

ALGORITMOS EM GRAFOS

Bacharelado em Sistemas da Informação

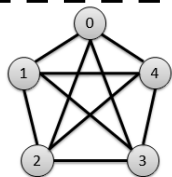
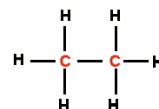
Prof. Marco André Abud Kappel

Aula 5 – Introdução a Árvores

Introdução a Árvores

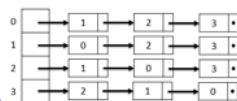
- Nas últimas aulas:

Grafos



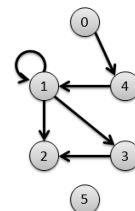
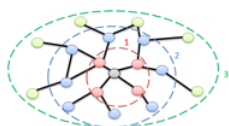
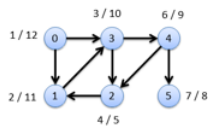
- Simples
- Completo
- Regular
- Cíclico
- Não direcionado
- Conexo

Representações computacionais



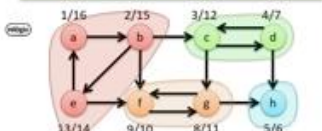
	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	0
2	0	1	0	1	0	0
3	0	1	1	0	0	0
4	1	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0

Percursos em grafos



- Multigrafo
- Grafo direcionado
- Cíclico
- Grau médio 2,4
- Desconexo

Algoritmos em grafos



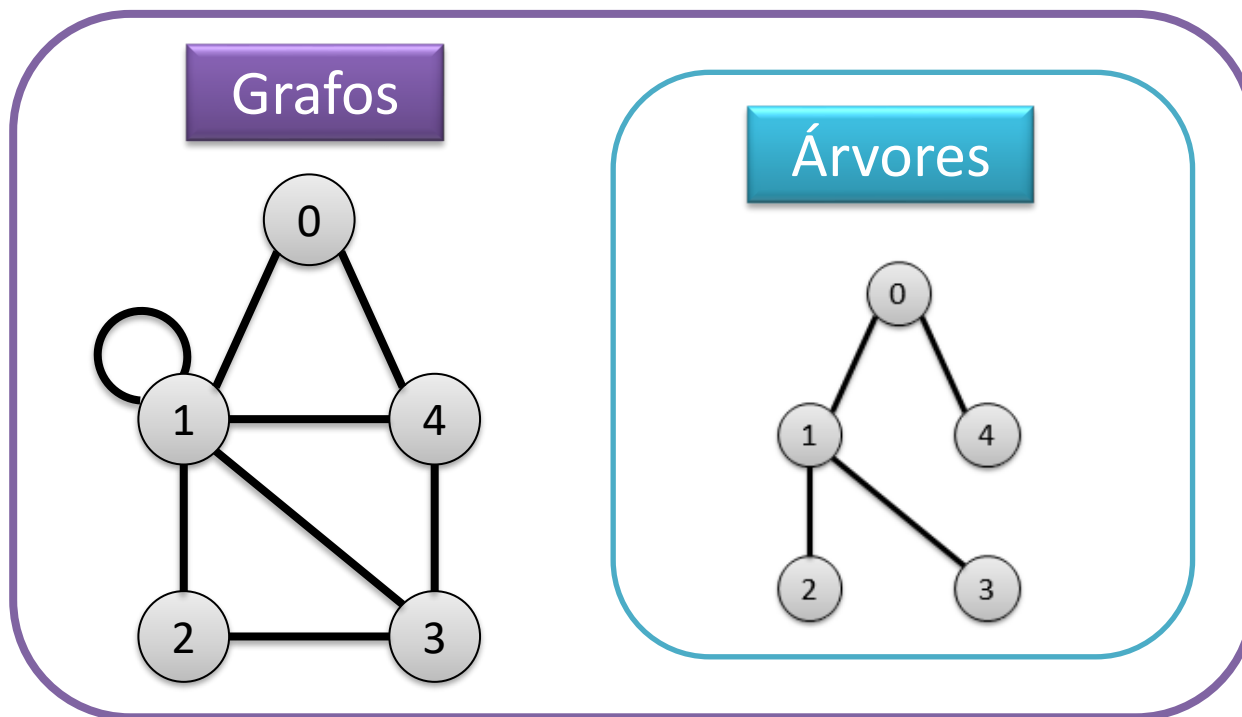
Árvores

Hoje

Introdução a Árvores

- **Definições**

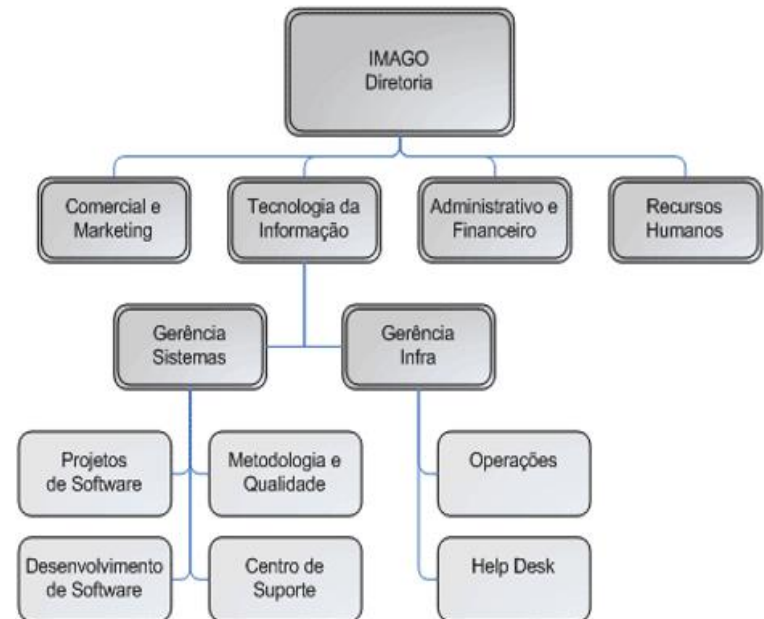
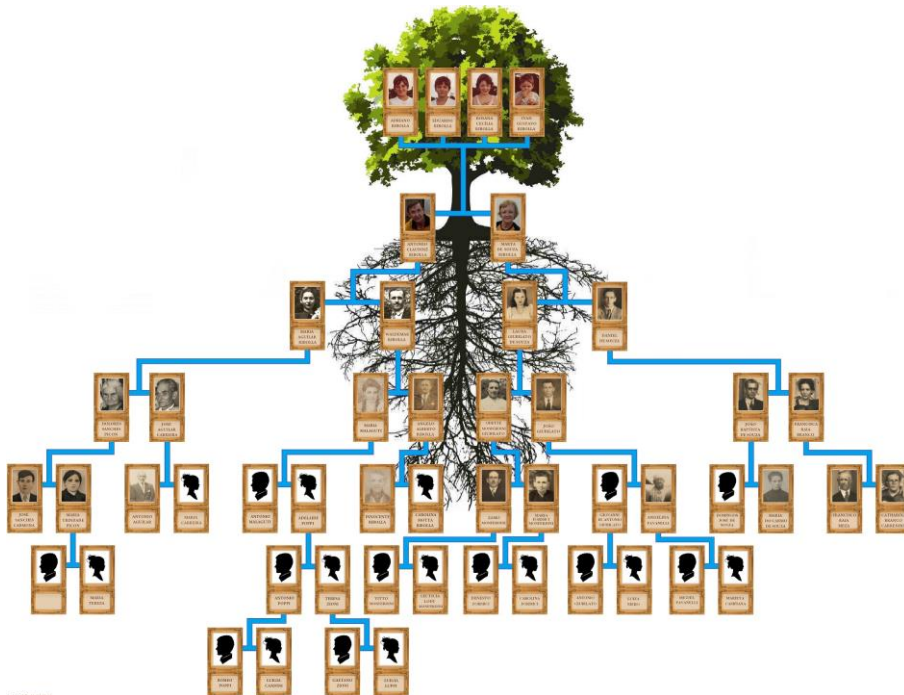
- Árvores são **grafos conexos sem ciclos**.
- Toda árvore é um grafo, mas nem todo grafo é uma árvore.



Introdução a Árvores

- Definições

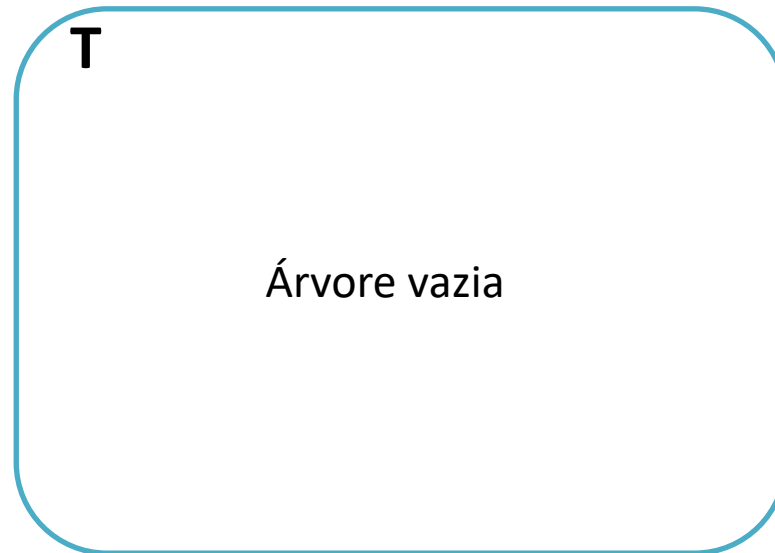
- Uma árvore organiza um conjunto de acordo com uma **estrutura hierárquica**.



Introdução a Árvores

- **Definições**

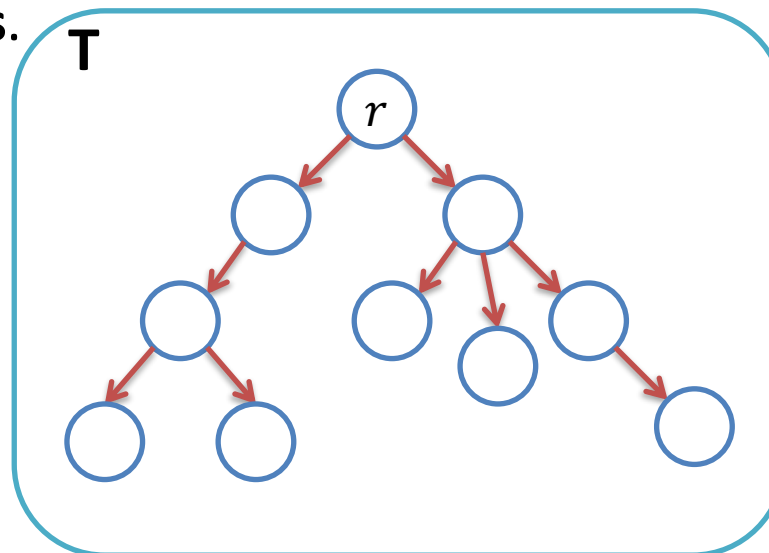
- Uma **árvore enraizada** T é um conjunto de nós (ou vértices), tais que:
 - A árvore é dita **vazia** se T é um **conjunto vazio**.



Introdução a Árvores

- **Definições**

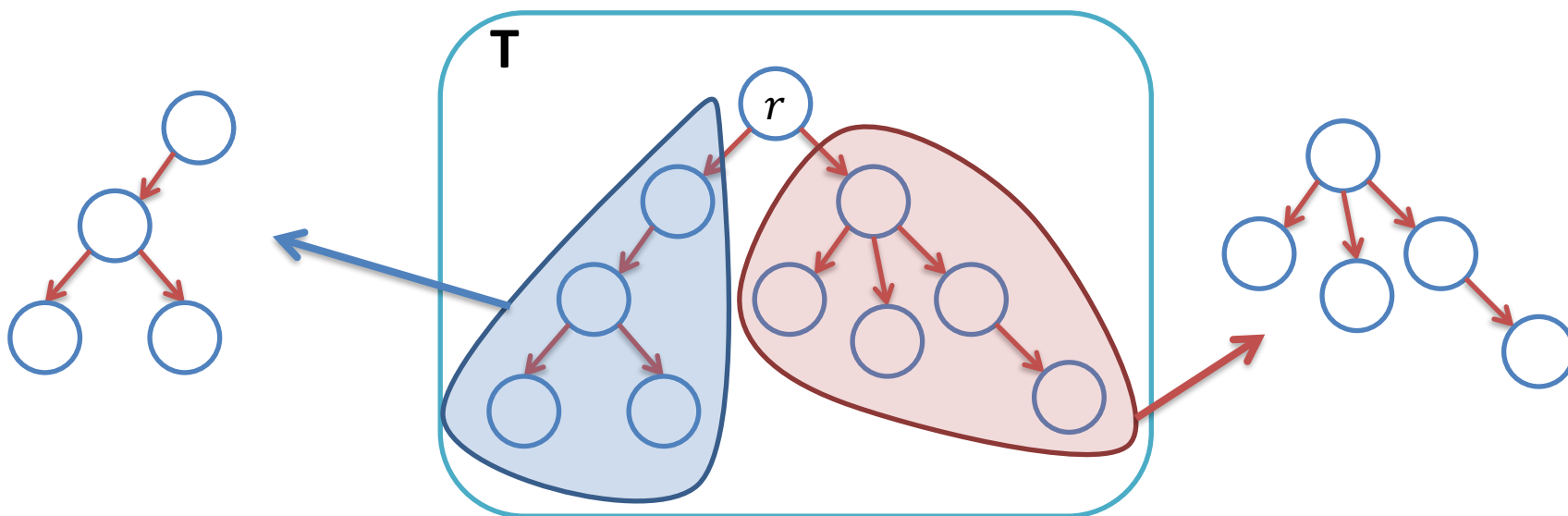
- Uma **árvore enraizada** T é um conjunto de nós (ou vértices), tais que:
 - Existe um **nó especial** $r \in T$, denominado **raiz** de T , e os demais nós, se existirem, são divididos em **subconjuntos disjuntos e não vazios**.



Introdução a Árvores

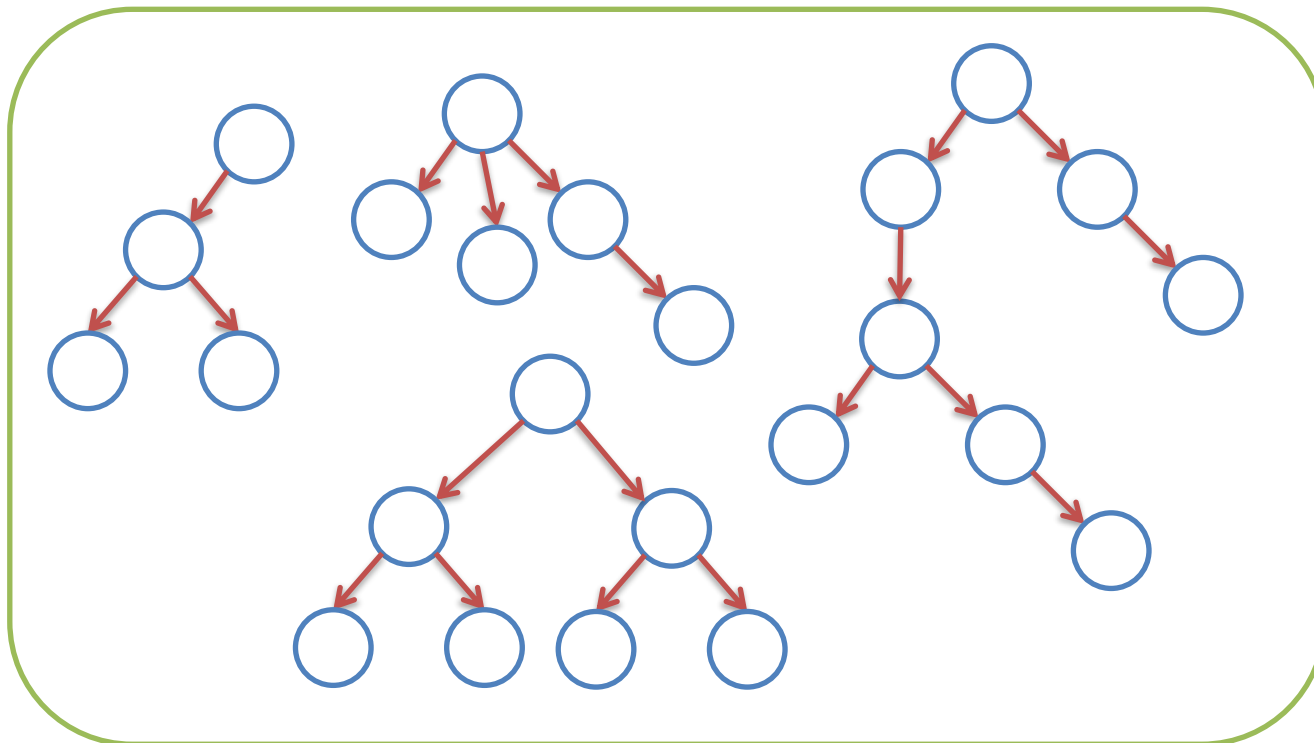
- **Definições**

- Cada **subconjunto** disjunto conexo e não vazio também é uma árvore enraizada, denominada **subárvore** de R .



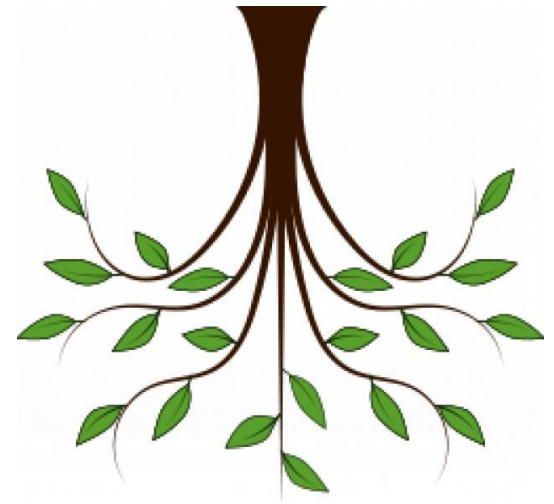
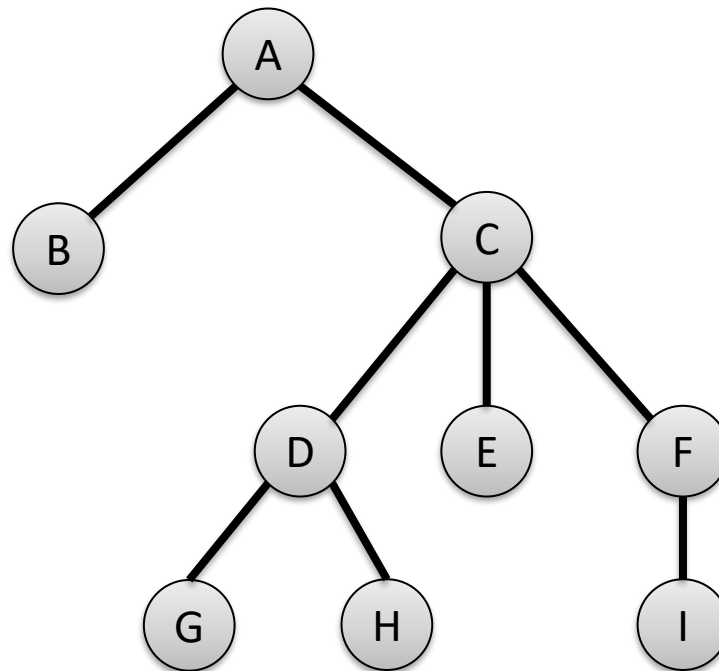
Introdução a Árvores

- **Definições**
 - Floresta é um conjunto de árvores



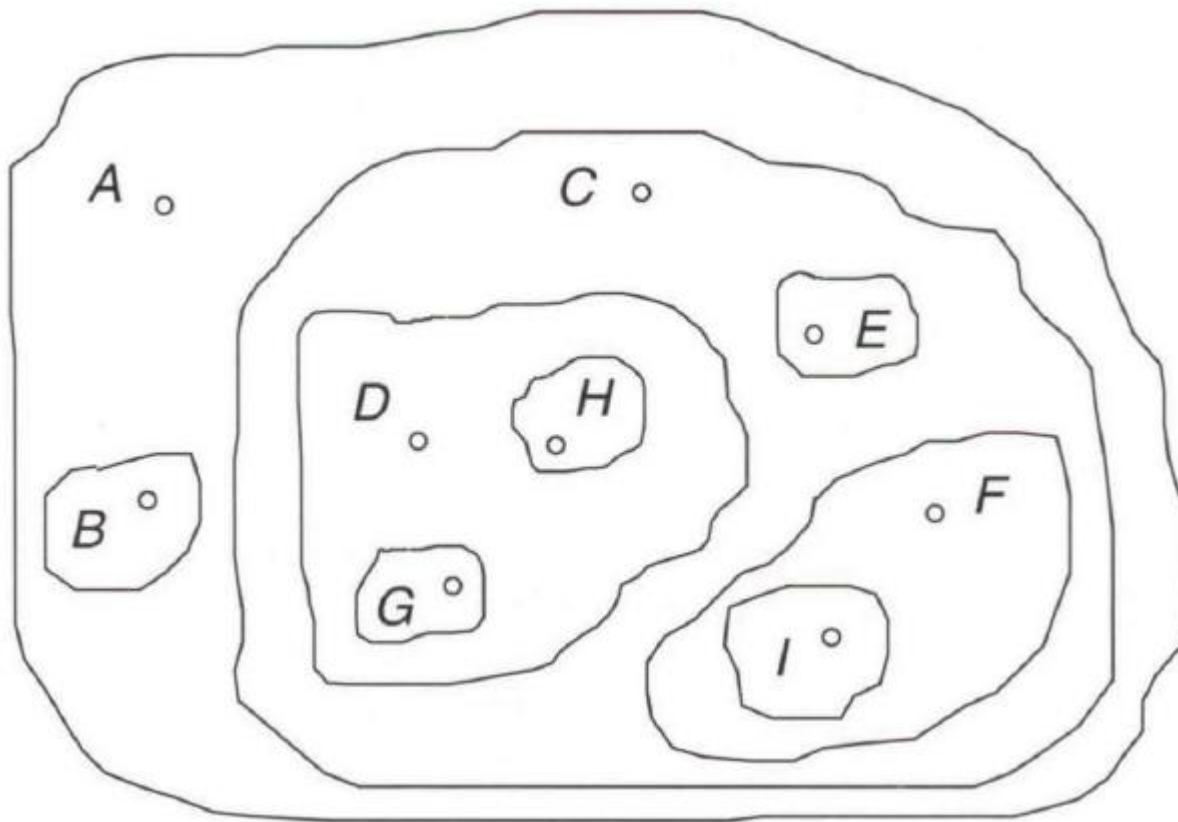
Introdução a Árvores

- **Representações gráficas**
 - Representação hierárquica:



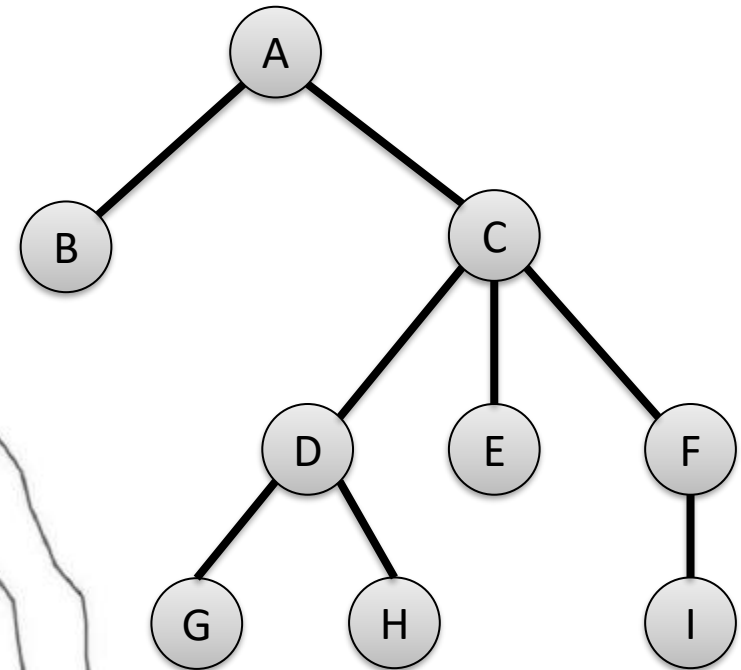
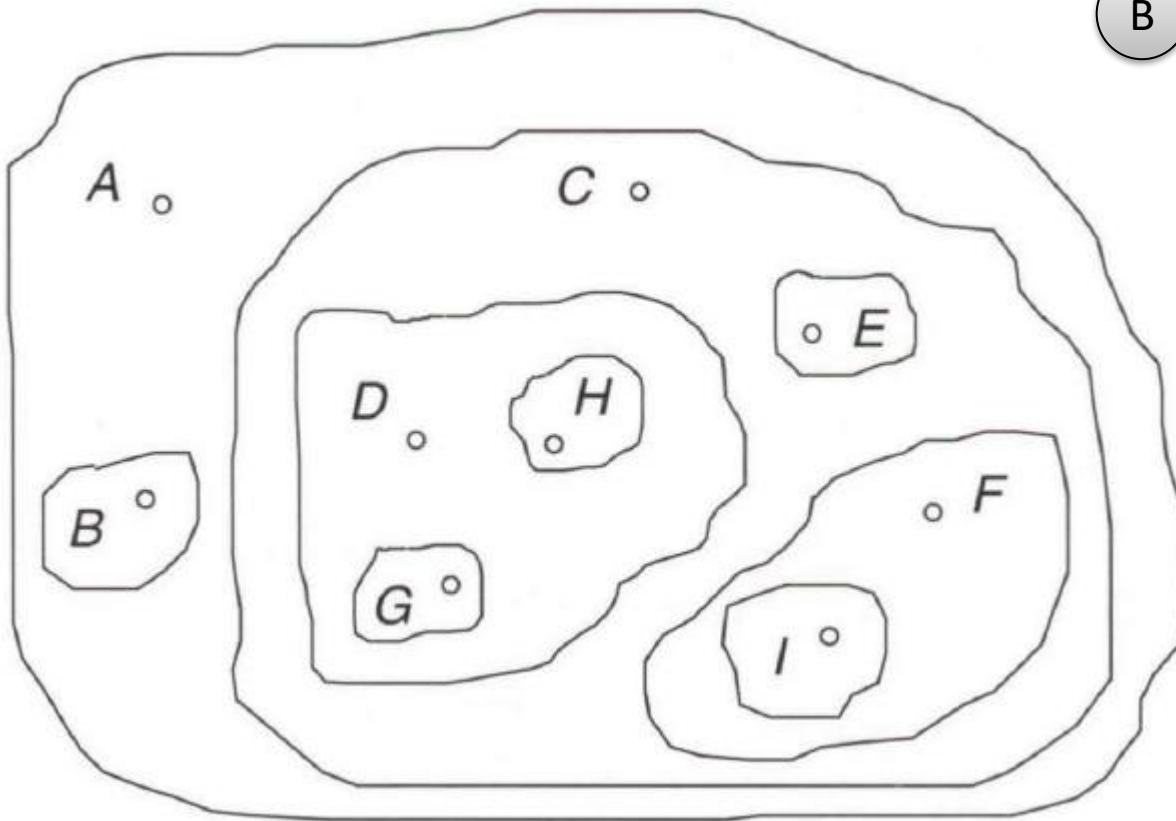
Introdução a Árvores

- **Representações gráficas**
 - Diagrama de inclusão:



Introdução a Árvores

- **Representações gráficas**
 - Diagrama de inclusão:

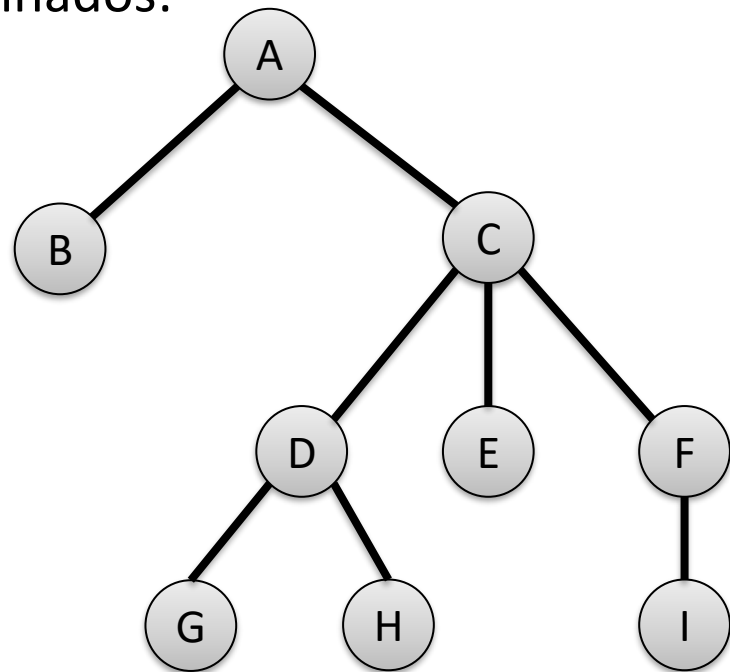


Introdução a Árvores

- **Representações gráficas**

- Representação por parênteses aninhados:

(A (B) (C (D (G) (H)) (E) (F (I))))



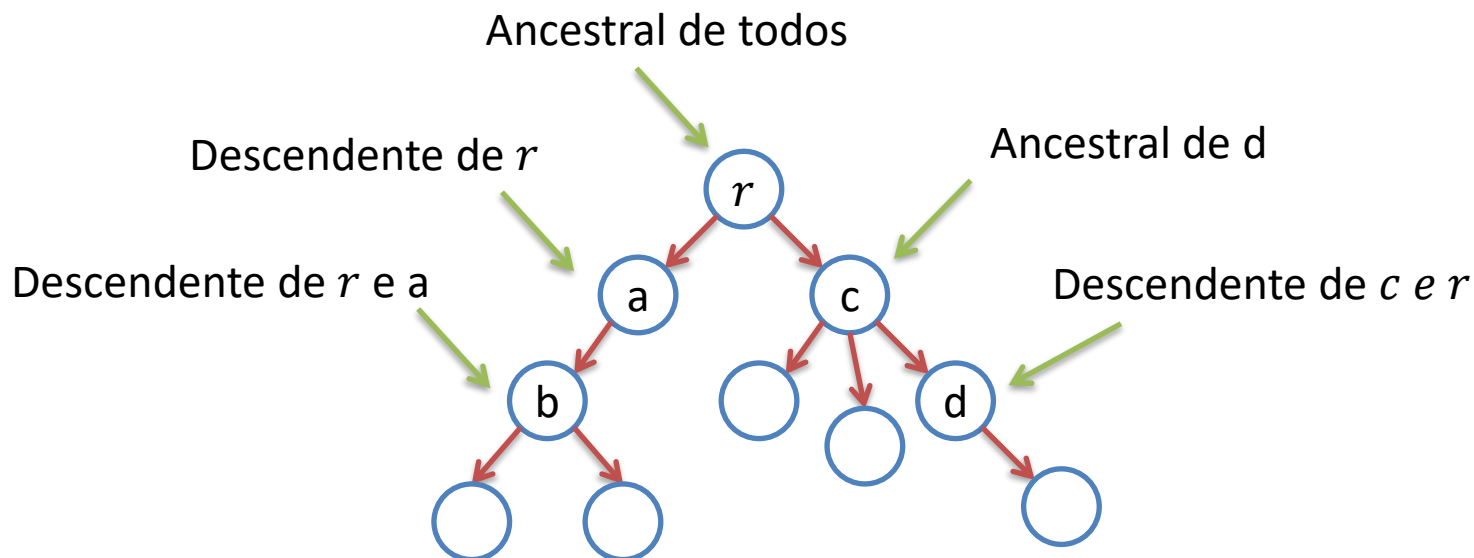
- Obtida pela aplicação de um algoritmo de percurso.

