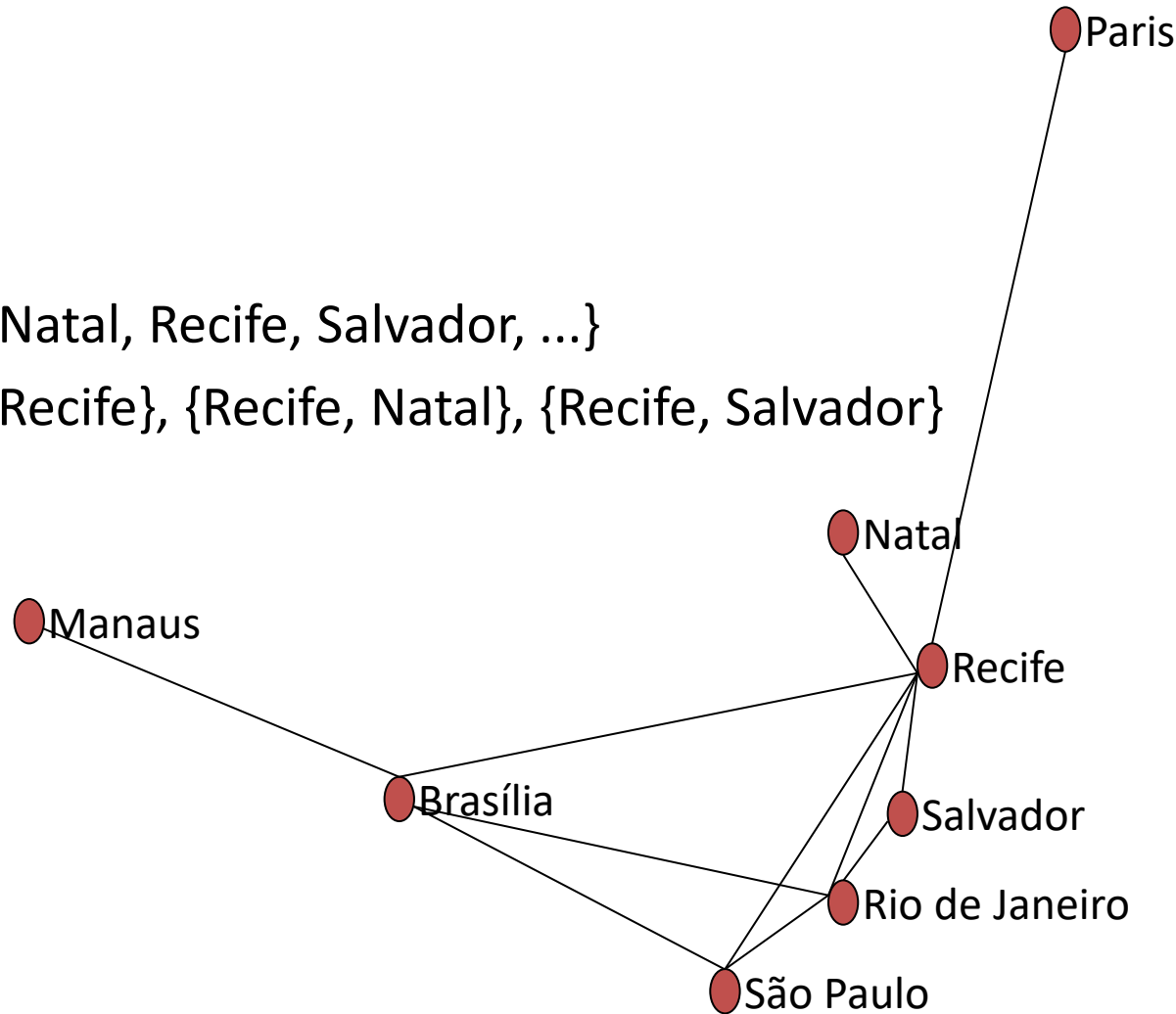
Introdução a grafos

- **Definições**

- **Exemplos:**

- **Vértices:** $V = \{\text{Paris, Natal, Recife, Salvador, ...}\}$

- **Arestas:** $E = \{\{\text{Paris, Recife}\}, \{\text{Recife, Natal}\}, \{\text{Recife, Salvador}\}\}$



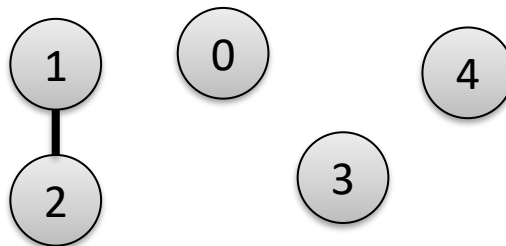
Introdução a grafos

- Definições

- Um grafo é **trivial** se o conjunto de vértices V possui **apenas 1** elemento.



- Um grafo que possui mais nós **não adjacentes** do que nós **adjacentes**, ele é chamado de **grafo esparso**.



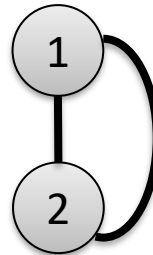
Introdução a grafos

- **Definições**

- Um **laço** é um arco que liga um nó a ele mesmo.



- Duas arestas são **paralelas** quando ligam os mesmos dois nós. Neste caso, o grafo também é chamado de **multigrafo**.

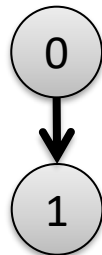


- Um grafo sem laços e arestas paralelas é chamado **grafo simples**.

Introdução a grafos

- **Definições**

- Um grafo é **direcionado** se suas arestas possuem **direções definidas**.
- Nesse caso, os **pares de vértices** que compõem o conjunto de arestas são **pares ordenados**.
- Também é conhecido como **digrafo**.



– **Vértices:** $V = \{0, 1\}$

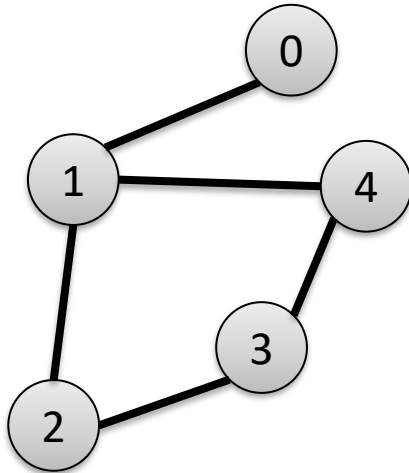
– **Arestas:** $E = \{(0,1)\}$

- Um grafo é **não-direcionado** se suas arestas não possuem direções definidas.

Introdução a grafos

- Definições

- Exemplos:

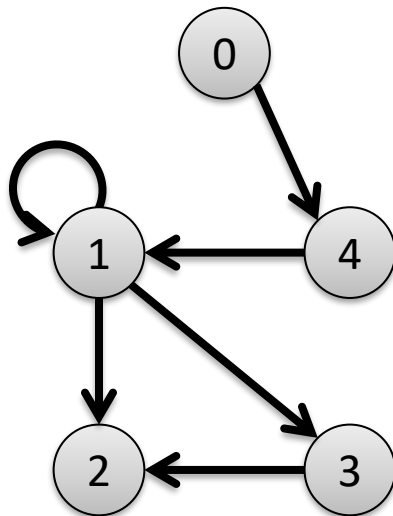


- $V = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
 - $E = \{\{0,1\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{1,4\}\}$
 - Grafo simples
 - 1 não é adjacente a 3

Introdução a grafos

- Definições

- Exemplos:



- $V = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

- $E = \{(0,4), (4,1), (1,1), (1,2), (1,3), (3,2)\}$

- Grafo direcionado

- Possui um laço

Introdução a grafos

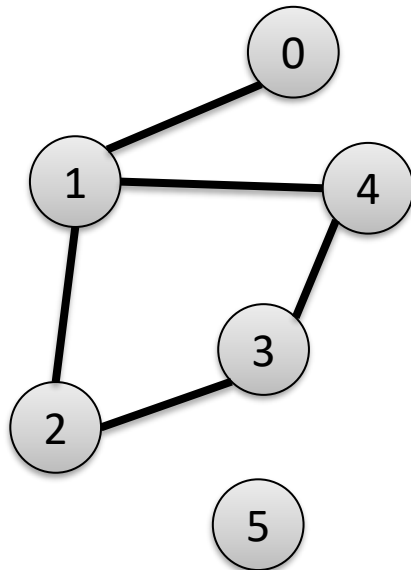
- **Definições**

- Uma aresta **incide** em um vértice se o vértice é uma das ligações da aresta.
- O **grau** (ou valência) de um nó i , denotado por $\deg(i)$ é o número de **arestas incidentes** nesse nó.
- O **grau de entrada** de um nó é o número de arestas que têm o nó como destino.
- O **grau de saída** de um nó é o número de arestas que têm o nó como origem.

Introdução a grafos

- Definições

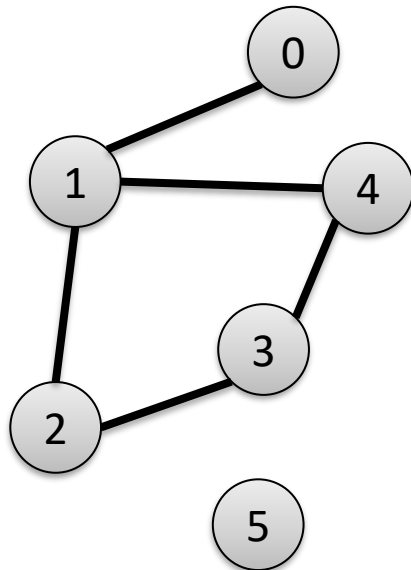
- Exemplos: Qual é o grau de cada um dos nós deste grafo?



