
ALGORITMOS EM GRAFOS

Bacharelado em Sistemas da Informação

Prof. Marco André Abud Kappel

Aula 8 – Árvores AVL

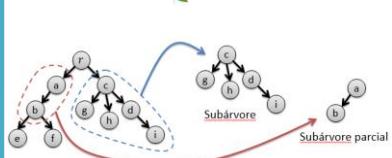
Árvores Balanceadas

- Nas últimas aulas:

Grafos



Árvores



Pré-ordem

Em ordem simétrica:

Pós-ordem

Árvores Binárias de Busca

10 3 1 13 11 15

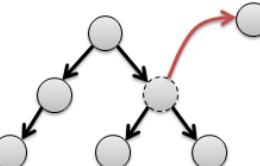
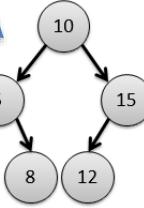
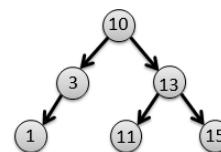


ABB Balanceadas

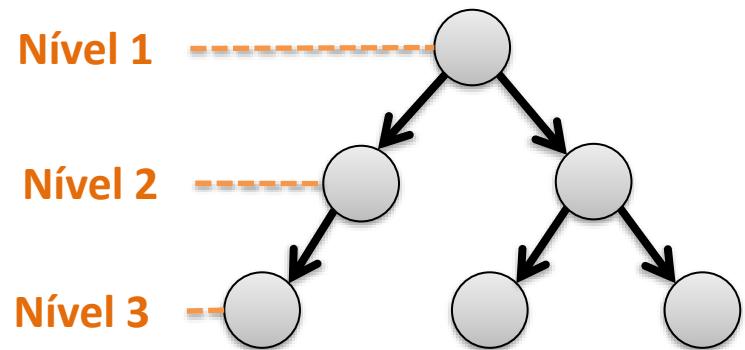
Hoje

Árvores AVL

Árvores Rubro-Negras

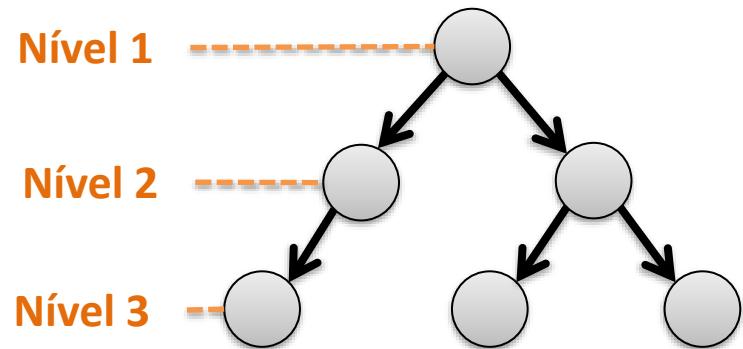
Árvores Binárias de Busca

- Análise de complexidade
 - O objetivo é identificar o **custo de acesso** a uma chave desejada.
 - A análise de **complexidade** da busca numa ABB é simples:
 - O tempo gasto em **cada nível** é $O(1)$.
 - Neste caso, qual será o **maior número de níveis** necessários percorrer para encontrar um elemento?



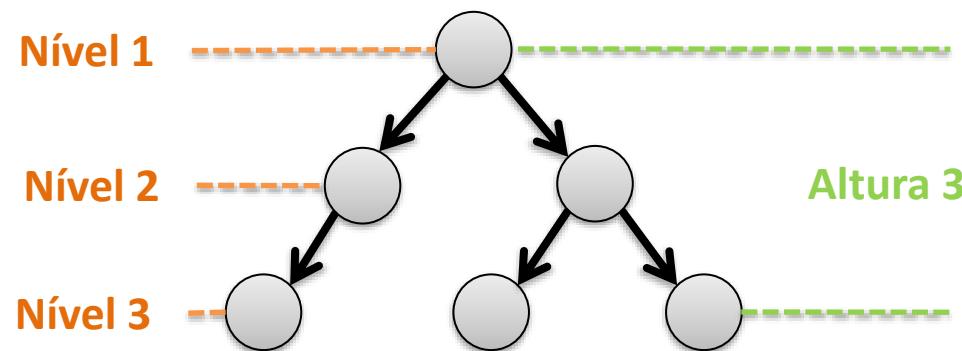
Árvores Binárias de Busca

- Análise de complexidade
 - O objetivo é identificar o **custo de acesso** a uma chave desejada.
 - A análise de **complexidade** da busca numa ABB é simples:
 - O tempo gasto em **cada nível** é $O(1)$.
 - Neste caso, qual será o **maior número de níveis** necessários percorrer para encontrar um elemento?
 - O maior número de níveis será igual à **altura** da árvore.



Árvores Binárias de Busca

- **Análise de complexidade**
 - Para determinar a **complexidade** do algoritmo de busca em uma ABB, basta observar que, em cada passo, é efetuado um **número constante de operações**.
 - O **número de operações** será, exatamente, o **nível** em que o elemento se encontra.
 - No pior caso, o elemento está em um **nível igual à altura da árvore**.

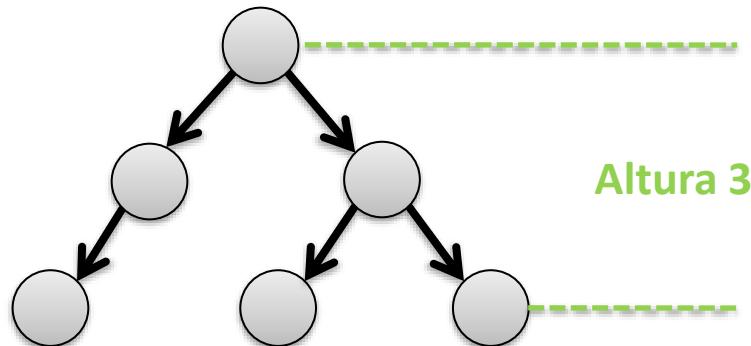


Árvores Binárias de Busca

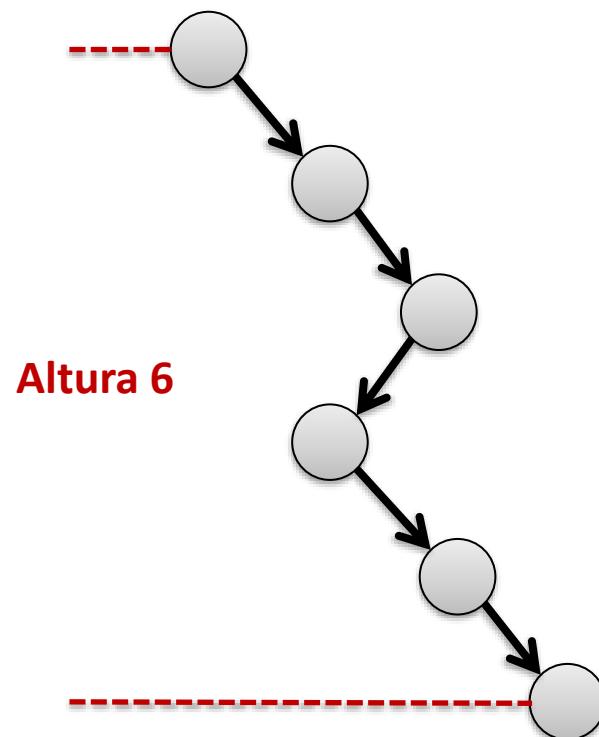
- **Análise de complexidade**
 - Ou seja, a **complexidade da busca** em uma ABB é $O(h)$.
 - A eficiência do algoritmo será **proporcional à altura da árvore**.
 - Portanto, é conveniente tentar uma **construção** da árvore de modo a obtê-la com **altura mínima**.
 - A melhor característica que uma árvore pode ter, então, é ser **completa**.

Árvores Binárias de Busca

- Análise de complexidade
 - Por exemplo:



Altura 3



Altura 6

Árvores Binárias de Busca

- Análise de complexidade
 - A **complexidade** da busca em uma ABB será $O(h)$.
 - A altura de uma **árvore completa** com n nós será:



h	n_{MAX}
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	127
8	255
9	511
10	1023
11	2047
12	4095
13	8191
14	16383
15	32767
16	65535
17	131071
18	262143
19	524287
20	1048575

Árvores Binárias de Busca

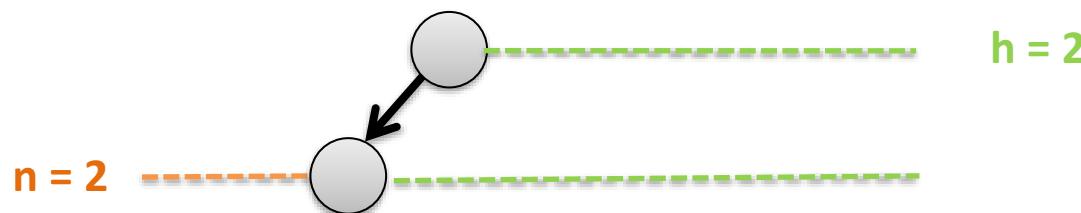
- Análise de complexidade
 - A **complexidade** da busca em uma ABB será $O(h)$.
 - A altura de uma **árvore completa** com n nós será:



h	n_{MAX}
1	1

Árvores Binárias de Busca

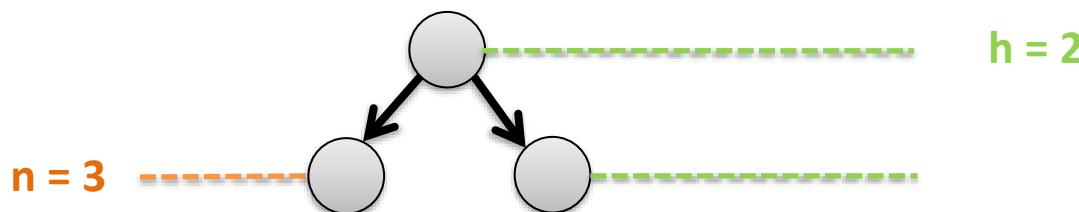
- Análise de complexidade
 - A **complexidade** da busca em uma ABB será $O(h)$.
 - A altura de uma **árvore completa** com n nós será:



h	n_{MAX}
1	1
2	

Árvores Binárias de Busca

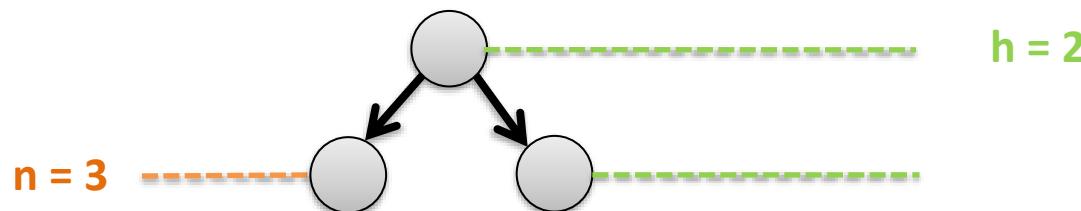
- Análise de complexidade
 - A **complexidade** da busca em uma ABB será $O(h)$.
 - A altura de uma **árvore completa** com n nós será:



h	n_{MAX}
1	1
2	

Árvores Binárias de Busca

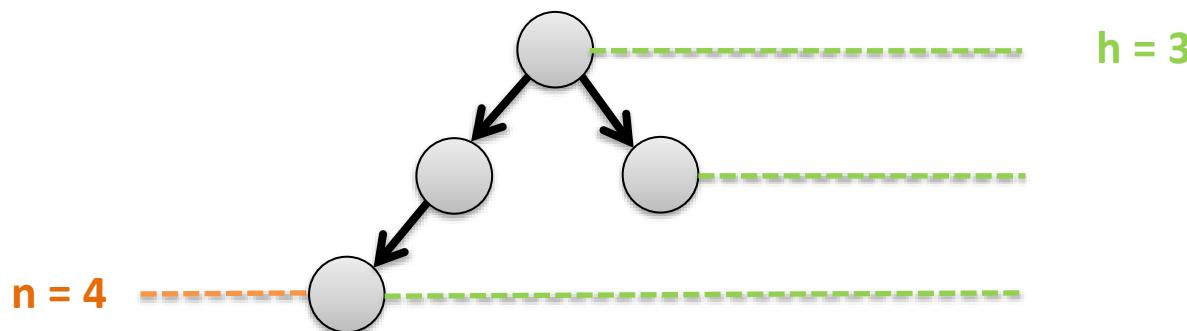
- Análise de complexidade
 - A **complexidade** da busca em uma ABB será $O(h)$.
 - A altura de uma **árvore completa** com n nós será:



h	n_{MAX}
1	1
2	3

Árvores Binárias de Busca

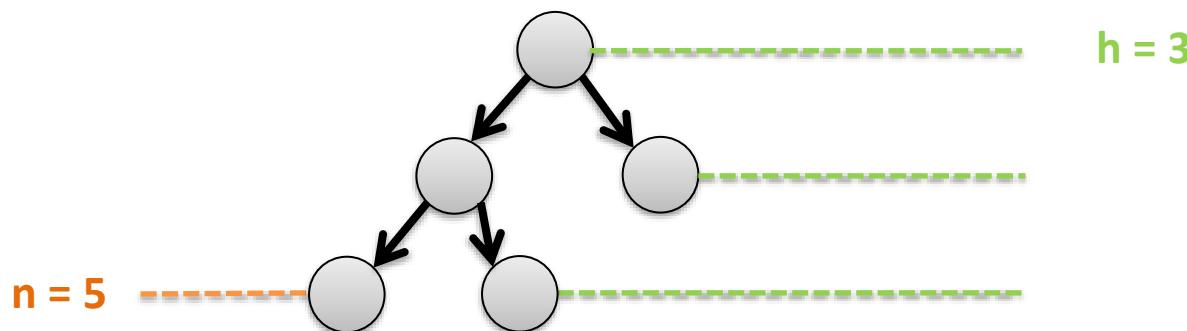
- Análise de complexidade
 - A **complexidade** da busca em uma ABB será $O(h)$.
 - A altura de uma **árvore completa** com n nós será:



h	n_{MAX}
1	1
2	3
3	

Árvores Binárias de Busca

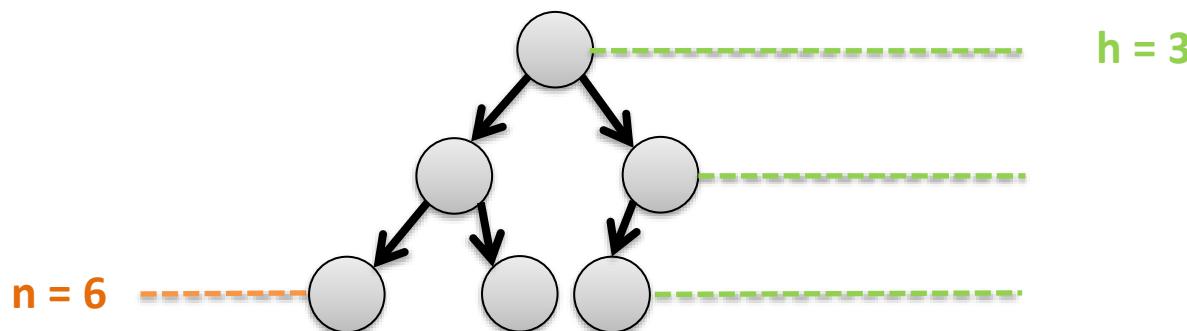
- Análise de complexidade
 - A **complexidade** da busca em uma ABB será $O(h)$.
 - A altura de uma **árvore completa** com n nós será:



h	n_{MAX}
1	1
2	3
3	

Árvores Binárias de Busca

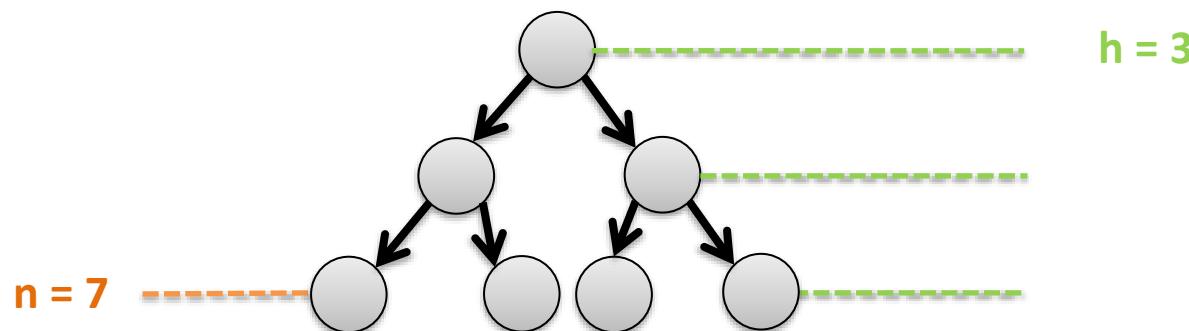
- Análise de complexidade
 - A **complexidade** da busca em uma ABB será $O(h)$.
 - A altura de uma **árvore completa** com n nós será:



h	n_{MAX}
1	1
2	3
3	

Árvores Binárias de Busca

- Análise de complexidade
 - A **complexidade** da busca em uma ABB será $O(h)$.
 - A altura de uma **árvore completa** com n nós será:



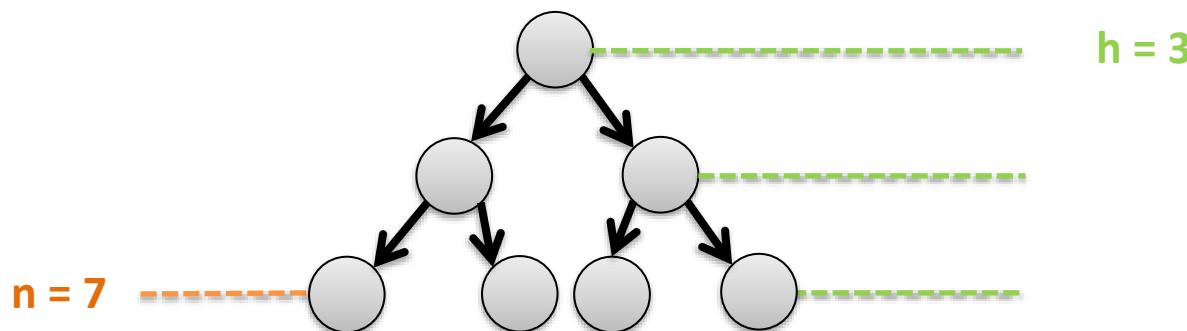
h	n_{MAX}
1	1
2	3
3	

Árvores Binárias de Busca

- Análise de complexidade

- A **complexidade** da busca em uma ABB será $O(h)$.

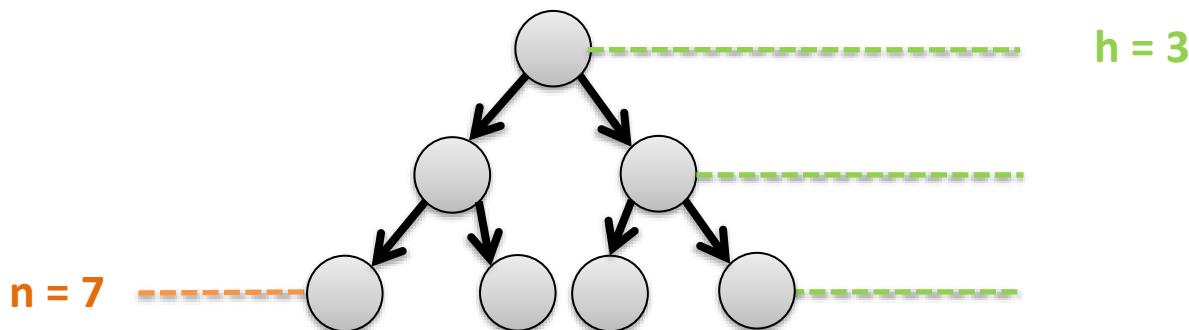
- A altura de uma **árvore completa** com n nós será:



h	n_{MAX}
1	1
2	3
3	7

Árvores Binárias de Busca

- Análise de complexidade
 - A **complexidade** da busca em uma ABB será $O(h)$.
 - A altura de uma **árvore completa** com n nós será:



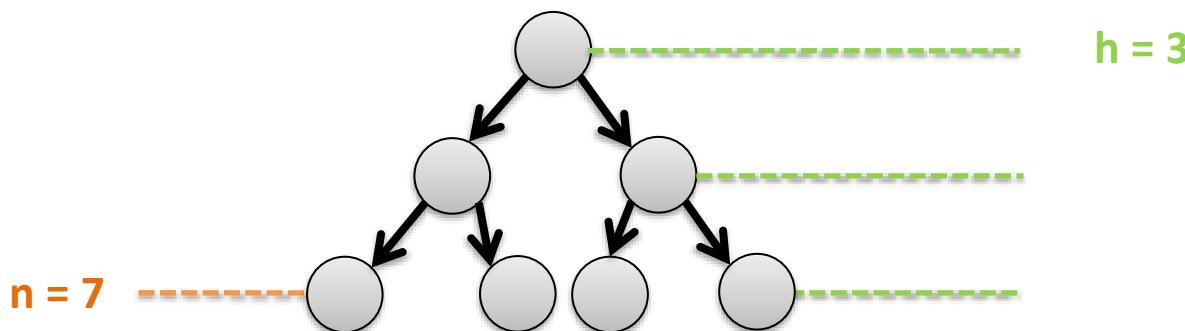
h	n_{MAX}
1	1
2	3
3	7
4	?

Árvores Binárias de Busca

- Análise de complexidade

- A **complexidade** da busca em uma ABB será $O(h)$.

- A altura de uma **árvore completa** com n nós será:



$$n_{MAX} = 2^h - 1$$

h	n_{MAX}
1	1
2	3
3	7
4	?

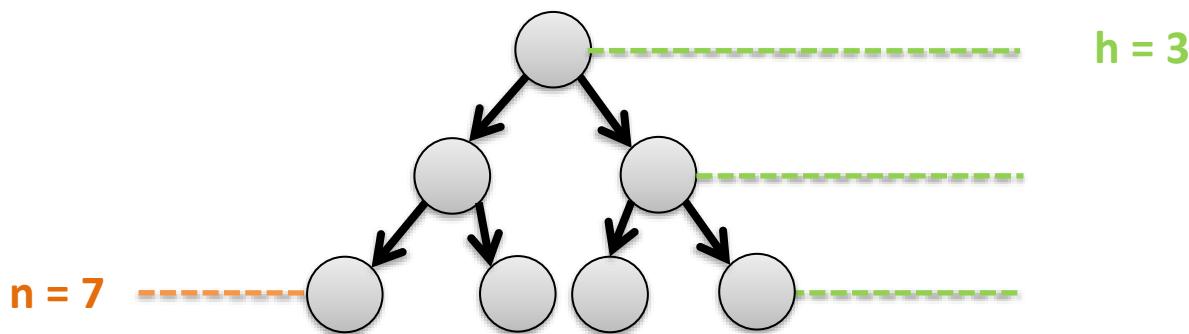
O máximo de nós n em uma ABB completa de altura h é a soma do número de nós a cada nível!

Árvores Binárias de Busca

- Análise de complexidade

- A **complexidade** da busca em uma ABB será $O(h)$.

- A altura de uma **árvore completa** com n nós será:



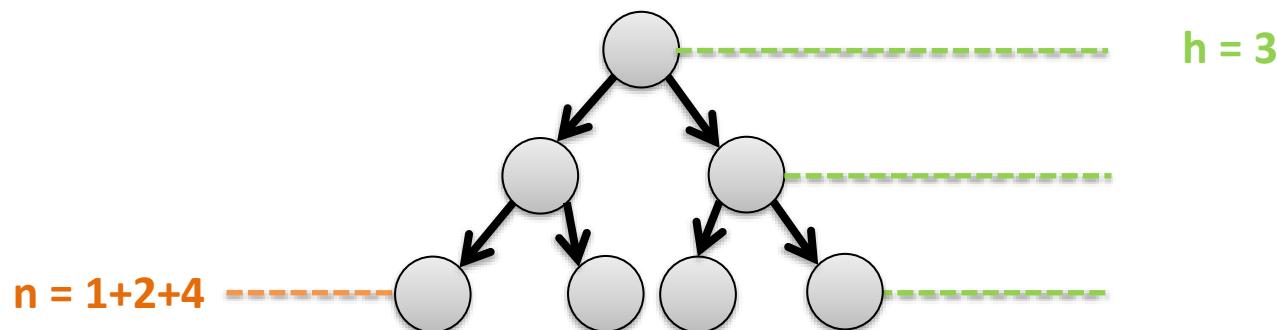
$$n_{MAX} = 2^h - 1$$

h	n_{MAX}
1	1
2	3
3	7
4	15

O máximo de nós n em uma ABB completa de altura h é a soma do número de nós a cada nível!