Introdução a Árvores

- **Relações de ancestralidade**

- Seja r o **nó raiz** da árvore T .

- Dados dois nós v e w , v é **ancestral** de w e w é **descendente** de v .



- v é **ancestral próprio** de w e w é **descendente próprio** de v se $w \neq v$.

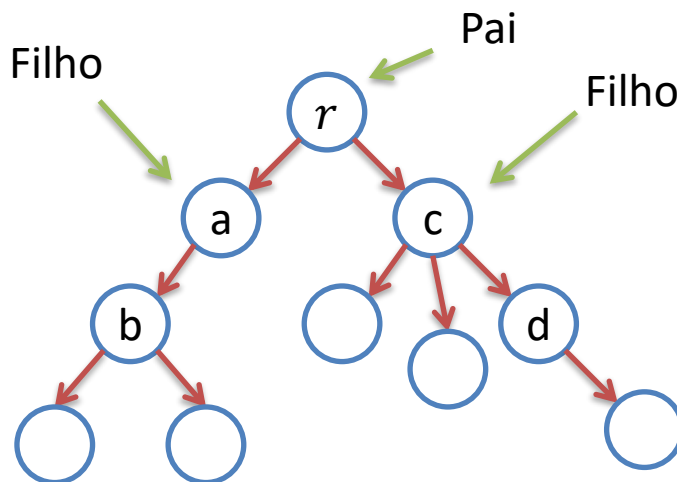
Introdução a Árvores

- **Relações de ancestralidade**

- Seja r o **nó raiz** da árvore T .

- Os nós raízes das subárvores de T são chamados **filhos** de r .

- v é **pai** de w e w é **filho** de v quando v é **ancestral próprio** de w e não existe outro nó t , **ancestral próprio** de w , tal que seja ancestral próprio de t .

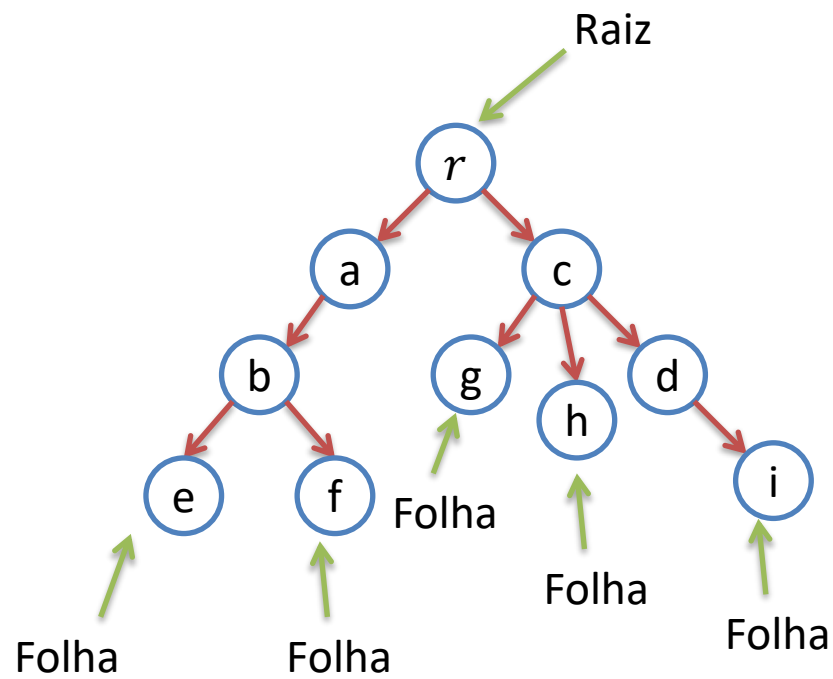


- Cada nó pode ser um nó pai de um nó inferior na hierarquia.

Introdução a Árvores

- **Definições**

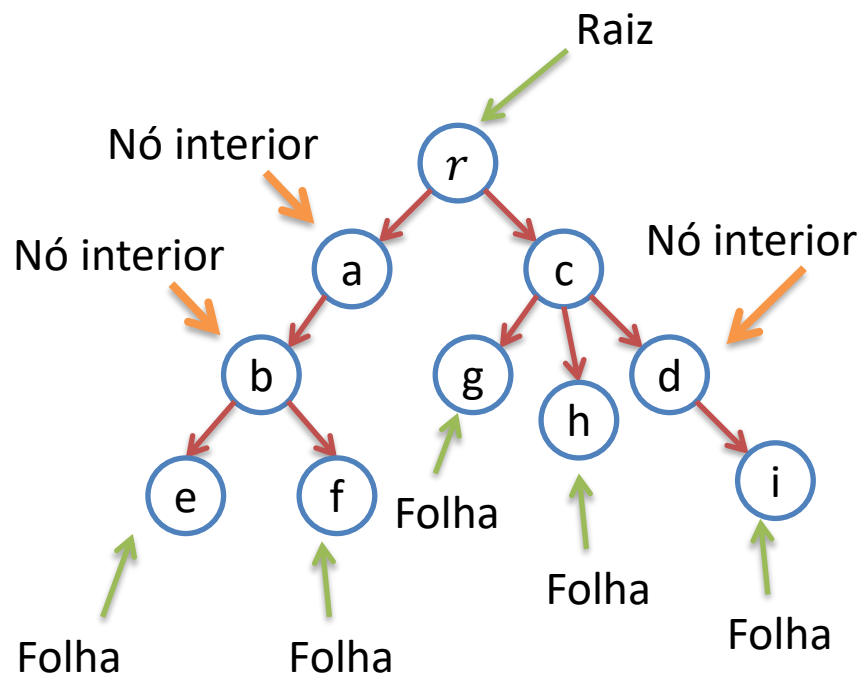
- Todo nó é **ancestral** e **descendente** de si mesmo.
- Nós que não têm descendentes próprios são chamados **folhas**.



Introdução a Árvores

- **Definições**

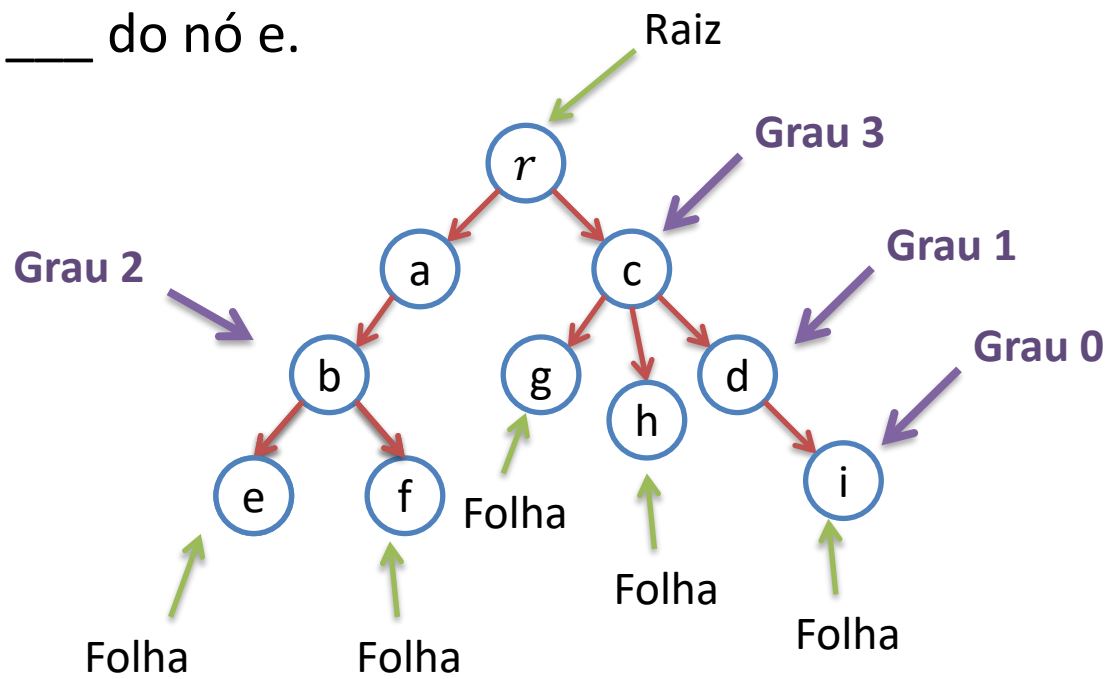
- Um **nó interior** é um nó que não é folha.
- Toda **árvore** com $n > 1$ nós possui no mínimo 1 e no máximo $n - 1$ folhas.



Introdução a Árvores

- **Definições**

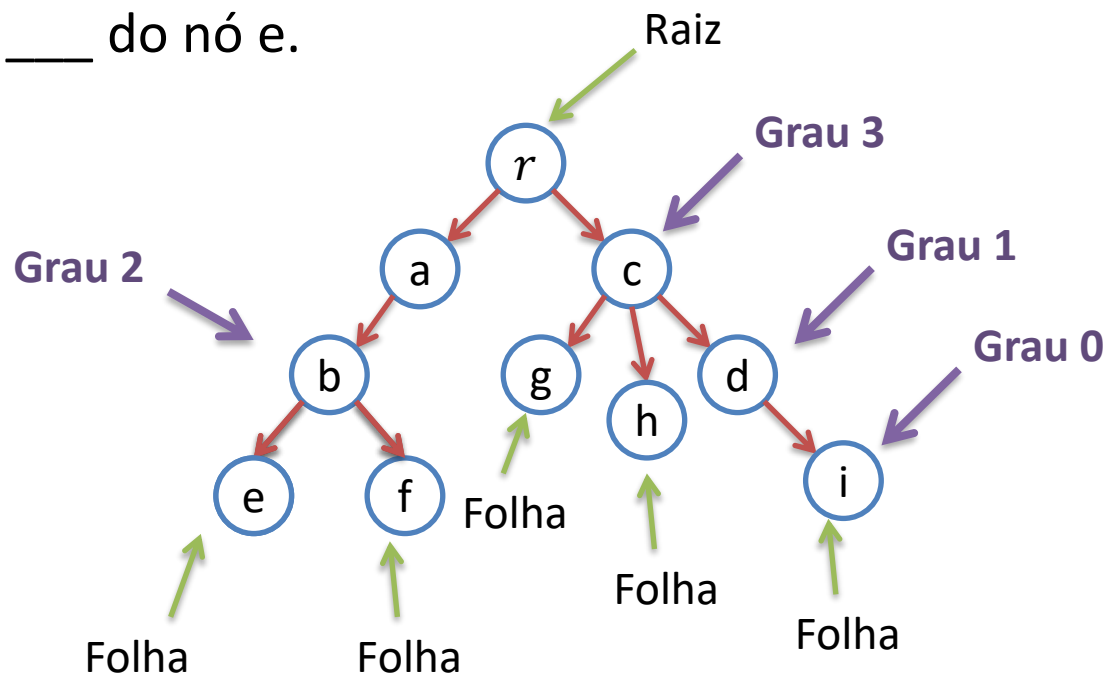
- O **número de filhos** de um nó é chamado **grau de saída** desse nó.
- Os nós **a** e **c** são _____.
- O nó **c** é ____ do nó **b**.
- O nó **a** é _____ do nó **e**.



Introdução a Árvores

- Definições

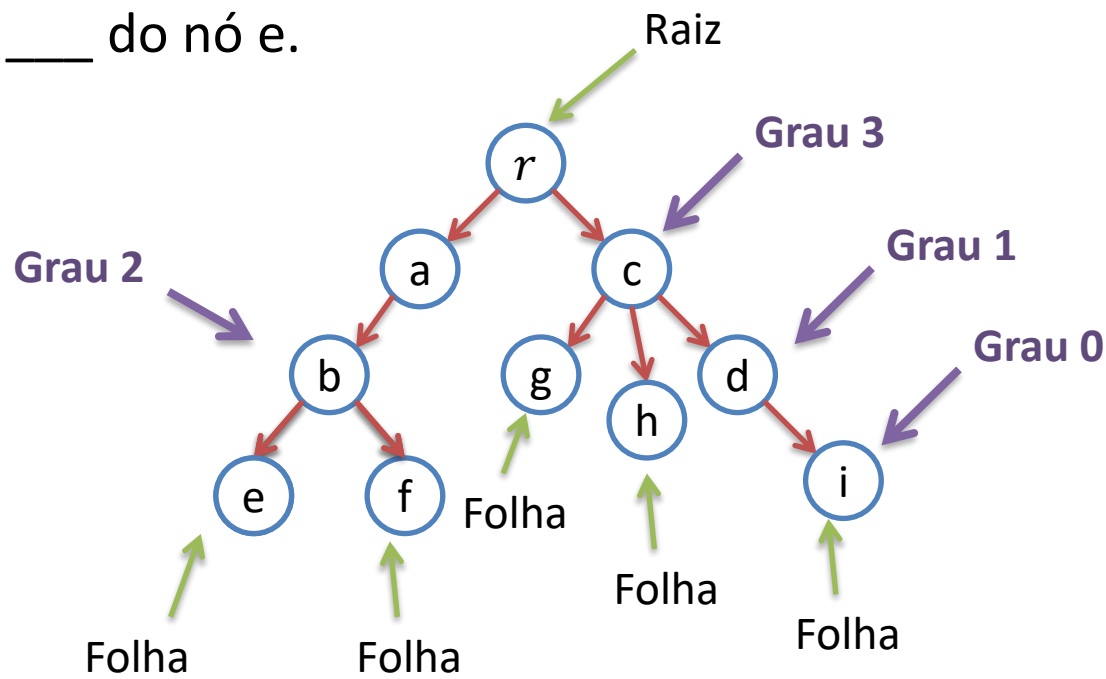
- O **número de filhos** de um nó é chamado **grau de saída** desse nó.
- Os nós **a** e **c** são irmãos.
- O nó **c** é ___ do nó **b**.
- O nó **a** é ____ do nó **e**.



Introdução a Árvores

- Definições

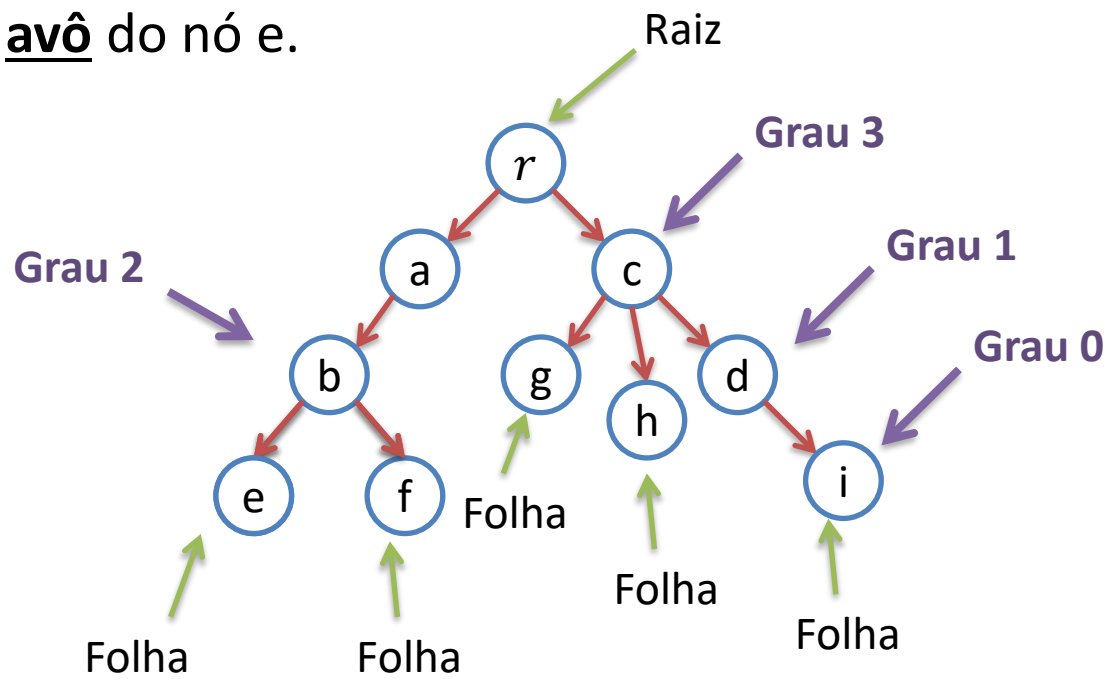
- O **número de filhos** de um nó é chamado **grau de saída** desse nó.
- Os nós **a** e **c** são **irmãos**.
- O nó **c** é **tio** do nó **b**.
- O nó **a** é ____ do nó **e**.



Introdução a Árvores

- Definições

- O **número de filhos** de um nó é chamado **grau de saída** desse nó.
- Os nós **a** e **c** são **irmãos**.
- O nó **c** é **tio** do nó **b**.
- O nó **a** é **avô** do nó **e**.

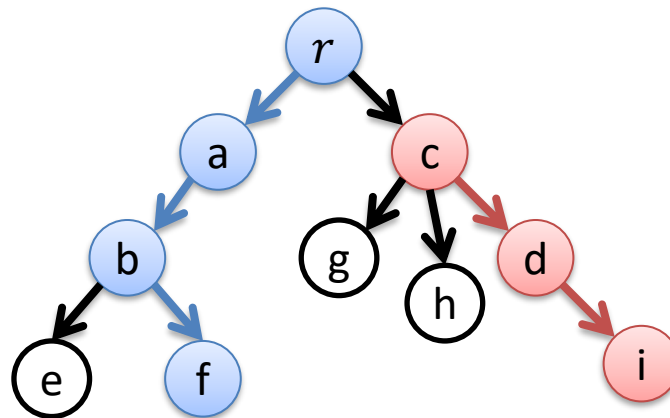


Introdução a Árvores

- **Definições**

- Uma **sequência** de nós distintos v_1, v_2, \dots, v_k , tal que existe sempre nós consecutivos (v_1 e v_2 , v_2 e v_3 , ..., v_{k-1} e v_k) a relação “**é filho de**” ou “**é pai de**”, é denominada um **caminho da árvore**.
- O comprimento do caminho é dado pela **quantidade de pares** da relação (ex: (A,B,C) é um caminho de comprimento 2).

- Ex: (r, a, b, f)
 (c, d, i)

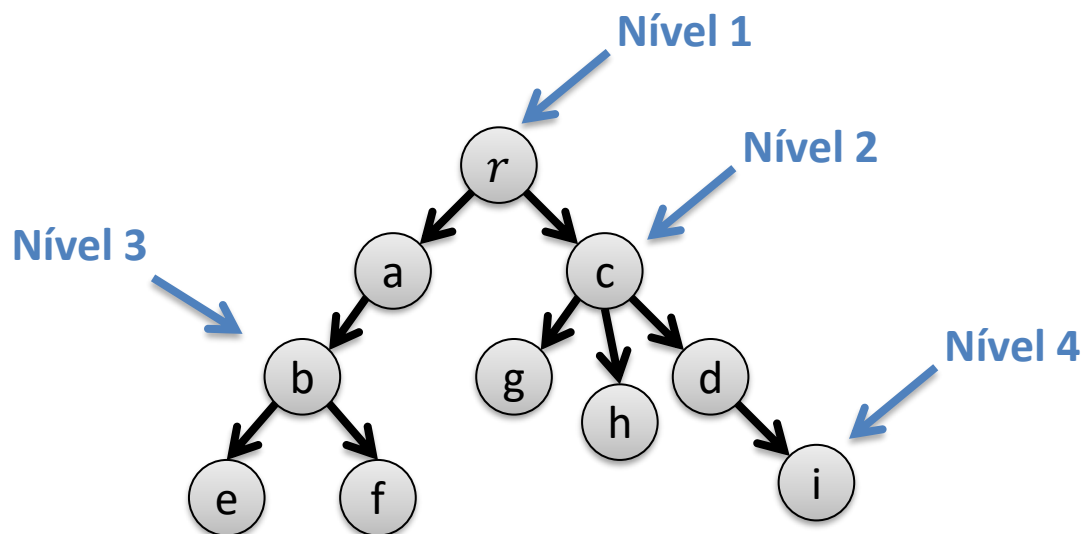


Existe um **único caminho** a partir de **um nó** até qualquer de seus **descendentes**.

Introdução a Árvores

- **Definições**

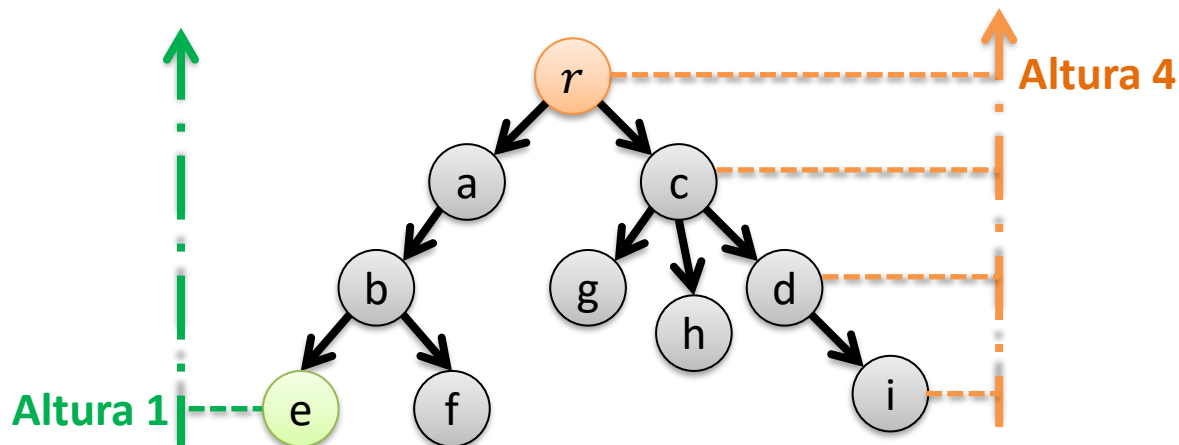
- O **nível** de um nó é o número de nós do único caminho da raiz até ele.
- O **nível** da raiz é 1.



Introdução a Árvores

- **Definições**

- A **altura** de um nó v é o número de nós do **maior caminho** de v até um de seus descendentes.
- Folhas tem altura 1.

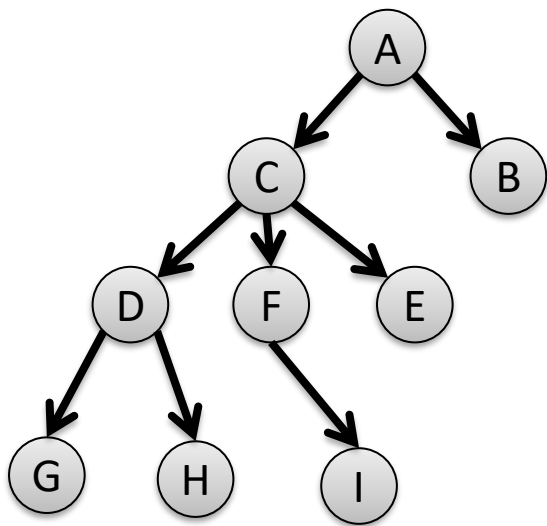


- A altura da árvore é **igual** ao nível máximo de seus nós.

Introdução a Árvores

- **Definições**

- Exemplo:

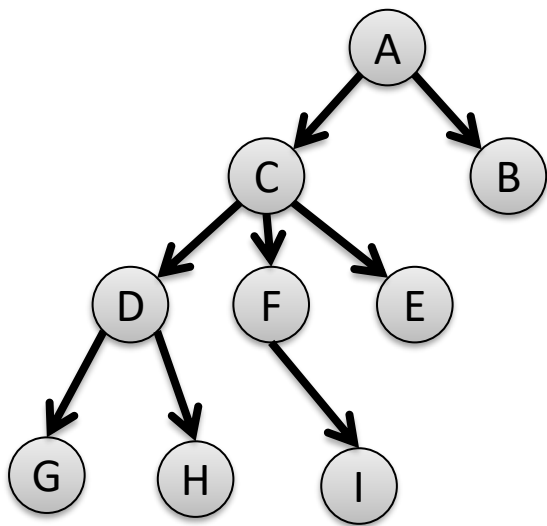


- Qual é o nível do nó C?
- Qual é a altura do nó B?
- Qual é a altura da árvore?
- Qual é o grau de saída do nó F?
- Qual é a relação entre B e F?
- G é descendente próprio de A?

Introdução a Árvores

- **Definições**

- Exemplo:

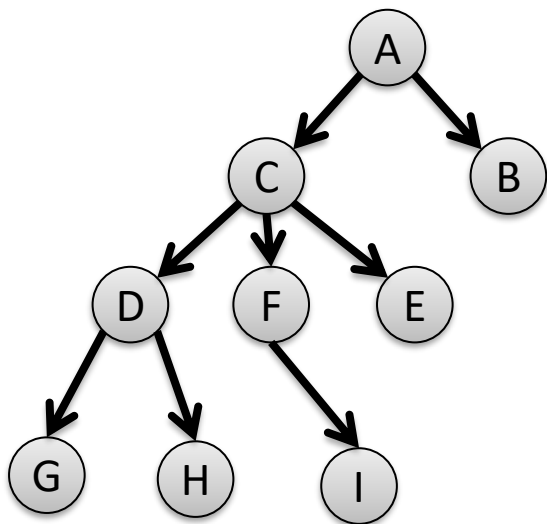


- Qual é o nível do nó C? 2
- Qual é a altura do nó B?
- Qual é a altura da árvore?
- Qual é o grau de saída do nó F?
- Qual é a relação entre B e F?
- G é descendente próprio de A?

Introdução a Árvores

- **Definições**

- Exemplo:

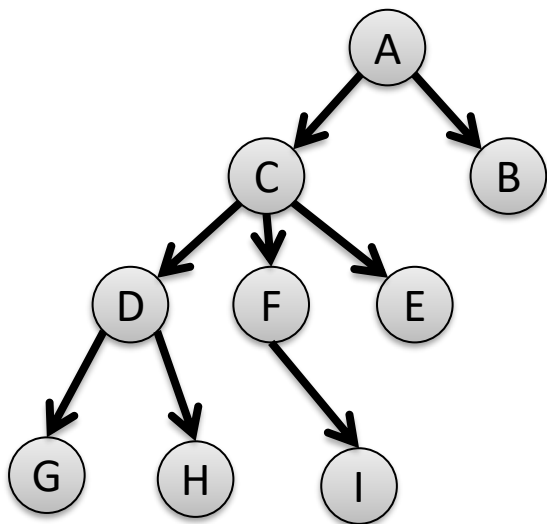


- Qual é o nível do nó C? 2
- Qual é a altura do nó B? 1
- Qual é a altura da árvore?
- Qual é o grau de saída do nó F?
- Qual é a relação entre B e F?
- G é descendente próprio de A?