Introdução a grafos

- **Definições**

- **Exemplos: Qual é o grau de cada um dos nós deste grafo?**



- **Nó 0:**

- **Nó 1:**

- **Nó 2:**

- **Nó 3:**

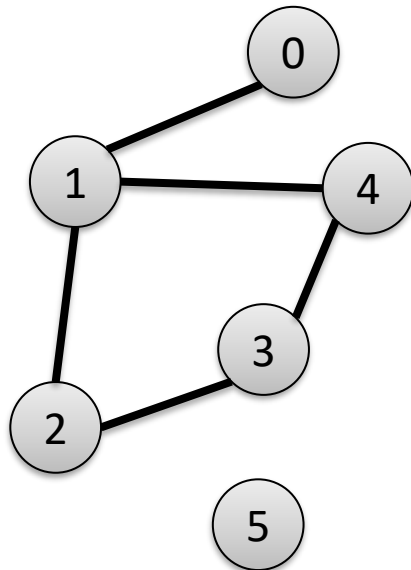
- **Nó 4:**

- **Nó 5:**

Introdução a grafos

- **Definições**

- **Exemplos: Qual é o grau de cada um dos nós deste grafo?**



- Nó 0: grau 1

- Nó 1:

- Nó 2:

- Nó 3:

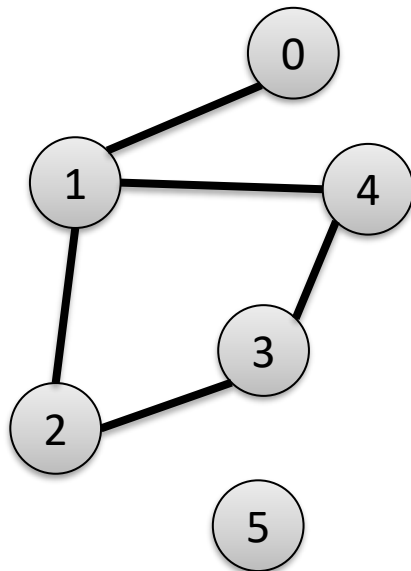
- Nó 4:

- Nó 5:

Introdução a grafos

- Definições

- Exemplos: Qual é o grau de cada um dos nós deste grafo?



- Nó 0: grau 1

- Nó 1: grau 3

- Nó 2:

- Nó 3:

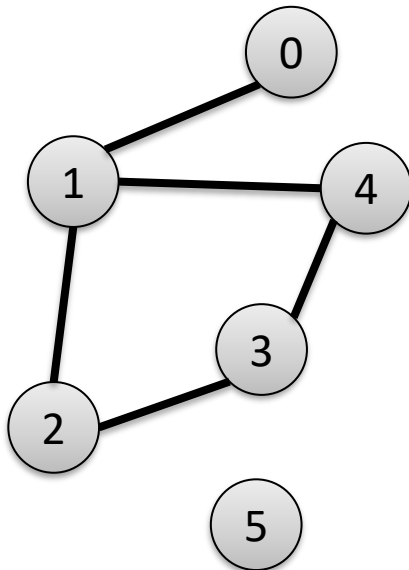
- Nó 4:

- Nó 5:

Introdução a grafos

- Definições

- Exemplos: Qual é o grau de cada um dos nós deste grafo?



- Nó 0: grau 1

- Nó 1: grau 3

- Nó 2: grau 2

- Nó 3:

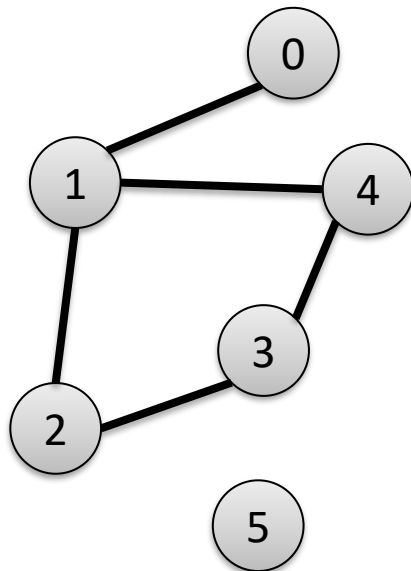
- Nó 4:

- Nó 5:

Introdução a grafos

- Definições

- Exemplos: Qual é o grau de cada um dos nós deste grafo?



- Nó 0: grau 1

- Nó 1: grau 3

- Nó 2: grau 2

- Nó 3: grau 2

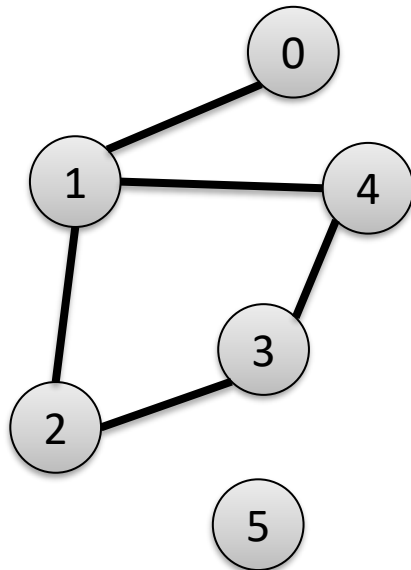
- Nó 4:

- Nó 5:

Introdução a grafos

- Definições

- Exemplos: Qual é o grau de cada um dos nós deste grafo?

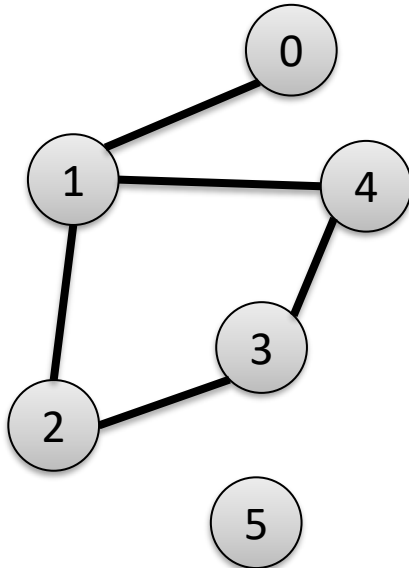


- Nó 0: grau 1
- Nó 1: grau 3
- Nó 2: grau 2
- Nó 3: grau 2
- Nó 4: grau 2
- Nó 5:

Introdução a grafos

- Definições

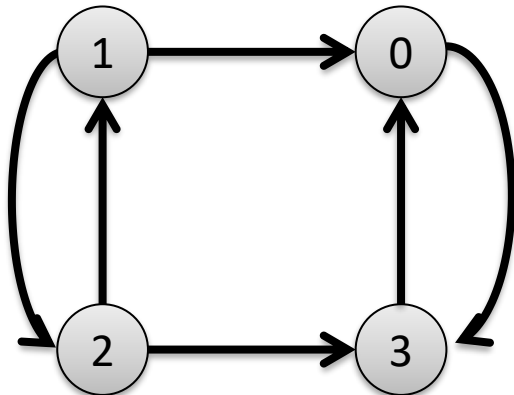
- Exemplos: Qual é o grau de cada um dos nós deste grafo?



- Nó 0: grau 1
 - Nó 1: grau 3
 - Nó 2: grau 2
 - Nó 3: grau 2
 - Nó 4: grau 2
 - Nó 5: grau 0 (nó isolado)

Introdução a grafos

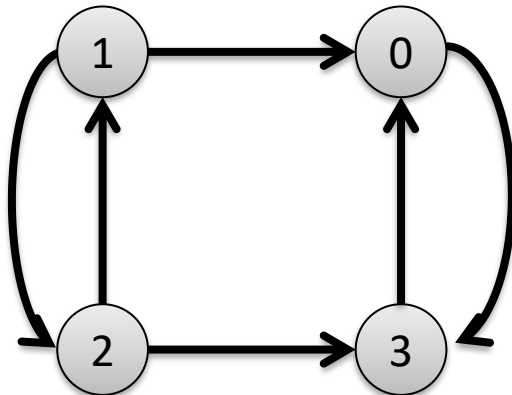
- Definições
 - Exemplos: Qual é o grau do nó 0?



Introdução a grafos

- Definições

- Exemplos: Qual é o grau do nó 0?

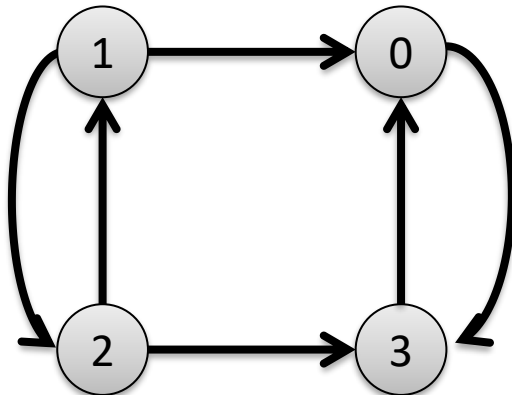


- Grau do nó 0:
 - Grau de entrada do nó 0:
 - Grau de saída do nó 0:

Introdução a grafos

- Definições

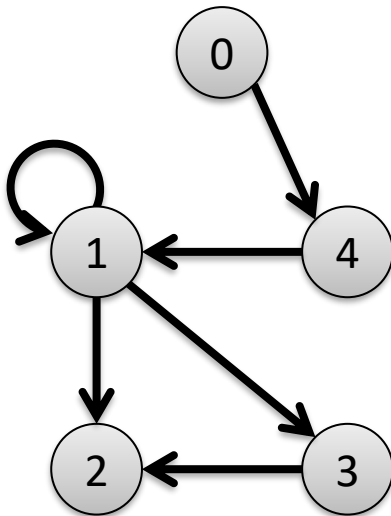
- Exemplos: Qual é o grau do nó 0?