Árvores Binárias de Busca

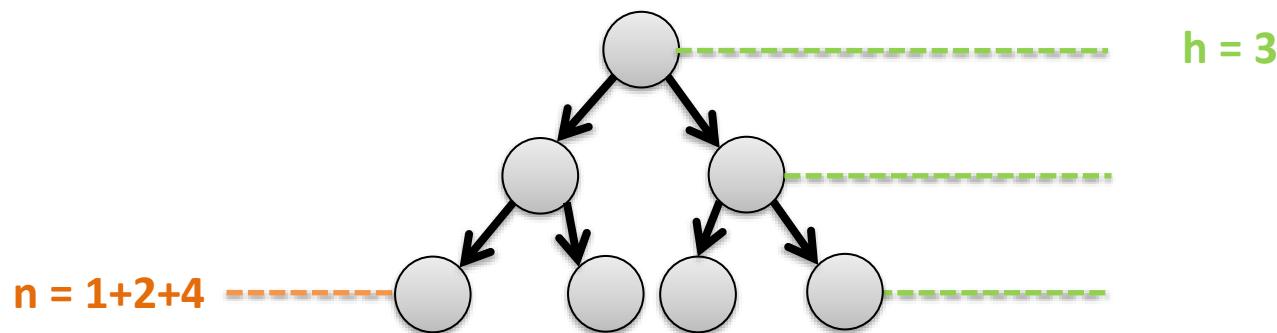
- Análise de complexidade



$$n_{MAX} = 2^h - 1$$

Árvores Binárias de Busca

- Análise de complexidade

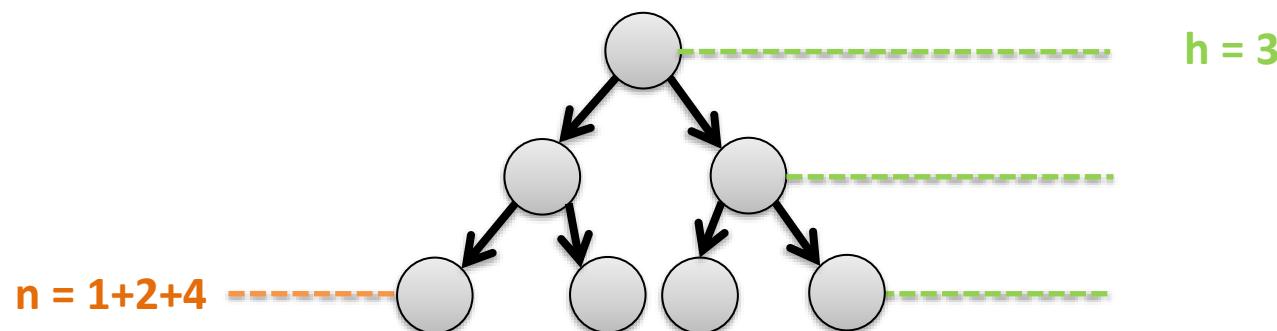


$$n_{MAX} = 2^h - 1$$

$$n_{MAX} + 1 = 2^h$$

Árvores Binárias de Busca

- Análise de complexidade



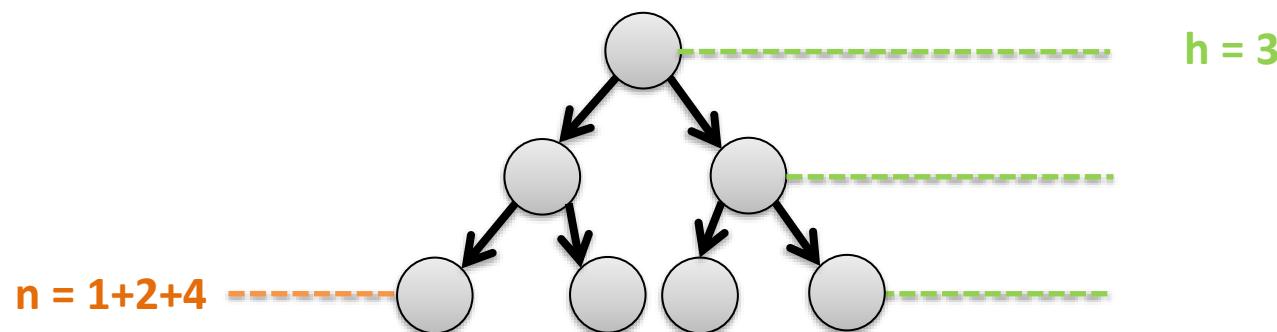
$$n_{MAX} = 2^h - 1$$

$$n_{MAX} + 1 = 2^h$$

$$\log_2(n_{MAX} + 1) = \log_2(2^h)$$

Árvores Binárias de Busca

- Análise de complexidade



$$n_{MAX} = 2^h - 1$$

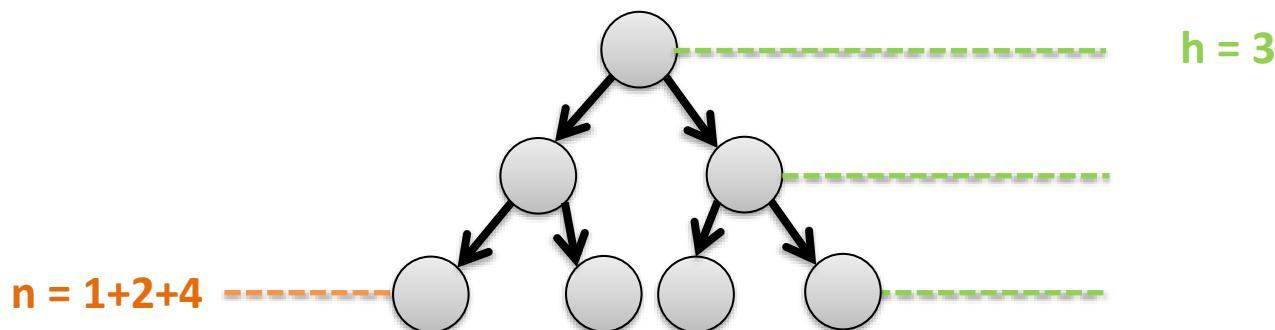
$$n_{MAX} + 1 = 2^h$$

$$\log_2(n_{MAX} + 1) = \log_2(2^h)$$

$$\log_2(n_{MAX} + 1) = h$$

Árvores Binárias de Busca

- Análise de complexidade



$$n_{MAX} = 2^h - 1$$

$$n_{MAX} + 1 = 2^h$$

$$\log_2(n_{MAX} + 1) = \log_2(2^h)$$

$$\log_2(n_{MAX} + 1) = h$$

$$h = \log_2(n_{MAX} + 1)$$

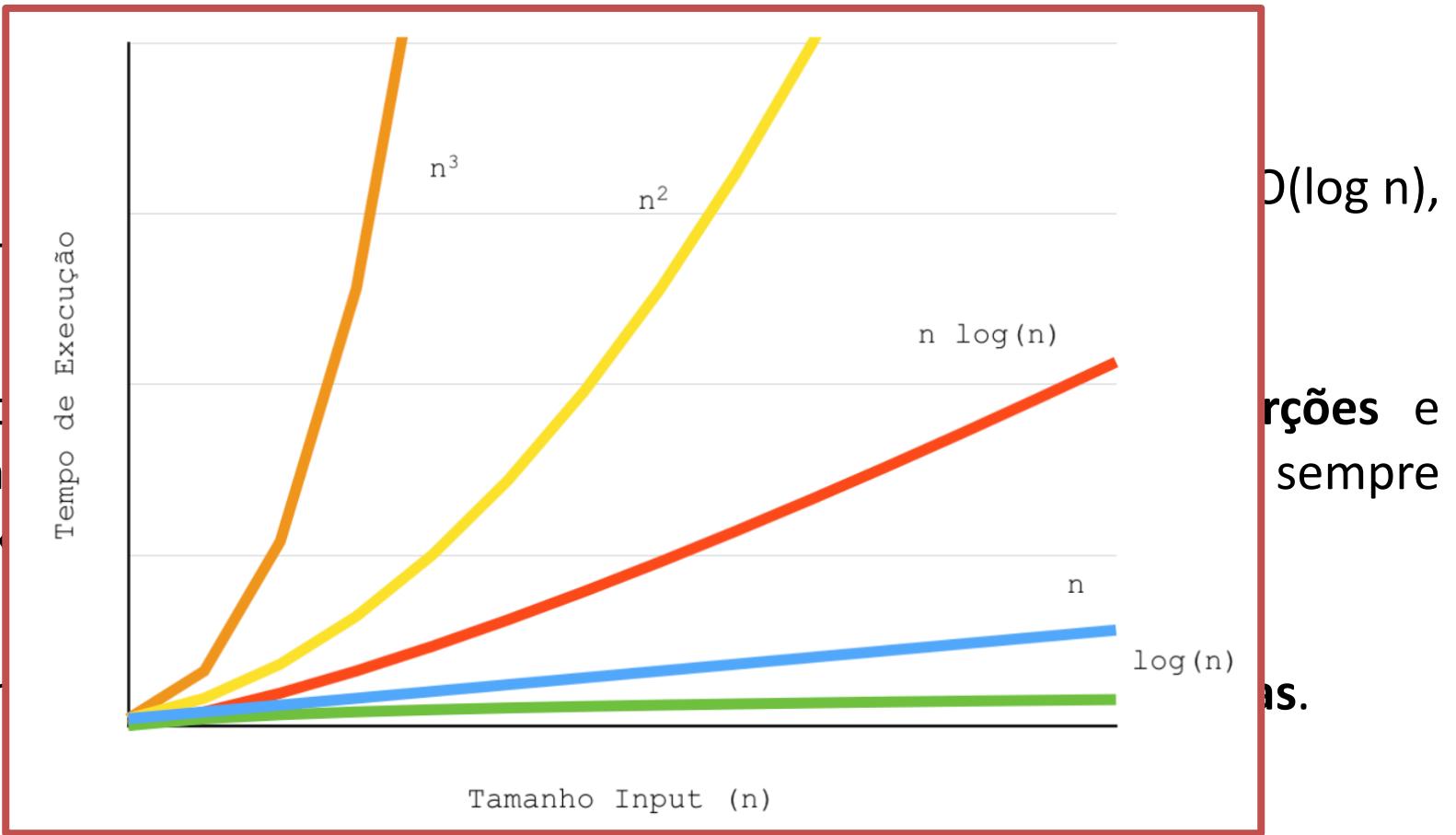
Altura máxima de uma árvore completa!

Árvores Binárias de Busca

- **Análise de complexidade**
 - Assim, a complexidade da busca em uma ABB completa será $O(\log n)$, muito melhor que $O(n)$.
 - Precisamos, então, de uma forma de controlar as **inserções e remoções** na árvore de maneira que ela se mantenha sempre próximo a uma árvore **completa**.
 - Com esse objetivo, começaremos a ver as **árvores balanceadas**.

Árvores Binárias de Busca

- Análise
 - Assinatura
 - Muitas operações
 - Preço da remoção
 - Próximo menor
 - Complexidade

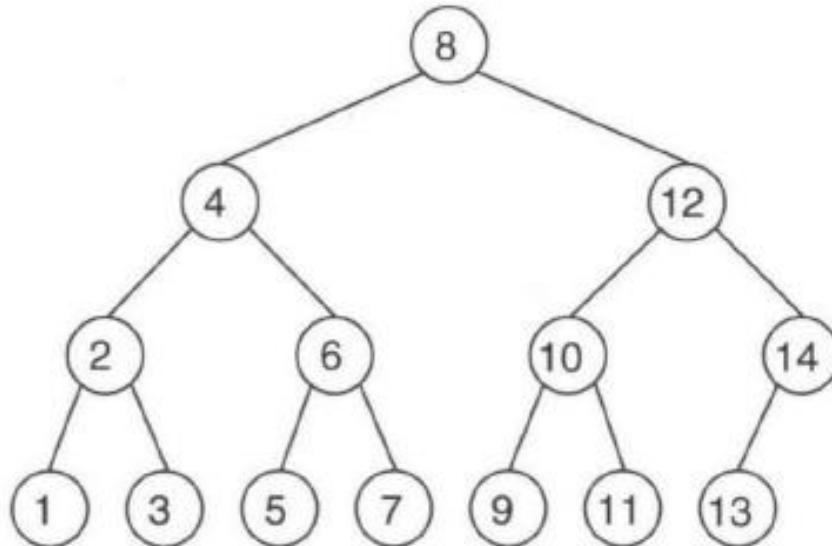


Árvores Binárias de Busca

- **Análise de complexidade**
 - Assim, a complexidade da busca em uma ABB completa será $O(\log n)$, muito melhor que $O(n)$.
 - Precisamos, então, de uma forma de controlar as **inserções e remoções** na árvore de maneira que ela se mantenha sempre próximo a uma árvore **completa**.
 - Com esse objetivo, começaremos a ver as **árvores balanceadas**.

Árvores Balanceadas

- **Buscando uma solução**
 - O ideal seria **remodelar** as árvores em **árvores completas** sempre que necessário.
 - Esse **rearranjo**, porém, pode ser **custoso** – $O(n)$.
 - Exemplo:



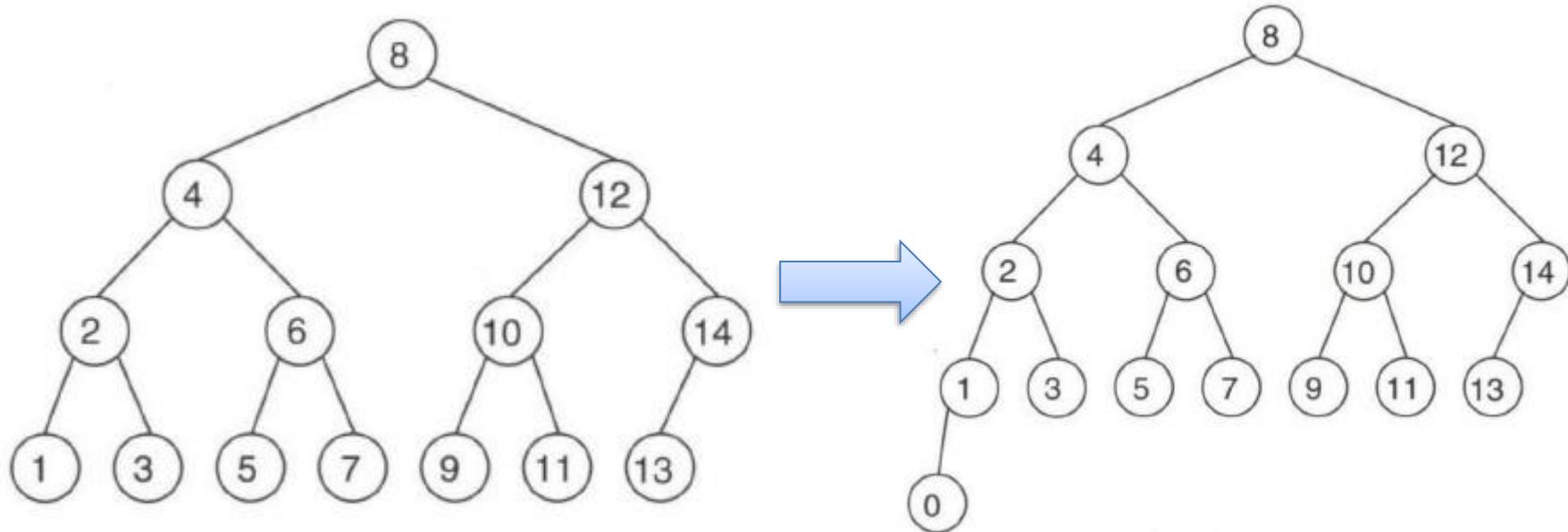
Inserir 15 → OK

Inserir 0 → ???

Árvores Balanceadas

- **Buscando uma solução**

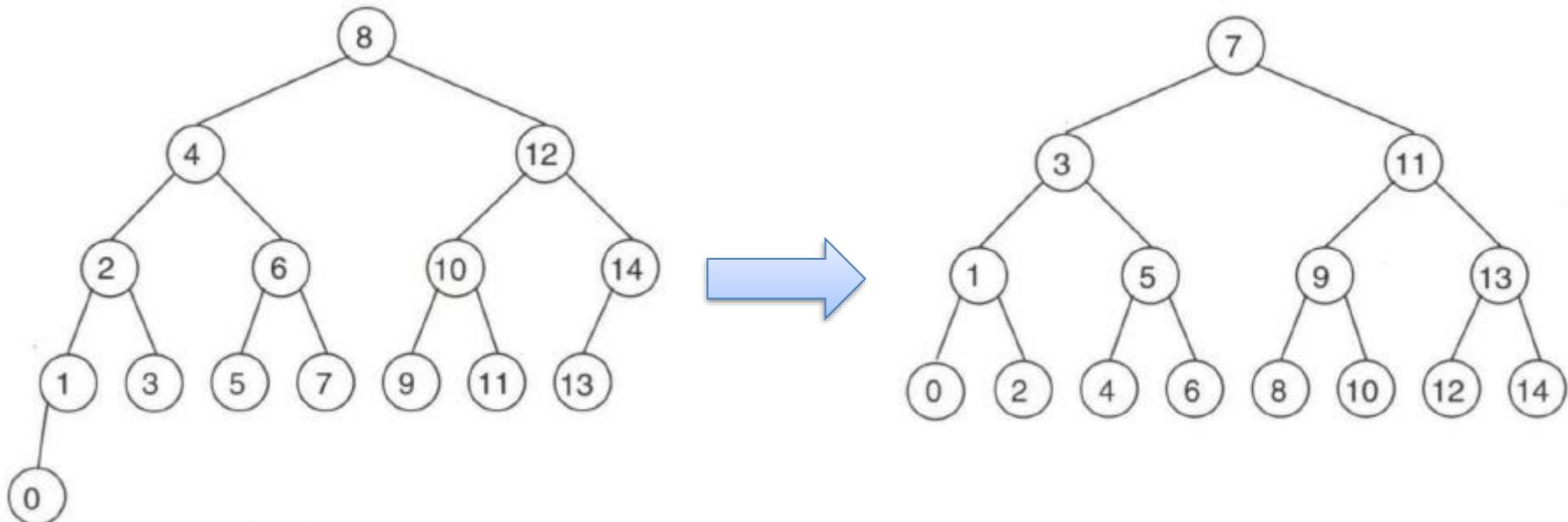
- Inserindo 0:



- A árvore **não é mais completa**. Vamos tentar rearranjar:

Árvores Balanceadas

- **Buscando uma solução**
 - Rearranjo para tornar a árvore completa:



- **Todos** os nós mudam de posição!!!

Árvores Balanceadas

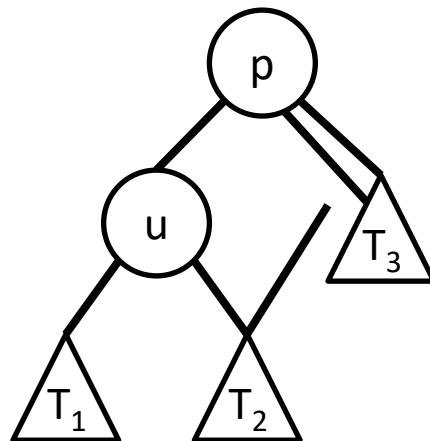
- **Balanceamento**
 - A solução é **balancear cada inserção!**
 - **Nova estratégia:** Diminuir a **diferença de altura** entre a subárvore à **esquerda** e a subárvore à **direita** de cada nó.
 - A maior parte das **árvores balanceadas (graduadas)** utilizam um **campo** a mais em cada nó: o **rank**.
 - O **rank** pode ser a **altura** do nó, ou algo **relacionado** a isso.
- De acordo com a **lógica** da árvore balanceada, serão efetuadas **rotações**.