Introdução a Árvores

- **Definições**

- Exemplo:

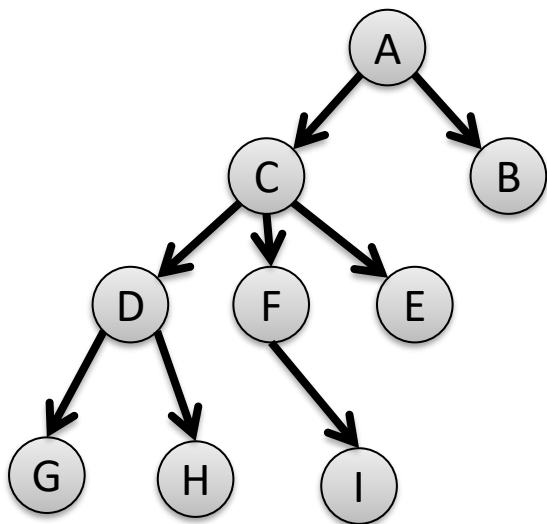


- Qual é o nível do nó C? 2
- Qual é a altura do nó B? 1
- Qual é a altura da árvore? 4
- Qual é o grau de saída do nó F?
- Qual é a relação entre B e F?
- G é descendente próprio de A?

Introdução a Árvores

- **Definições**

- Exemplo:

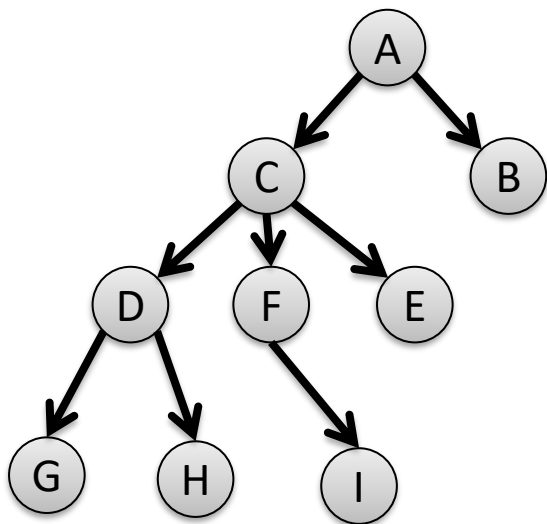


- Qual é o nível do nó C? 2
- Qual é a altura do nó B? 1
- Qual é a altura da árvore? 4
- Qual é o grau de saída do nó F? 1
- Qual é a relação entre B e F? B é tio de F
- G é descendente próprio de A?

Introdução a Árvores

- **Definições**

- Exemplo:

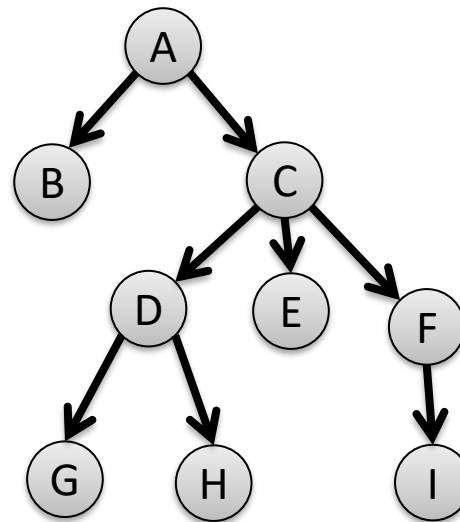
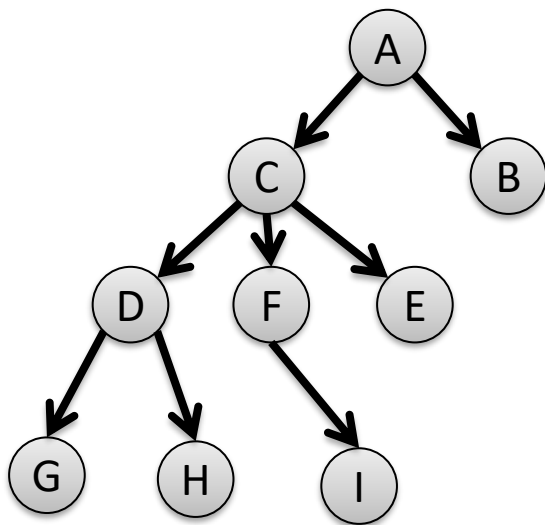


- Qual é o nível do nó C? 2
- Qual é a altura do nó B? 1
- Qual é a altura da árvore? 4
- Qual é o grau de saída do nó F? 1
- Qual é a relação entre B e F? B é tio de F
- G é descendente próprio de A? Sim

Introdução a Árvores

- **Definições**

- Uma árvore **ordenada** é aquela na qual os filhos de cada nó **seguem uma ordem**. Assume-se que tal ordenação se desenvolva da esquerda para direita.

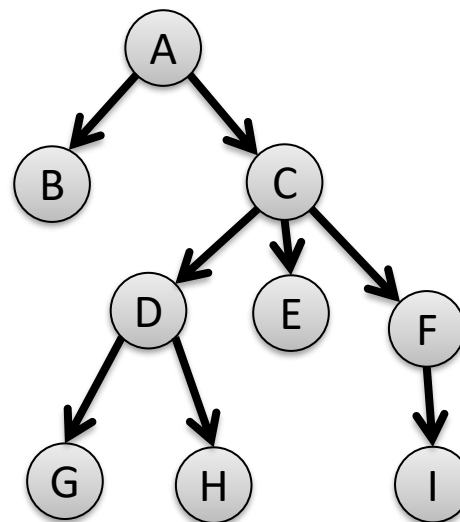
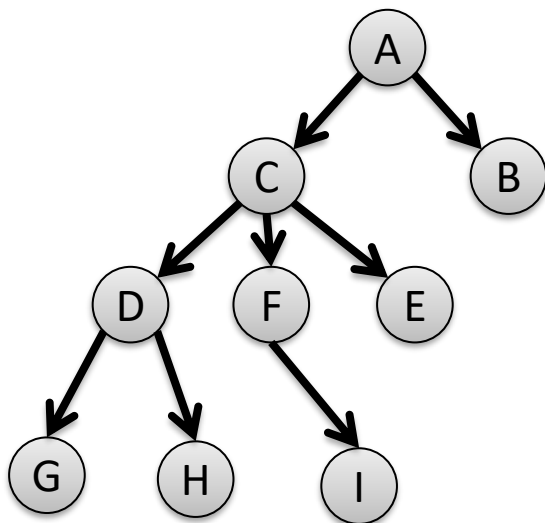


Se estas árvores são consideradas **ordenadas**, são árvores **distintas**.

Introdução a Árvores

- **Definições**

- Duas árvores **não ordenadas** são **isomorfas** quando puderem se tornar **coincidentes** através de uma permutação na ordem das **subárvores** de seus nós.

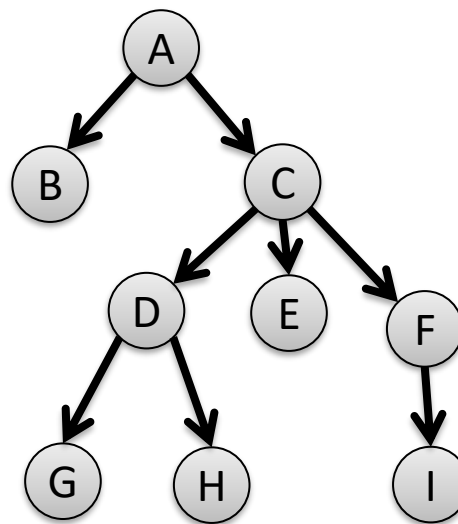
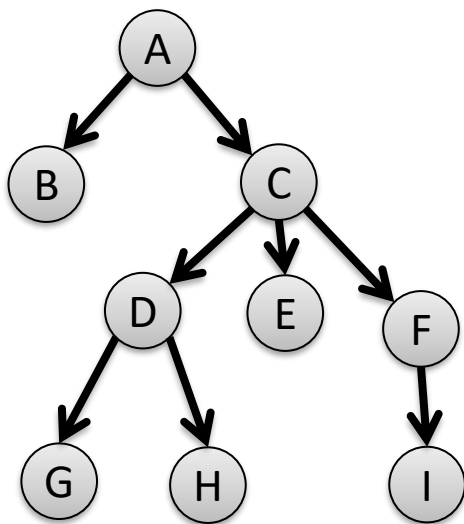


Se estas árvores são consideradas **não-ordenadas**, são árvores **isomorfas**.

Introdução a Árvores

- **Definições**

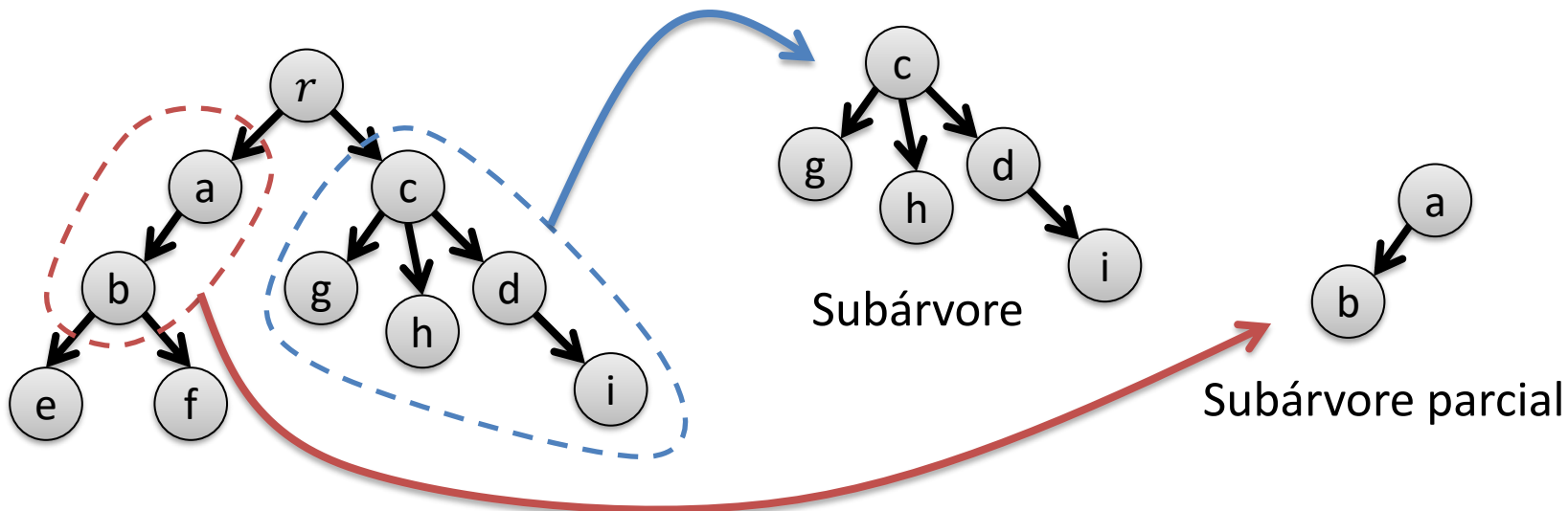
- Duas árvores **ordenadas** somente são **isomorfas** quando forem **coincidentes**.



Introdução a Árvores

- **Definições**

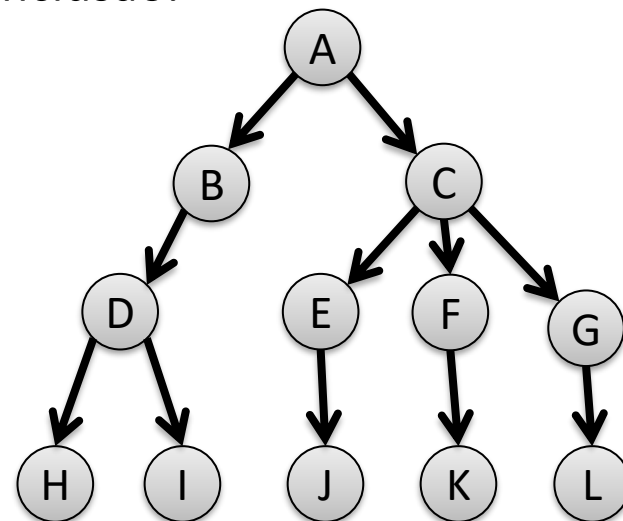
- **Subárvore** de uma árvore é o conjunto de todos os vértices descendentes de um nó v , além do próprio nó v .
- **Subárvore parcial** de uma árvore é o conjunto de alguns vértices descendentes de um nó v , além de v .



Introdução a Árvores

• Exercício 1:

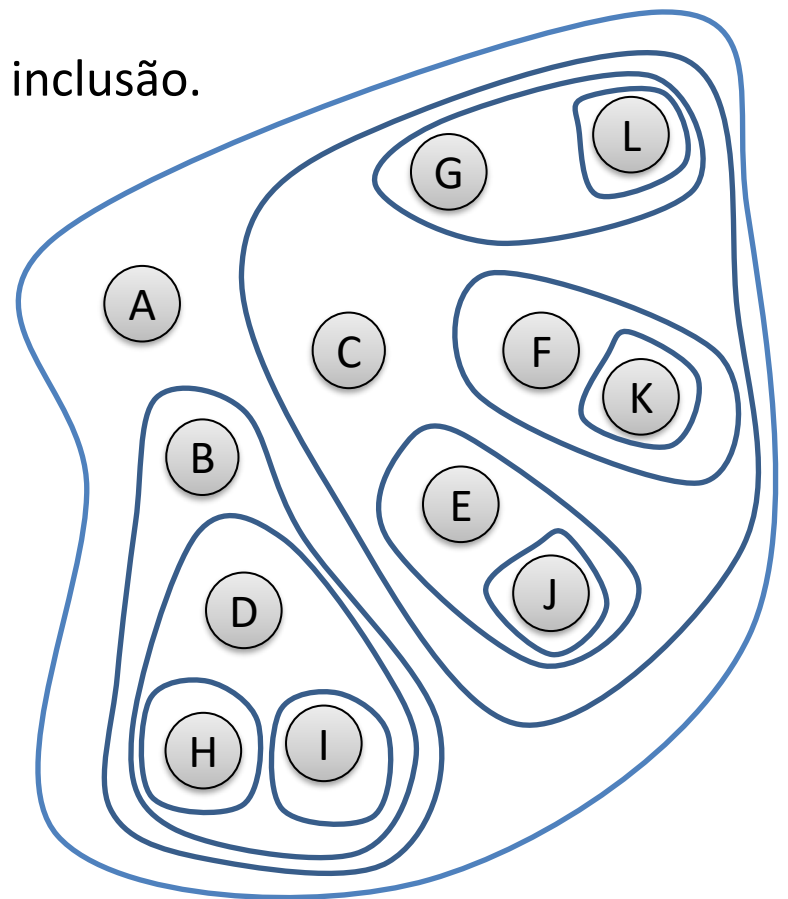
1. Represente a árvore como diagrama de inclusão.
2. Qual é o nível do nó C?
3. Qual é a altura do nó B?
4. Qual é a altura da árvore?
5. Qual é o grau de saída do nó G?
6. Qual é a relação entre B e H?
7. G é descendente próprio de A?



Introdução a Árvores

• Exercício 1:

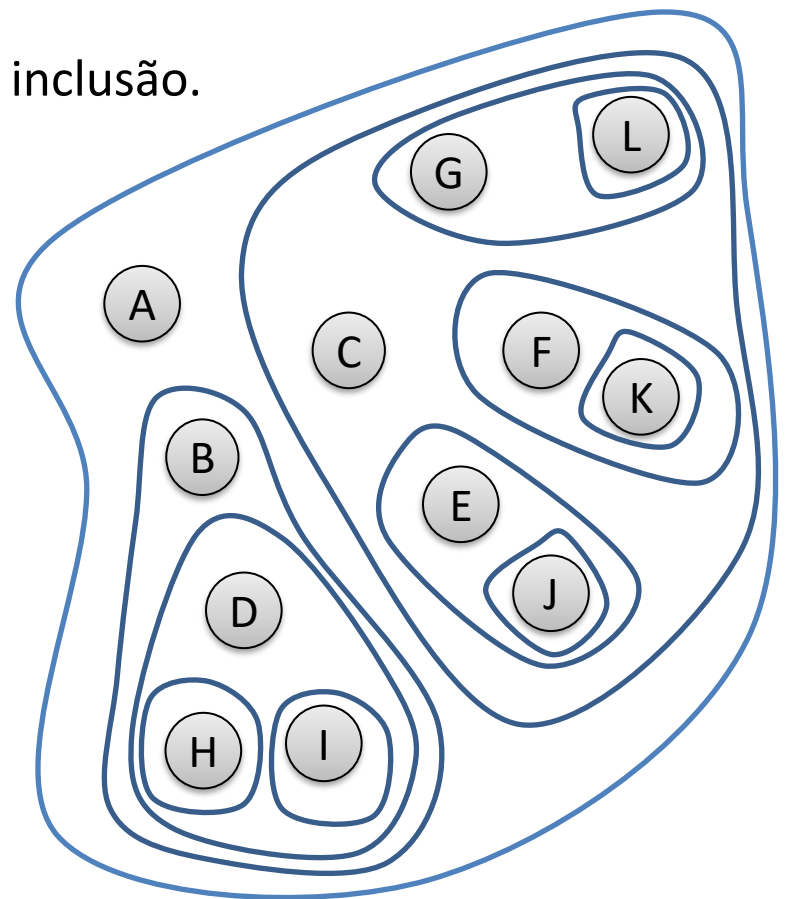
- Represente a árvore como diagrama de inclusão.
- Qual é o nível do nó C?
- Qual é a altura do nó B?
- Qual é a altura da árvore?
- Qual é o grau de saída do nó G?
- Qual é a relação entre B e H?
- G é descendente próprio de A?



Introdução a Árvores

• Exercício 1:

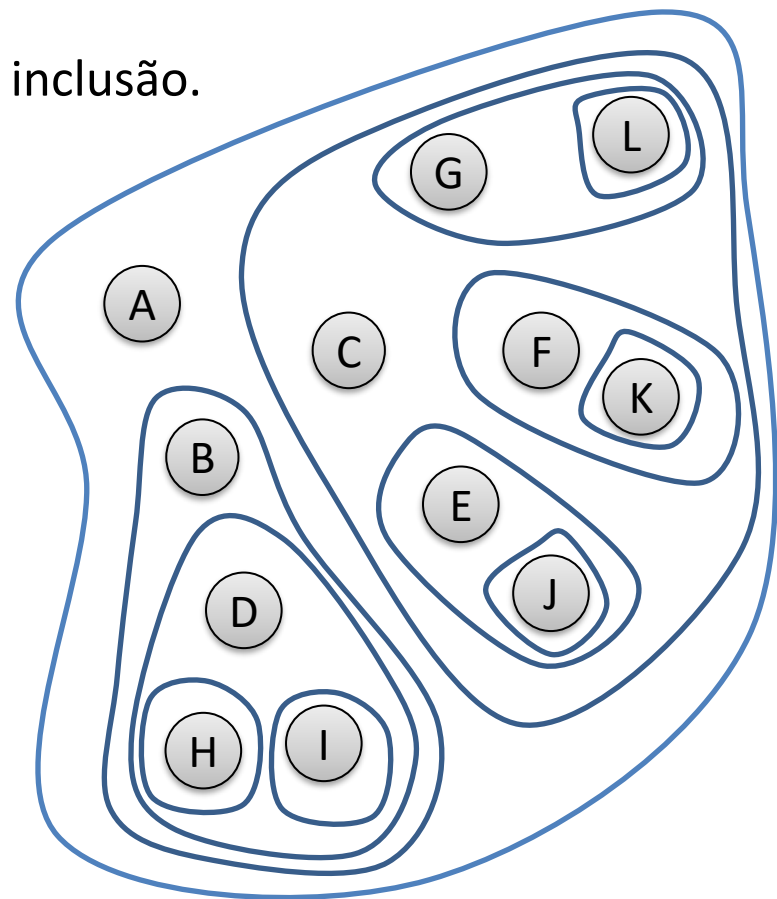
- Represente a árvore como diagrama de inclusão.
- Qual é o nível do nó C? 2
- Qual é a altura do nó B?
- Qual é a altura da árvore?
- Qual é o grau de saída do nó G?
- Qual é a relação entre B e H?
- G é descendente próprio de A?



Introdução a Árvores

- **Exercício 1:**

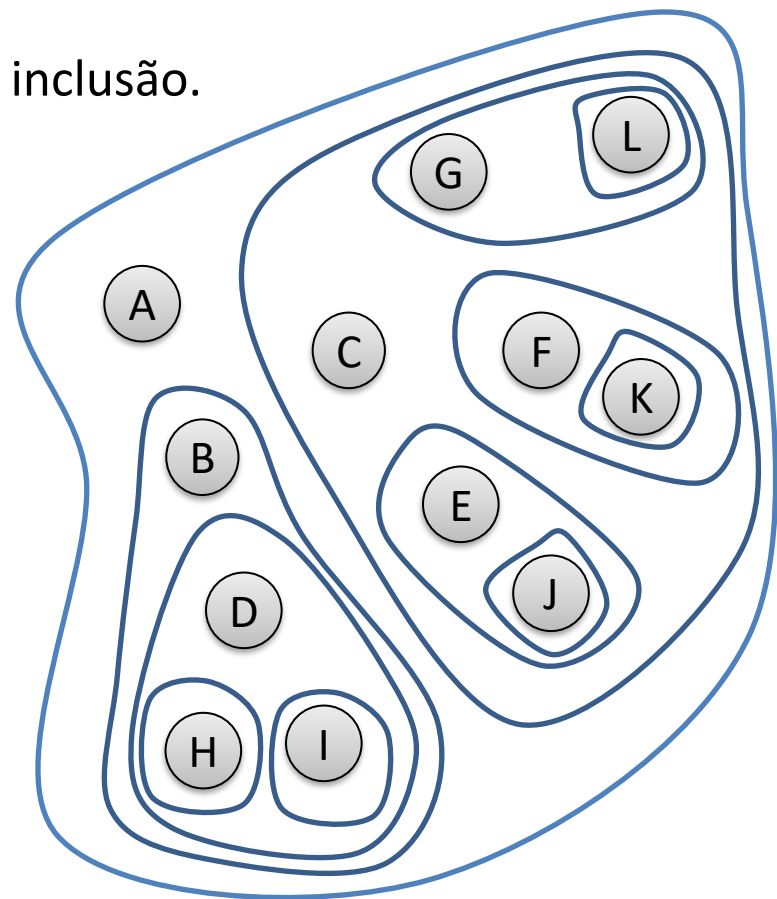
- Represente a árvore como diagrama de inclusão.
- Qual é o nível do nó C? 2
- Qual é a altura do nó B? 3
- Qual é a altura da árvore?
- Qual é o grau de saída do nó G?
- Qual é a relação entre B e H?
- G é descendente próprio de A?



Introdução a Árvores

- **Exercício 1:**

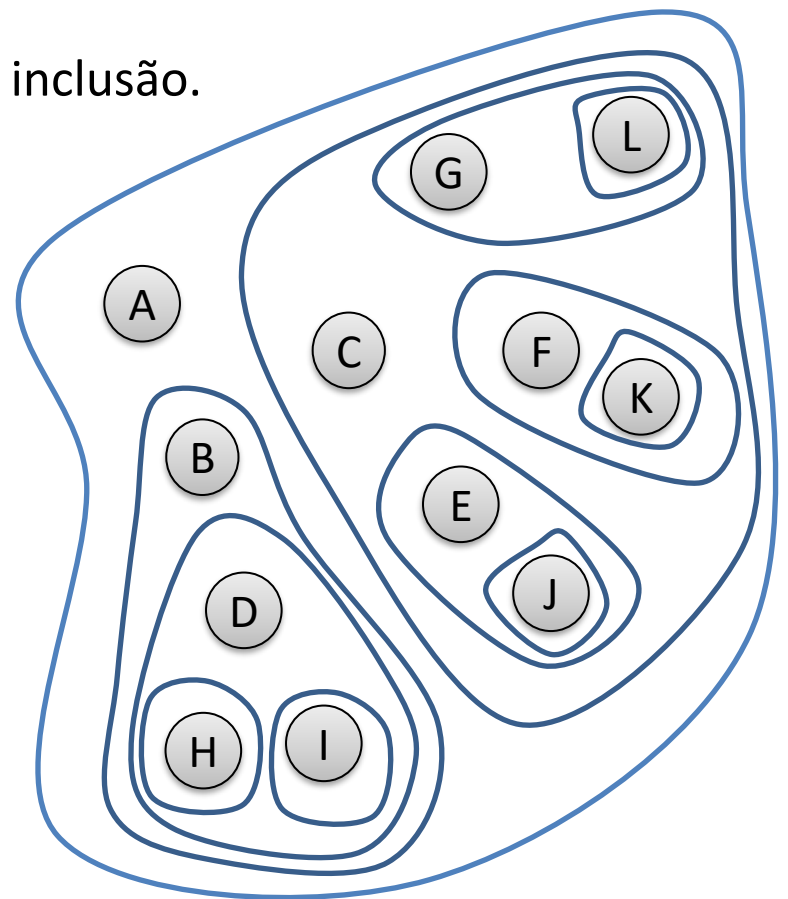
- Represente a árvore como diagrama de inclusão.
- Qual é o nível do nó C? 2
- Qual é a altura do nó B? 3
- Qual é a altura da árvore? 4
- Qual é o grau de saída do nó G?
- Qual é a relação entre B e H?
- G é descendente próprio de A?



Introdução a Árvores

- **Exercício 1:**

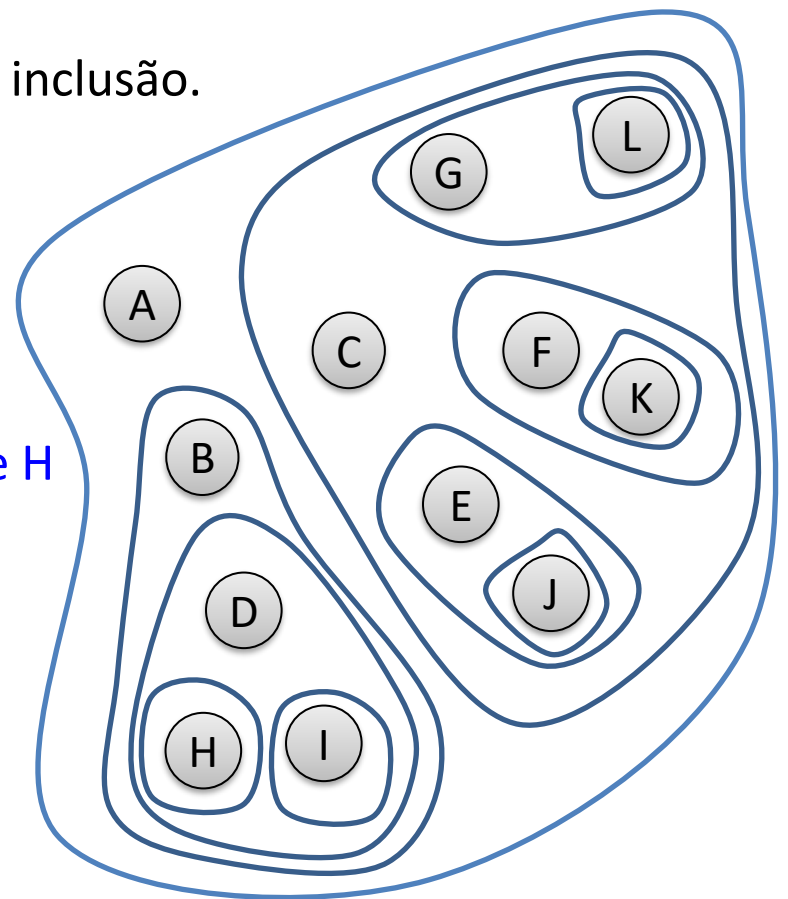
- Represente a árvore como diagrama de inclusão.
- Qual é o nível do nó C? 2
- Qual é a altura do nó B? 3
- Qual é a altura da árvore? 4
- Qual é o grau de saída do nó G? 1
- Qual é a relação entre B e H?
- G é descendente próprio de A?



Introdução a Árvores

• Exercício 1:

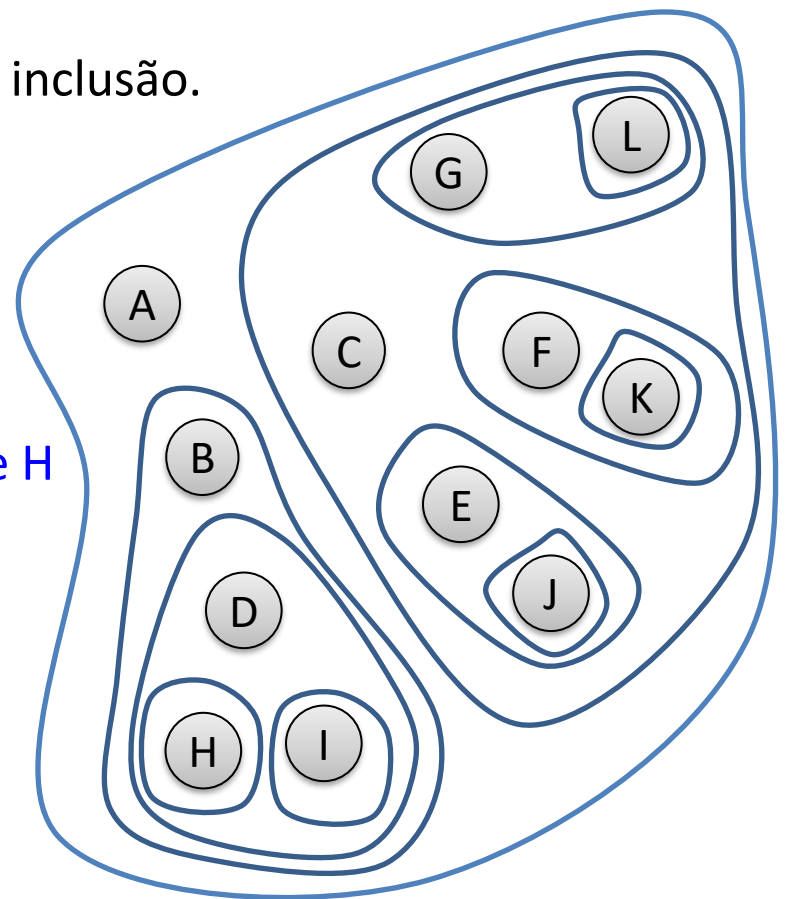
- Represente a árvore como diagrama de inclusão.
- Qual é o nível do nó C? 2
- Qual é a altura do nó B? 3
- Qual é a altura da árvore? 4
- Qual é o grau de saída do nó G? 1
- Qual é a relação entre B e H? B é avô de H
- G é descendente próprio de A?