- Grau do nó 0: 3
 - Grau de entrada do nó 0: 2
 - Grau de saída do nó 0: 1

Introdução a grafos

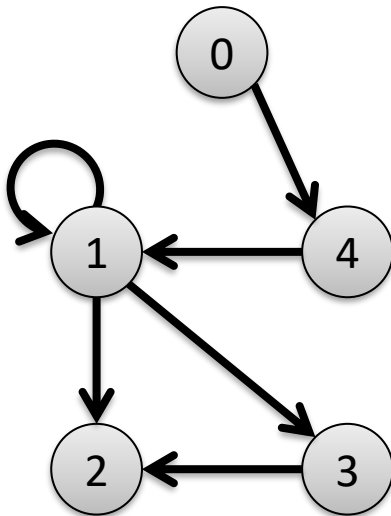
- Definições
 - Exemplos: Qual é o grau do nó 1?



Introdução a grafos

- Definições

- Exemplos: Qual é o grau do nó 1?

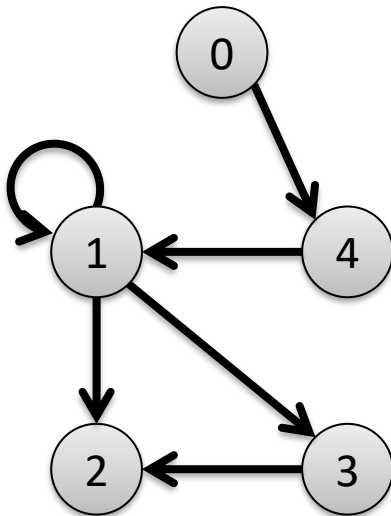


- Grau do nó 1:
 - Grau de entrada do nó 1:
 - Grau de saída do nó 1:

Introdução a grafos

- Definições

- Exemplos: Qual é o grau do nó 1?



- Grau do nó 1: 5
- Grau de entrada do nó 1: 2
- Grau de saída do nó 1: 3
- Laços somam 2 graus!

Introdução a grafos

- Definições

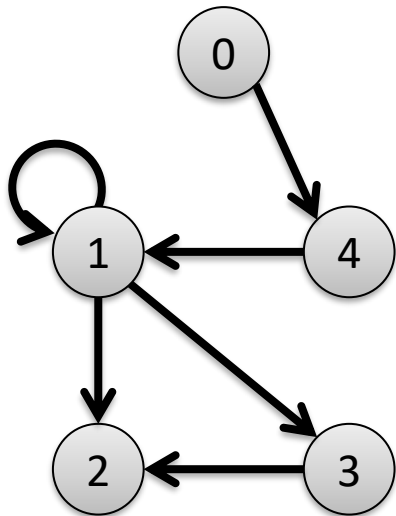
- O **grau médio** de um grafo é dado por: $\deg(G) = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^V \deg(v_i)$
- Em um **grafo** com m arestas, vale a seguinte **relação**: $\sum_{v \in G} \deg(v) = 2m$
- Em um grafo **direcionado** com m arestas, temos:

$$\sum_{v \in G} \text{indeg}(v) = \sum_{v \in G} \text{outdeg}(v) = m$$

Introdução a grafos

- Definições

- Exemplos:



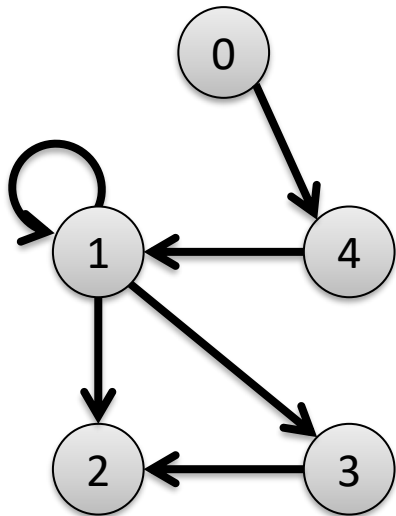
- Grau médio:

$$\deg(G) = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^V \deg(v_i)$$

Introdução a grafos

- Definições

- Exemplos:



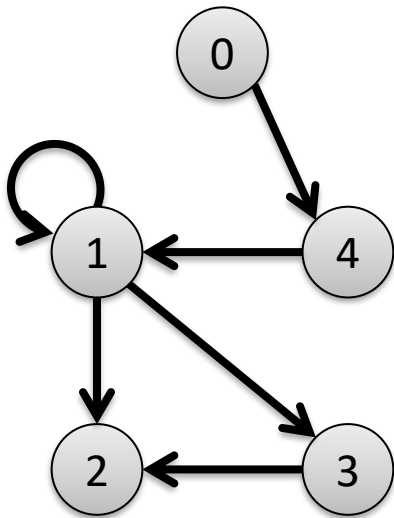
- Grau médio:

$$\deg(G) = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^V \deg(v_i) =$$
$$\frac{1}{5} (1 + 2 + 5 + 2 + 2) = 2,4$$

Introdução a grafos

- Definições

- Exemplos:



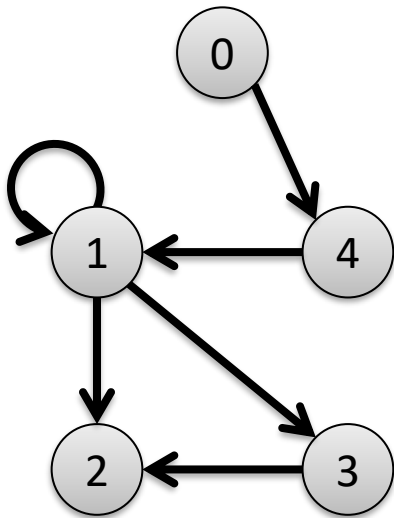
- Verificando número de arestas:

$$\sum_{v \in G} \deg(v) = 2m$$

Introdução a grafos

- Definições

- Exemplos:



- Verificando número de arestas:

$$m = 6$$

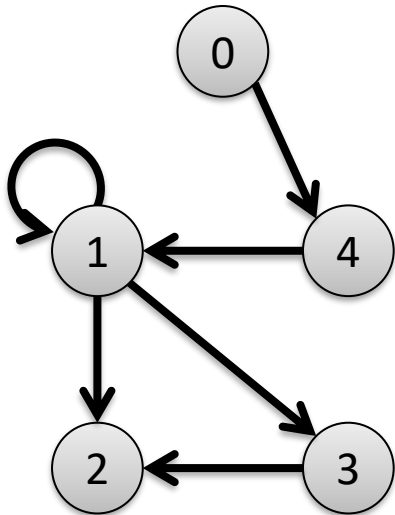
$$\sum_{v \in G} \deg(v) = 2m$$

$$(1 + 2 + 5 + 2 + 2) = 12 = 2 \times 6$$

Introdução a grafos

- Definições

- Exemplos:



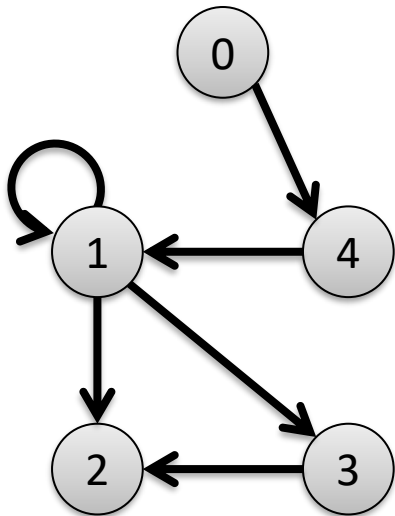
- Verificando graus de entrada e saída:

$$\sum_{v \in G} \text{indeg}(v) = \sum_{v \in G} \text{outdeg}(v) = m$$

Introdução a grafos

- Definições

- Exemplos:



- Verificando graus de entrada e saída:

$$\sum_{v \in G} \text{indeg}(v) = \sum_{v \in G} \text{outdeg}(v) = m$$

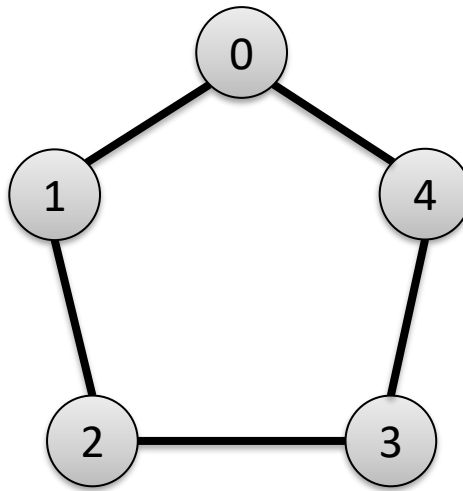
Entrada: $(0 + 1 + 2 + 2 + 1) = 6$

Saída: $(1 + 1 + 3 + 0 + 1) = 6$

Introdução a grafos

- **Definições**

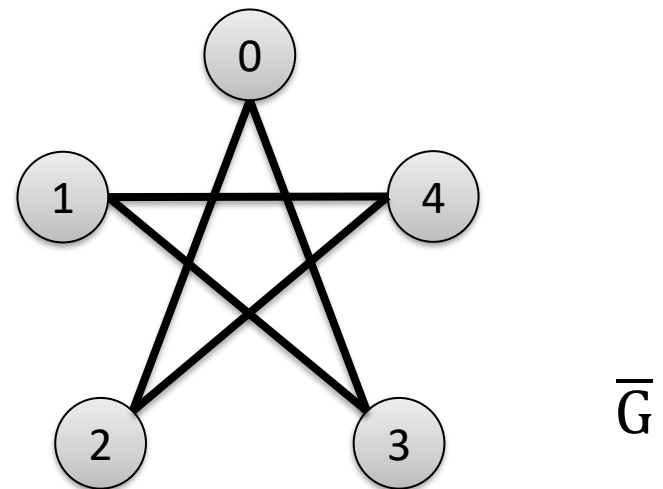
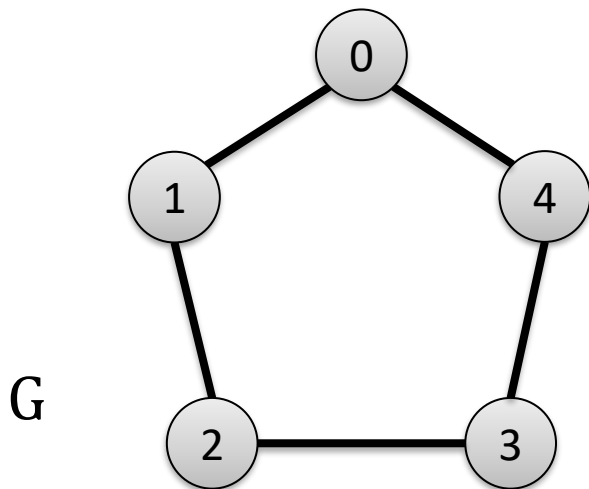
- Um grafo é **regular** quando seus nós possuem o mesmo grau.



Introdução a grafos

- Definições

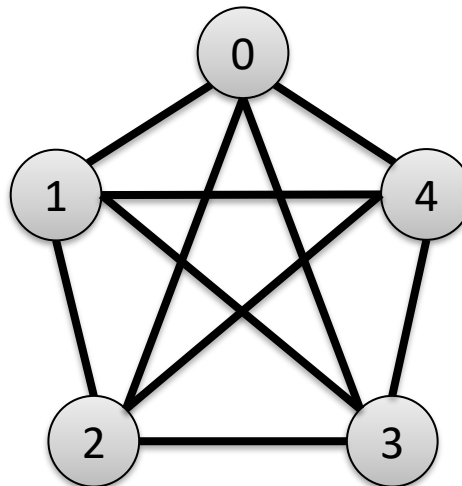
- O **complemento** de um grafo G , representado por \overline{G} , é o grafo com o mesmo **conjunto de vértices** de G e tal que se dois vértices **são adjacentes** em G , **não são** em \overline{G} .



Introdução a grafos

- Definições

- Se **todos** os **vértices** de G são mutuamente **adjacentes**, o grafo é dito **completo**.



- Quantas **arestas** há em um grafo **completo** de n vértices?

Introdução a grafos

- Definições

- Quantas **arestas** há em um grafo **completo** de n vértices?

$n = 1$



0 arestas

Introdução a grafos

- **Definições**

- Quantas **arestas** há em um grafo **completo** de n vértices?



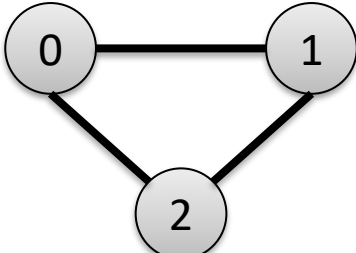

Introdução a grafos

- Definições

- Quantas **arestas** há em um grafo **completo** de n vértices?

$n = 1$   0 arestas

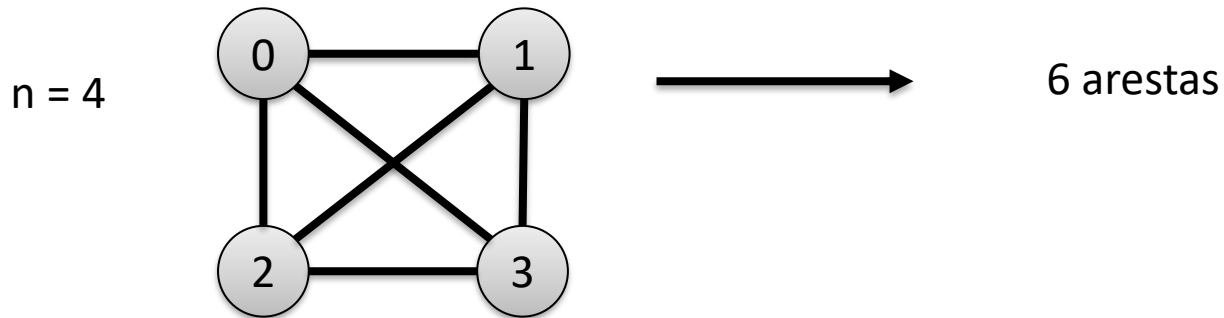
$n = 2$   1 arestas

$n = 3$   3 arestas

Introdução a grafos

- Definições

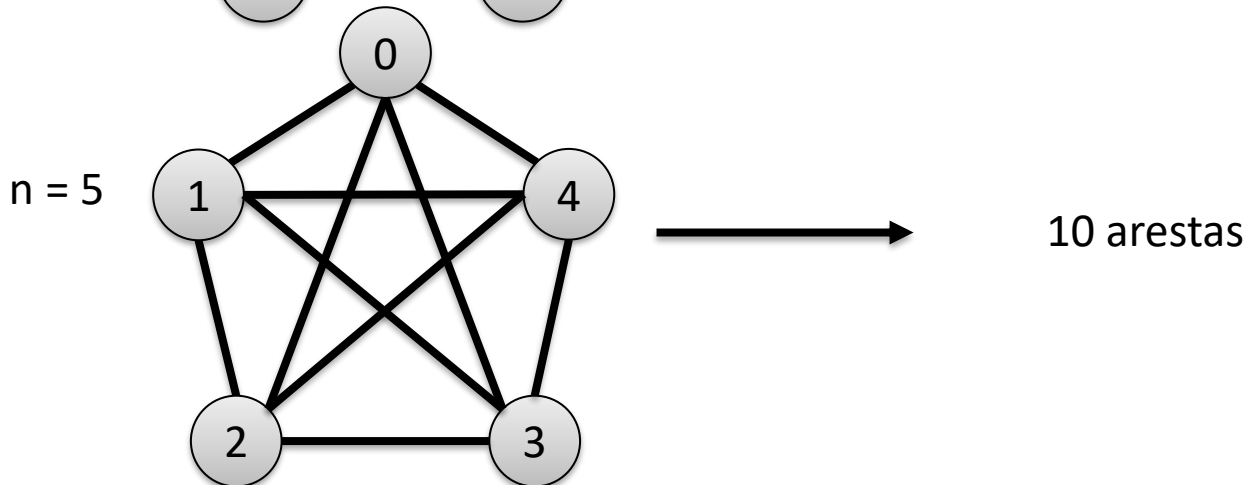
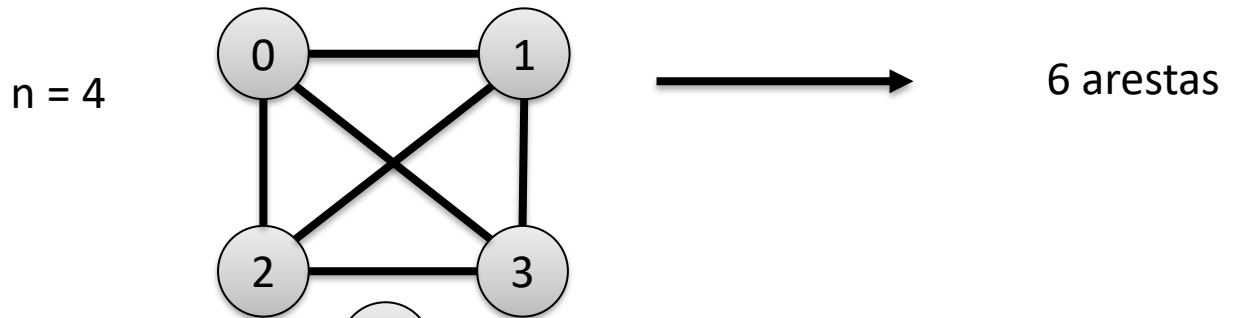
- Quantas **arestas** há em um grafo **completo** de n vértices?



Introdução a grafos

- Definições

- Quantas **arestas** há em um grafo **completo** de n vértices?



Introdução a grafos

- **Definições**

- Quantas **arestas** há em um grafo **completo** de n vértices?

| Vértices | Arestas |
|----------|---------|
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |
| 3 | 3 |
| 4 | 6 |
| 5 | 10 |

Introdução a grafos

- Definições

- Quantas **arestas** há em um grafo **completo** de n vértices?

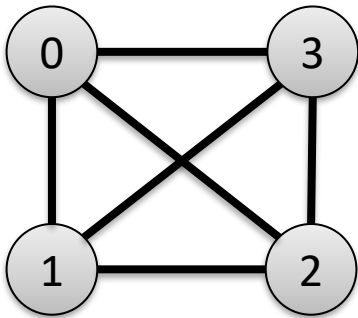
| Vértices | Arestas |
|----------|---------|
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |
| 3 | 3 |
| 4 | 6 |
| 5 | 10 |

$$C_{n,2} = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

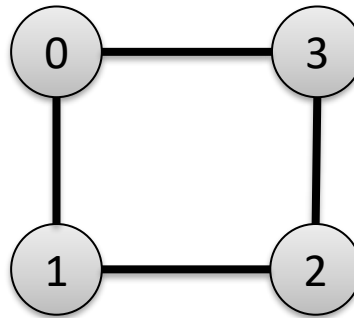
Introdução a grafos

- Definições

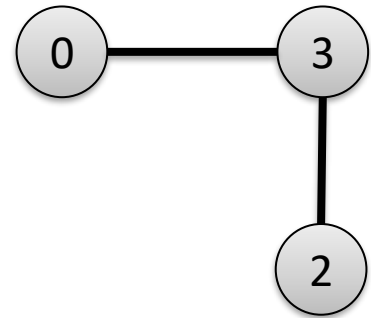
- Um **subgrafo** H de um grafo G é tal que podemos dizer que G contém H .