Árvores Balanceadas

- **Rotações**
 - Operações de **reestruturação** usadas em **todas** as árvores balanceadas.
 - Quatro tipos:
 - I. Rotação à direita
 - II. Rotação à esquerda
 - III. Rotação dupla à direita
 - IV. Rotação dupla à esquerda

Árvores Balanceadas

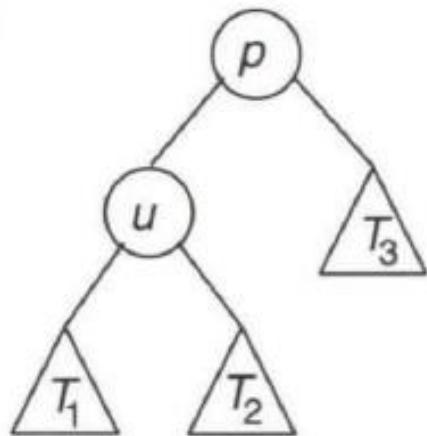
- Rotações
 - I. Rotação à direita (em p)



Árvores Balanceadas

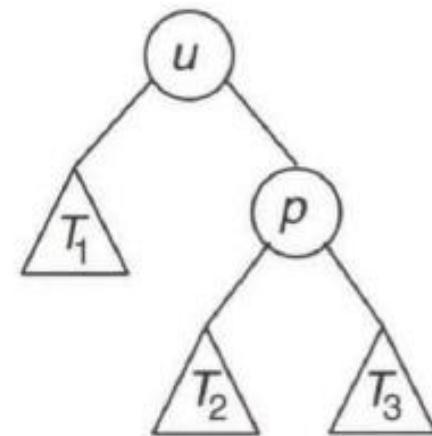
- Rotações
 - I. Rotação à direita (em p)

(a)



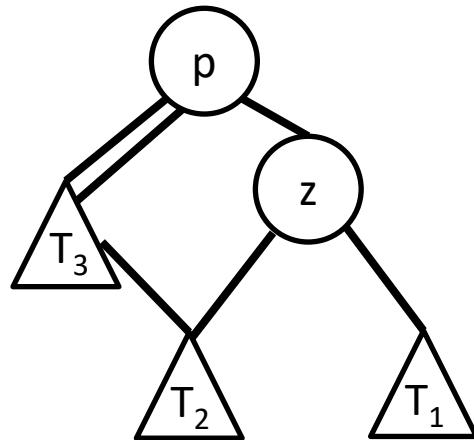
→
rotação
direita

(b)



Árvores Balanceadas

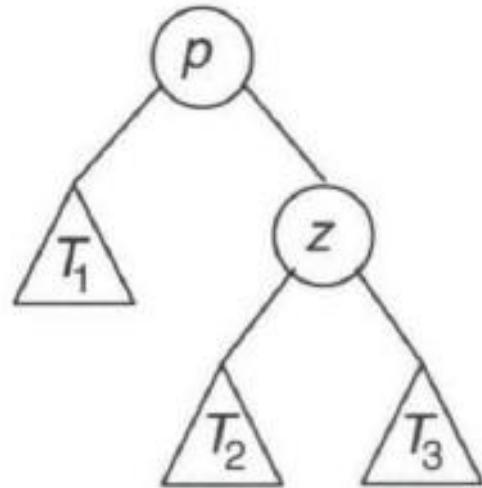
- **Rotações**
 - II. Rotação à esquerda (em p)



Árvores Balanceadas

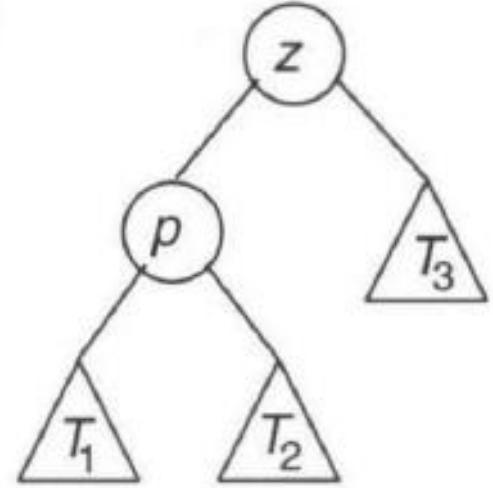
- Rotações
 - II. Rotação à esquerda (em p)

(c)



→
rotação
esquerda

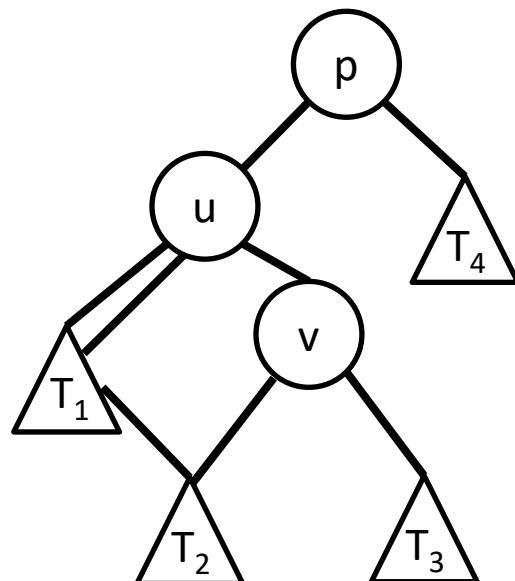
(d)



Árvores Balanceadas

- **Rotações**

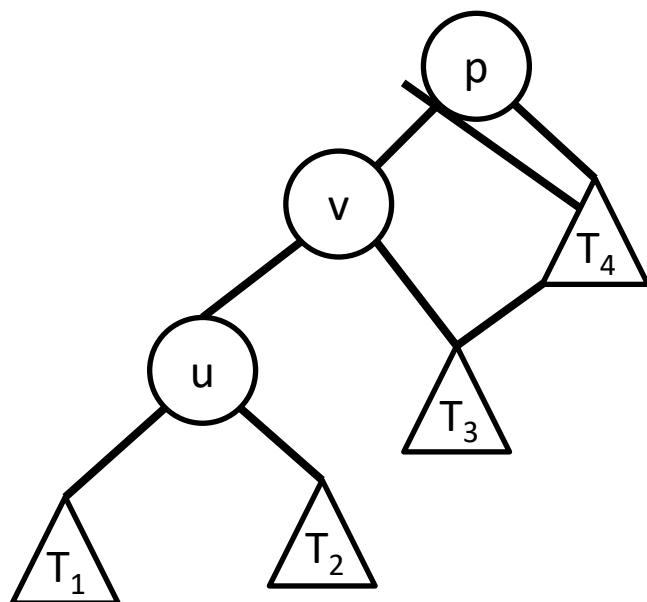
- III. Rotação dupla à direita (em p)



Obs: Também conhecida como rotação **esquerda-direita** (esquerda no filhoEsq e direita em p).

Árvores Balanceadas

- Rotações
 - III. Rotação dupla à direita (em p)

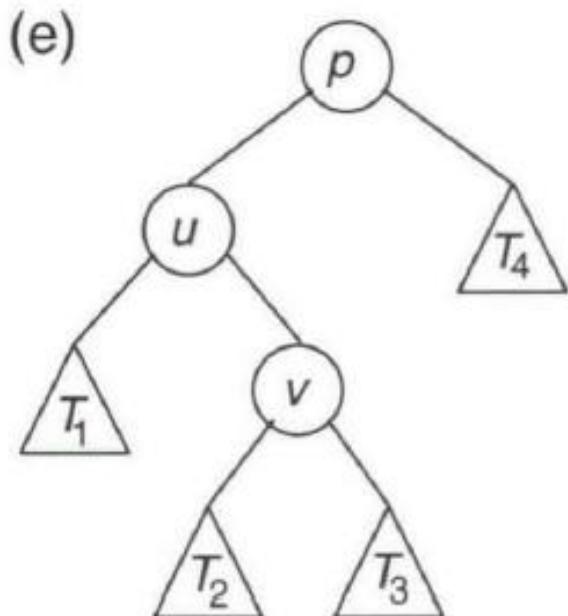


Obs: Também conhecida como rotação **esquerda-direita** (esquerda no filhoEsq e direita em p).

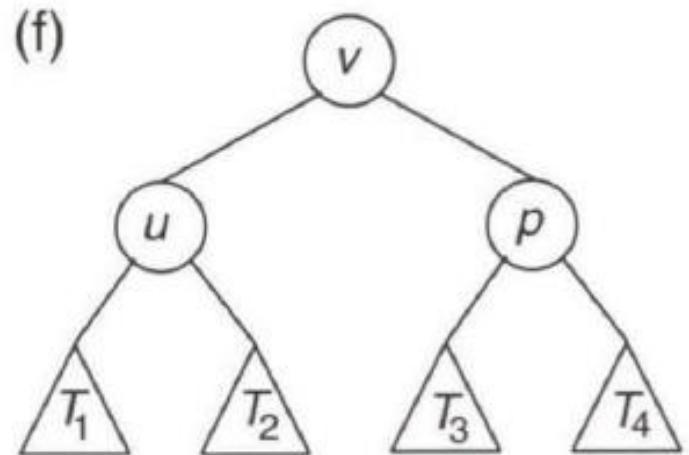
Árvores Balanceadas

- **Rotações**

- III. Rotação dupla à direita (em p)



→
rotação
dupla
direita

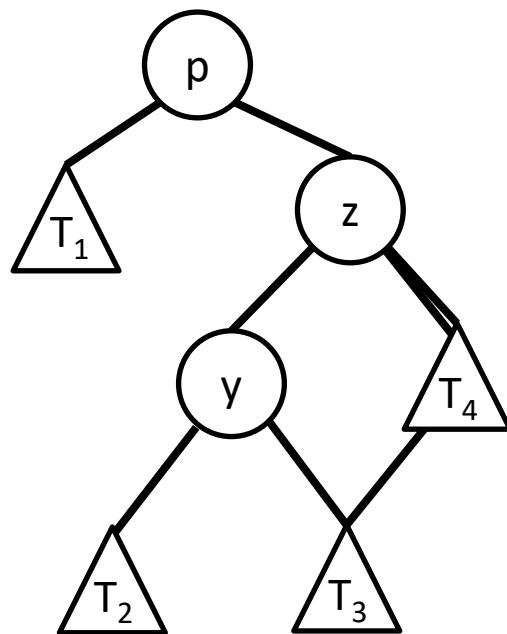


Obs: Também conhecida como rotação **esquerda-direita** (esquerda no filhoEsq e direita em p).

Árvores Balanceadas

- **Rotações**

- IV. Rotação dupla à esquerda (em p)

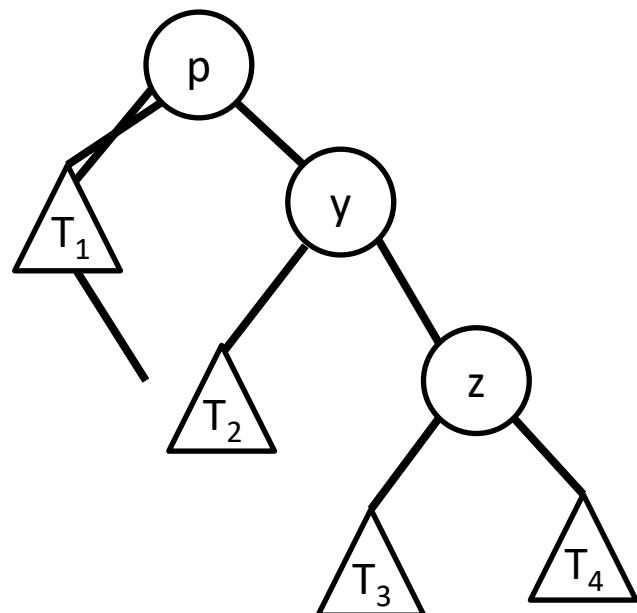


Obs: Também conhecida como rotação **direita-esquerda** (direita no filhoDir e esquerda em p).

Árvores Balanceadas

- **Rotações**

- IV. Rotação dupla à esquerda (em p)

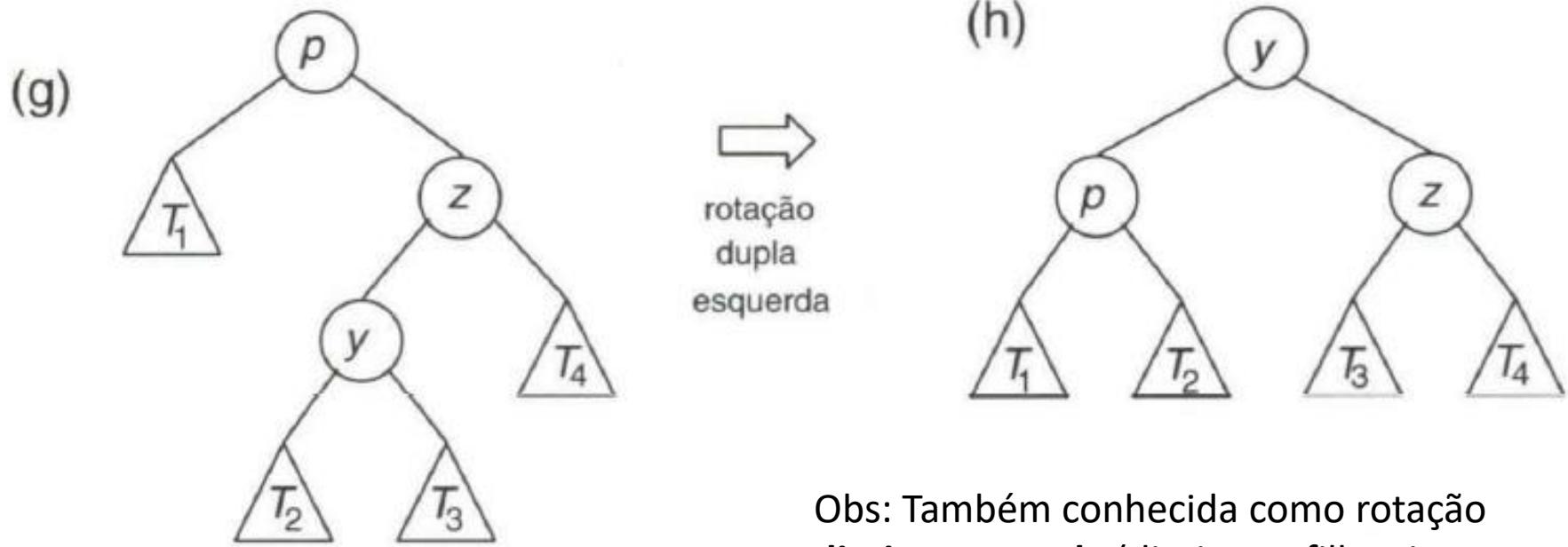


Obs: Também conhecida como rotação **direita-esquerda** (direita no filhoDir e esquerda em p).

Árvores Balanceadas

- **Rotações**

- IV. Rotação dupla à esquerda (em p)

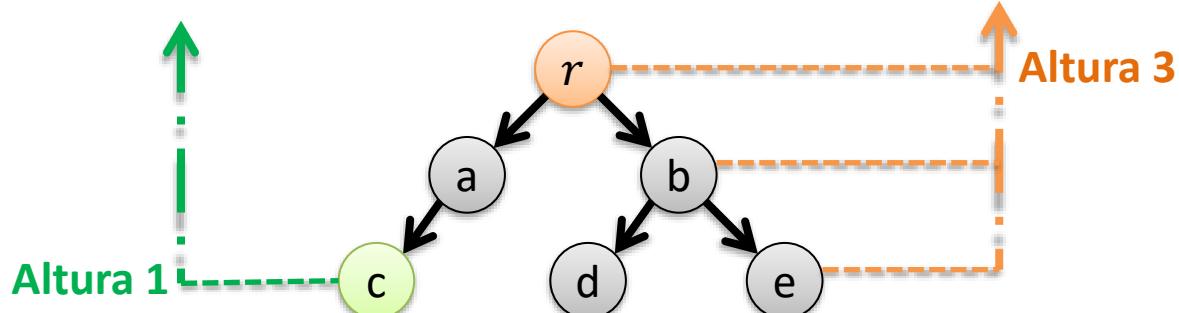


Árvores AVL

Árvores AVL

- **Introdução**

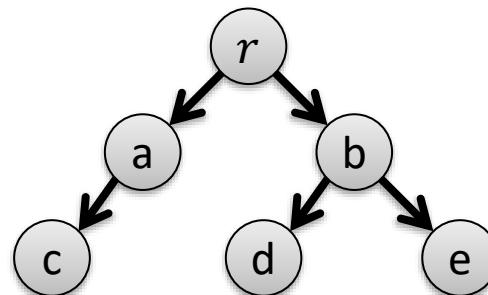
- É o tipo mais **antigo** de árvore balanceada (1962).
- A árvore foi nomeada por seus criadores: **Adelson-Velskii & Landis**.
- É uma árvore **graduada**, em que o **rank** é exatamente a **altura h** do nó.