Introdução a Árvores

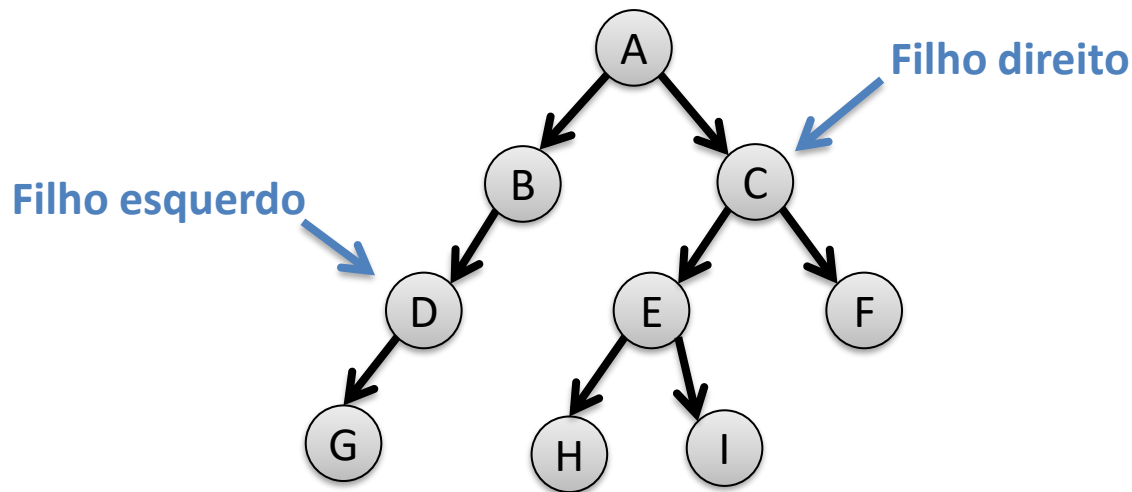
• Exercício 1:

- Represente a árvore como diagrama de inclusão.
- Qual é o nível do nó C? 2
- Qual é a altura do nó B? 3
- Qual é a altura da árvore? 4
- Qual é o grau de saída do nó G? 1
- Qual é a relação entre B e H? B é avô de H
- G é descendente próprio de A? Sim



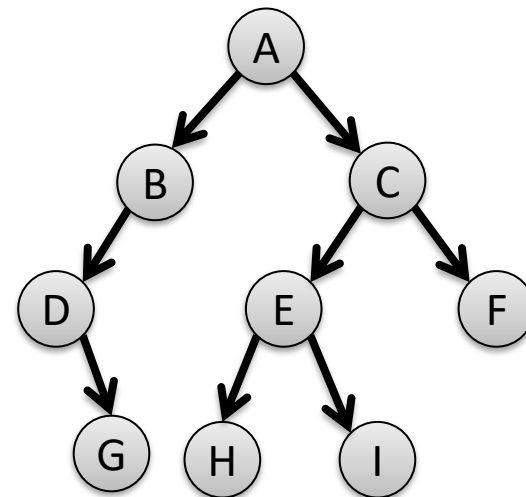
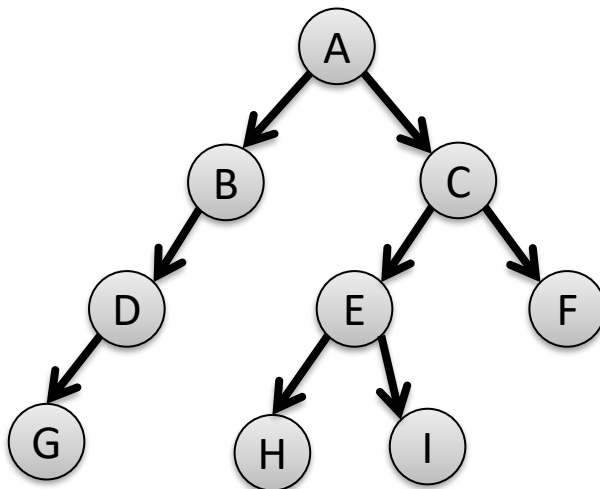
Introdução a Árvores

- **Árvores binárias**
 - Cada nó possui, no máximo, **dois filhos**: uma **subárvore esquerda** e/ou uma **subárvore direita**.
 - Admite-se árvore binária **nula** ou **unitária**.



Introdução a Árvores

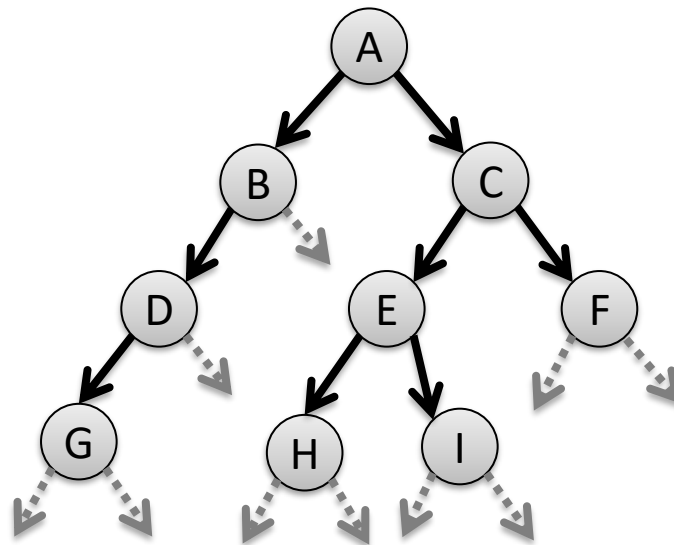
- **Árvores binárias**
 - Uma **árvore binária** é uma **extensão** do caso geral.
 - As duas estruturas abaixo são **isomorfas** se consideradas árvores (mesmo ordenadas), mas são **distintas** se consideradas **árvores binárias**.



Introdução a Árvores

- **Árvores binárias**

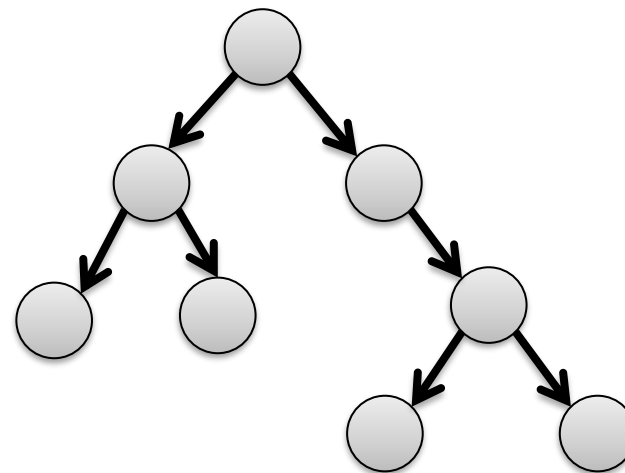
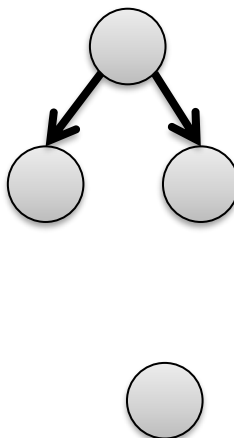
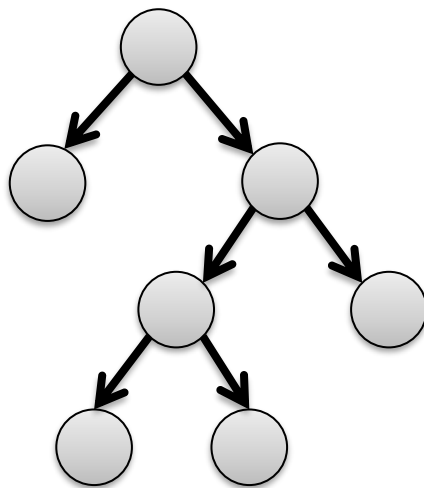
- Toda árvore binária com **$n > 0$ nós** possui exatamente **$n+1$ subárvores vazias** entre suas árvores esquerdas e direitas.



- Esta árvore possui 9 nós e 10 subárvores vazias.

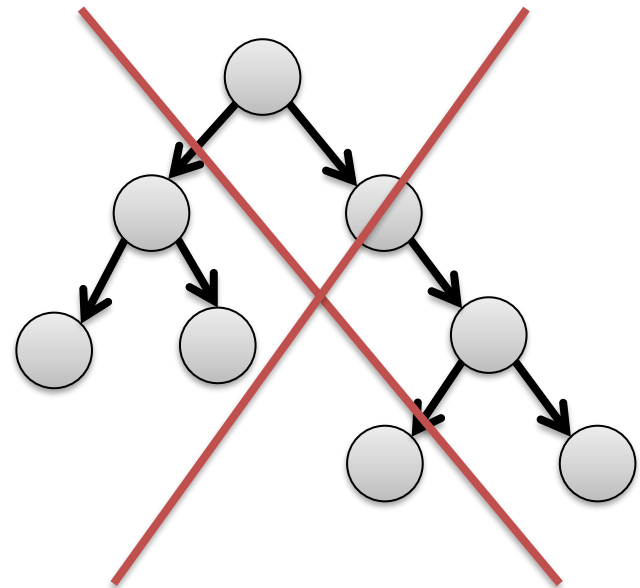
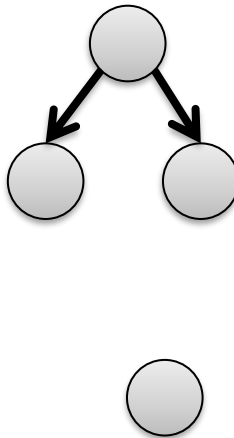
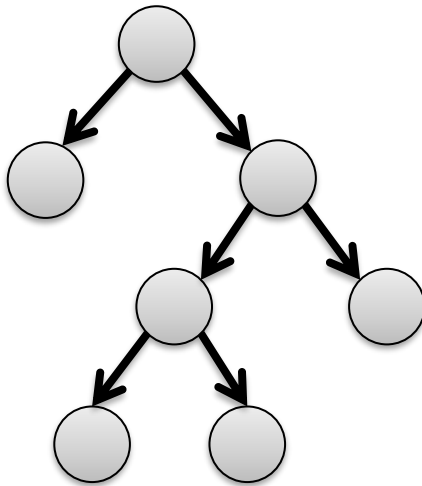
Introdução a Árvores

- **Árvores binárias**
 - Uma árvore **estritamente binária** é uma árvore binária em que cada nó possui 0 ou 2 filhos.



- **Árvores binárias**

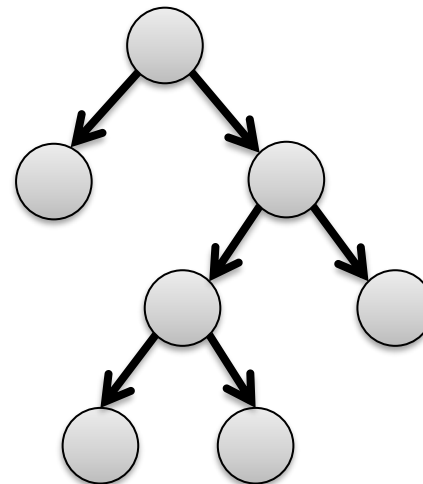
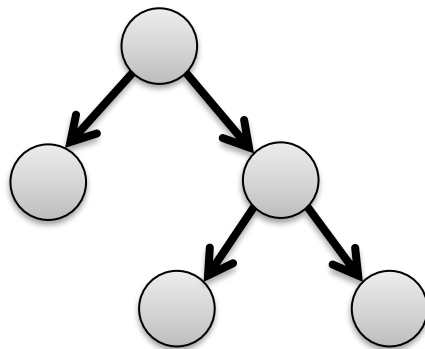
- Uma árvore **estritamente binária** é uma árvore binária em que cada nó possui 0 ou 2 filhos.



Introdução a Árvores

- **Árvores binárias**

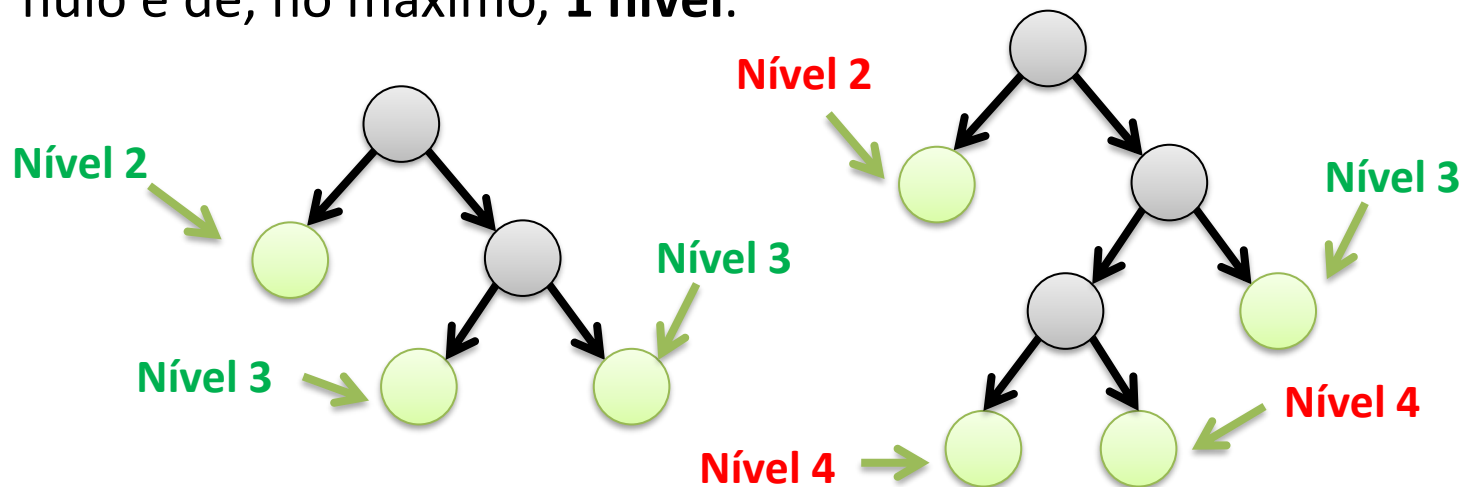
- Uma árvore binária **completa** é aquela que apresenta a seguinte propriedade:
 - Se v é um nó tal que alguma subárvore de v é vazia, então v se localiza ou no último (maior) ou no penúltimo nível da árvore.
- Em outras palavras, a **distância** entre quaisquer nós com um filho nulo é de, no máximo, **1 nível**.



Introdução a Árvores

- **Árvores binárias**

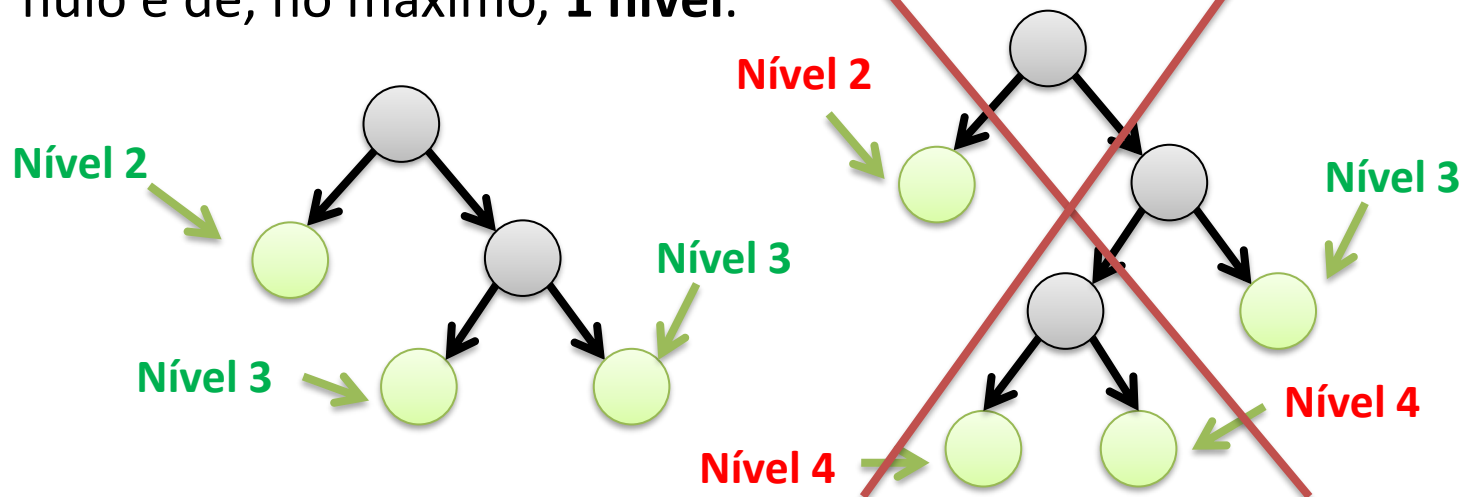
- Uma árvore binária **completa** é aquela que apresenta a seguinte propriedade:
 - Se v é um nó tal que alguma subárvore de v é vazia, então v se localiza ou no último (maior) ou no penúltimo nível da árvore.
- Em outras palavras, a **distância** entre quaisquer nós com um filho nulo é de, no máximo, **1 nível**.



Introdução a Árvores

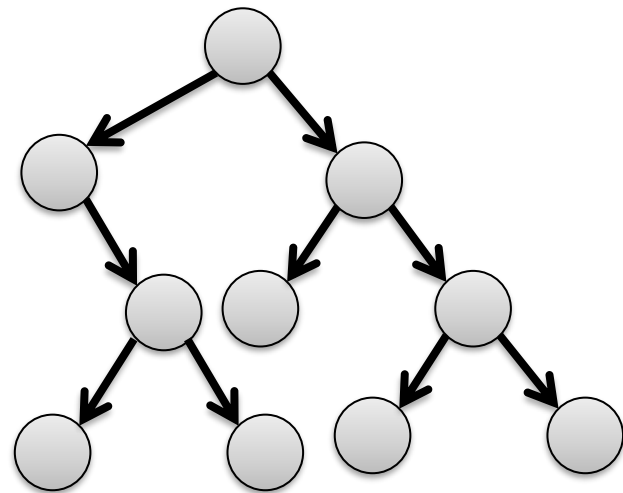
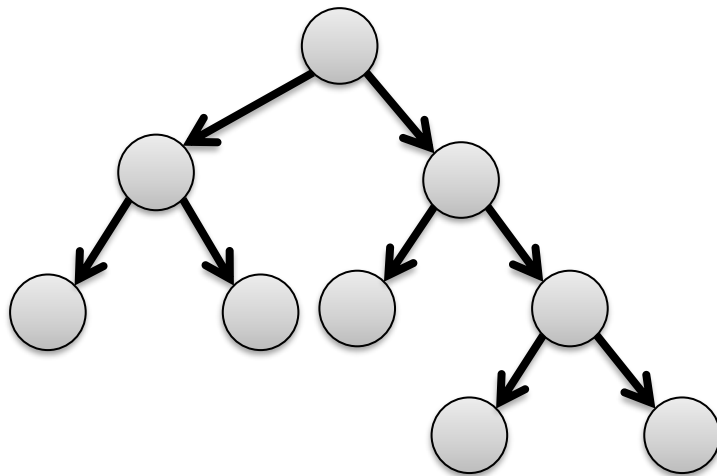
- **Árvores binárias**

- Uma árvore binária **completa** é aquela que apresenta a seguinte propriedade:
 - Se v é um nó tal que alguma subárvore de v é vazia, então v se localiza ou no último (maior) ou no penúltimo nível da árvore.
- Em outras palavras, a **distância** entre quaisquer nós com um filho nulo é de, no máximo, **1 nível**.



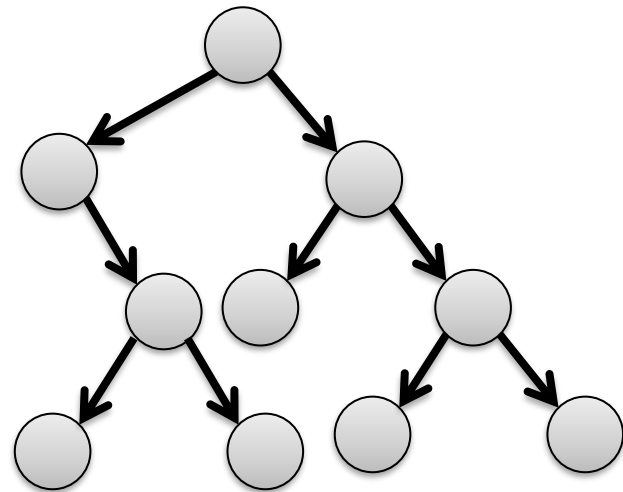
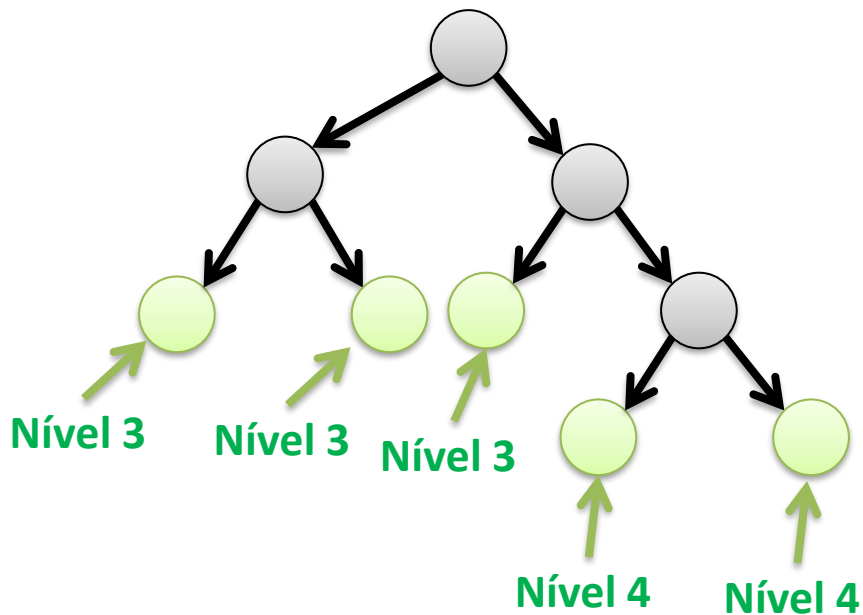
Introdução a Árvores

- **Árvores binárias**
 - Outros exemplos:



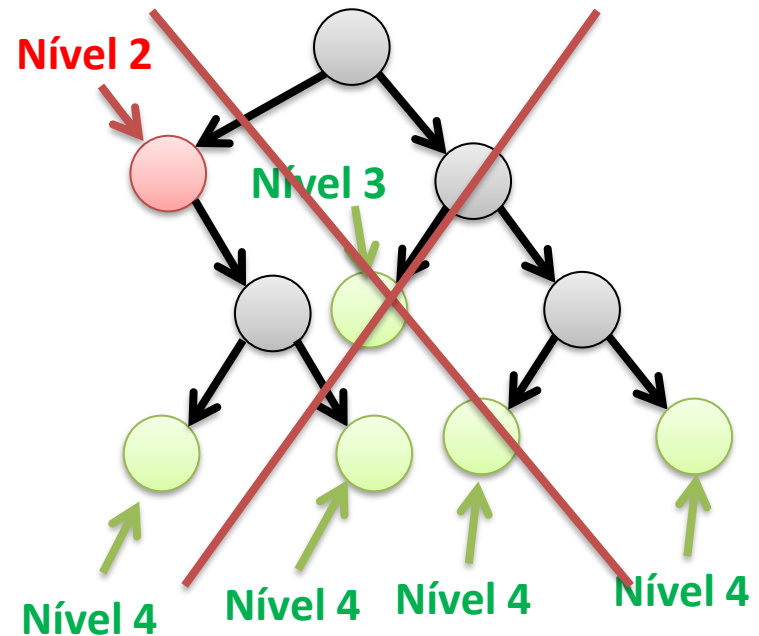
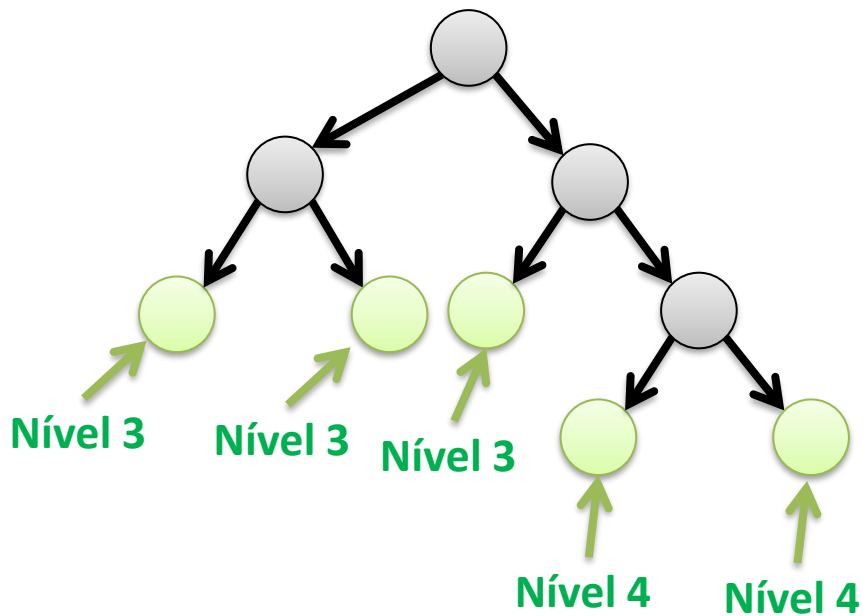
Introdução a Árvores

- **Árvores binárias**
 - Outros exemplos:



Introdução a Árvores

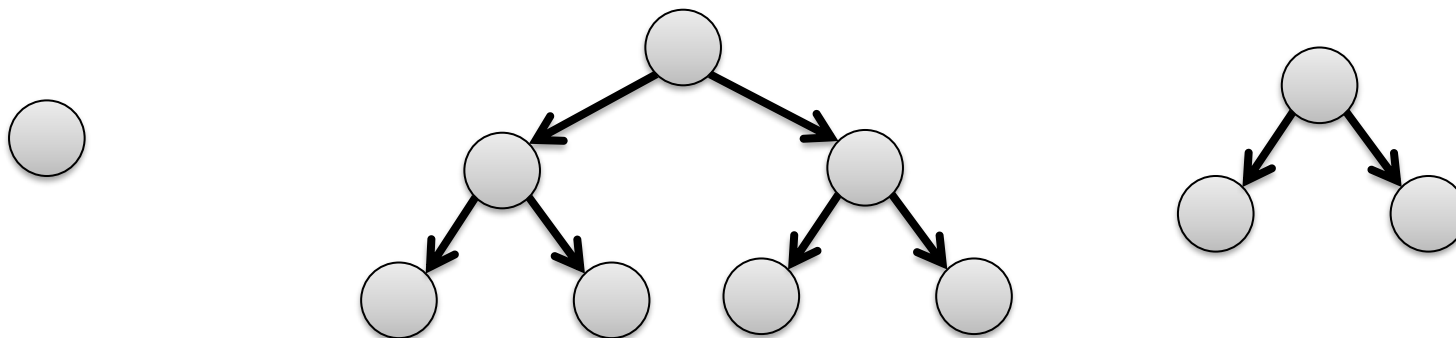
- Árvores binárias
 - Outros exemplos:



Introdução a Árvores

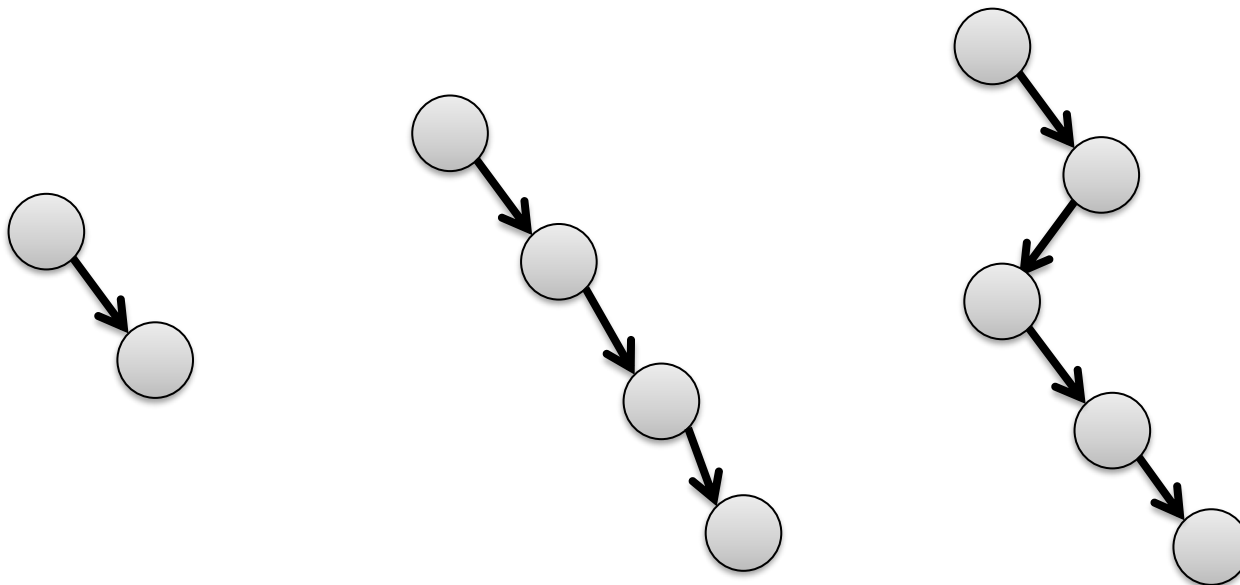
- **Árvores binárias**

- Uma árvore binária **cheia** é aquela em que, se v é um nó com **alguma de suas subárvores vazias**, então v se localiza no **último nível**.
- Toda árvore binária **cheia** é **completa e estritamente binária**.