Grafo G



Subgrafo de G

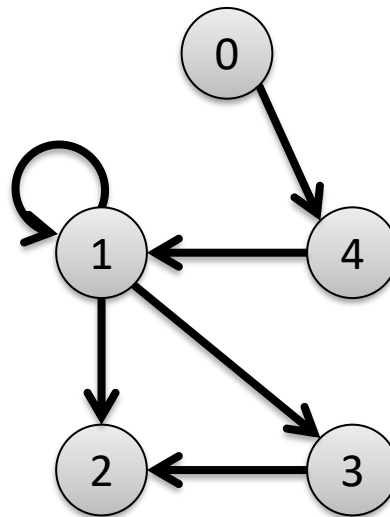


Subgrafo de G

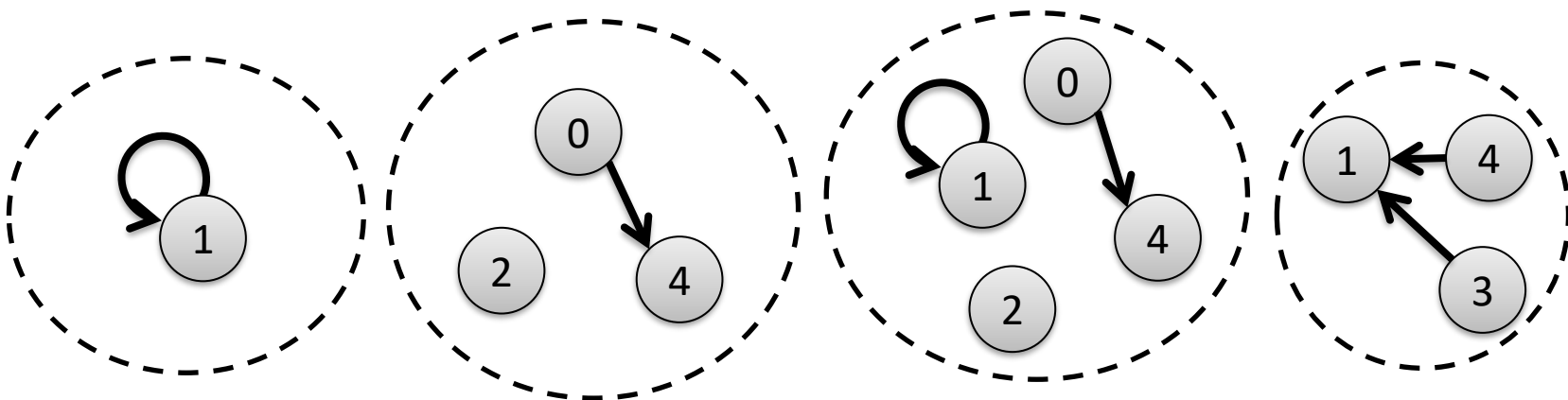
Introdução a grafos

- Definições

- Exemplos



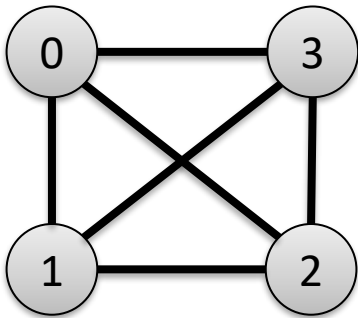
São
subgrafos?



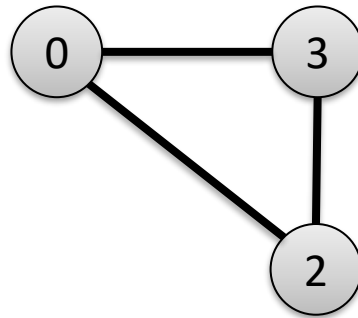
Introdução a grafos

- Definições

- H é um **subgrafo induzido** de um grafo G se ele tem **todas as arestas** que aparecem em G sobre o mesmo **conjunto de vértices**.



Grafo G



Subgrafo
induzido de G

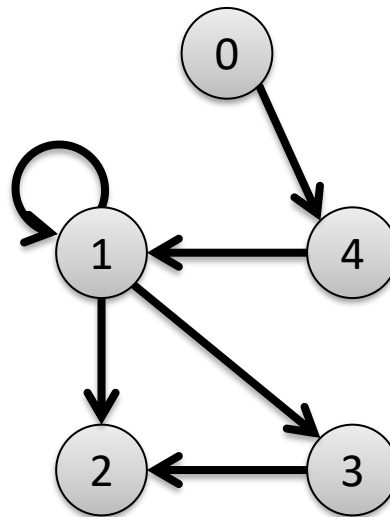


Subgrafo
induzido de G

Introdução a grafos

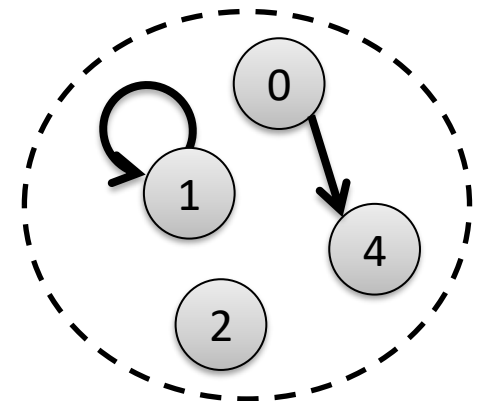
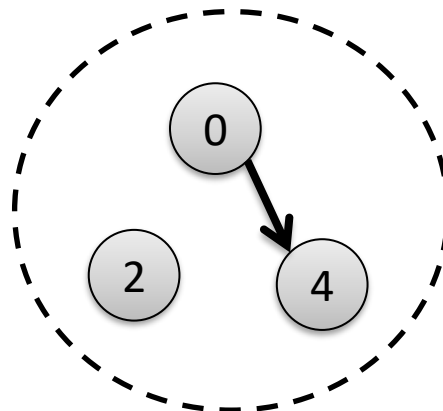
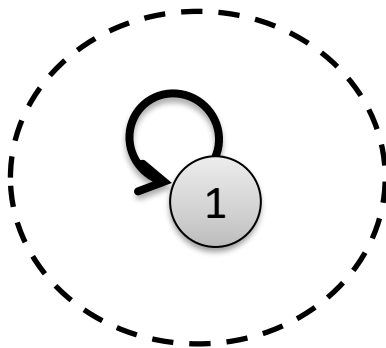
- Definições

- Exemplos



Esses subgrafos
são induzidos?

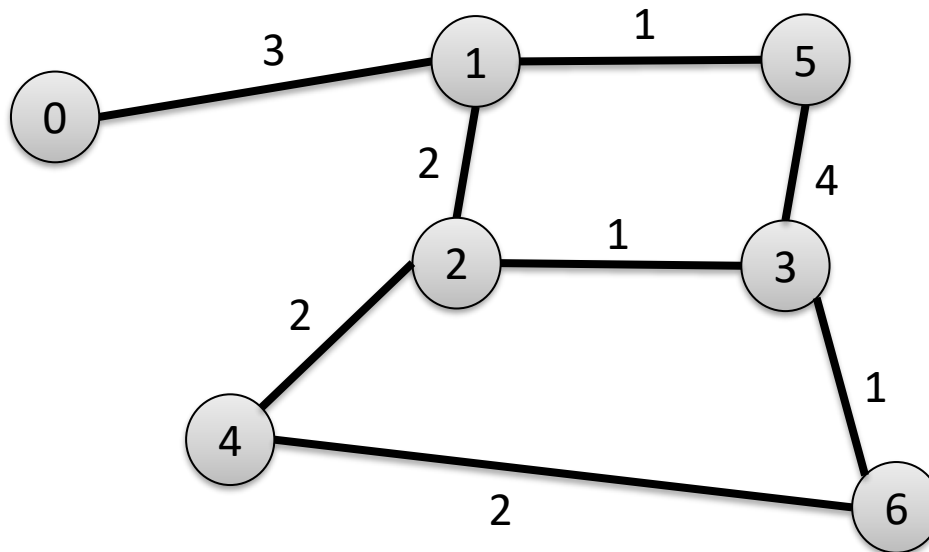
Alguns
subgrafos:



Introdução a grafos

- Definições

- Um grafo é **ponderado** quando um número (peso) está associado a cada aresta.
- O peso de cada aresta (i, j) é representado por $w(i,j)$



$$w(0,1) = 3$$

$$w(2,3) = 1$$

$$w(3,5) = 4$$

Introdução a grafos

- **Definições**

- Um **caminho** em um grafo é uma **sequência** de **vértices**, começando em um vértice e terminando em um vértice.

- Um **caminho** do nó n_0 até o nó n_k é uma lista:

$$(n_0, n_1, n_2, \dots, n_k)$$

Onde: n_0 é o vértice inicial do caminho

n_1 é um vértice interno do caminho

...