Nó	Rank
r	3
a	2
b	2
c	1
d	1
e	1

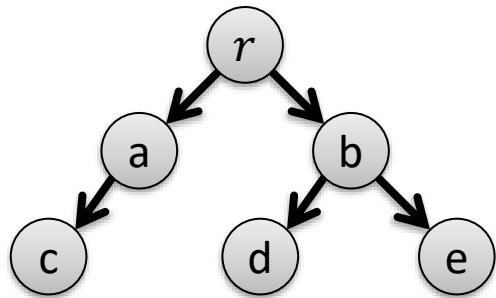
Árvores AVL

- **Definição**
 - **Regra:** Para qualquer nó v de uma árvore T , as alturas
 - $h_E(v)$: altura da subárvore esquerda de v
 - $h_D(v)$: altura da subárvore direita de vdiferem, em módulo, de até uma unidade:
$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$
 - Exemplo:



Árvores AVL

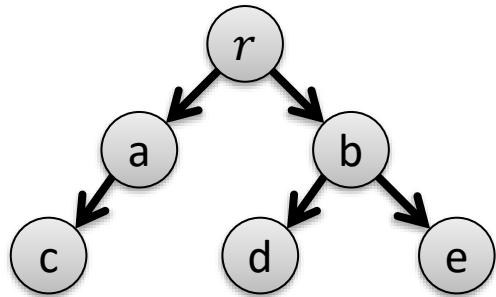
- **Definição**
 - Exemplo: Esta árvore é AVL?



Árvores AVL

- Definição
 - Exemplo: Esta árvore é AVL?

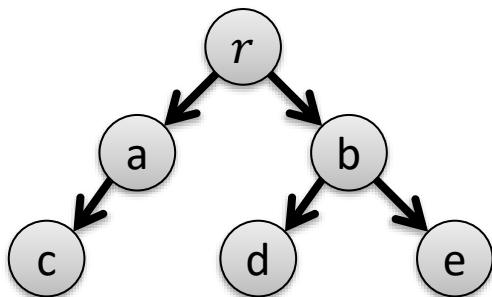
$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$



Árvores AVL

- Definição
 - Exemplo: Esta árvore é AVL?

$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$



nó r :

nó a :

nó b :

nó c :

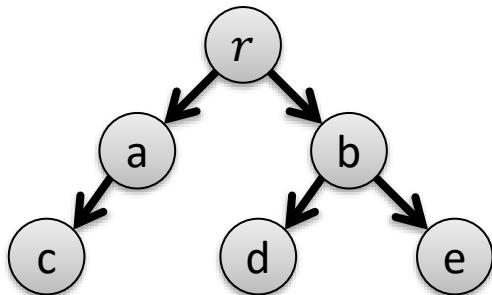
nó d :

nó e :

Árvores AVL

- Definição
 - Exemplo: Esta árvore é AVL?

$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$



nó r : $|h_E(r) - h_D(r)|$

nó a :

nó b :

nó c :

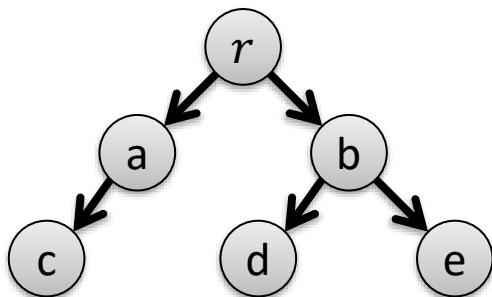
nó d :

nó e :

Árvores AVL

- Definição
 - Exemplo: Esta árvore é AVL?

$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$



nó r : $|h_E(r) - h_D(r)| = |2 - 2| = 0 < 2$

nó a :

nó b :

nó c :

nó d :

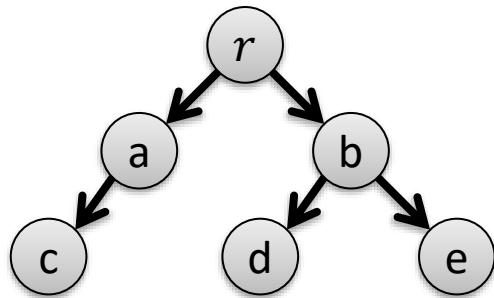
nó e :

Árvores AVL

- **Definição**

- Exemplo: Esta árvore é AVL?

$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$



$$\text{nó } r: |h_E(r) - h_D(r)| = |2 - 2| = 0 < 2$$

$$\text{nó } a: |h_E(a) - h_D(a)|$$

$\text{nó } b:$

$\text{nó } c:$

$\text{nó } d:$

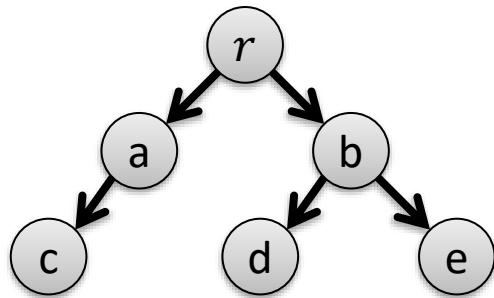
$\text{nó } e:$

Árvores AVL

- **Definição**

- Exemplo: Esta árvore é AVL?

$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$



nó r : $|h_E(r) - h_D(r)| = |2 - 2| = 0 < 2$

nó a : $|h_E(a) - h_D(a)| = |1 - 0| = 1 < 2$

nó b :

nó c :

nó d :

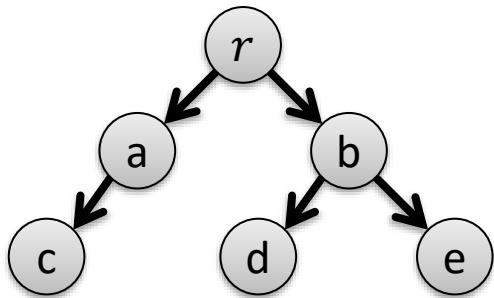
nó e :

Árvores AVL

- **Definição**

- Exemplo: Esta árvore é AVL?

$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$



$$\text{nó } r: |h_E(r) - h_D(r)| = |2 - 2| = 0 < 2$$

$$\text{nó } a: |h_E(a) - h_D(a)| = |1 - 0| = 1 < 2$$

$$\text{nó } b: |h_E(b) - h_D(b)|$$

nó c:

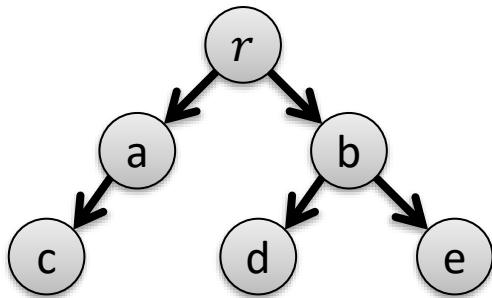
nó d:

nó e:

Árvores AVL

- Definição
 - Exemplo: Esta árvore é AVL?

$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$



$$\text{nó } r: |h_E(r) - h_D(r)| = |2 - 2| = 0 < 2$$

$$\text{nó } a: |h_E(a) - h_D(a)| = |1 - 0| = 1 < 2$$

$$\text{nó } b: |h_E(b) - h_D(b)| = |1 - 1| = 0 < 2$$

nó c:

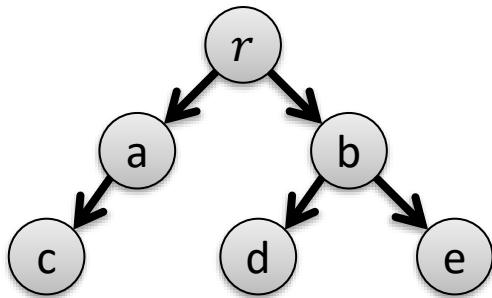
nó d:

nó e:

Árvores AVL

- Definição
 - Exemplo: Esta árvore é AVL?

$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$



nó r : $|h_E(r) - h_D(r)| = |2 - 2| = 0 < 2$

nó a : $|h_E(a) - h_D(a)| = |1 - 0| = 1 < 2$

nó b : $|h_E(b) - h_D(b)| = |1 - 1| = 0 < 2$

nó c : $|h_E(c) - h_D(c)|$

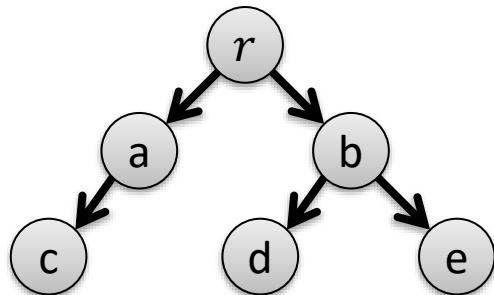
nó d :

nó e :

Árvores AVL

- **Definição**

- Exemplo: Esta árvore é AVL?



$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$

nó r : $|h_E(r) - h_D(r)| = |2 - 2| = 0 < 2$

nó a : $|h_E(a) - h_D(a)| = |1 - 0| = 1 < 2$

nó b : $|h_E(b) - h_D(b)| = |1 - 1| = 0 < 2$

nó c : $|h_E(c) - h_D(c)| = |0 - 0| = 0 < 2$

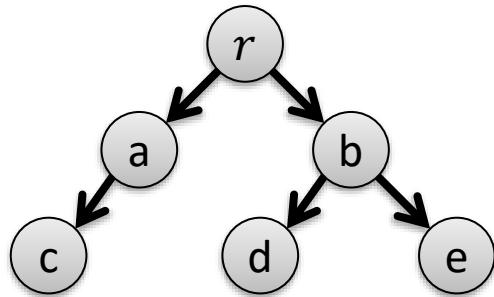
nó d :

nó e :

Árvores AVL

- **Definição**

- Exemplo: Esta árvore é AVL?



$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$

nó r : $|h_E(r) - h_D(r)| = |2 - 2| = 0 < 2$

nó a : $|h_E(a) - h_D(a)| = |1 - 0| = 1 < 2$

nó b : $|h_E(b) - h_D(b)| = |1 - 1| = 0 < 2$

nó c : $|h_E(c) - h_D(c)| = |0 - 0| = 0 < 2$

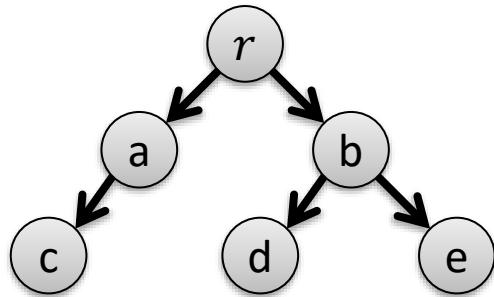
nó d : $|h_E(d) - h_D(d)|$

nó e :

Árvores AVL

- **Definição**

- Exemplo: Esta árvore é AVL?



$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$

nó r : $|h_E(r) - h_D(r)| = |2 - 2| = 0 < 2$

nó a : $|h_E(a) - h_D(a)| = |1 - 0| = 1 < 2$

nó b : $|h_E(b) - h_D(b)| = |1 - 1| = 0 < 2$

nó c : $|h_E(c) - h_D(c)| = |0 - 0| = 0 < 2$

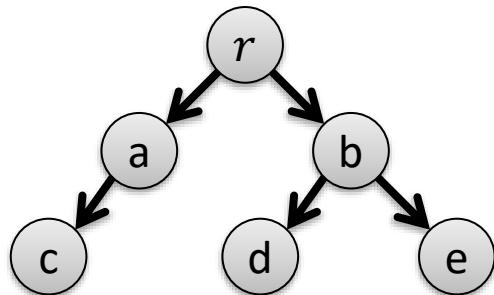
nó d : $|h_E(d) - h_D(d)| = |0 - 0| = 0 < 2$

nó e :

Árvores AVL

- **Definição**

- Exemplo: Esta árvore é AVL?



$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$

$$\text{nó } r: |h_E(r) - h_D(r)| = |2 - 2| = 0 < 2$$

$$\text{nó } a: |h_E(a) - h_D(a)| = |1 - 0| = 1 < 2$$

$$\text{nó } b: |h_E(b) - h_D(b)| = |1 - 1| = 0 < 2$$

$$\text{nó } c: |h_E(c) - h_D(c)| = |0 - 0| = 0 < 2$$

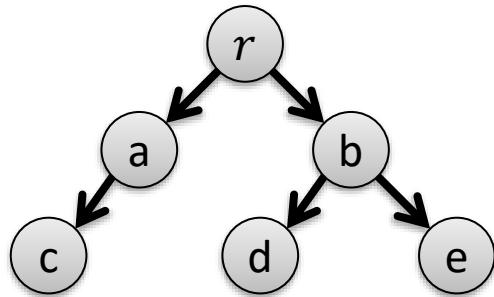
$$\text{nó } d: |h_E(d) - h_D(d)| = |0 - 0| = 0 < 2$$

$$\text{nó } e: |h_E(e) - h_D(e)|$$

Árvores AVL

- **Definição**

- Exemplo: Esta árvore é AVL?



$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$

nó r : $|h_E(r) - h_D(r)| = |2 - 2| = 0 < 2$

nó a : $|h_E(a) - h_D(a)| = |1 - 0| = 1 < 2$

nó b : $|h_E(b) - h_D(b)| = |1 - 1| = 0 < 2$

nó c : $|h_E(c) - h_D(c)| = |0 - 0| = 0 < 2$

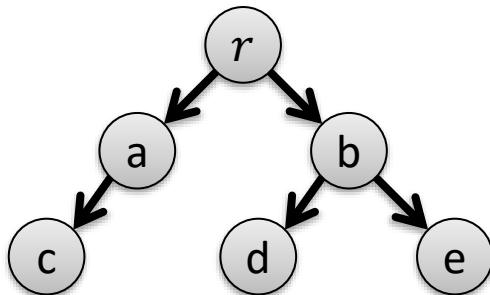
nó d : $|h_E(d) - h_D(d)| = |0 - 0| = 0 < 2$

nó e : $|h_E(e) - h_D(e)| = |0 - 0| = 0 < 2$

Árvores AVL

- Definição
 - Exemplo: Esta árvore é AVL? Sim

$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$



$$\text{nó } r: |h_E(r) - h_D(r)| = |2 - 2| = 0 < 2$$

$$\text{nó } a: |h_E(a) - h_D(a)| = |1 - 0| = 1 < 2$$

$$\text{nó } b: |h_E(b) - h_D(b)| = |1 - 1| = 0 < 2$$

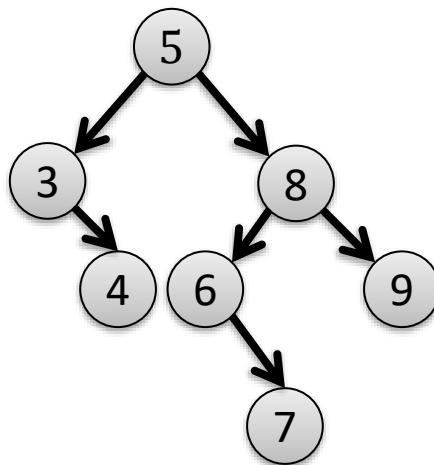
$$\text{nó } c: |h_E(c) - h_D(c)| = |0 - 0| = 0 < 2$$

$$\text{nó } d: |h_E(d) - h_D(d)| = |0 - 0| = 0 < 2$$

$$\text{nó } e: |h_E(e) - h_D(e)| = |0 - 0| = 0 < 2$$

Árvores AVL

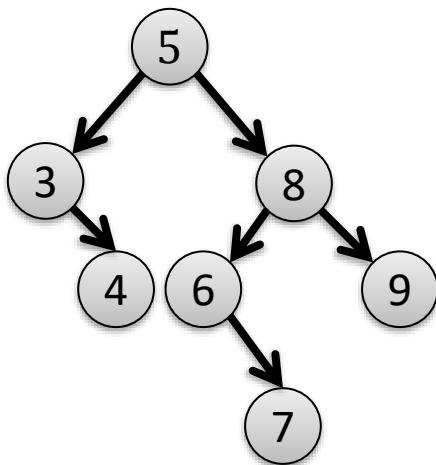
- **Exercício 1:**
 - Esta árvore é AVL?