Introdução a Árvores

- **Árvores binárias**
 - Uma árvore **ziguezague** é aquela cujos **nós interiores** possuem exatamente **uma subárvore vazia**.
 - A **altura** de uma árvore ziguezague é **igual** ao **número de nós**.



Algoritmos de Percurso

Introdução a Árvores

- **Algoritmos de Percurso**

- Realizar um **percurso** em uma **árvore binária** corresponde a fazer uma **visita sistemática** a cada um de seus **nós**.
- Esta é uma das **operações básicas** relativas à **manipulação de árvores**.
- **Visitar** um nó significa **operar**, de alguma forma, com a **informação** a ele relativa (imprimir, atualizar, etc).
- Existem 3 algoritmos principais de percurso:
 - **Pré-ordem**
 - **Em ordem simétrica**
 - **Pós-ordem**

Introdução a Árvores

- **Algoritmos de Percurso**

- **Pré-ordem:**

- Visitar a raiz
 - Percorrer sua subárvore da esquerda, em pré-ordem
 - Percorrer sua subárvore da direita, em pré-ordem

Introdução a Árvores

- **Algoritmos de Percurso**

- **Pré-ordem:**

- Visitar a raiz
 - Percorrer sua subárvore da esquerda, em pré-ordem
 - Percorrer sua subárvore da direita, em pré-ordem

- **Em ordem simétrica:**

- Percorrer sua subárvore da esquerda, em ordem simétrica
 - Visitar a raiz
 - Percorrer sua subárvore da direita, em ordem simétrica

Introdução a Árvores

- **Algoritmos de Percurso**

- **Pré-ordem:**

- Visitar a raiz
 - Percorrer sua subárvore da esquerda, em pré-ordem
 - Percorrer sua subárvore da direita, em pré-ordem

- **Em ordem simétrica:**

- Percorrer sua subárvore da esquerda, em ordem simétrica
 - Visitar a raiz
 - Percorrer sua subárvore da direita, em ordem simétrica

- **Pós-ordem:**

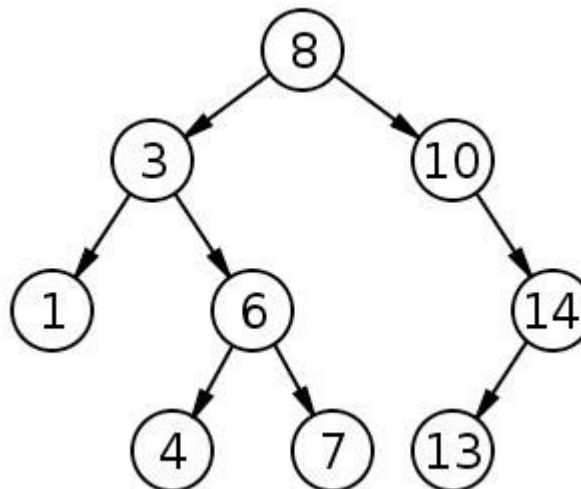
- Percorrer sua subárvore da esquerda, em pós-ordem
 - Percorrer sua subárvore da direita, em pós-ordem
 - Visitar a raiz

Introdução a Árvores

- **Algoritmos de Percurso**

- **Pré-ordem:**

- Visitar a raiz
- Percorrer sua subárvore da esquerda, em pré-ordem
- Percorrer sua subárvore da direita, em pré-ordem

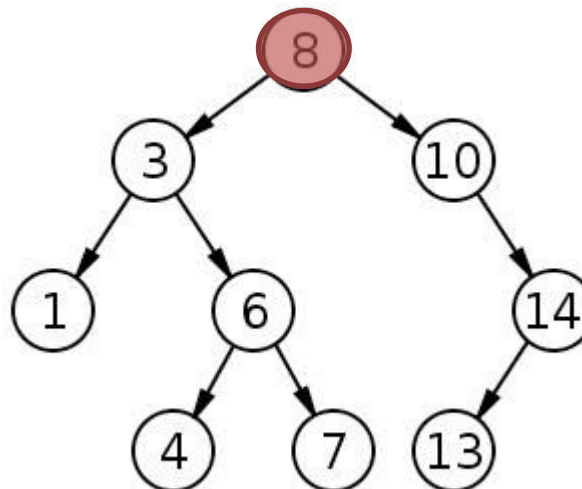


Introdução a Árvores

- Algoritmos de Percurso

- Pré-ordem:

- Visitar a raiz
- Percorrer sua subárvore da esquerda, em pré-ordem
- Percorrer sua subárvore da direita, em pré-ordem

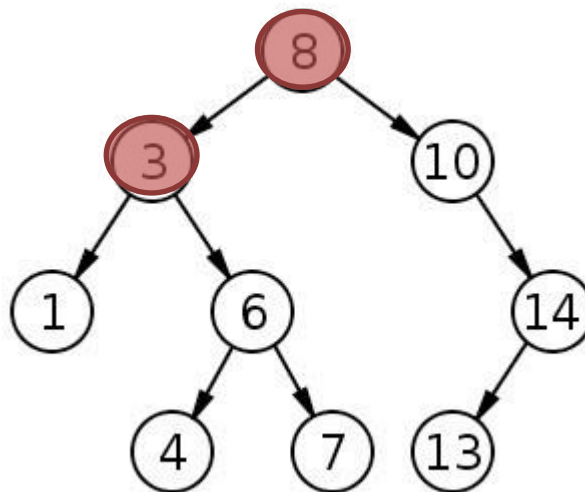


Introdução a Árvores

- Algoritmos de Percurso

- Pré-ordem:

- Visitar a raiz
- Percorrer sua subárvore da esquerda, em pré-ordem
- Percorrer sua subárvore da direita, em pré-ordem



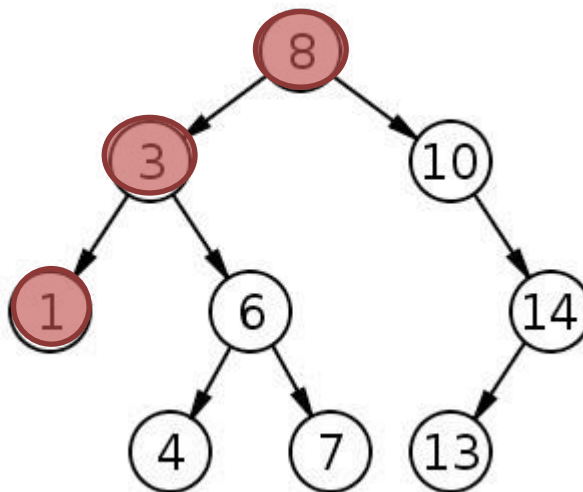
Introdução a Árvores

- Algoritmos de Percurso

- Pré-ordem:

- Visitar a raiz
- Percorrer sua subárvore da esquerda, em pré-ordem
- Percorrer sua subárvore da direita, em pré-ordem

8 - 3 - 1



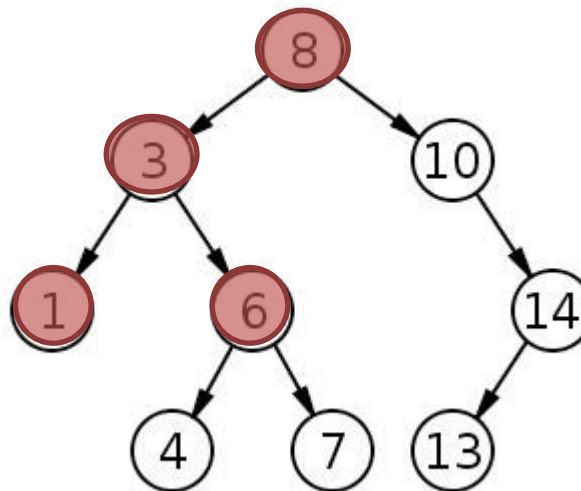
Introdução a Árvores

- Algoritmos de Percurso

- Pré-ordem:

- Visitar a raiz
- Percorrer sua subárvore da esquerda, em p
- Percorrer sua subárvore da direita, em pré-o

8 - 3 - 1 - 6



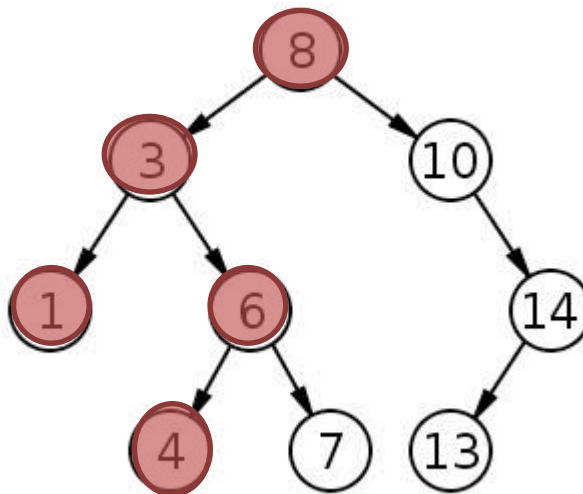
Introdução a Árvores

- Algoritmos de Percurso

- Pré-ordem:

- Visitar a raiz
- Percorrer sua subárvore da esquerda, em pré-ordem
- Percorrer sua subárvore da direita, em pré-ordem

8 - 3 - 1 - 6 - 4



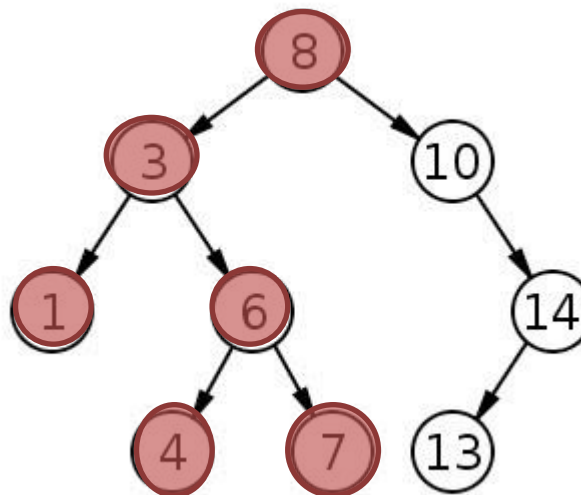
Introdução a Árvores

- Algoritmos de Percurso

- Pré-ordem:

- Visitar a raiz
- Percorrer sua subárvore da esquerda, em pré-ordem
- Percorrer sua subárvore da direita, em pré-ordem

8 - 3 - 1 - 6 - 4 - 7



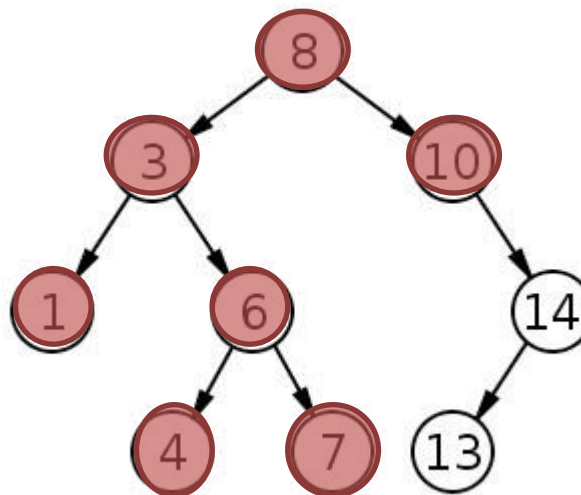
Introdução a Árvores

- Algoritmos de Percurso

- Pré-ordem:

- Visitar a raiz
- Percorrer sua subárvore da esquerda, em pré-ordem
- Percorrer sua subárvore da direita, em pré-ordem

8 - 3 - 1 - 6 - 4 - 7 - 10



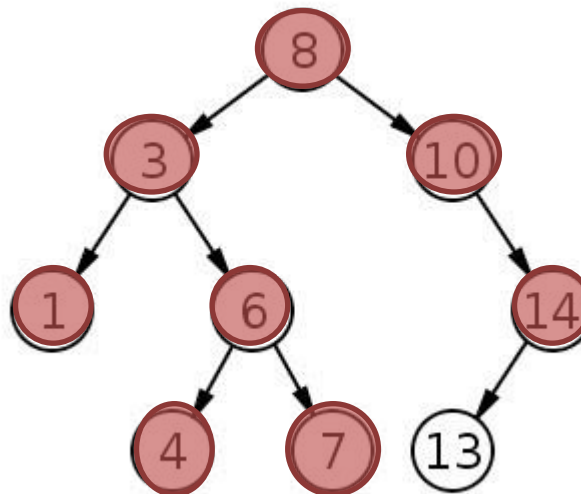
Introdução a Árvores

- **Algoritmos de Percurso**

- **Pré-ordem:**

- Visitar a raiz
- Percorrer sua subárvore da esquerda, em pré-ordem
- Percorrer sua subárvore da direita, em pré-ordem

8 - 3 - 1 - 6 - 4 - 7 - 10 - 14



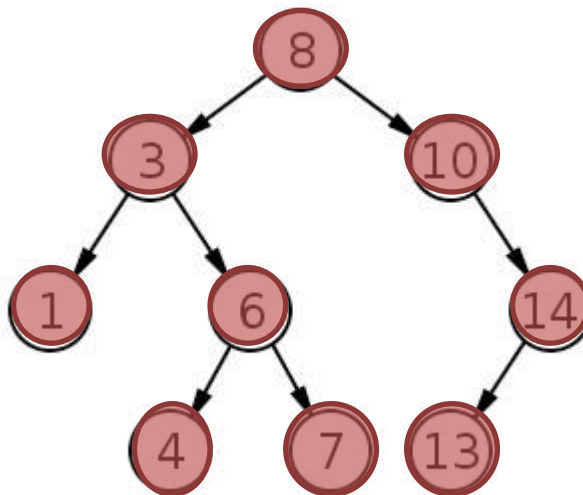
Introdução a Árvores

- Algoritmos de Percurso

- Pré-ordem:

- Visitar a raiz
- Percorrer sua subárvore da esquerda, em pré-ordem
- Percorrer sua subárvore da direita, em pré-ordem

8 - 3 - 1 - 6 - 4 - 7 - 10 - 14 - 13

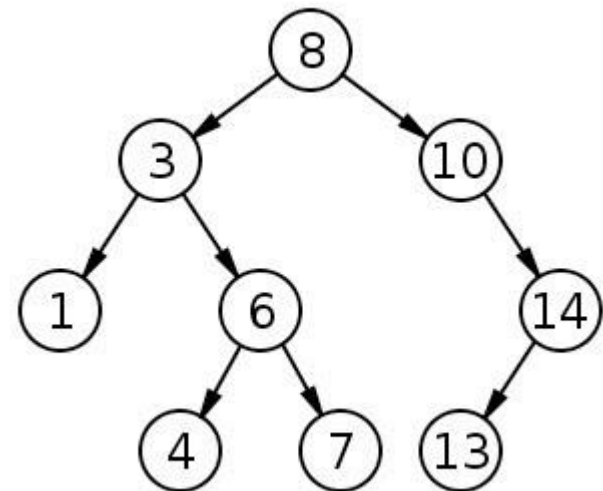


Introdução a Árvores

- **Algoritmos de Percurso**

- **Em ordem simétrica:**

- Percorrer sua subárvore da esquerda, em ordem simétrica
 - Visitar a raiz
 - Percorrer sua subárvore da direita, em ordem simétrica

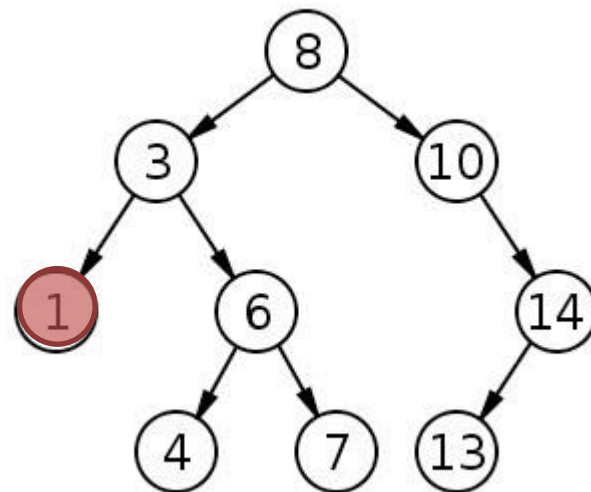


Introdução a Árvores

- Algoritmos de Percurso

- Em ordem simétrica:

- Percorrer sua subárvore da esquerda, em ordem simétrica
- Visitar a raiz
- Percorrer sua subárvore da direita, em ordem simétrica



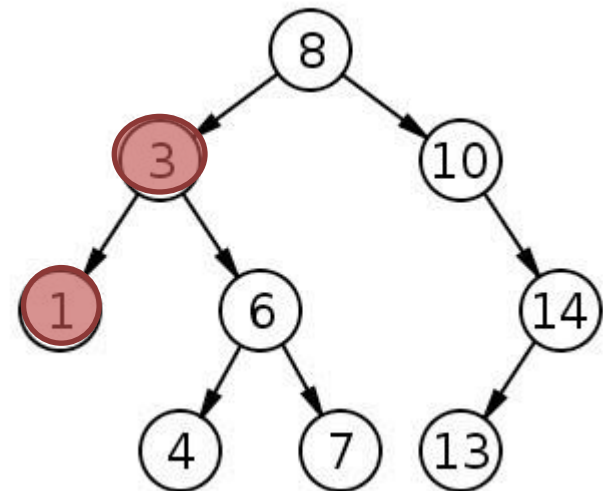
Introdução a Árvores

- Algoritmos de Percurso

- Em ordem simétrica:

- Percorrer sua subárvore da esquerda, em ordem simétrica
 - Visitar a raiz
 - Percorrer sua subárvore da direita, em ordem simétrica

1 - 3



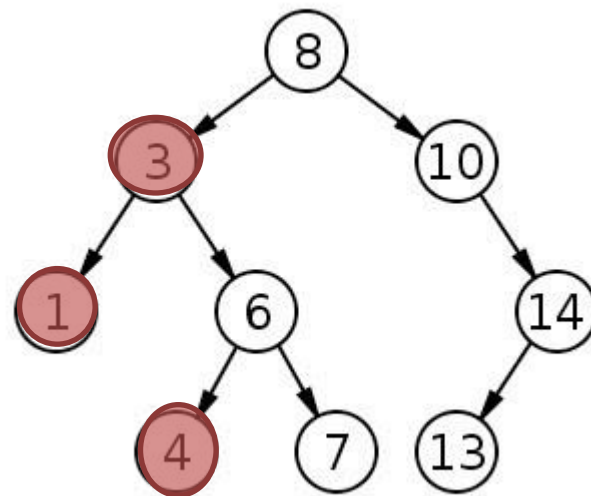
Introdução a Árvores

- Algoritmos de Percurso

- Em ordem simétrica:

- Percorrer sua subárvore da esquerda, em ordem simétrica
- Visitar a raiz
- Percorrer sua subárvore da direita, em ordem simétrica

1 - 3 - 4



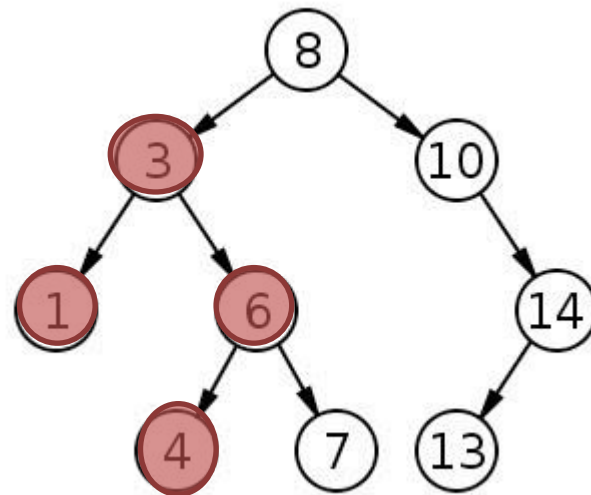
Introdução a Árvores

- Algoritmos de Percurso

- Em ordem simétrica:

- Percorrer sua subárvore da esquerda, em ordem simétrica
 - Visitar a raiz
 - Percorrer sua subárvore da direita, em ordem simétrica

1 - 3 - 4 - 6



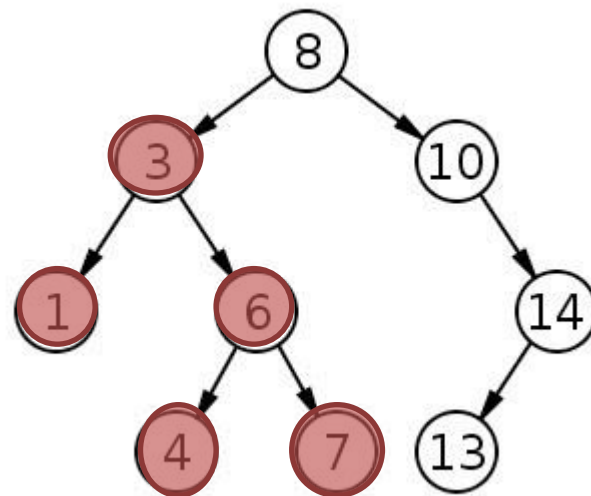
Introdução a Árvores

- Algoritmos de Percurso

- Em ordem simétrica:

- Percorrer sua subárvore da esquerda, em ordem simétrica
- Visitar a raiz
- Percorrer sua subárvore da direita, em ordem simétrica

1 - 3 - 4 - 6 - 7



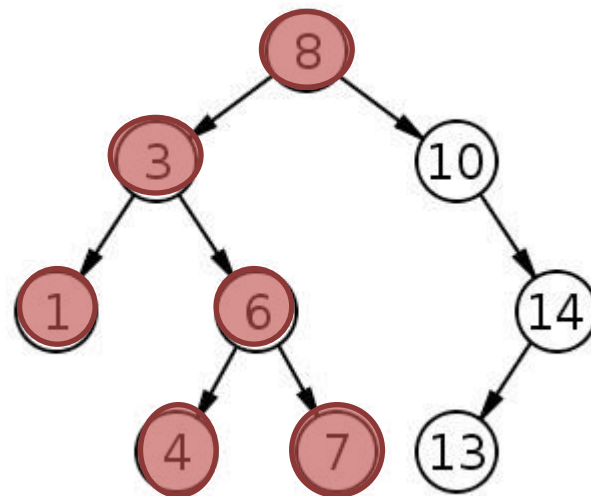
Introdução a Árvores

- Algoritmos de Percurso

- Em ordem simétrica:

- Percorrer sua subárvore da esquerda, em ordem simétrica
- Visitar a raiz
- Percorrer sua subárvore da direita, em ordem simétrica

1 - 3 - 4 - 6 - 7 - 8



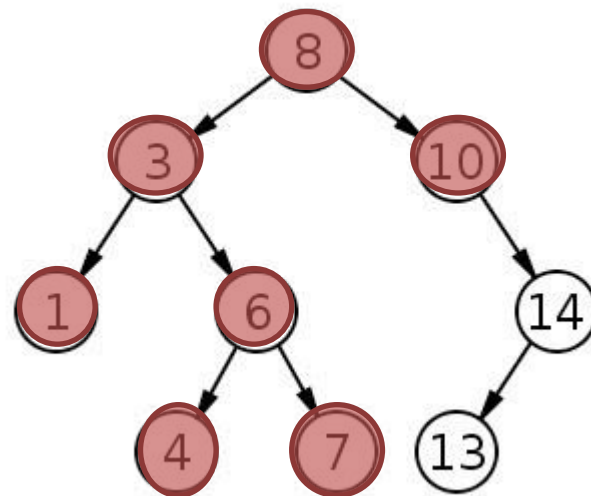
Introdução a Árvores

- Algoritmos de Percurso

- Em ordem simétrica:

- Percorrer sua subárvore da esquerda, em ordem simétrica
 - Visitar a raiz
 - Percorrer sua subárvore da direita, em ordem simétrica

1 - 3 - 4 - 6 - 7 - 8 - 10



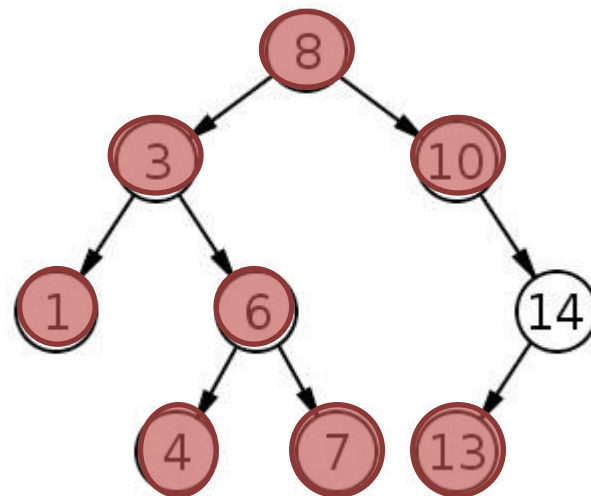
Introdução a Árvores

- Algoritmos de Percurso

- Em ordem simétrica:

- Percorrer sua subárvore da esquerda, em ordem simétrica
- Visitar a raiz
- Percorrer sua subárvore da direita, em ordem simétrica

1 - 3 - 4 - 6 - 7 - 8 - 10 - 13



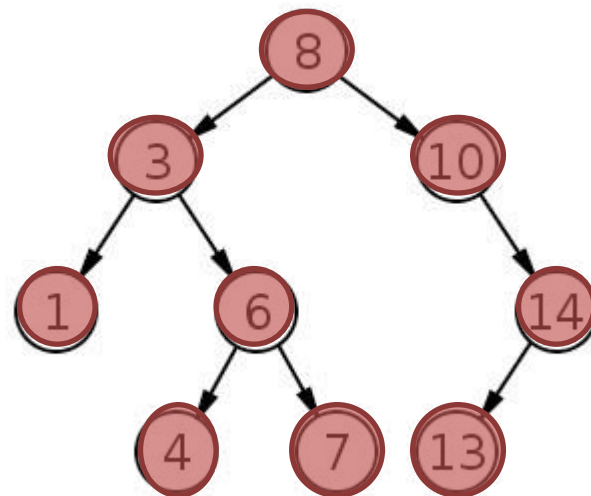
Introdução a Árvores

- Algoritmos de Percurso

- Em ordem simétrica:

- Percorrer sua subárvore da esquerda, em ordem simétrica
 - Visitar a raiz
 - Percorrer sua subárvore da direita, em ordem simétrica

1 - 3 - 4 - 6 - 7 - 8 - 10 - 13 - 14

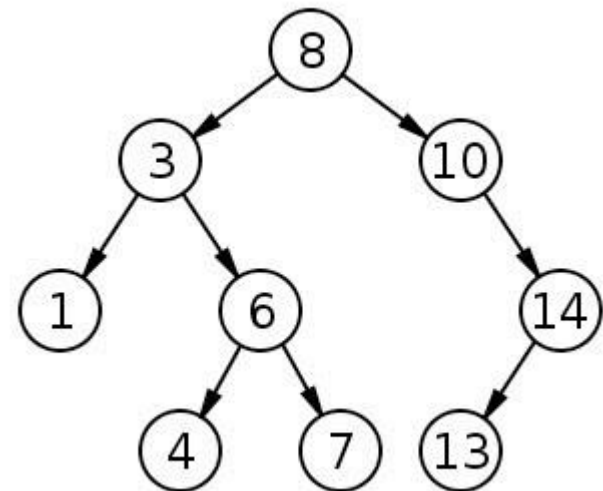


Introdução a Árvores

- Algoritmos de Percurso

- Pós-ordem

- Percorrer sua subárvore da esquerda, em pós-ordem
- Percorrer sua subárvore da direita, em pós-ordem
- Visitar a raiz