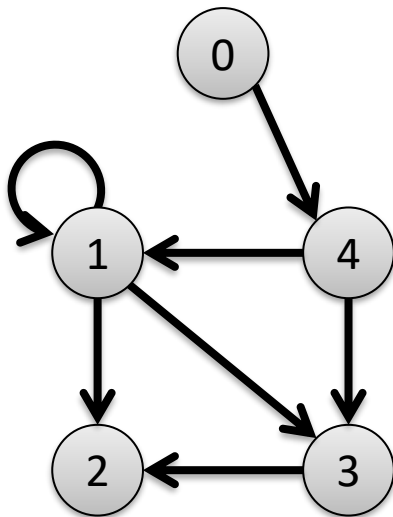
n_k é o vértice final do caminho

- **Obs**: n_k pode ser igual a n_0

Introdução a grafos

- Definições

- Dois ou mais caminhos são **independentes** se nenhum deles contém ao menos um vértice **do outro**, exceto o primeiro e o último.

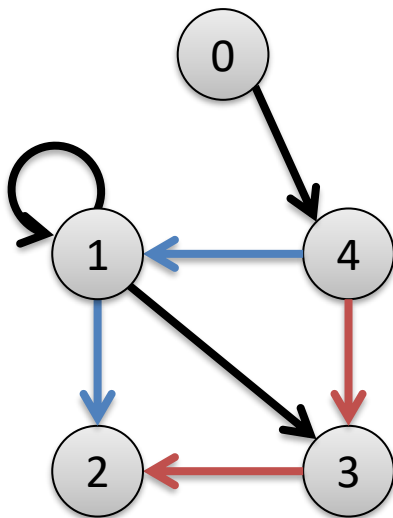


- Existem dois caminhos independentes do nó 4 até o nó 2?

Introdução a grafos

- Definições

- Dois ou mais caminhos são **independentes** se nenhum deles contém ao menos um vértice **do outro**, exceto o primeiro e o último.



- Existem dois caminhos independentes do nó 4 até o nó 2?
- Sim! (4, 1, 2) e (4, 3, 2)

Introdução a grafos

- Definições

- O **comprimento** de um caminho é o número de arestas no caminho, ou seja:

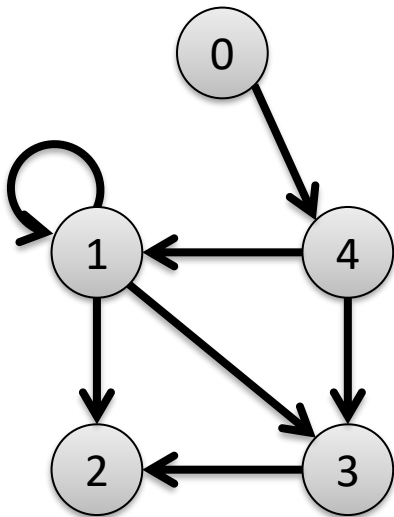
$$\text{comp}(n_0, n_1, n_2, \dots, n_k) = k$$

- Um nó n_0 é **alcançável** por um nó n_k se existe pelo menos um **caminho** que liga os dois nós.
- Neste caso, pode-se dizer que os nós estão **conectados**.
- Em um **grafo direcionado**, um caminho pode apenas seguir nos sentidos direcionados pelas **arestas**.

Introdução a grafos

- **Definições**

- **Exemplos**

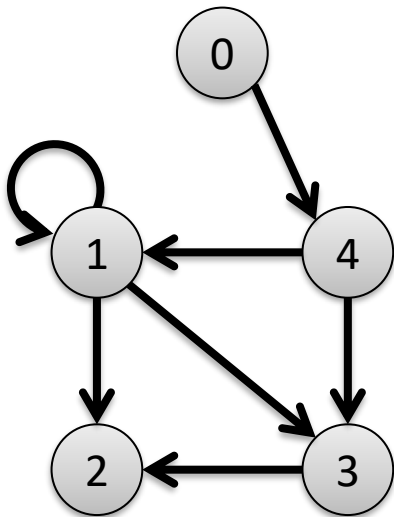


- Os nós 0 e 3 estão conectados?

Introdução a grafos

- **Definições**

- **Exemplos**



- Os nós 0 e 3 estão conectados? Sim!

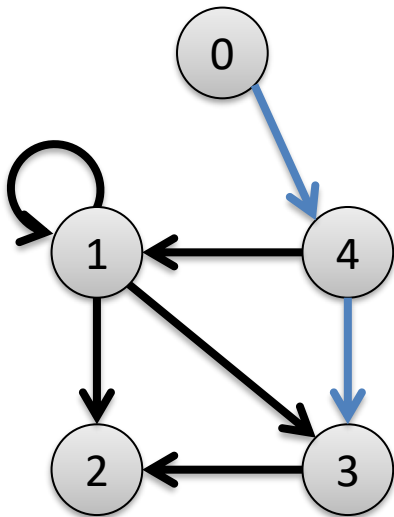
- Um caminho é:

- Comprimento:

Introdução a grafos

- **Definições**

- **Exemplos**



- Os nós 0 e 3 estão conectados? Sim!

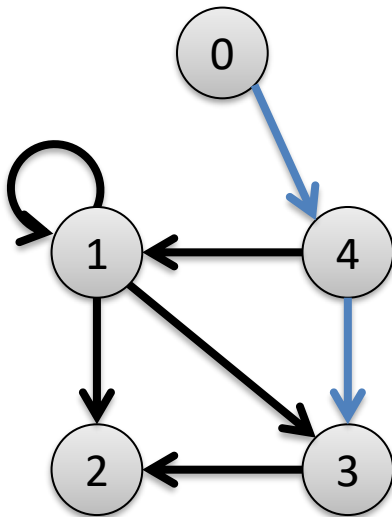
- Um caminho é: (0, 4, 3)

- Comprimento:

Introdução a grafos

- Definições

- Exemplos



- Os nós 0 e 3 estão conectados? Sim!

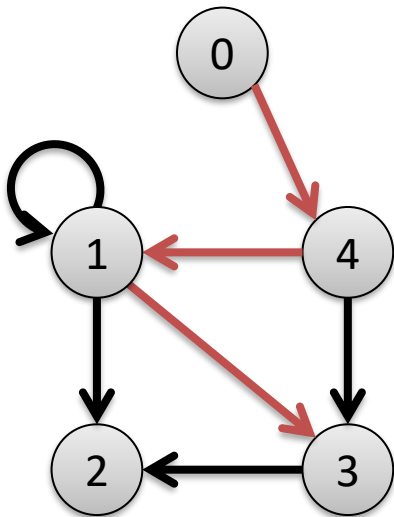
- Um caminho é: (0, 4, 3)

- Comprimento: 2

Introdução a grafos

- Definições

- Exemplos



- Os nós 0 e 3 estão conectados? Sim!

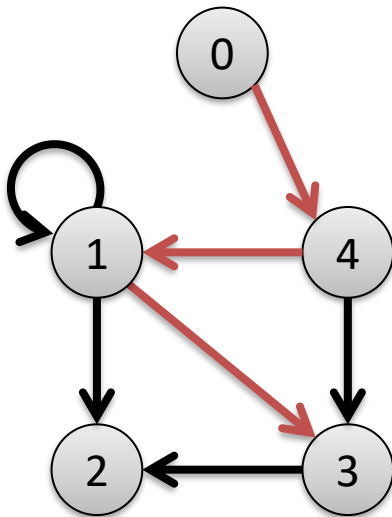
- Outro caminho é: (0, 4, 1, 3)

- Comprimento:

Introdução a grafos

- Definições

- Exemplos



- Os nós 0 e 3 estão conectados? Sim!

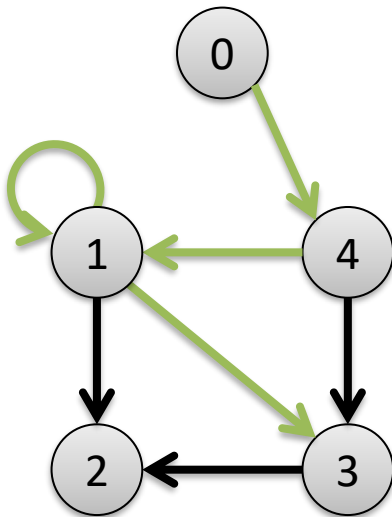
- Outro caminho é: (0, 4, 1, 3)

- Comprimento: 3

Introdução a grafos

- **Definições**

- **Exemplos**



- Os nós 0 e 3 estão conectados? Sim!

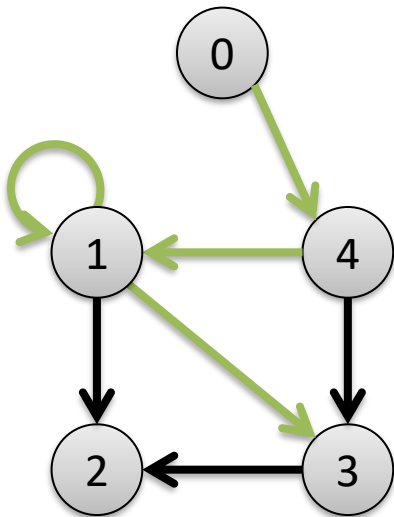
- Outro caminho é: (0, 4, 1, 1, 1, 1, 3)

- Comprimento:

Introdução a grafos

- **Definições**

- **Exemplos**



- Os nós 0 e 3 estão conectados? Sim!