Árvores AVL

- Exercício 1:
 - Esta árvore é AVL?

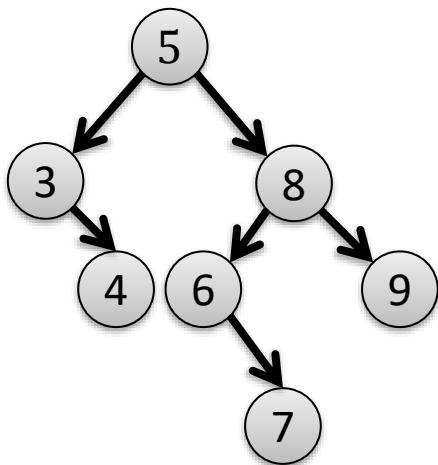
$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$



Árvores AVL

- Exercício 1:
 - Esta árvore é AVL? Sim

$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$



$$\text{nó 5: } |h_E(5) - h_D(5)| = |2 - 3| = 1 < 2$$

$$\text{nó 3: } |h_E(3) - h_D(3)| = |0 - 1| = 1 < 2$$

$$\text{nó 4: } |h_E(4) - h_D(4)| = |0 - 0| = 0 < 2$$

$$\text{nó 8: } |h_E(8) - h_D(8)| = |2 - 1| = 1 < 2$$

$$\text{nó 9: } |h_E(9) - h_D(9)| = |0 - 0| = 0 < 2$$

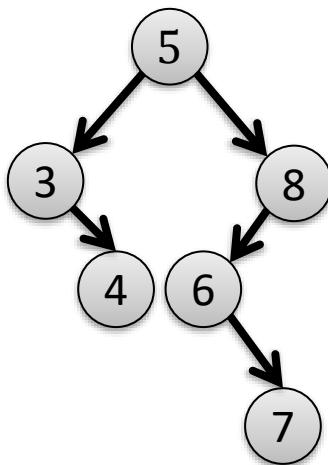
$$\text{nó 6: } |h_E(6) - h_D(6)| = |0 - 1| = 0 < 2$$

$$\text{nó 7: } |h_E(7) - h_D(7)| = |0 - 0| = 0 < 2$$

Árvores AVL

- Exercício 2:
 - Esta árvore é AVL?

$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$

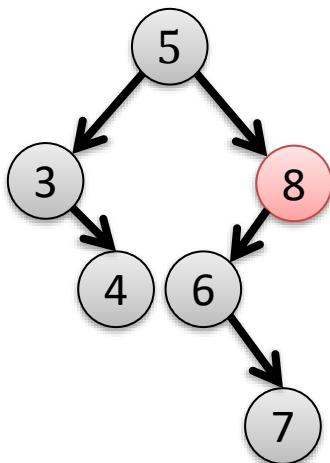


Árvores AVL

- **Exercício 2:**

- Esta árvore é AVL? **Não**

$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$



nó 5: $|h_E(5) - h_D(5)| = |2 - 3| = 1 < 2$

nó 3: $|h_E(3) - h_D(3)| = |0 - 1| = 1 < 2$

nó 4: $|h_E(4) - h_D(4)| = |0 - 0| = 0 < 2$

nó 8: $|h_E(8) - h_D(8)| = |2 - 0| = 2 < 2$

nó 6: $|h_E(6) - h_D(6)| = |0 - 1| = 0 < 2$

nó 7: $|h_E(7) - h_D(7)| = |0 - 0| = 0 < 2$

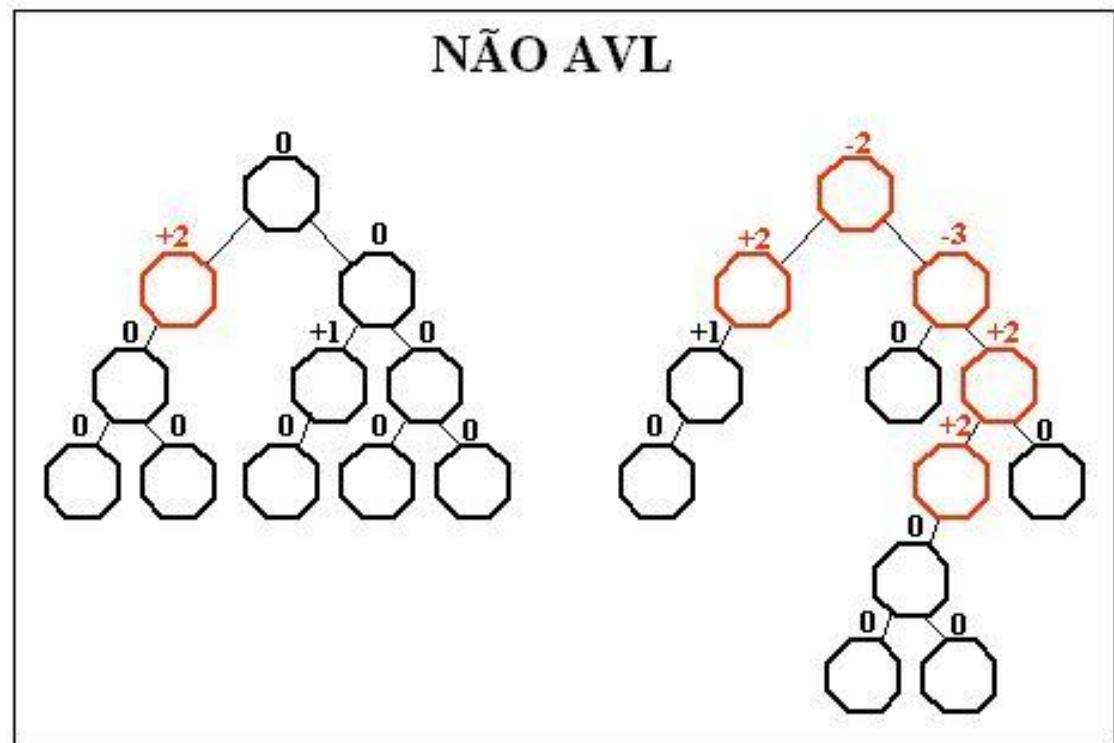
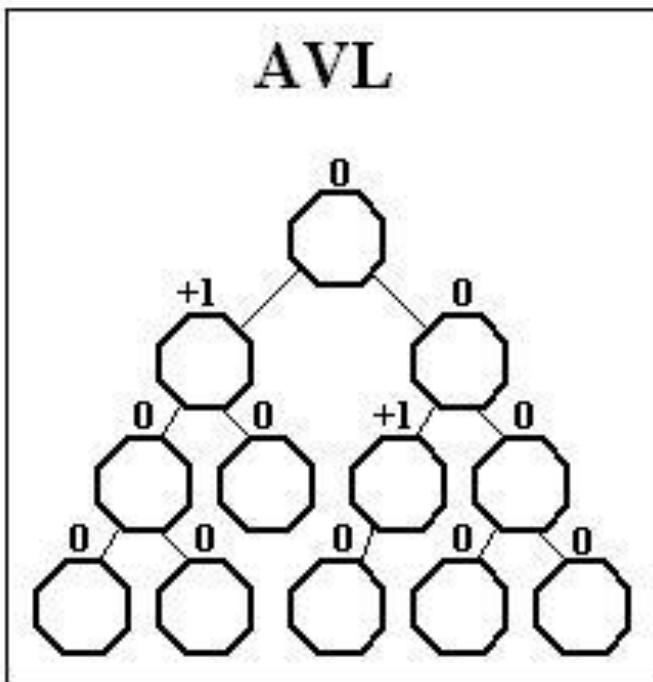
Árvores AVL

- **Fator de balanceamento**
 - O **fator de balanceamento** de um nó X em uma árvore binária é definido como sendo $h_E(X) - h_D(X)$, onde h_E e h_D são, respectivamente as **alturas das** subárvores esquerda e direita de X.
 - Para qualquer nó X em uma árvore AVL, o **fator de balanceamento** é -1, 0 ou 1.
 - Para avaliar o **fator de balanceamento** de um nó X, bastaria chamar uma função “balanço(X)”.

```
int balanco (TREENODE noh) {
    if (noh == NULL)
        return 0;
    return altura (noh->filhoEsq) - altura (noh->filhoDir);
}
```

Árvores AVL

- Fator de balanceamento
 - Exemplos:



Árvores AVL

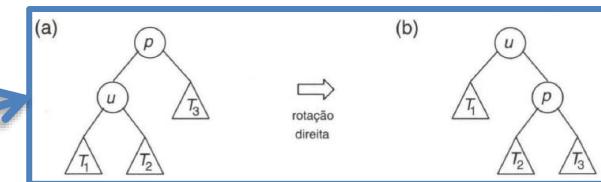
- **Inclusão na árvore AVL**
 - O processo de **inclusão** de um novo nó na árvore verificará a situação do grafo e **decidirá** quais **rotações** deverão ser aplicadas.
 - Algoritmo:
 1. Fazer a inserção em ABB simples.
 2. Atualizar a altura do nó atual:
$$\text{altura}(n) = \max(h_E(n), h_D(n)) + 1$$
 3. Calcular o balanço do nó atual:
$$\text{balanço}(n) = h_E(n) - h_D(n)$$
 4. Rebalancear o nó atual usando rotações de acordo com o caso:

Árvores AVL

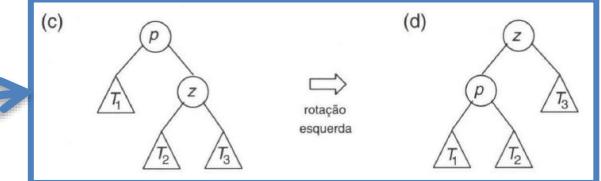
- Inclusão na árvore AVL

- Casos para rebalanceamento:

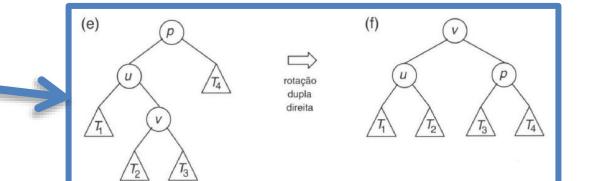
I. $\text{balanço}(n) > 1$ e novoNoh < n \rightarrow filhoEsq



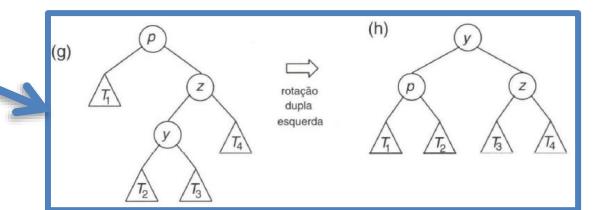
II. $\text{balanço}(n) < -1$ e novoNoh > n \rightarrow filhoDir



III. $\text{balanço}(n) > 1$ e novoNoh > n \rightarrow filhoEsq



IV. $\text{balanço}(n) < -1$ e novoNoh < n \rightarrow filhoDir



Árvores AVL

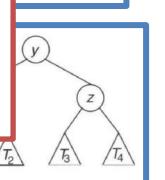
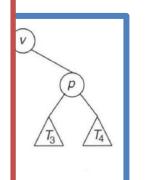
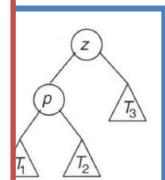
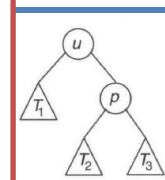
- Inclusão na árvore AVL

- Casos para rebalanceamento:

- I. balanço(r)



- II. balanço(r) **Atenção!** Tudo isso será feito dentro da mesma função de inclusão, ou seja, todos os nós ancestrais do nó inserido terão sua altura atualizada e serão rebalanceados
 - III. balanço(r)
 - IV. balanço(r) de acordo com o caso.

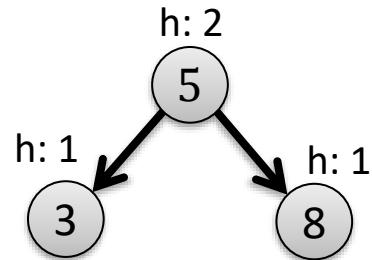


Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:

inserir(2)

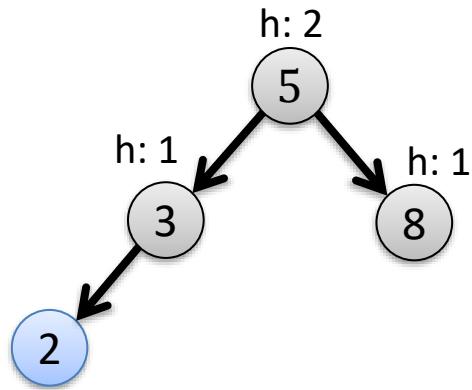


Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:

inserir(2)



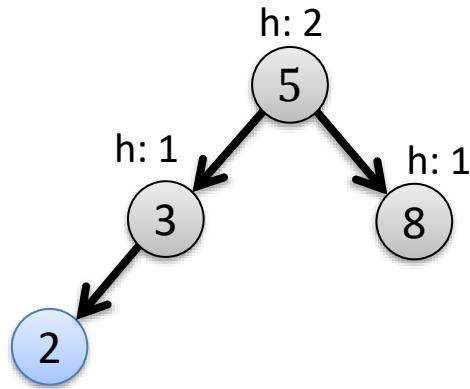
Inserir nó

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:

inserir(2)



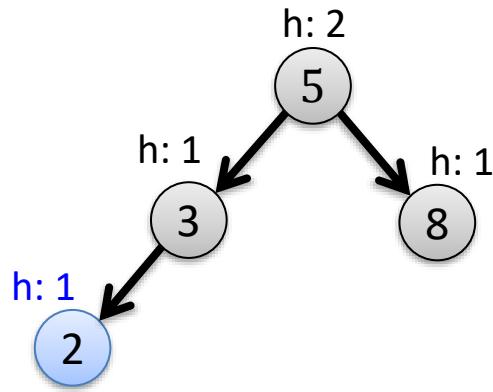
Inserir nó
Atualizar altura do nó atual

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:

inserir(2)



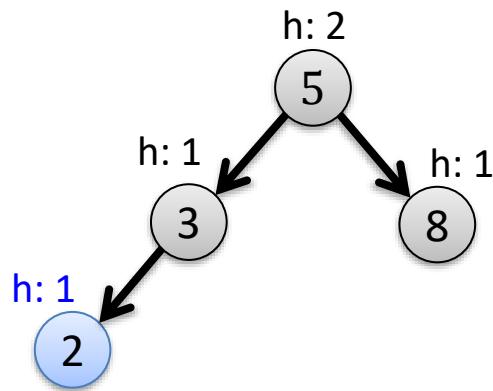
Inserir nó
Atualizar altura do nó atual

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:

inserir(2)



Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

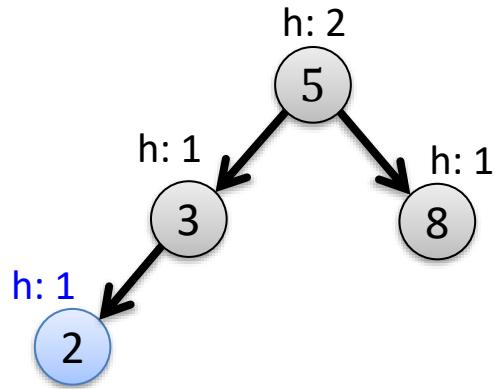
Calcular balanço:

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:

inserir(2)



Inserir nó

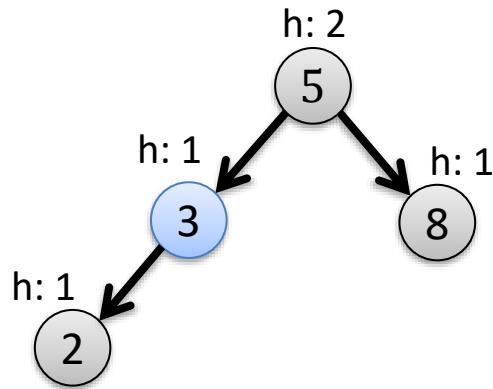
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



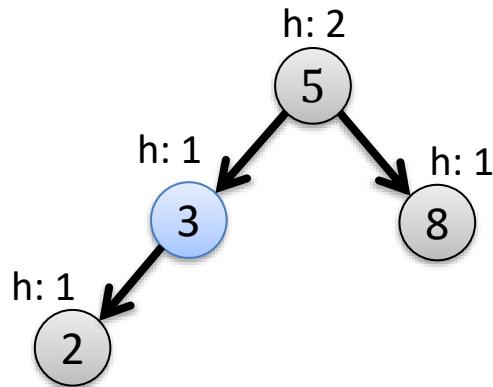
inserir(2)

Inserir nó
Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



inserir(2)

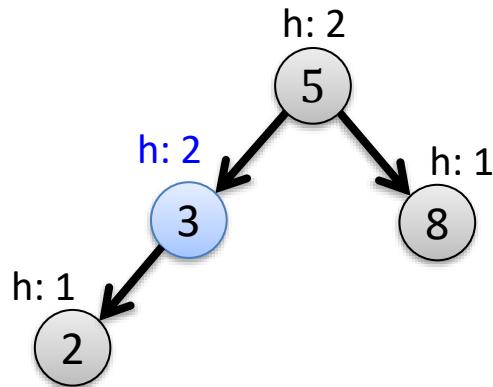
Inserir nó
Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



inserir(2)

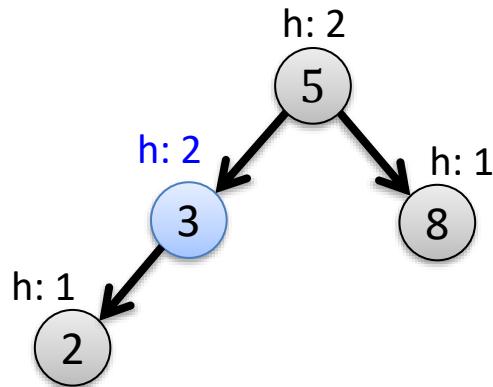
Inserir nó
Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



inserir(2)

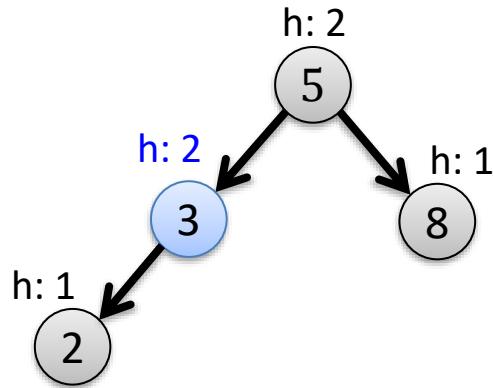
Inserir nó
Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço:

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



inserir(2)

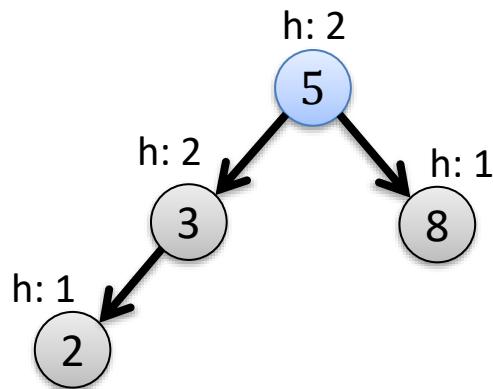
Inserir nó
Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $1 - 0 = 1$

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



inserir(2)

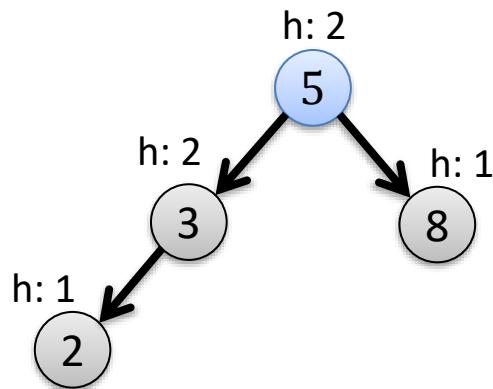
Inserir nó
Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $1 - 0 = 1$

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



inserir(2)

Inserir nó
Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

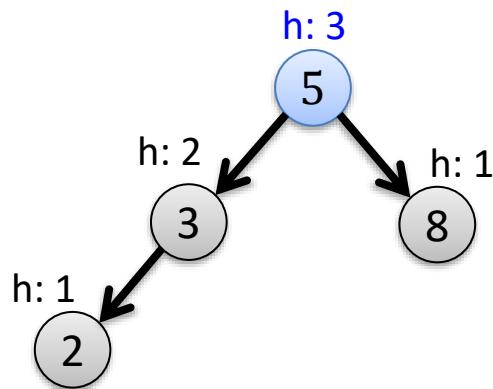
Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $1 - 0 = 1$

Atualizar altura do nó atual

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



inserir(2)

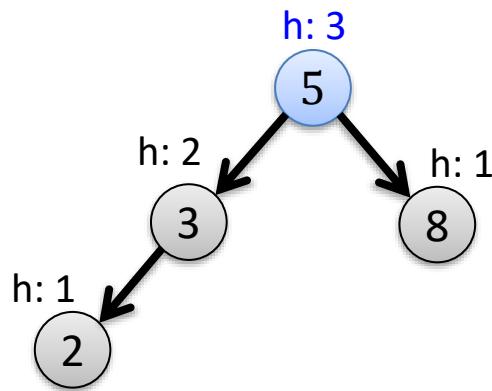
Inserir nó
Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $1 - 0 = 1$

Atualizar altura do nó atual

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL
 - Exemplo:



inserir(2)

Inserir nó
Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

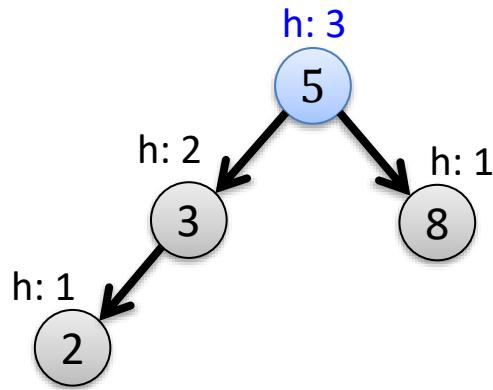
Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $1 - 0 = 1$

Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço:

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



inserir(2)

Inserir nó
Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

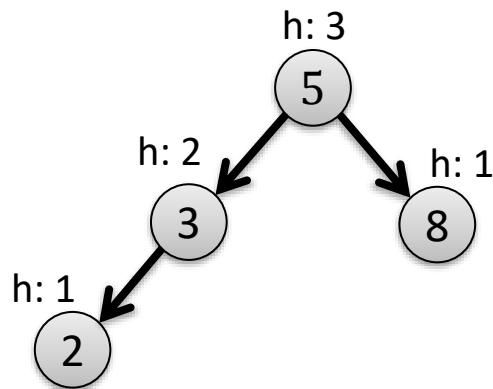
Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $1 - 0 = 1$

Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $2 - 1 = 1$

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



inserir(2)

Inserir nó
Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $1 - 0 = 1$

Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $2 - 1 = 1$

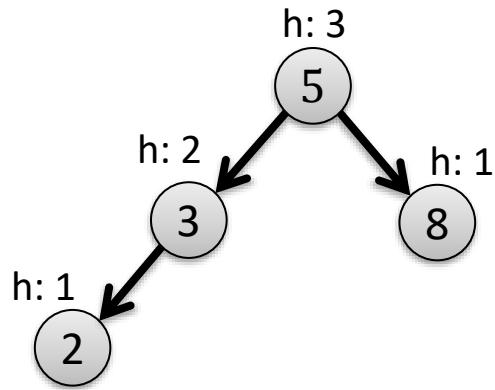
FIM DA INCLUSÃO

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:

inserir(1)



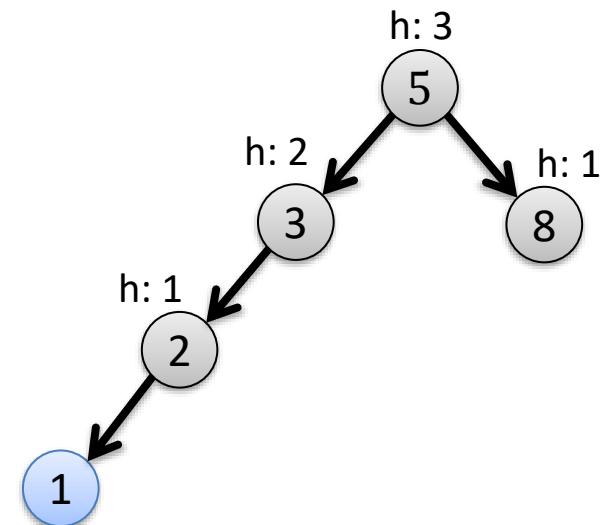
Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:

inserir(1)

Inserir nó



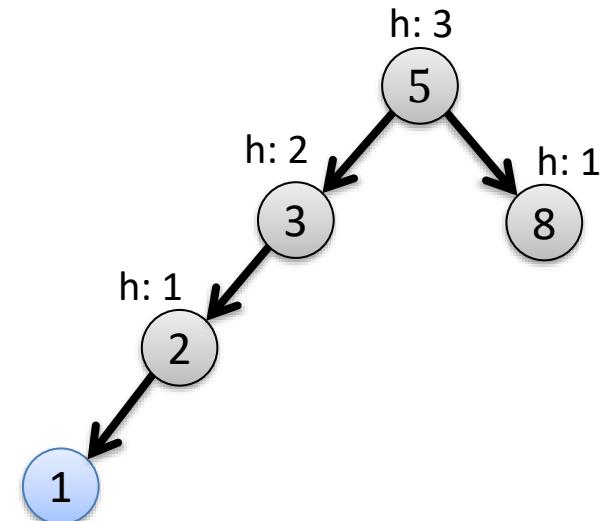
Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:

`inserir(1)`

Inserir nó
Atualizar altura do nó atual

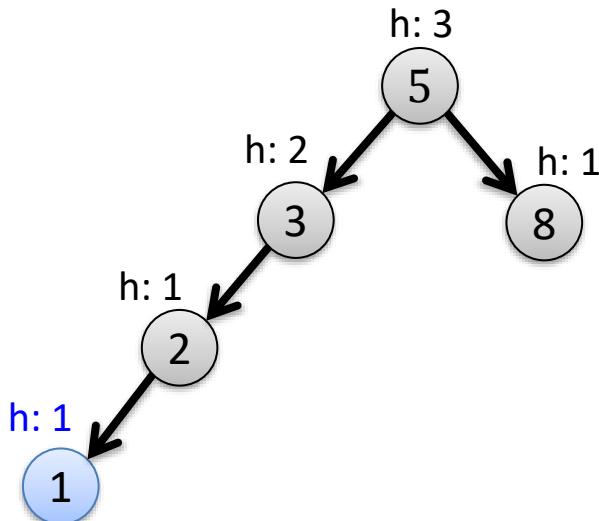


Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:

inserir(1)



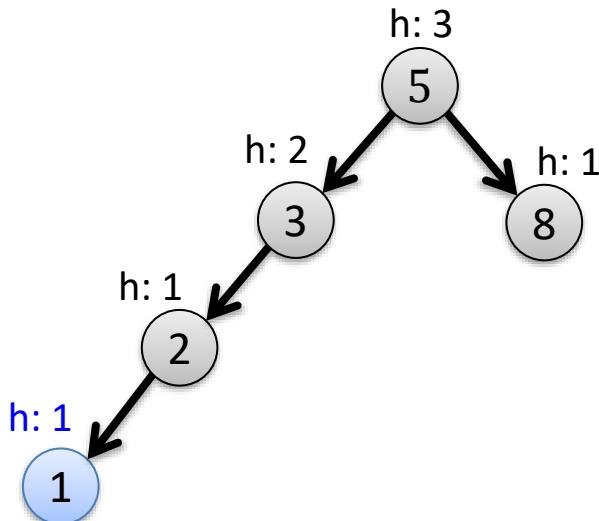
Inserir nó
Atualizar altura do nó atual

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:

inserir(1)



Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

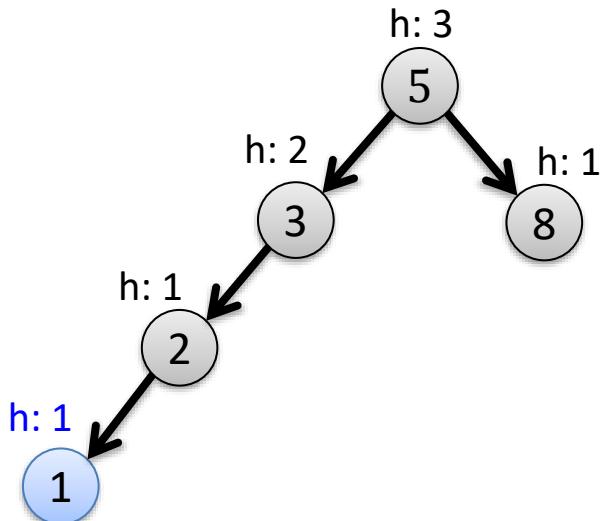
Calcular balanço:

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:

inserir(1)



Inserir nó

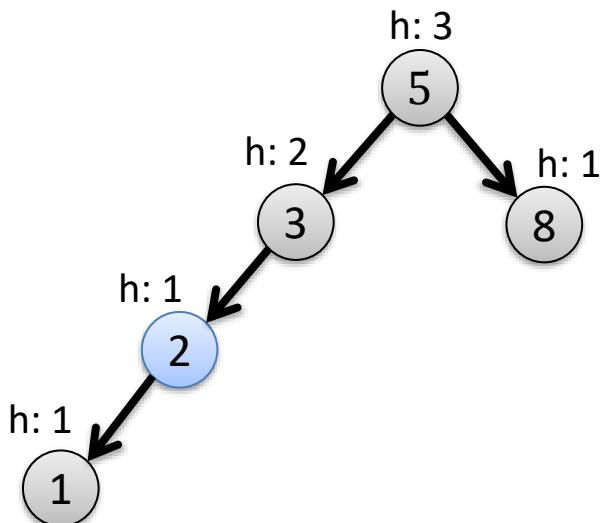
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