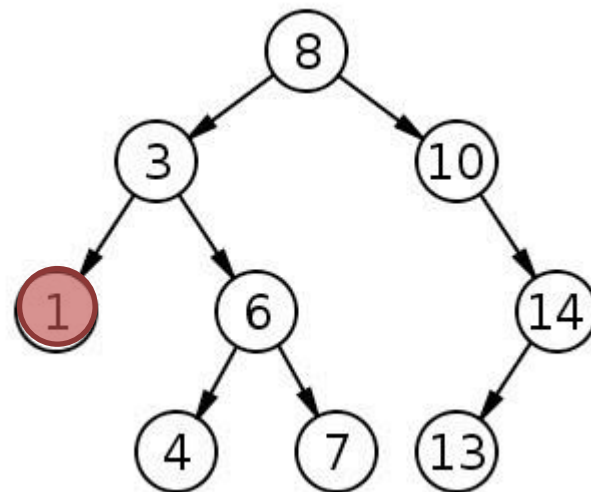


Introdução a Árvores

- Algoritmos de Percurso

- Pós-ordem

- Percorrer sua subárvore da esquerda, em pós-ordem
- Percorrer sua subárvore da direita, em pós-ordem
- Visitar a raiz



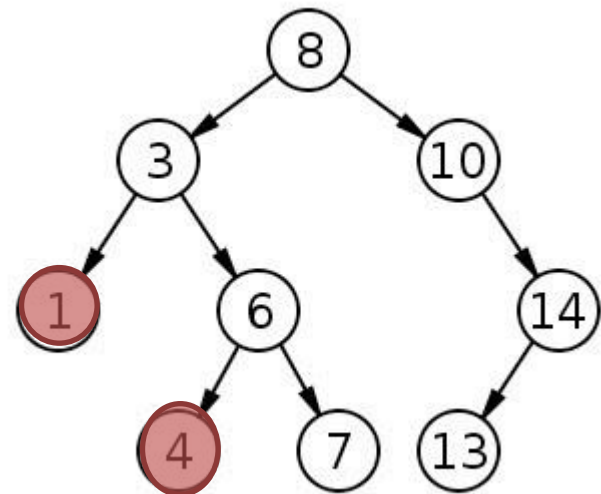
Introdução a Árvores

- Algoritmos de Percurso

- Pós-ordem

- Percorrer sua subárvore da esquerda, em pós-ordem
- Percorrer sua subárvore da direita, em pós-ordem
- Visitar a raiz

1 - 4



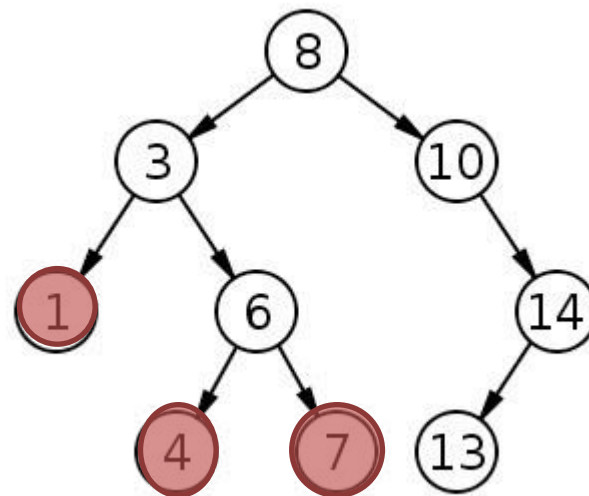
Introdução a Árvores

- Algoritmos de Percurso

- Pós-ordem

- Percorrer sua subárvore da esquerda, em pós-ordem
- Percorrer sua subárvore da direita, em pós-ordem
- Visitar a raiz

1 - 4 - 7



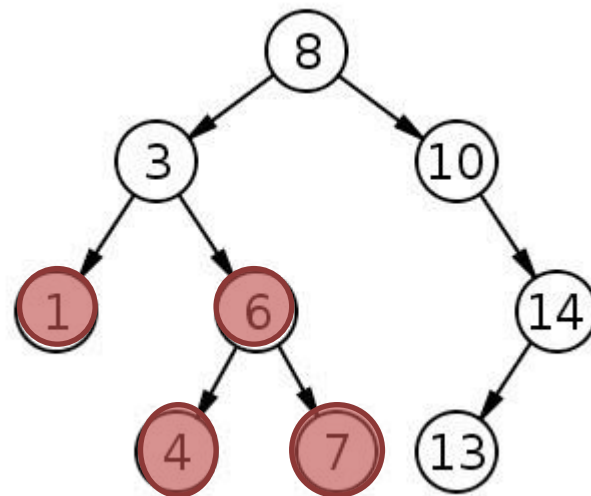
Introdução a Árvores

- Algoritmos de Percurso

- Pós-ordem

- Percorrer sua subárvore da esquerda, em pós-ordem
- Percorrer sua subárvore da direita, em pós-ordem
- Visitar a raiz

1 - 4 - 7 - 6



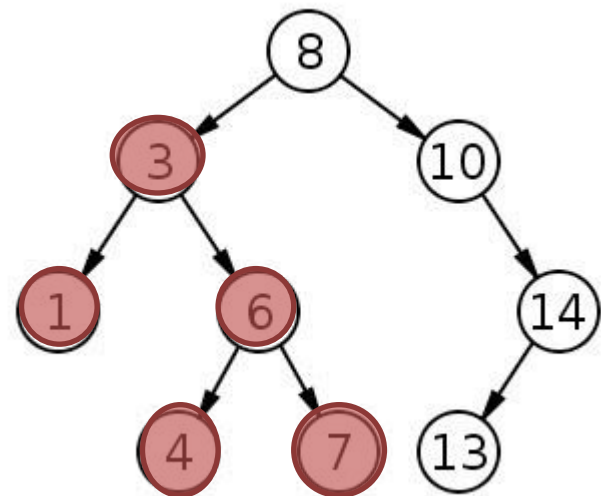
Introdução a Árvores

- Algoritmos de Percurso

- Pós-ordem

- Percorrer sua subárvore da esquerda, em pós-ordem
- Percorrer sua subárvore da direita, em pós-ordem
- Visitar a raiz

1 - 4 - 7 - 6 - 3



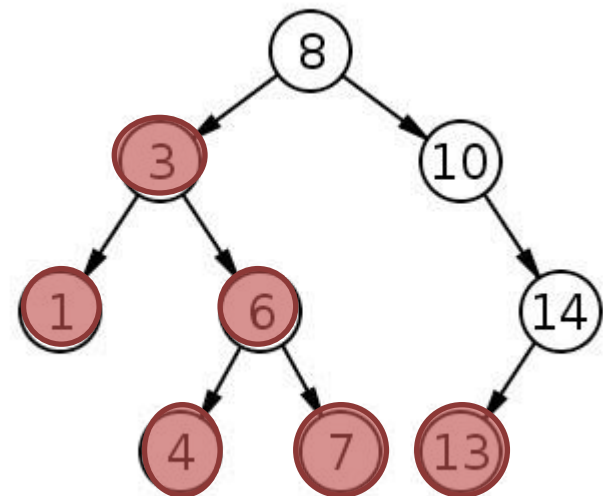
Introdução a Árvores

- Algoritmos de Percurso

- Pós-ordem

- Percorrer sua subárvore da esquerda, em pós-ordem
- Percorrer sua subárvore da direita, em pós-ordem
- Visitar a raiz

1 - 4 - 7 - 6 - 3 - 13



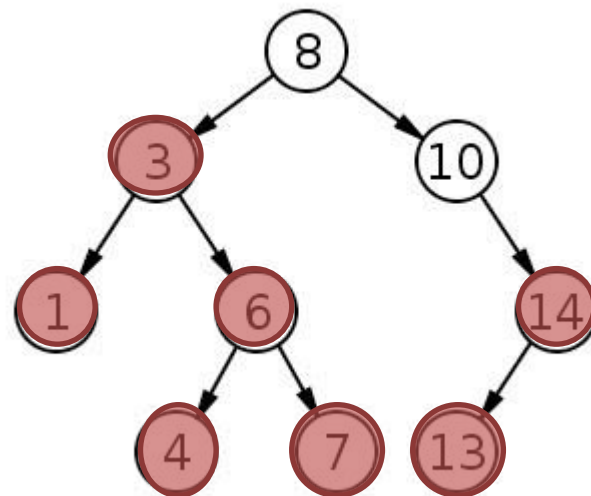
Introdução a Árvores

- Algoritmos de Percurso

- Pós-ordem

- Percorrer sua subárvore da esquerda, em pós-ordem
- Percorrer sua subárvore da direita, em pós-ordem
- Visitar a raiz

1 - 4 - 7 - 6 - 3 - 13 - 14



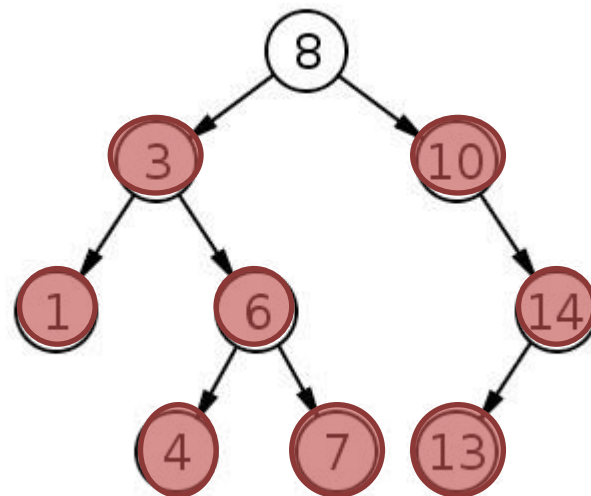
Introdução a Árvores

- Algoritmos de Percurso

- Pós-ordem

- Percorrer sua subárvore da esquerda, em pós-ordem
- Percorrer sua subárvore da direita, em pós-ordem
- Visitar a raiz

1 - 4 - 7 - 6 - 3 - 13 - 14 - 10



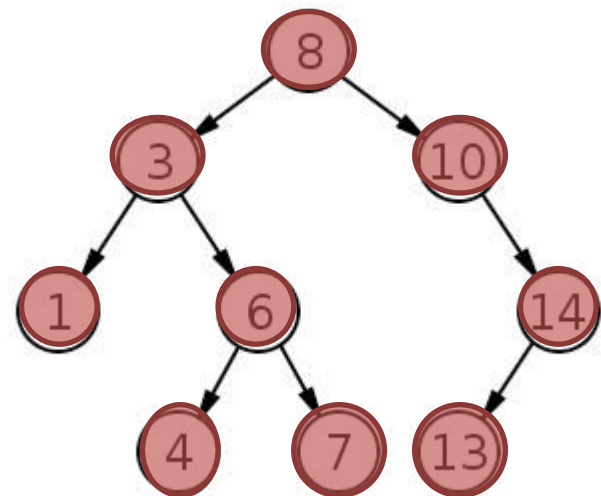
Introdução a Árvores

- Algoritmos de Percurso

- Pós-ordem

- Percorrer sua subárvore da esquerda, em pós-ordem
- Percorrer sua subárvore da direita, em pós-ordem
- Visitar a raiz

1 - 4 - 7 - 6 - 3 - 13 - 14 - 10 - 8



Introdução a Árvores

- **Árvores m-árias**

- Uma **árvore m-ária** T , $m \geq 2$, é um **conjunto finito** de elementos, denominados nós ou vértices, tais que:

- $T = \emptyset$ e a árvore é dita vazia, ou

- Contém um **nó especial** r , chamado **raiz** de T , e os restantes podem ser sempre divididos em m subconjuntos disjuntos, as i -ésimas subárvores de r , $1 \leq i \leq m$, as quais também são árvores m-árias.

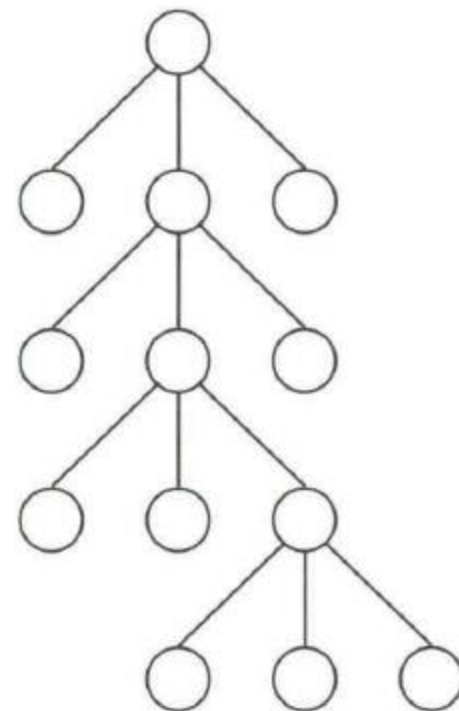
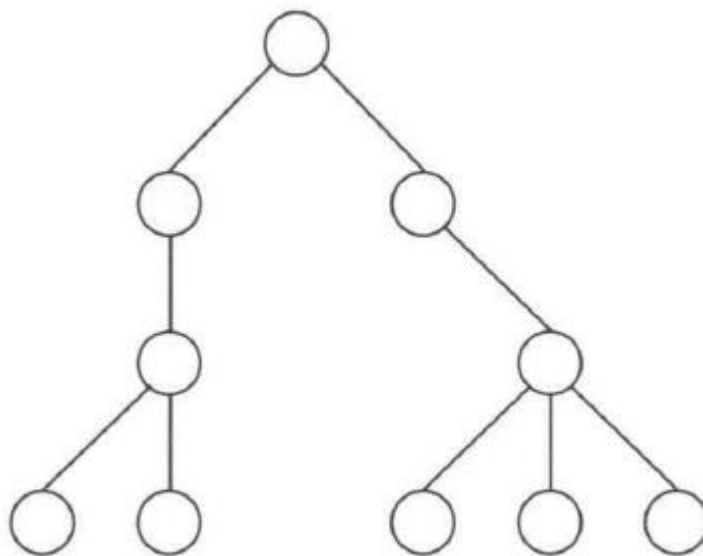
- **Generalização** da árvore binária.

- Cada nó possui m **subárvores**.

Introdução a Árvores

- **Árvores m-árias**
 - Analogamente ao caso binário, podemos definir árvore **estritamente m-ária**, árvore **m-ária completa** e **cheia**.

- Exemplo:



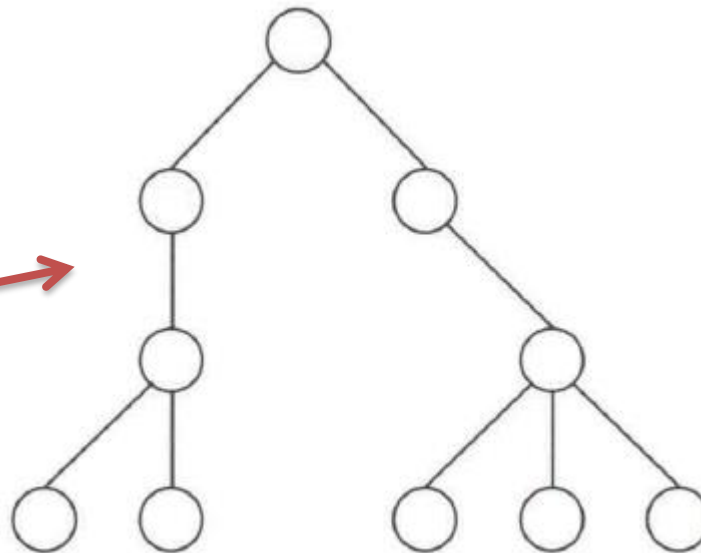
Introdução a Árvores

- **Árvores m-árias**

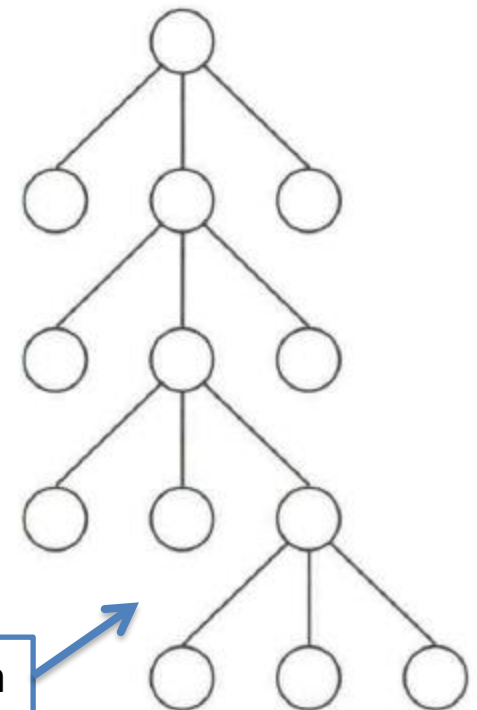
- Analogamente ao caso binário, podemos definir árvore **estritamente m-ária**, árvore **m-ária completa** e **cheia**.

- Exemplo:

Árvore ternária

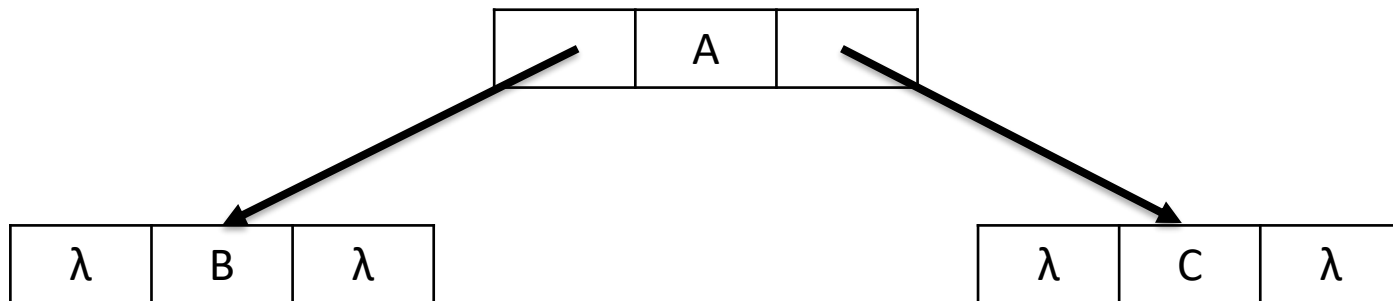


Árvore estritamente ternária



Introdução a Árvores

- **Conversão de uma árvore em árvore binária**
 - No caso de uma **árvore binária com n nós**, seriam necessárias **$2n$ posições de memória** para as possíveis raízes das subárvores esquerda e direita.

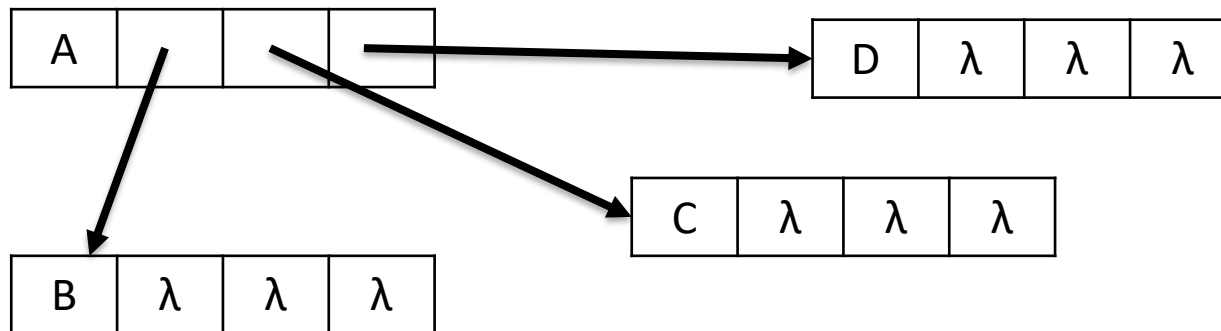


- Numa árvore **qualquer**, cada nó pode possuir um **número arbitrário** de subárvores.

Introdução a Árvores

- **Conversão de uma árvore em árvore binária**

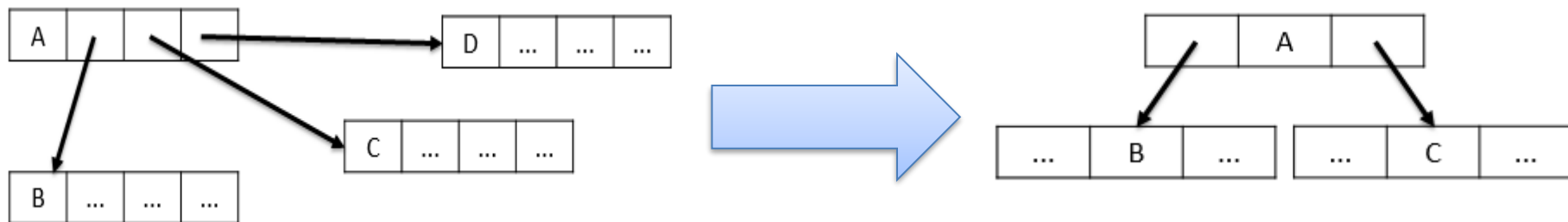
- Seja **m** o maior número de filhos dentre os nós da árvore. Cada nó da árvore pode ser representado com **m campos de ponteiros** para as raízes de suas subárvores.



- Demanda **mn** posições de memória para os ponteiros. Grande desperdício de memória!

Introdução a Árvores

- **Conversão de uma árvore em árvore binária**
 - **Solução:** converter a árvore dada em uma árvore binária.
 - Obtém-se uma árvore binária com o mesmo número de nós que a árvore original.
 - A conversão é única, a qual pode, em qualquer ocasião, ser reconvertida na árvore original.

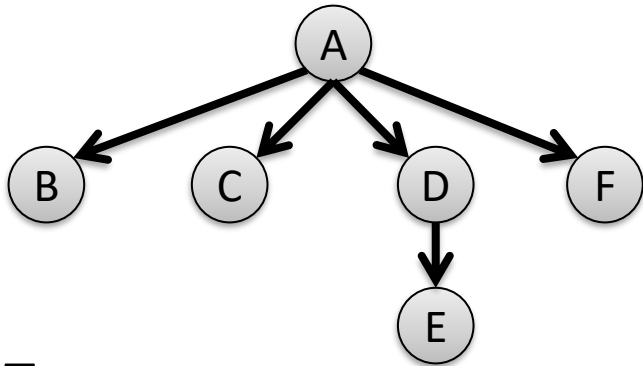


Introdução a Árvores

- **Conversão de uma árvore em árvore binária**
 - Seja T a árvore **genérica** original.
 - T' é a árvore **binária** equivalente a T .
 - T' possui um nó v' para cada nó v de T .
 - As **raízes** de T e T' **coincidem**.
 - Regras para construção:
 - O **filho esquerdo** de um nó v' em T' corresponde ao primeiro filho de v em T , caso exista. Se não existir, a subárvore esquerda de v' é vazia.
 - O **filho direito** de um nó v' em T' corresponde ao irmão de v em T , localizado imediatamente à sua direita, caso exista. Se não existir, a subárvore direita de v' é vazia.

Introdução a Árvores

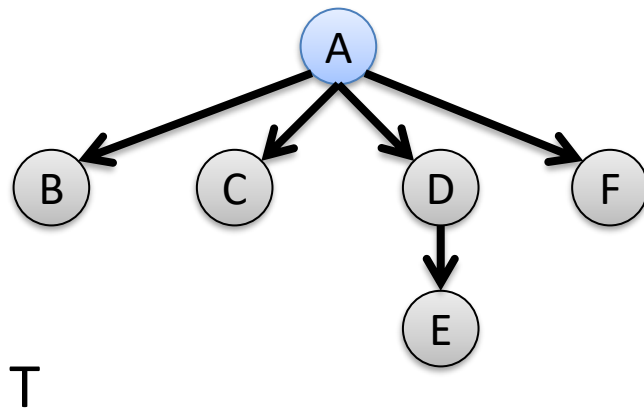
- **Conversão de uma árvore em árvore binária**
 - Exemplo:



T

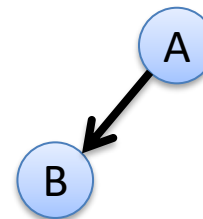
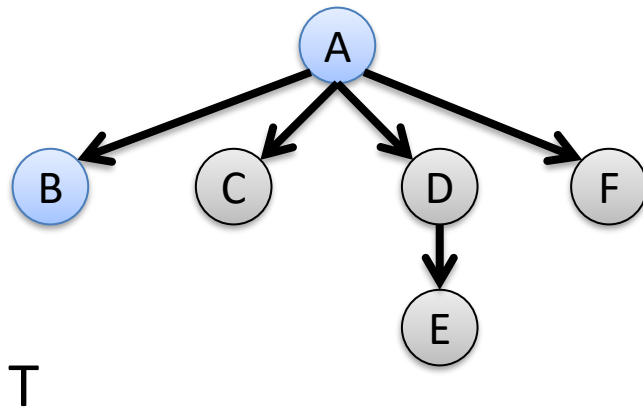
Introdução a Árvores

- **Conversão de uma árvore em árvore binária**
 - Exemplo:



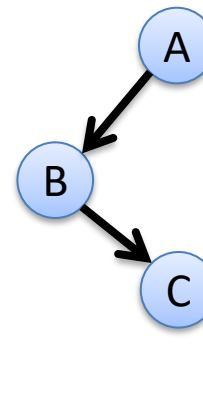
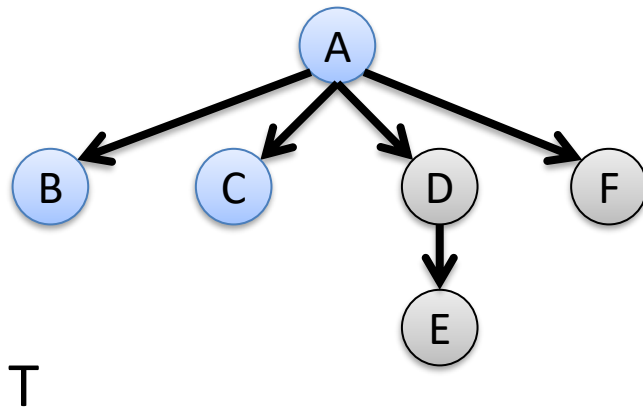
Introdução a Árvores

- **Conversão de uma árvore em árvore binária**
 - Exemplo:



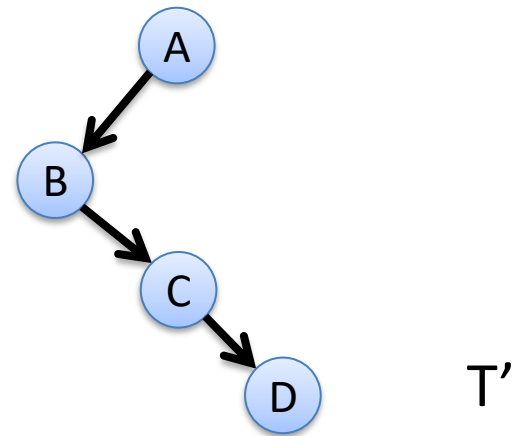
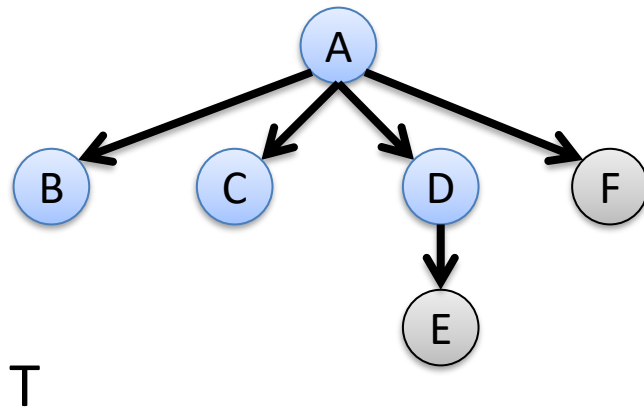
Introdução a Árvores

- **Conversão de uma árvore em árvore binária**
 - Exemplo:



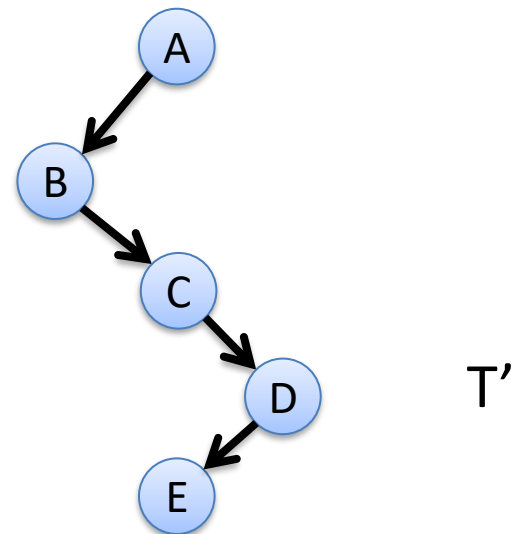
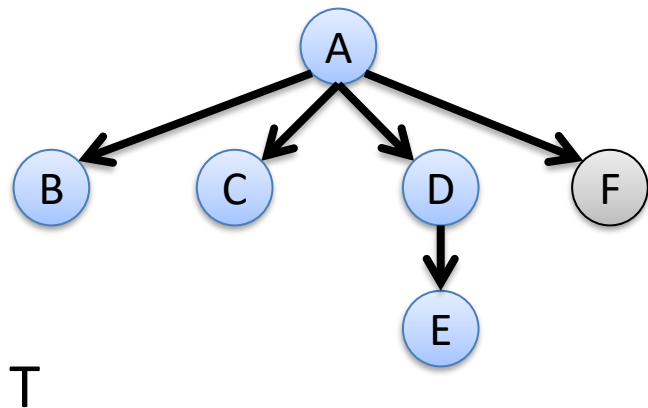
Introdução a Árvores