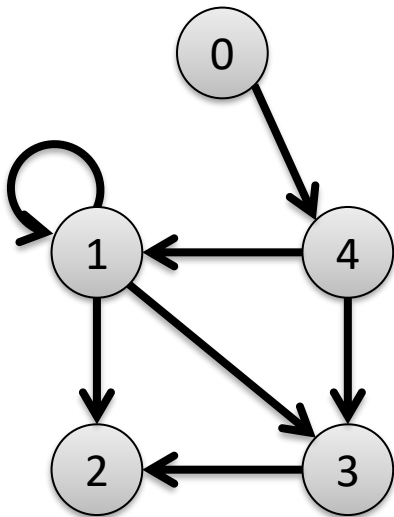
- Outro caminho é: (0, 4, 1, 1, 1, 1, 3)

- Comprimento: 6

Introdução a grafos

- Definições

- Exemplos

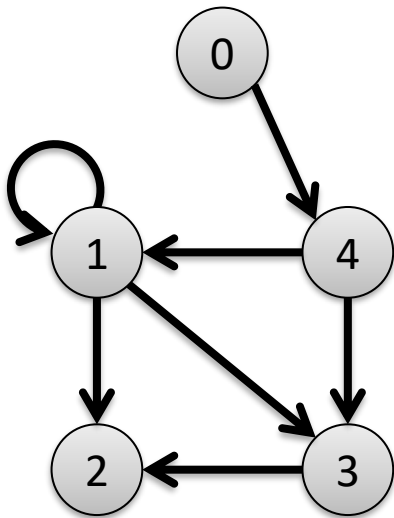


- O nó 1 é alcançável pelo nó 3?

Introdução a grafos

- **Definições**

- **Exemplos**



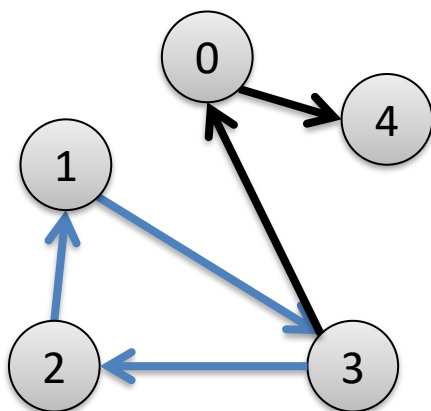
- O nó 1 é alcançável pelo nó 3? Não!

- Não existem caminhos que partam do nó 3 e cheguem no nó 1.

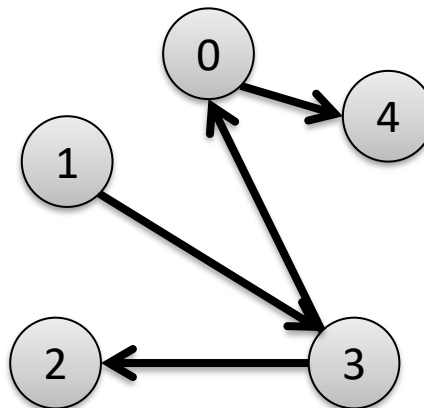
Introdução a grafos

- **Definições**

- Um **ciclo** é um caminho onde $n_0 = n_k$, ou seja, é um caminho que começa em um nó e termina nele mesmo.
- Um grafo que não possui ciclos é chamado **acíclico**.
- Um grafo que possui ciclos é chamado **cíclico**.



Cíclico



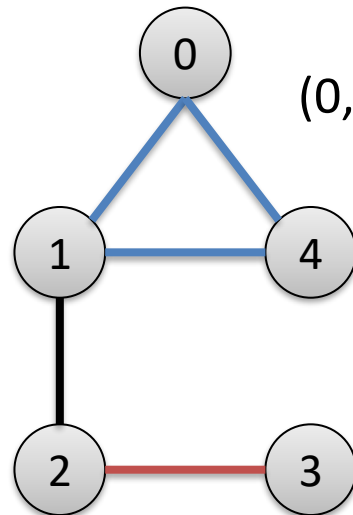
Acíclico

Obs: Se cada nó no ciclo é distinto, o ciclo é **simples**.

Introdução a grafos

- **Definições**

- **Obs:** Em um grafo **não direcionado**, um ciclo é simplesmente um caminho fechado **sem repetição de arestas** ou vértices (além do início e do fim).



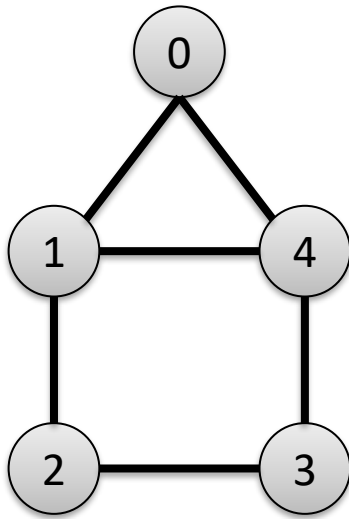
(0, 1, 4, 0) é um ciclo

(2, 3, 2) não é um ciclo

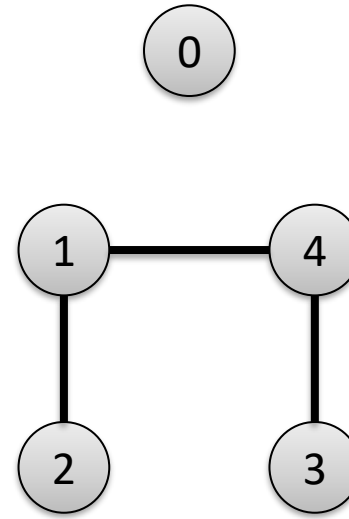
Introdução a grafos

- Definições

- Um grafo G é dito **conexo** se existe um caminho para qualquer par de nós (i, j) pertencente à G .



Conexo

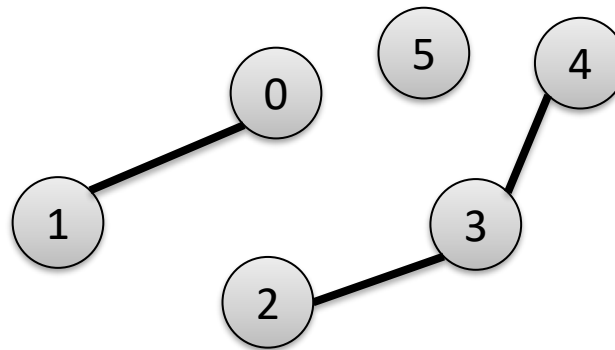


Desconexo

Introdução a grafos

- Definições

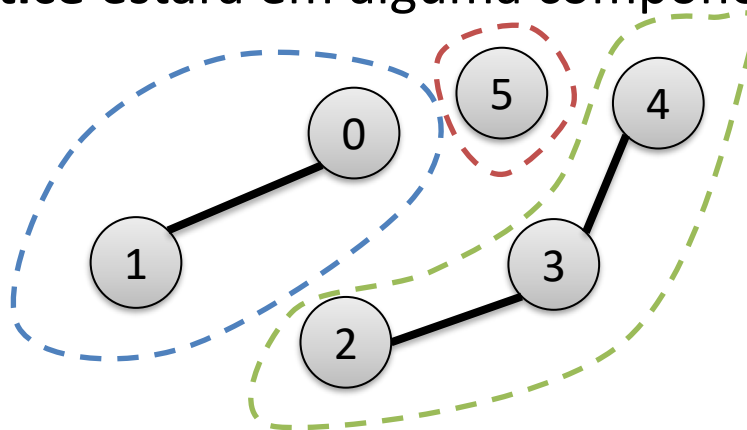
- **Componente conexa** é um subgrafo induzido máximo (ou seja, o maior possível) no qual qualquer par de vértices está conectado por algum caminho.
- Uma **componente conexa** é sempre não vazia.
- **Todo vértice** estará em alguma componente conexa.



Introdução a grafos

- Definições

- **Componente conexa** é um subgrafo induzido máximo (ou seja, o maior possível) no qual qualquer par de vértices está conectado por algum caminho.
- Uma **componente conexa** é sempre não vazia.
- **Todo vértice** estará em alguma componente conexa.

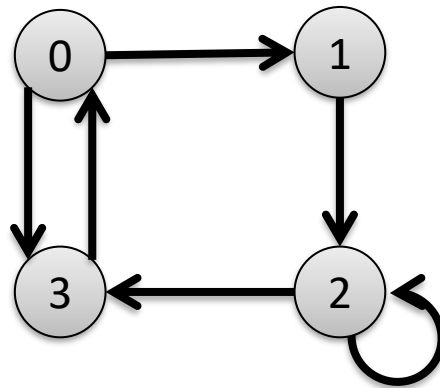


Três componentes conexas!

Introdução a grafos

- Definições

- **Componentes fortemente conexos** de um grafo **direcionado** são conjuntos de vértices sob a relação de “**mutuamente alcançáveis**”.



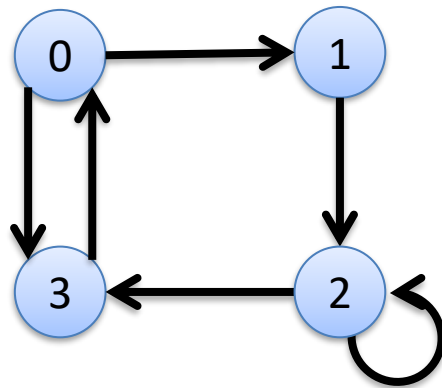
Componentes fortemente conexos:

Obs: Todos os nós pertencem a alguma componente fortemente conexa.

Introdução a grafos

- Definições

- **Componentes fortemente conexos** de um grafo **direcionado** são conjuntos de vértices sob a relação de “**mutuamente alcançáveis**”.



Componentes fortemente conexos:

$\{0, 1, 2, 3\}$

$\{4\}$

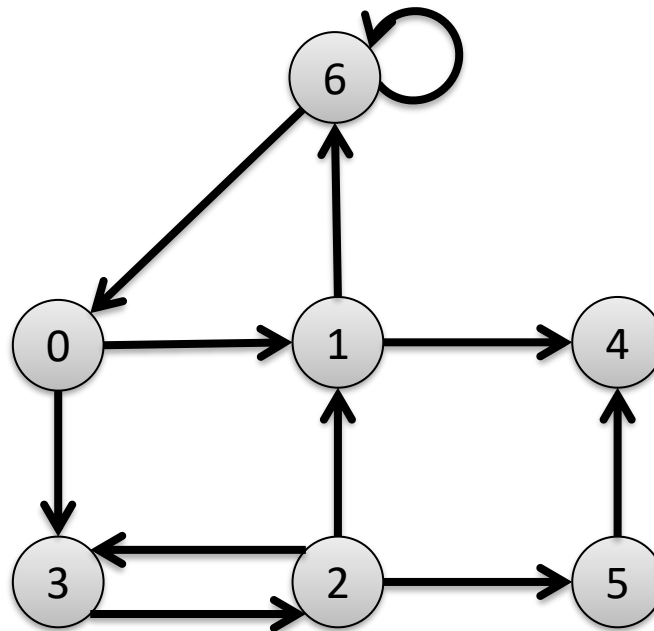
$\{5\}$

Obs: Todos os nós pertencem a alguma componente fortemente conexa.

Introdução a grafos

- **Definições**

- **Exemplo:**



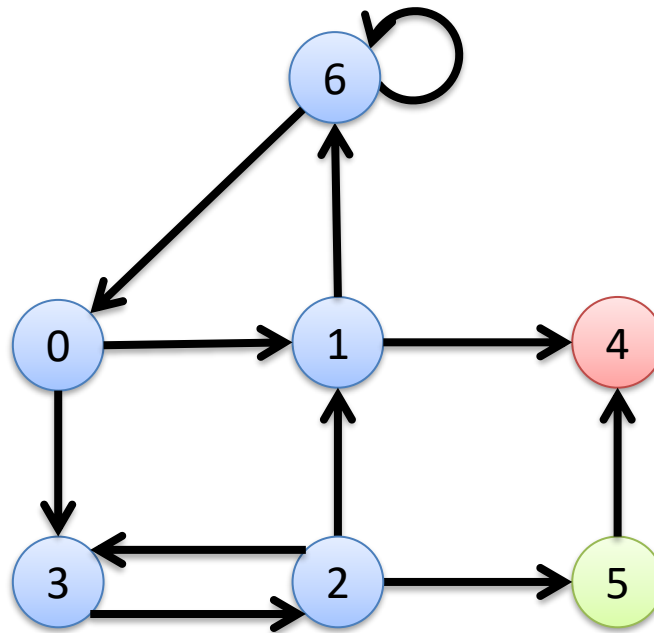
Componentes fortemente conexos:

Ciclos simples:

Introdução a grafos

- Definições

- Exemplo:



Componentes fortemente conexos:

$\{0, 1, 6, 3, 2\}$

$\{4\}$

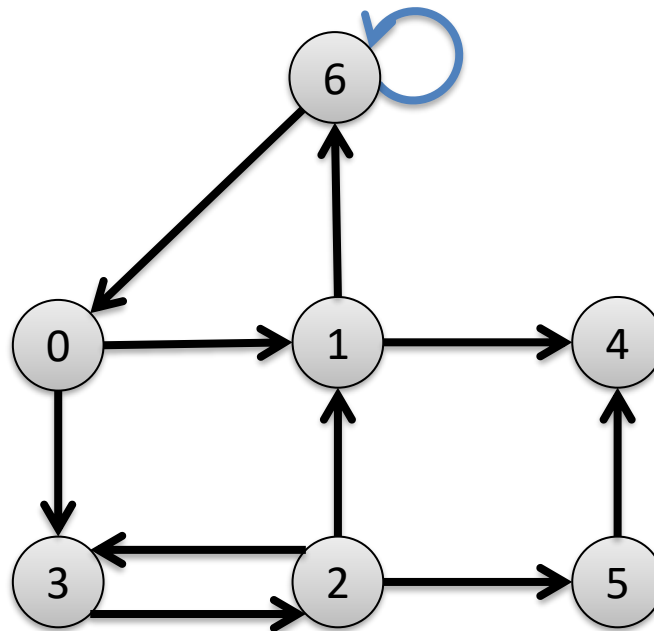
$\{5\}$

Ciclos simples:

Introdução a grafos

- Definições

- Exemplo:



Componentes fortemente conexos:

$\{0, 1, 6, 3, 2\}$

$\{4\}$

$\{5\}$

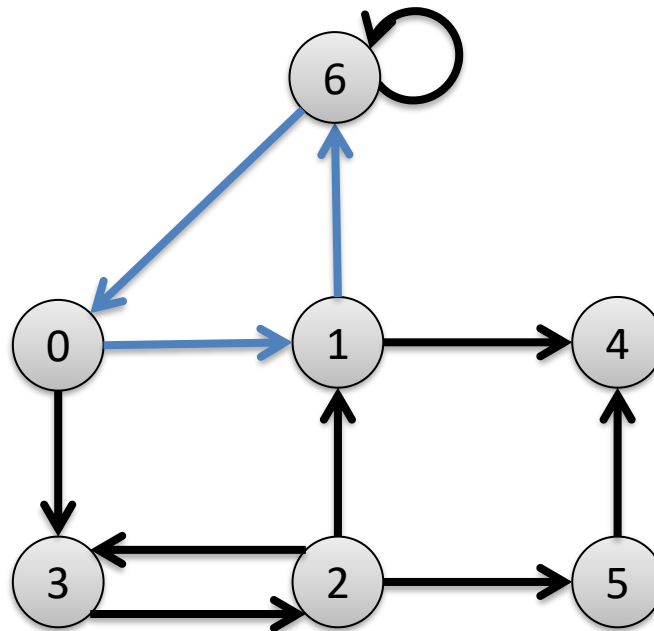
Ciclos simples:

$(6, 6)$

Introdução a grafos

- Definições

- Exemplo:



Componentes fortemente conexos:

$\{0, 1, 6, 3, 2\}$

$\{4\}$

$\{5\}$

Ciclos simples:

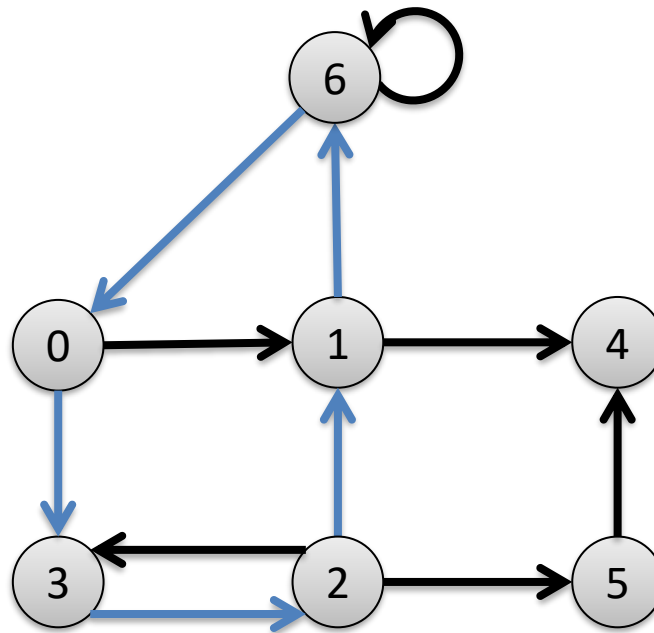
$(6, 6)$

$(6, 0, 1, 6)$

Introdução a grafos

- Definições

- Exemplo:



Componentes fortemente conexos:

$\{0, 1, 6, 3, 2\}$

$\{4\}$

$\{5\}$

Ciclos simples:

$(6, 6)$

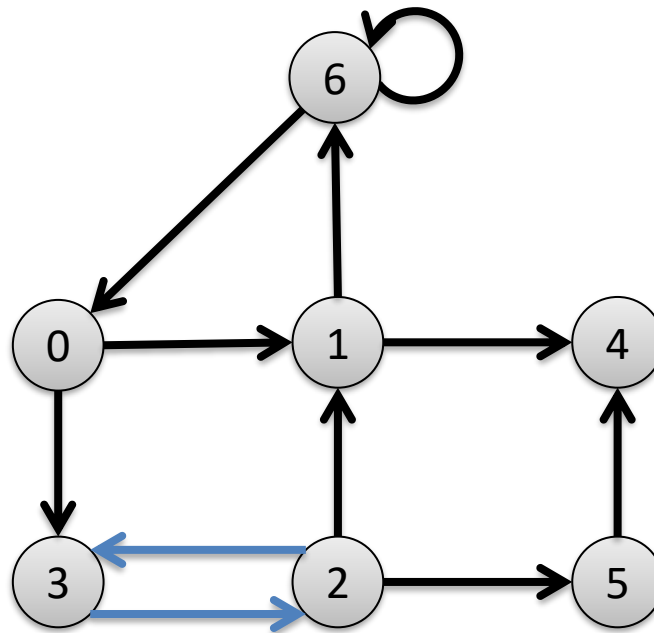
$(6, 0, 1, 6)$

$(6, 0, 3, 2, 1, 6)$

Introdução a grafos

- Definições

- Exemplo:



Componentes fortemente conexos:

$\{0, 1, 6, 3, 2\}$

$\{4\}$

$\{5\}$

Ciclos simples:

$(6, 6)$

$(6, 0, 1, 6)$

$(6, 0, 3, 2, 1, 6)$

$(3, 2, 3)$

Introdução a grafos

FIM