- **Conversão de uma árvore em árvore binária**
 - Exemplo:



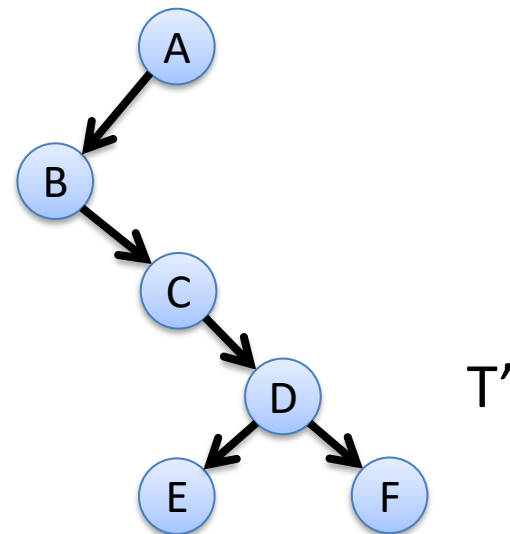
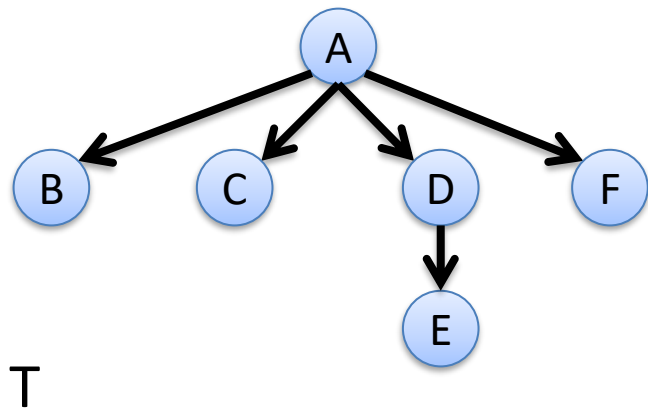
Introdução a Árvores

- **Conversão de uma árvore em árvore binária**
 - Exemplo:



Introdução a Árvores

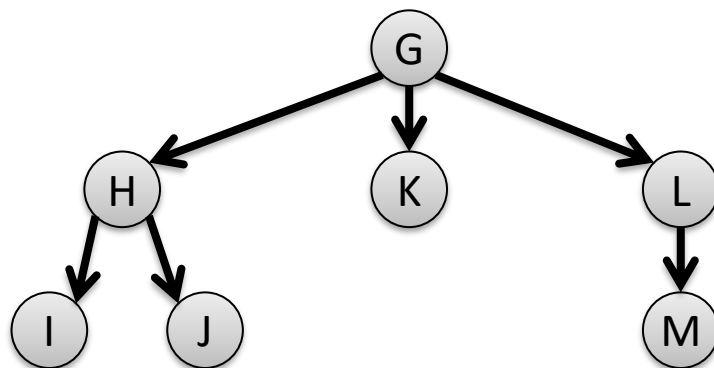
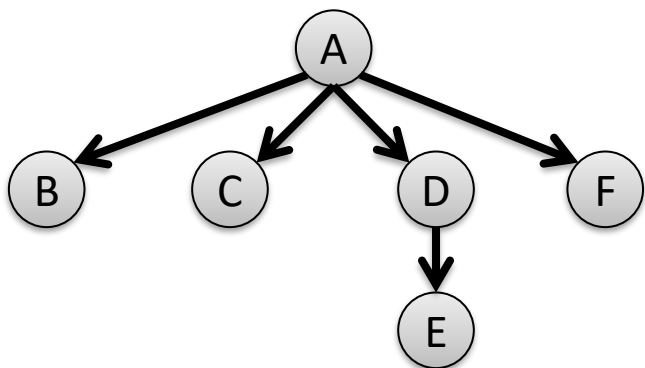
- **Conversão de uma árvore em árvore binária**
 - Exemplo:



Introdução a Árvores

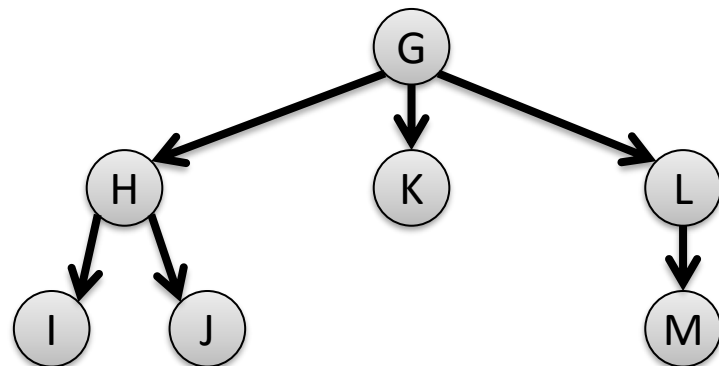
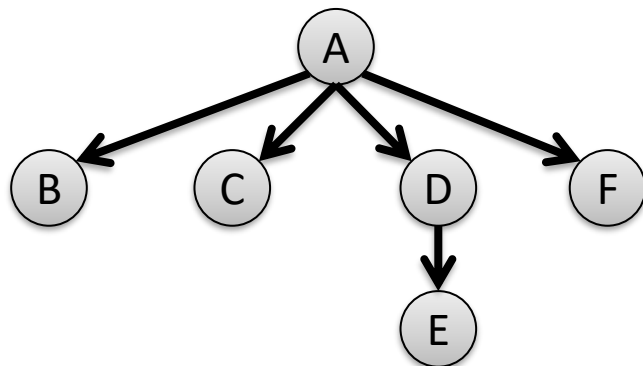
- **Conversão de uma floresta em árvore binária**

- Para converter uma **floresta** em **árvore binária**, basta considerar as raízes das árvores da floresta como nós irmãos e aplicar a **conversão anterior**.
- Exemplo:



Introdução a Árvores

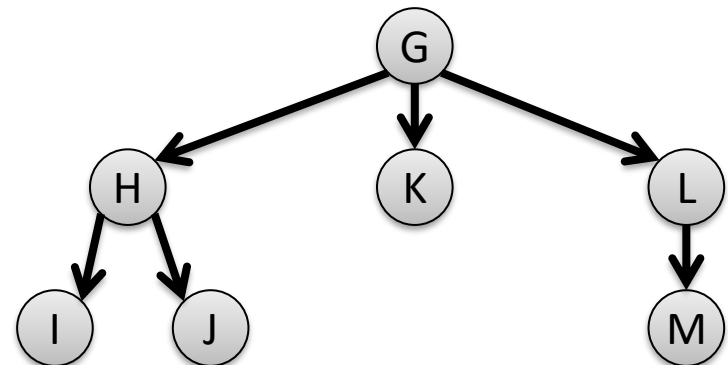
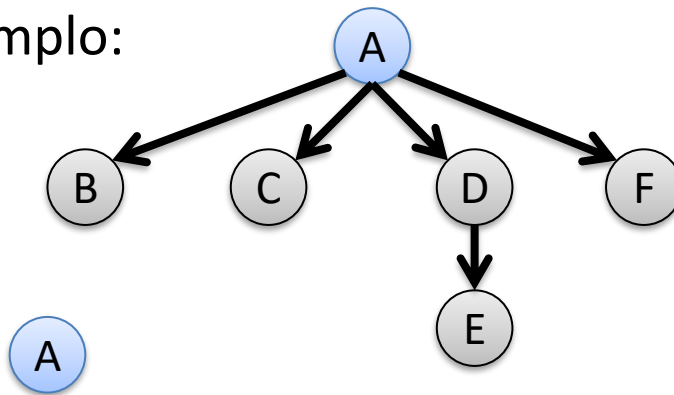
- **Conversão de uma floresta em árvore binária**
 - Exemplo:



Introdução a Árvores

- **Conversão de uma floresta em árvore binária**

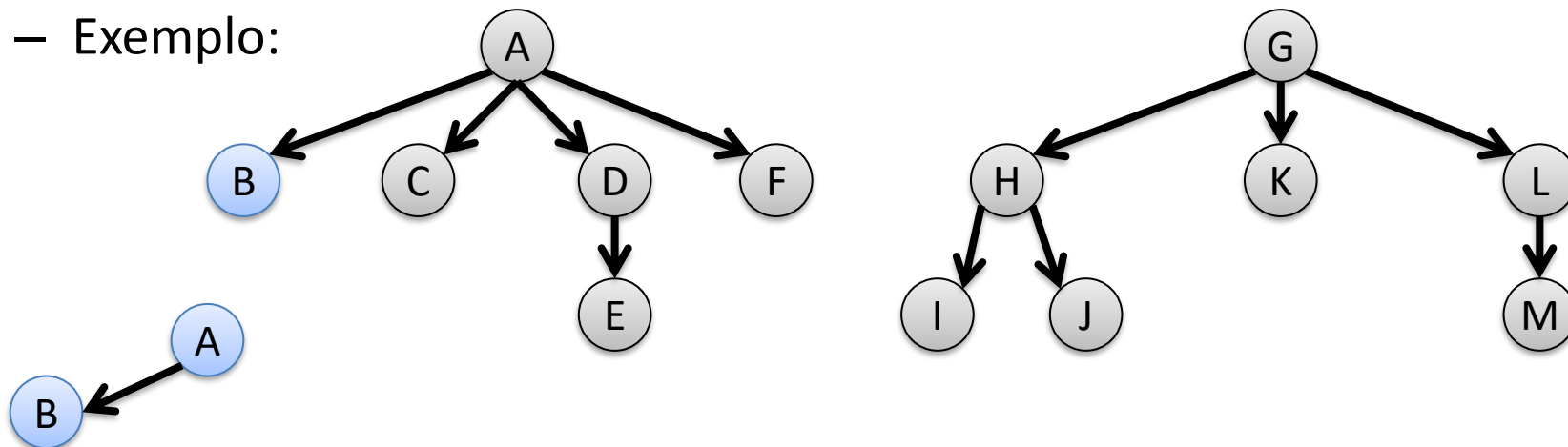
- Exemplo:



Introdução a Árvores

- **Conversão de uma floresta em árvore binária**

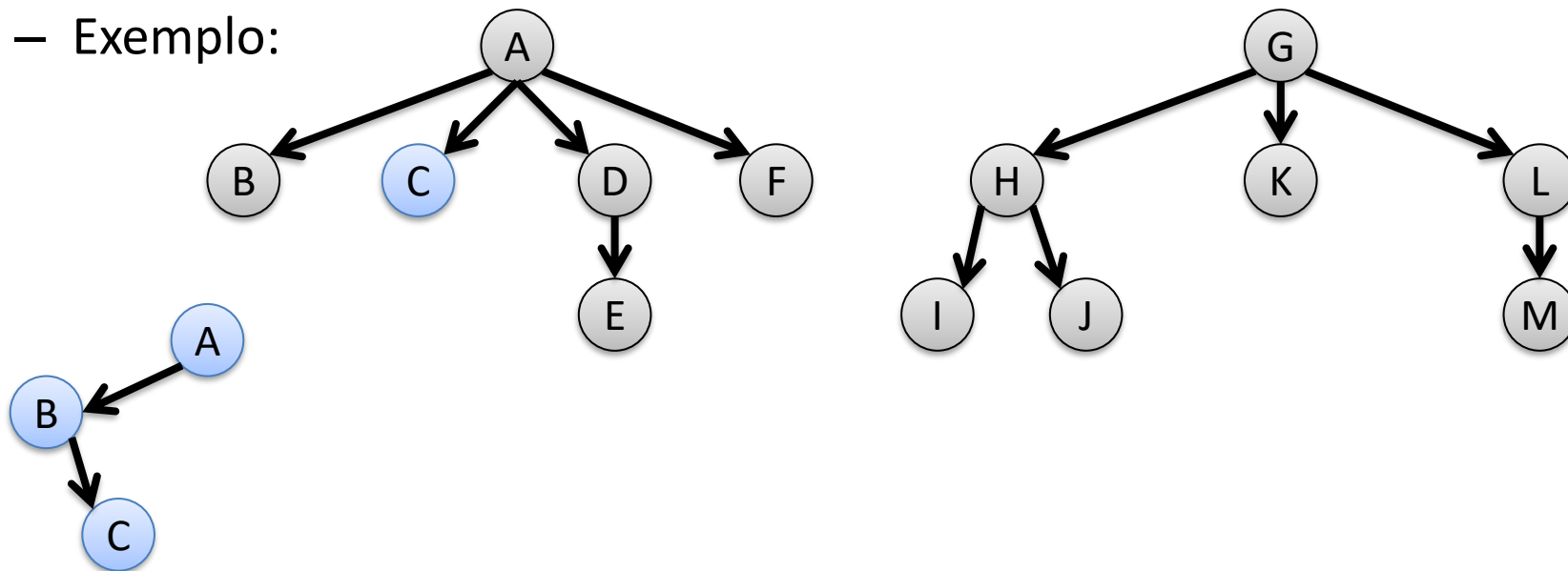
- Exemplo:



Introdução a Árvores

- **Conversão de uma floresta em árvore binária**

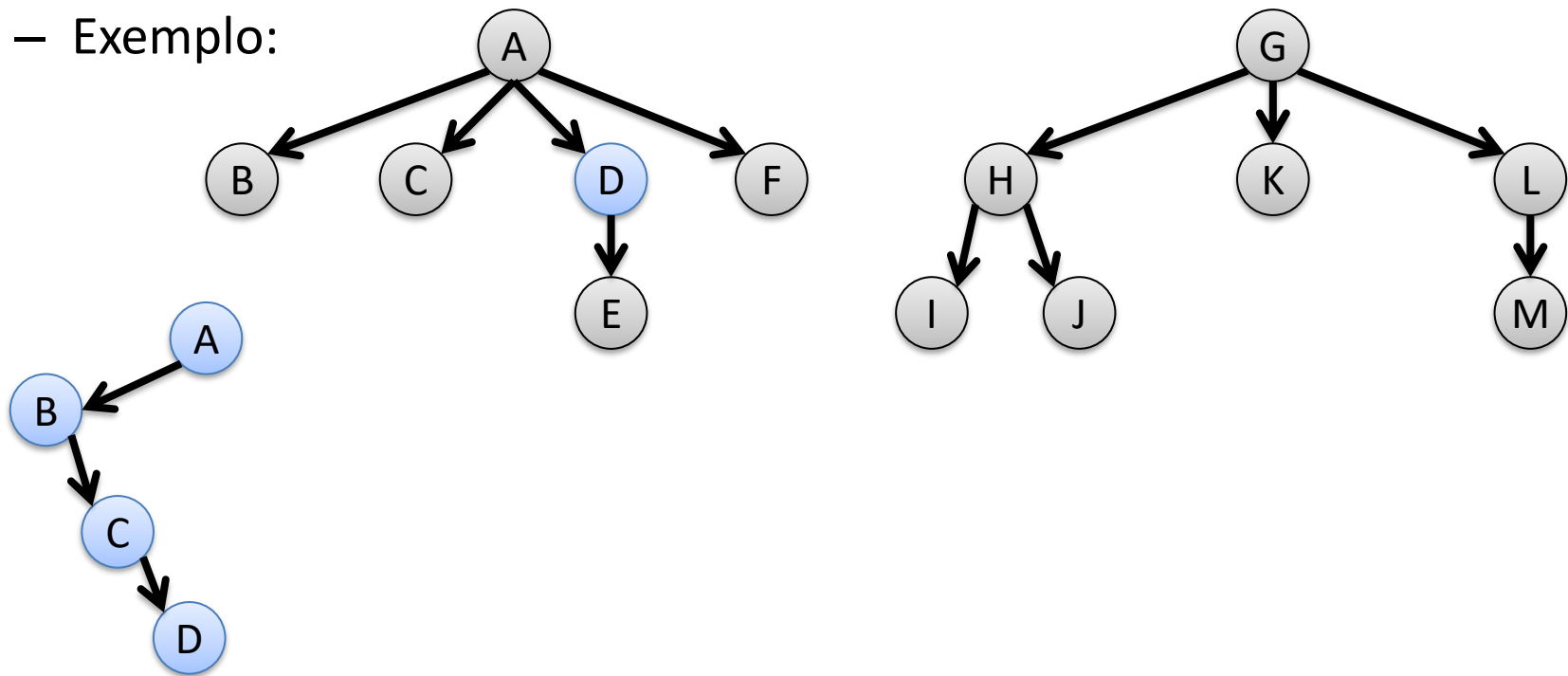
- Exemplo:



Introdução a Árvores

- **Conversão de uma floresta em árvore binária**

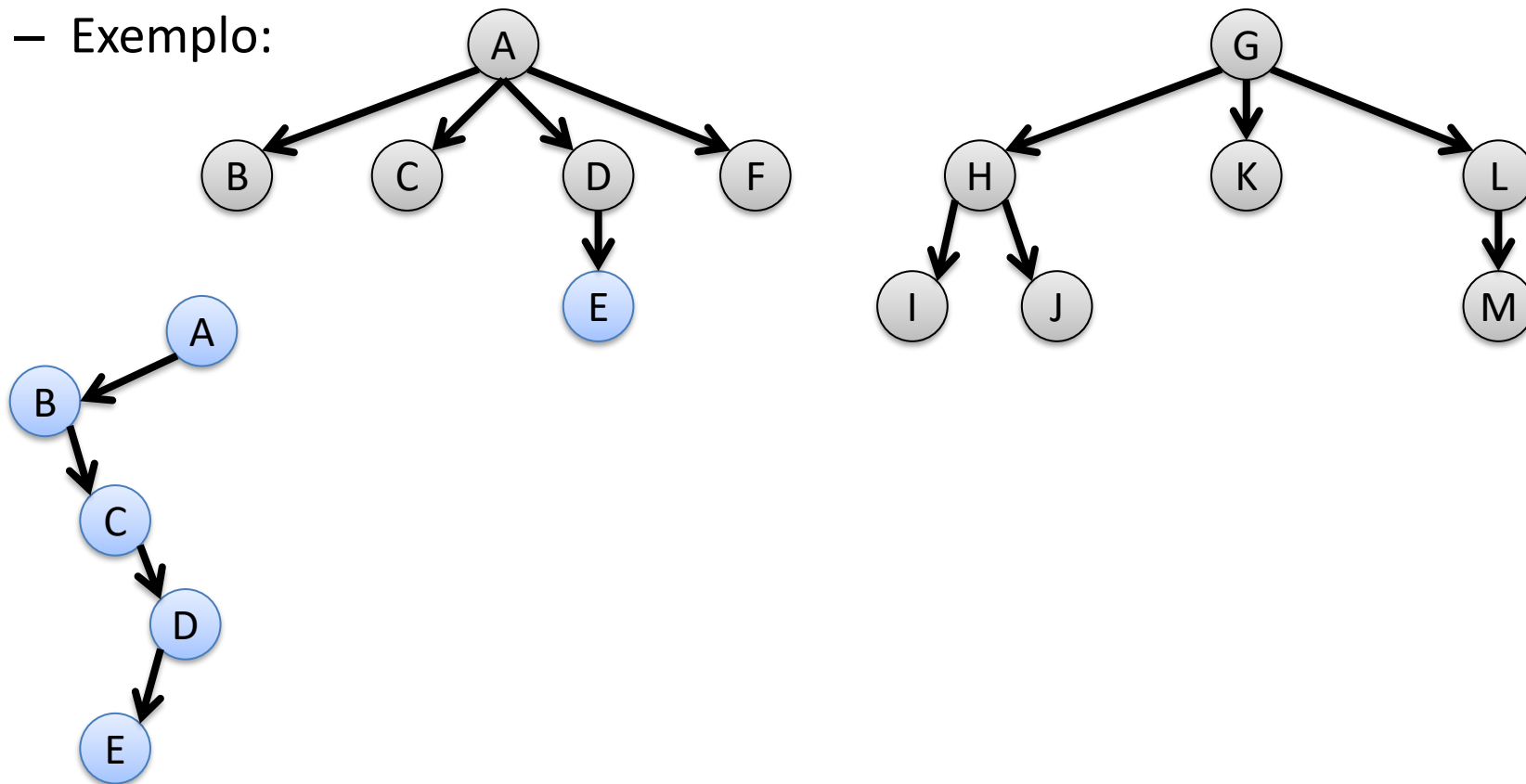
– Exemplo:



Introdução a Árvores

- **Conversão de uma floresta em árvore binária**

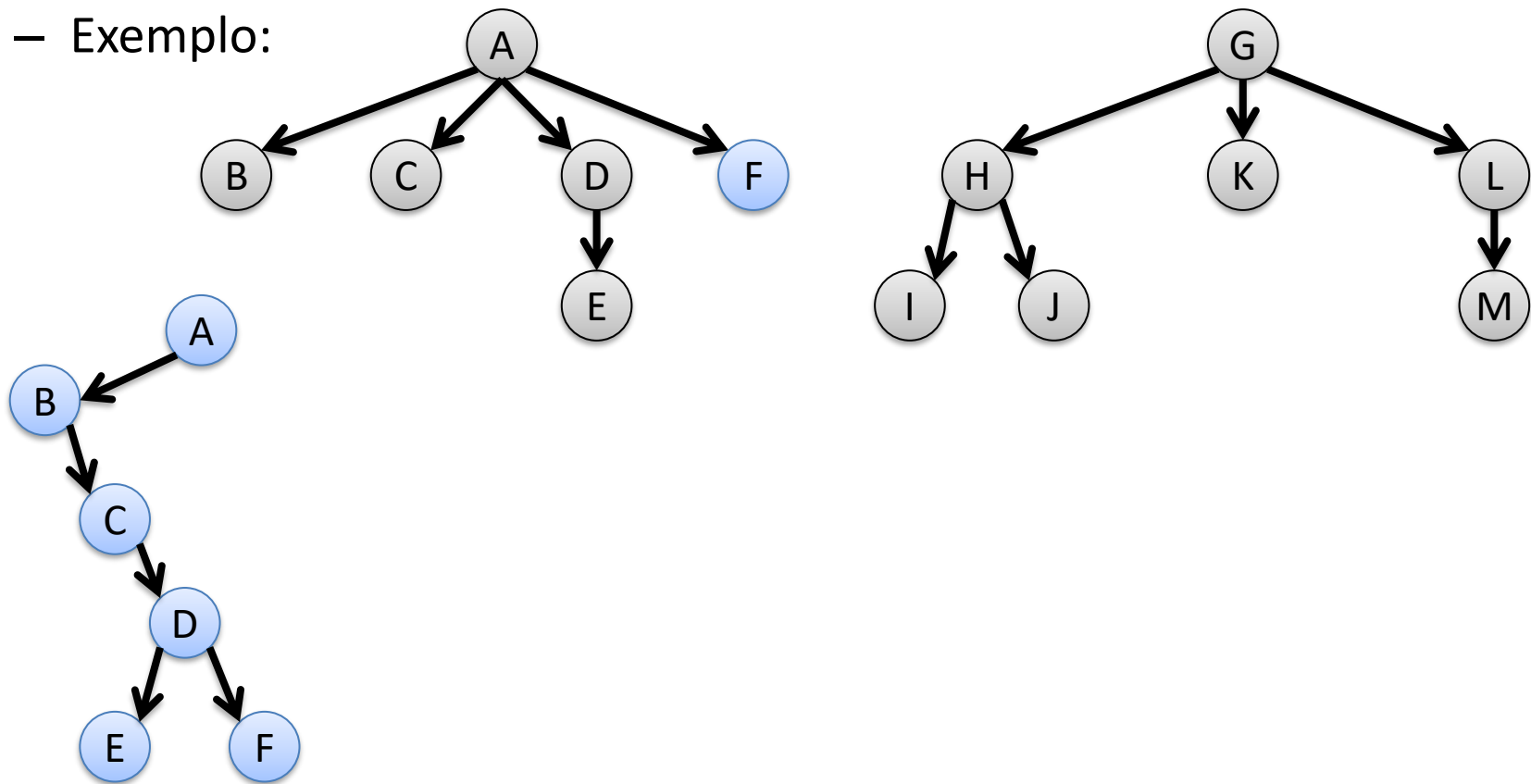
- Exemplo:



Introdução a Árvores

- **Conversão de uma floresta em árvore binária**

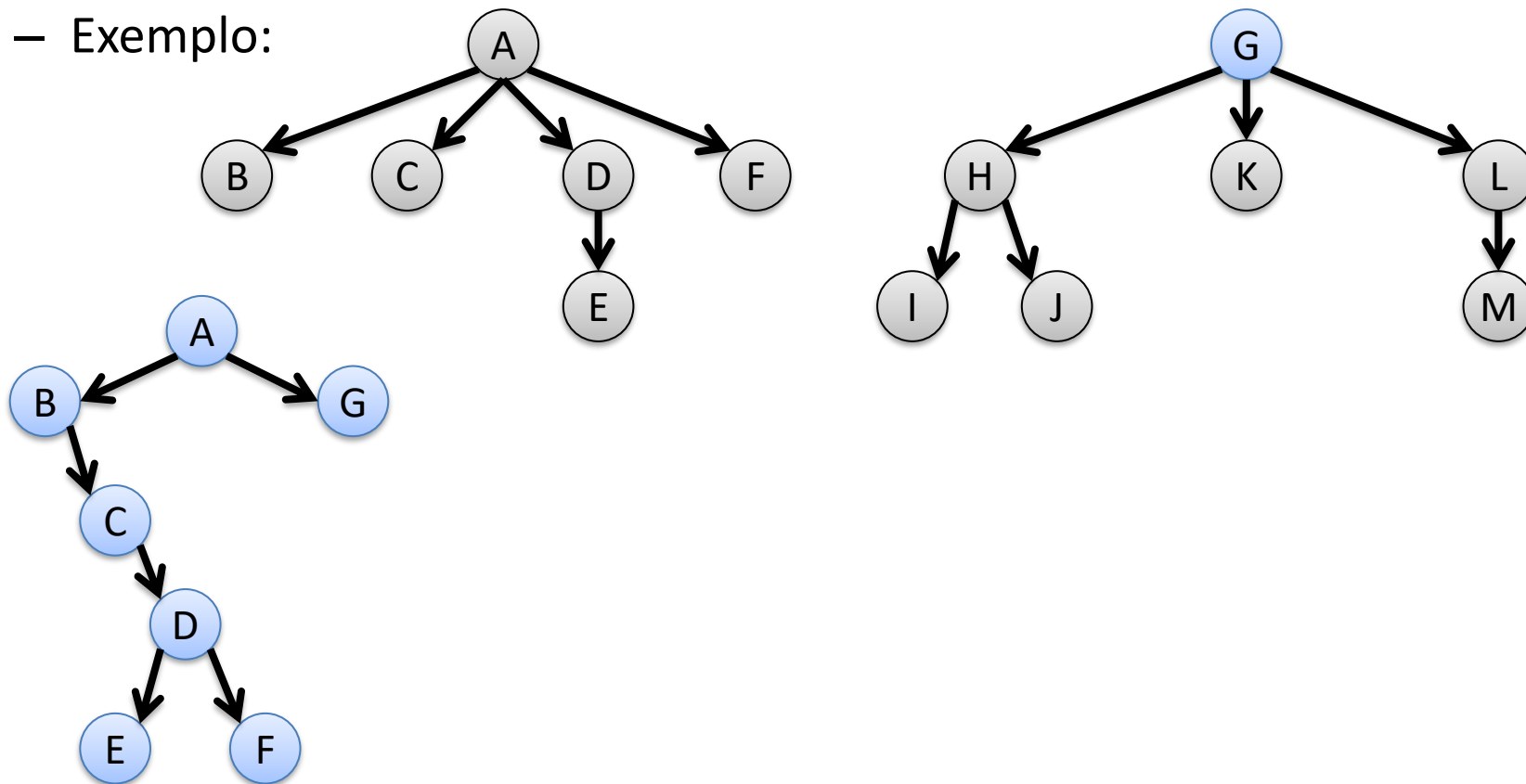
– Exemplo:



Introdução a Árvores

- **Conversão de uma floresta em árvore binária**

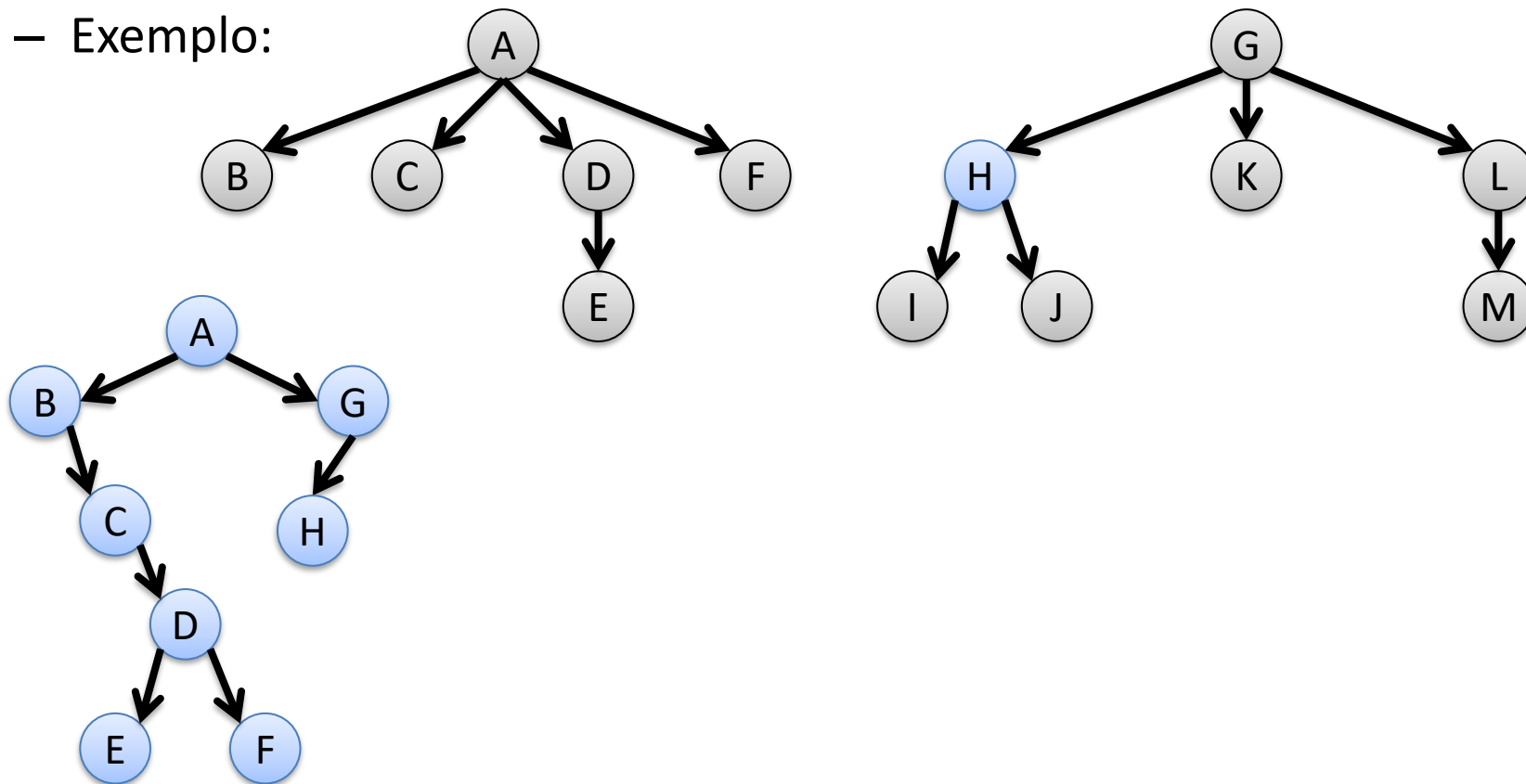
- Exemplo:



Introdução a Árvores

- **Conversão de uma floresta em árvore binária**

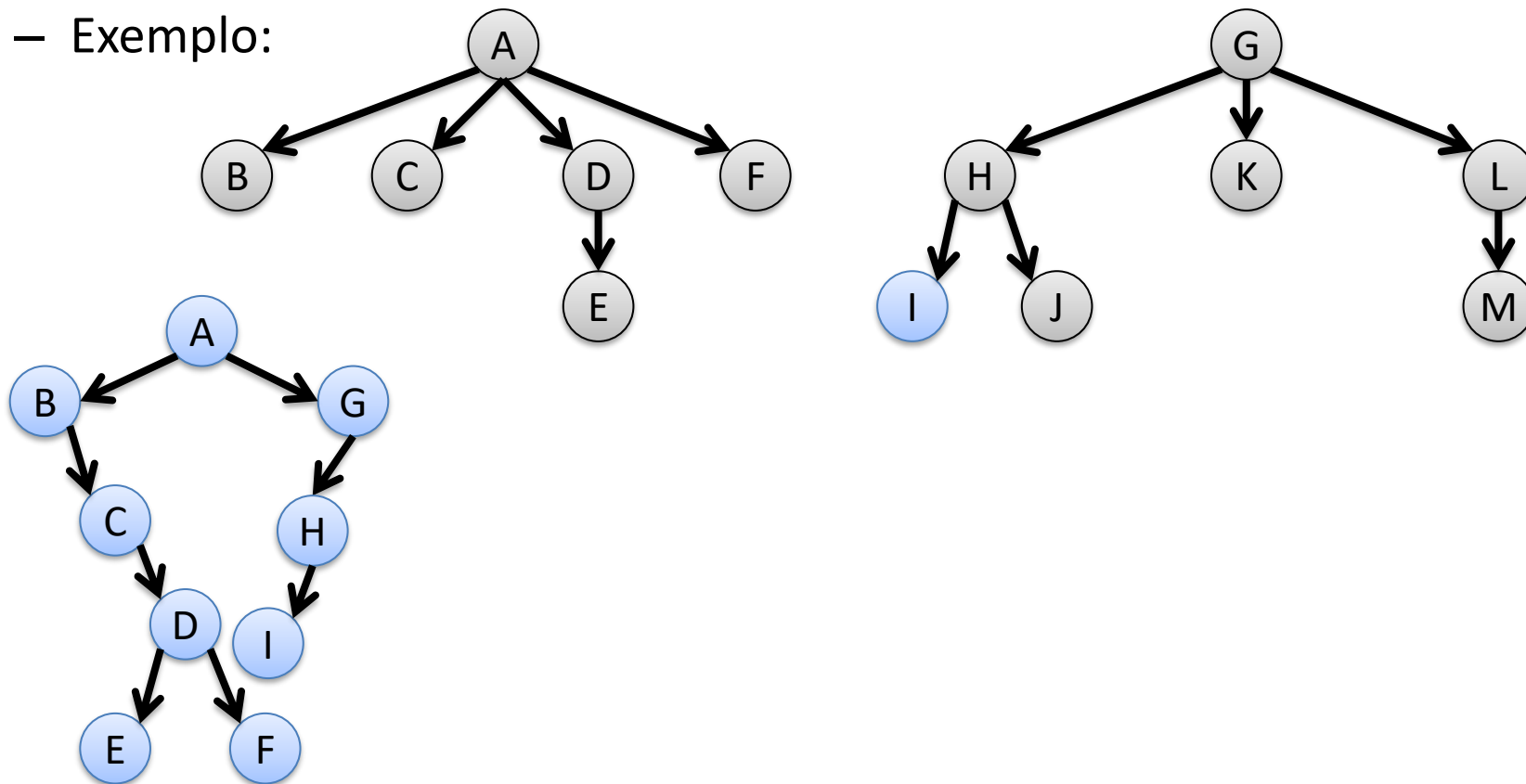
– Exemplo:



Introdução a Árvores

- **Conversão de uma floresta em árvore binária**

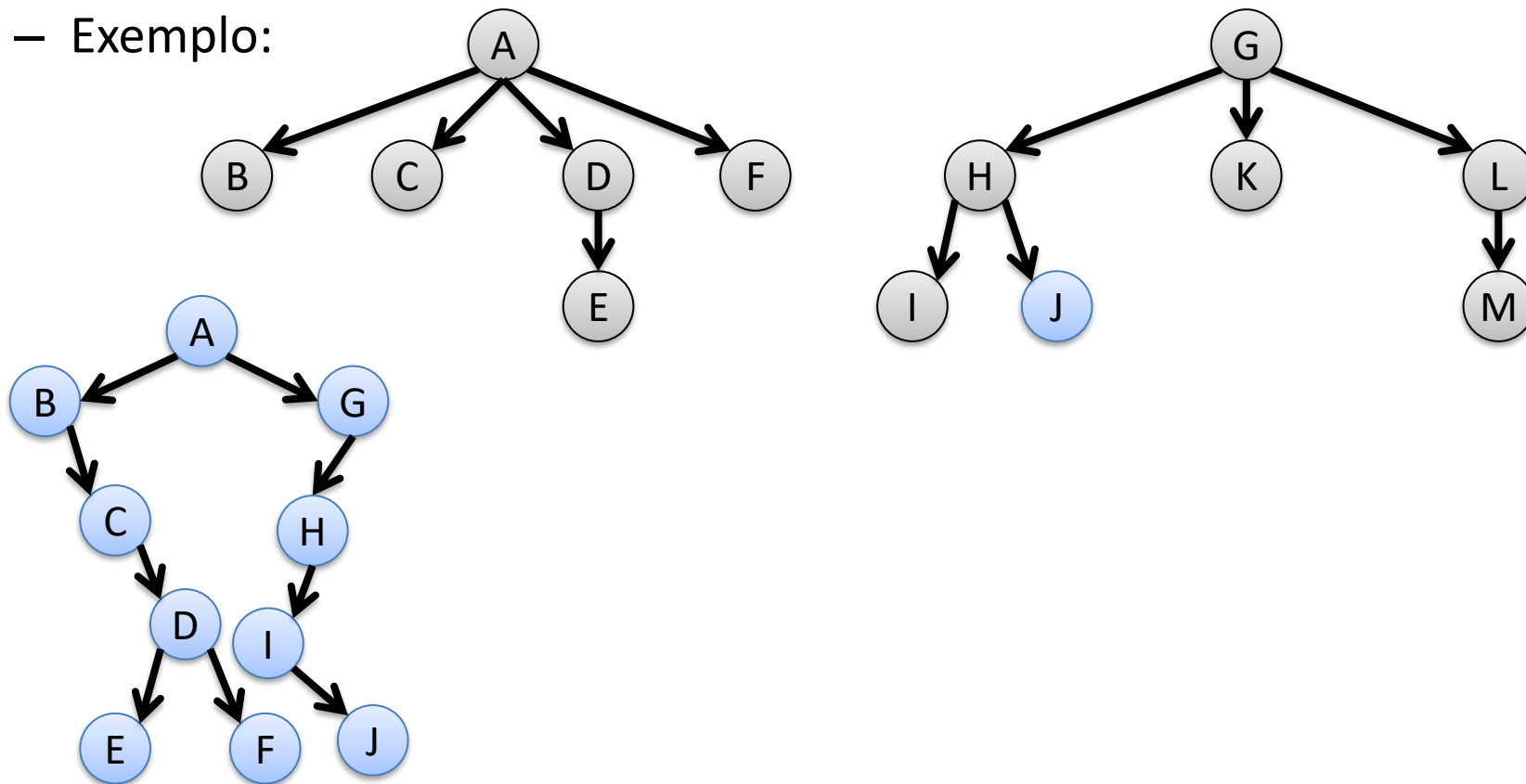
– Exemplo:



Introdução a Árvores

- **Conversão de uma floresta em árvore binária**

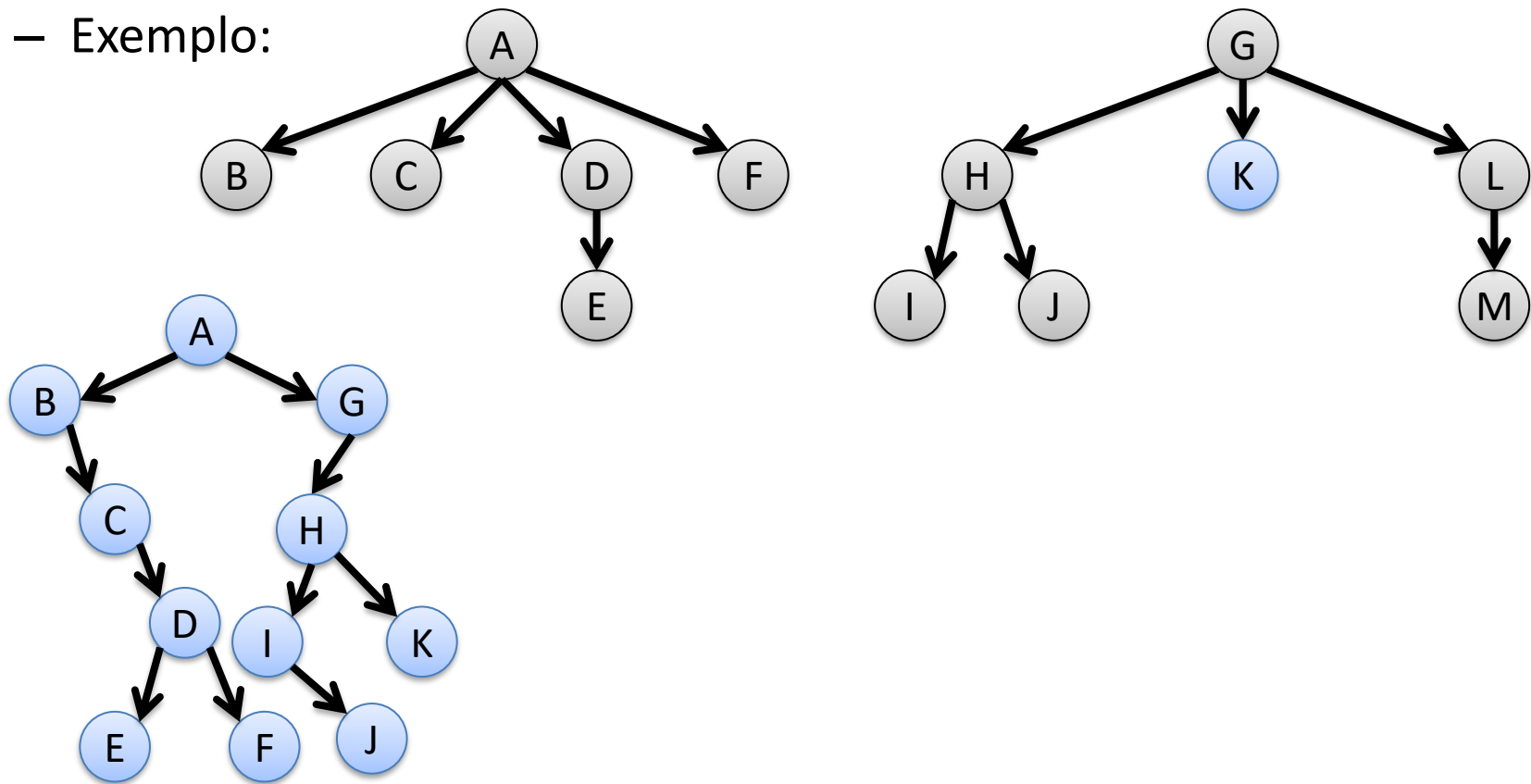
– Exemplo:



Introdução a Árvores

- **Conversão de uma floresta em árvore binária**

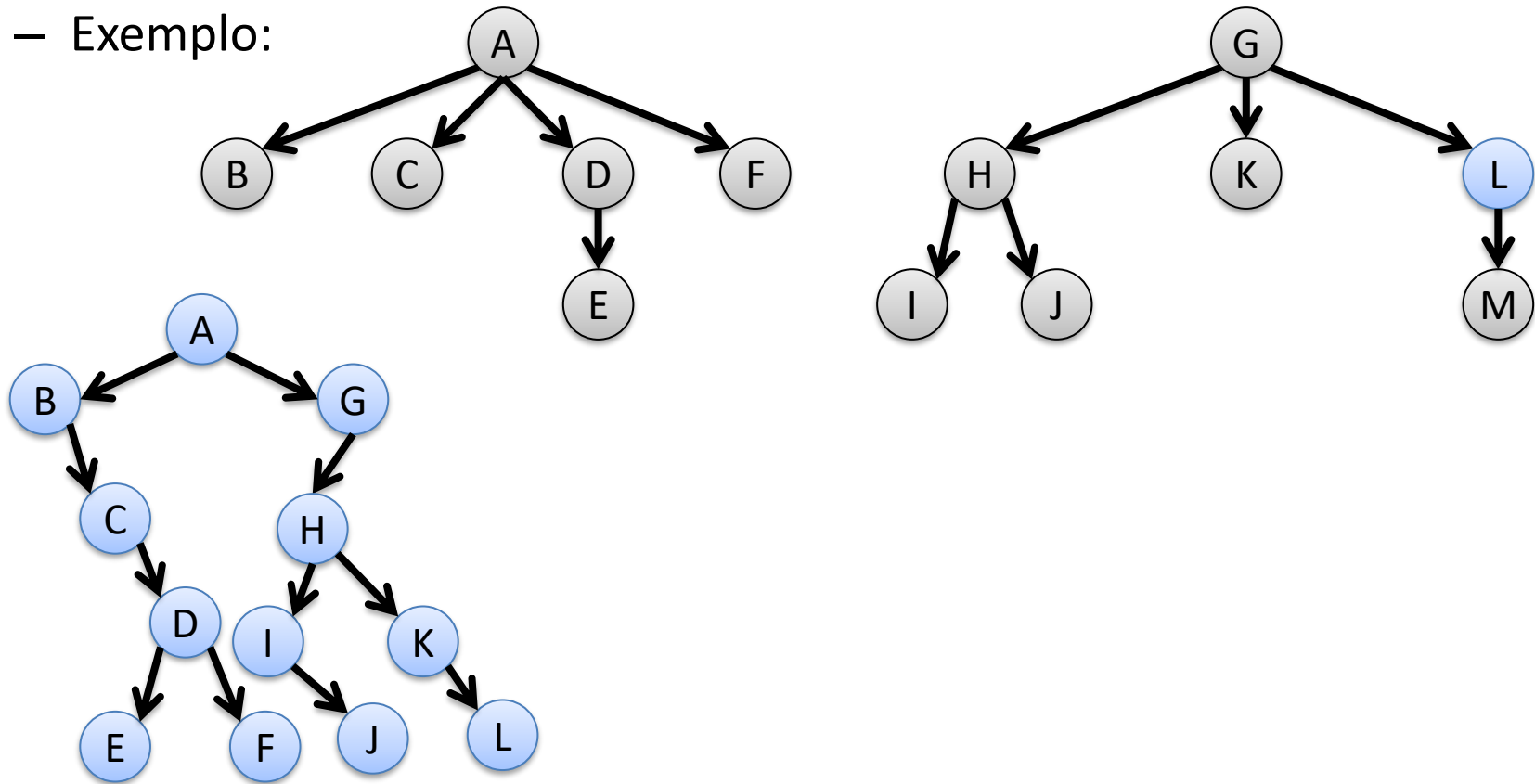
– Exemplo:



Introdução a Árvores

- **Conversão de uma floresta em árvore binária**

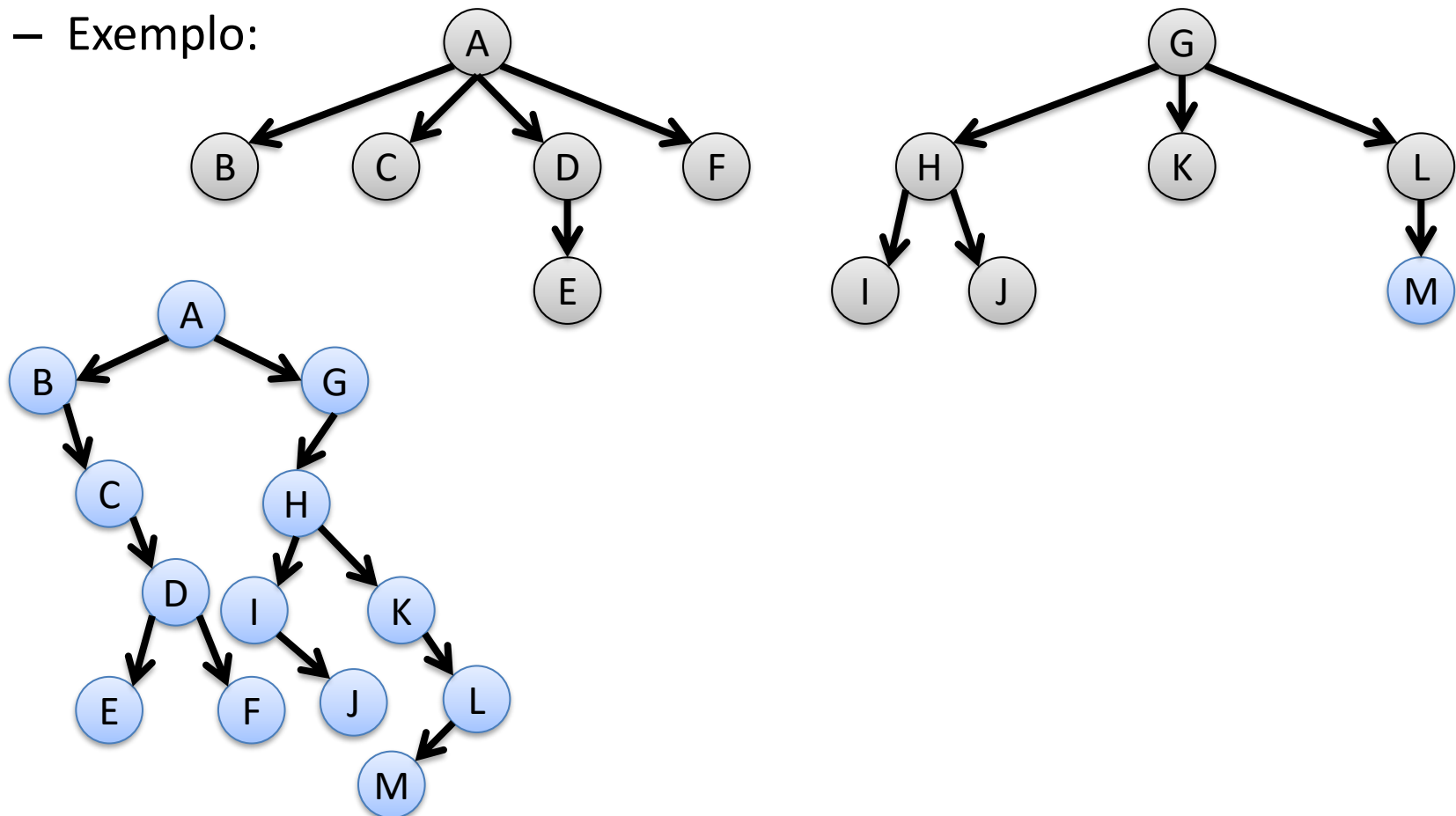
– Exemplo:



Introdução a Árvores

- **Conversão de uma floresta em árvore binária**

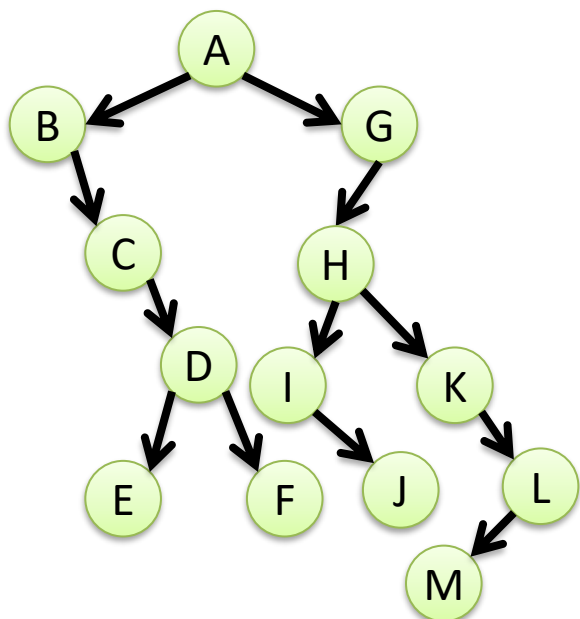
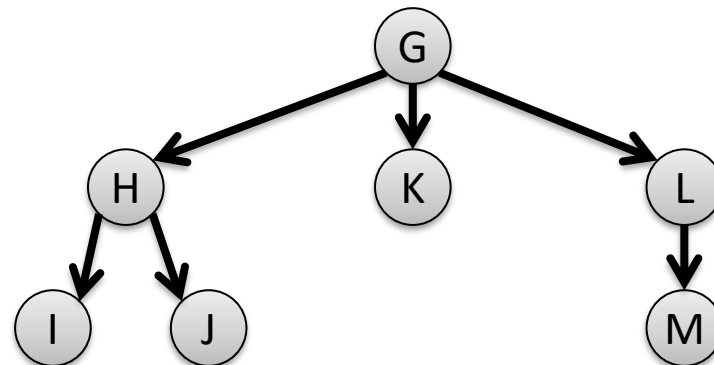
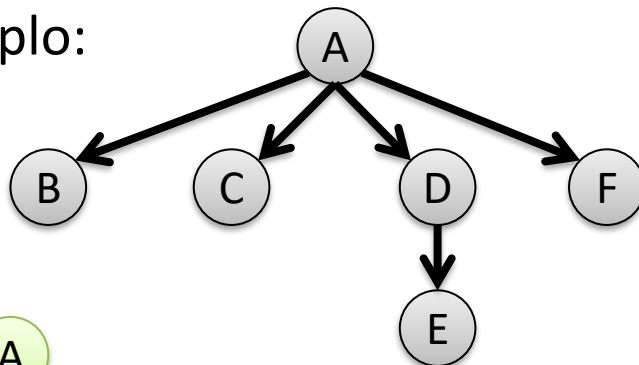
– Exemplo:



Introdução a Árvores

- **Conversão de uma floresta em árvore binária**

– Exemplo:

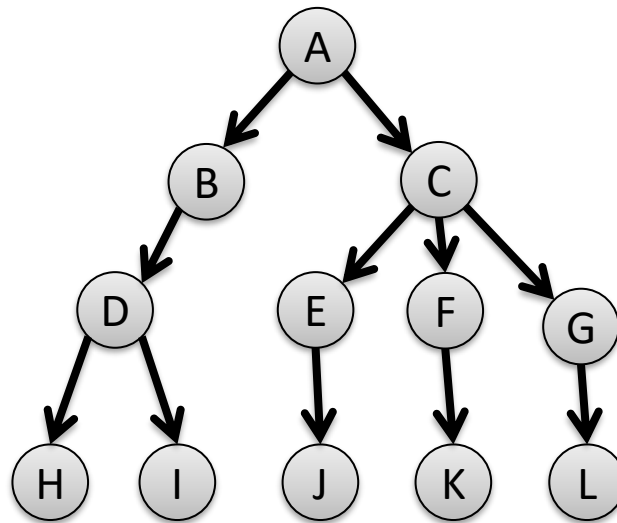


Árvore binária obtida!

Introdução a Árvores

- **Exercício 2:**

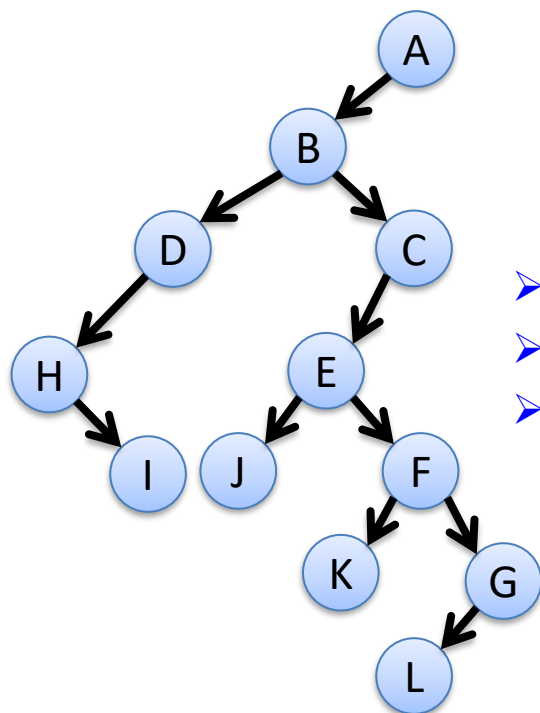
- Converta a árvore em árvore binária.
- Execute os três percursos na árvore binária resultante do item anterior.



Introdução a Árvores

- **Exercício 2:**

- Converta a árvore em árvore binária.
- Execute os três percursos na árvore binária resultante do item anterior.



➤ **Pré-ordem:**

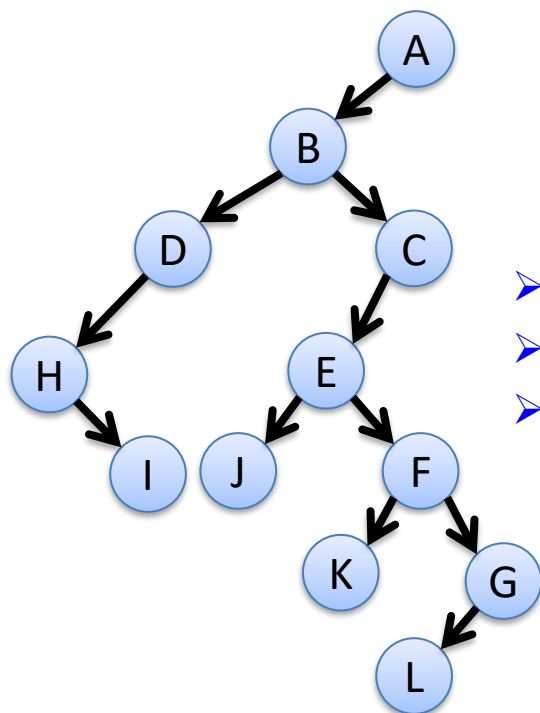
➤ **Em ordem simétrica:**

➤ **Pós-ordem:**

Introdução a Árvores

- **Exercício 2:**

- Converta a árvore em árvore binária.
- Execute os três percursos na árvore binária resultante do item anterior.



➤ **Pré-ordem:** A – B – D – H – I – C – E – J – F – K – G – L

➤ **Em ordem simétrica:** H – I – D – B – J – E – K – F – L – G – C – A

➤ **Pós-ordem:** I – H – D – J – K – L – G – F – E – C – B – A

Introdução a Árvores

FIM