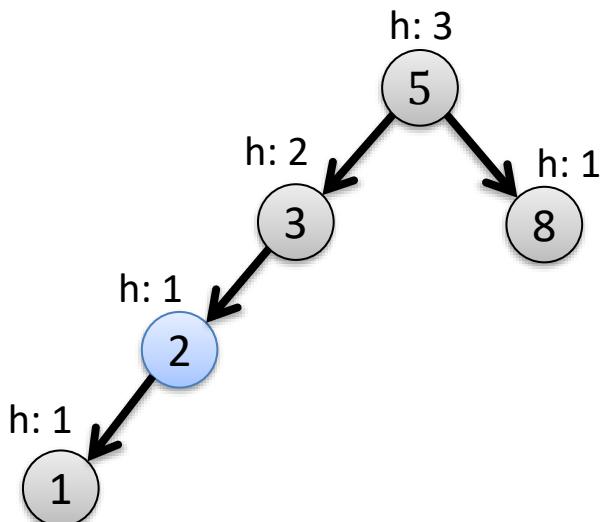
inserir(1)

Inserir nó
Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



inserir(1)

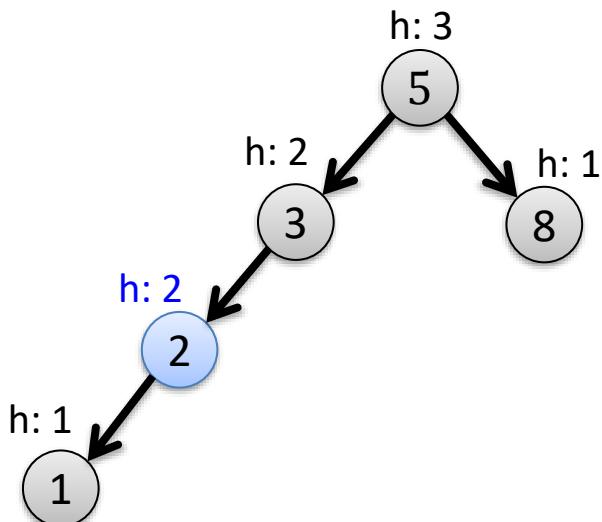
Inserir nó
Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



inserir(1)

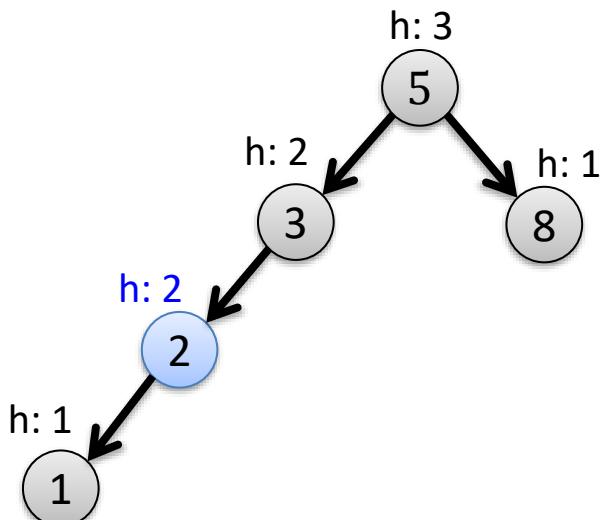
Inserir nó
Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



inserir(1)

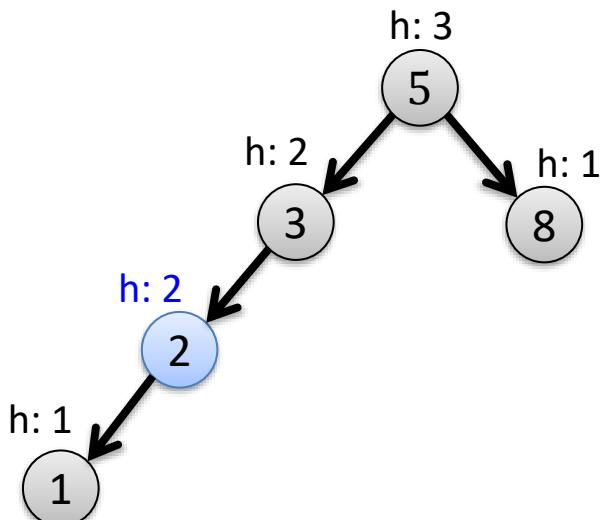
Inserir nó
Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço:

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



inserir(1)

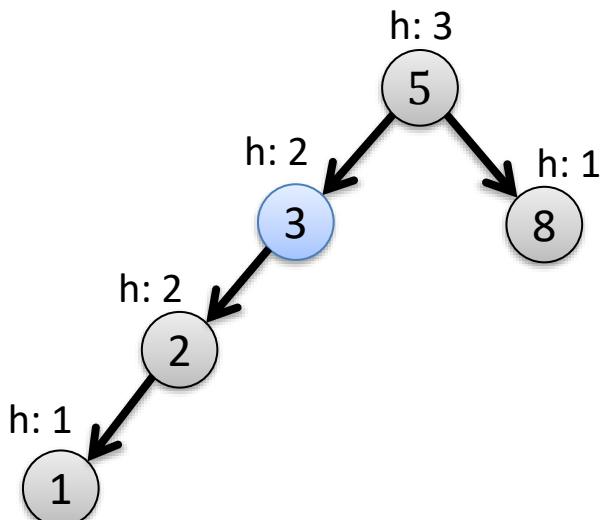
Inserir nó
Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $1 - 0 = 1$

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



inserir(1)

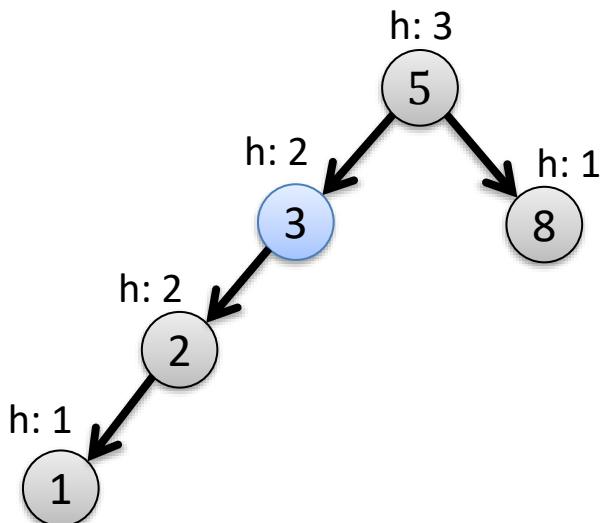
Inserir nó
Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $1 - 0 = 1$

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



inserir(1)

Inserir nó
Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

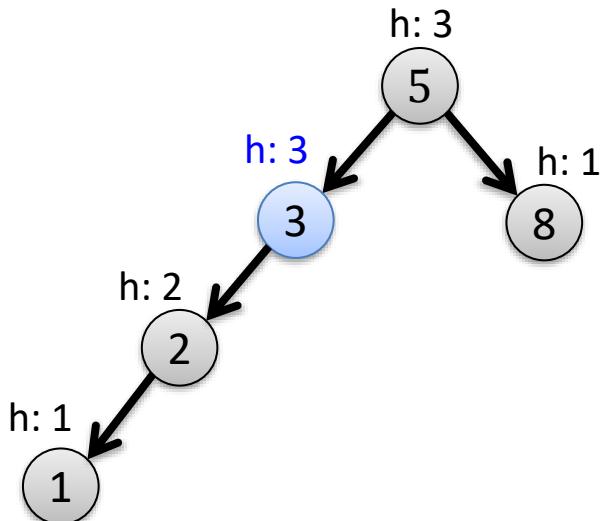
Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $1 - 0 = 1$

Atualizar altura do nó atual

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



inserir(1)

Inserir nó
Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

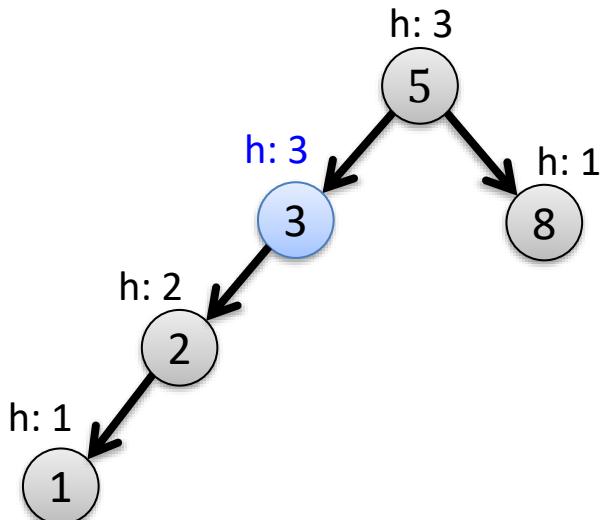
Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $1 - 0 = 1$

Atualizar altura do nó atual

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



inserir(1)

Inserir nó
Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

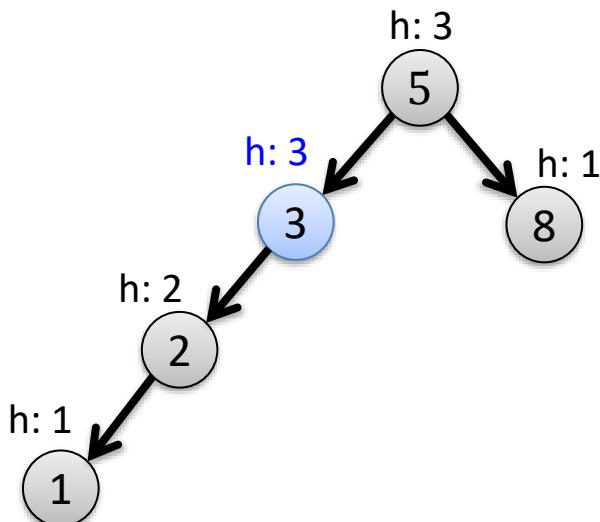
Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $1 - 0 = 1$

Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço:

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



inserir(1)

Inserir nó
Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

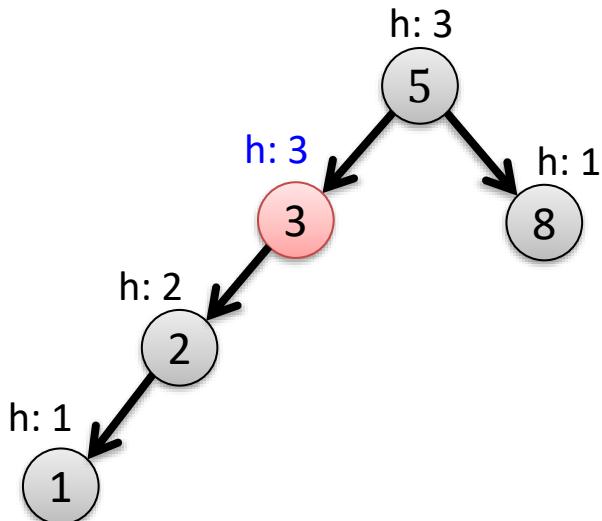
Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $1 - 0 = 1$

Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $2 - 0 = 2$

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



inserir(1)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $1 - 0 = 1$

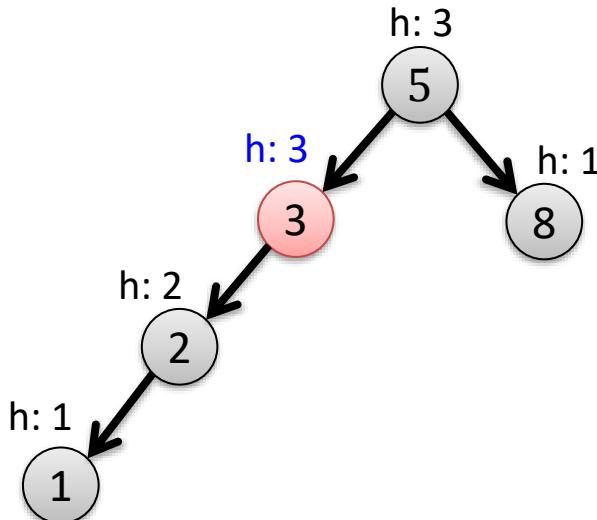
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $2 - 0 = 2$

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



– Casos para rebalanceamento:

I. $\text{balanço}(n) > 1$ e $\text{novoNoh} < n \rightarrow \text{filhoEsq}$



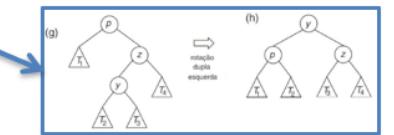
II. $\text{balanço}(n) < -1$ e $\text{novoNoh} > n \rightarrow \text{filhoDir}$



III. $\text{balanço}(n) > 1$ e $\text{novoNoh} > n \rightarrow \text{filhoEsq}$



IV. $\text{balanço}(n) < -1$ e $\text{novoNoh} < n \rightarrow \text{filhoDir}$



Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $1 - 0 = 1$

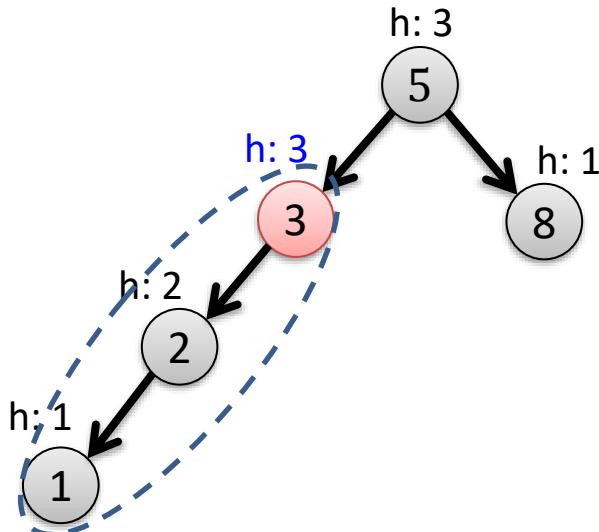
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $2 - 0 = 2$

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



– Casos para rebalanceamento:

I. $\text{balanço}(n) > 1$ e $\text{novoNoh} < n \rightarrow \text{filhoEsq}$



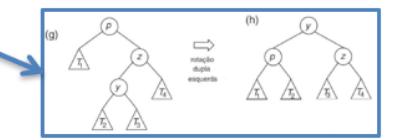
II. $\text{balanço}(n) < -1$ e $\text{novoNoh} > n \rightarrow \text{filhoDir}$



III. $\text{balanço}(n) > 1$ e $\text{novoNoh} > n \rightarrow \text{filhoEsq}$



IV. $\text{balanço}(n) < -1$ e $\text{novoNoh} < n \rightarrow \text{filhoDir}$



Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $1 - 0 = 1$

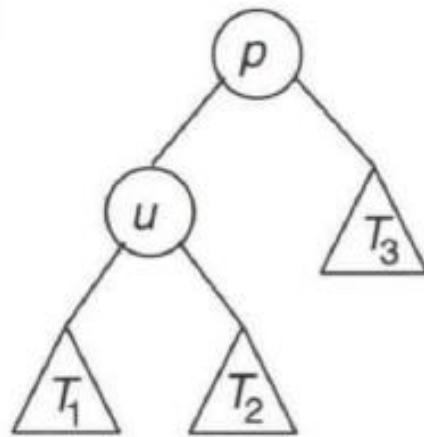
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $2 - 0 = 2$

Definição do caso: $1 < 2$? Sim! Caso I

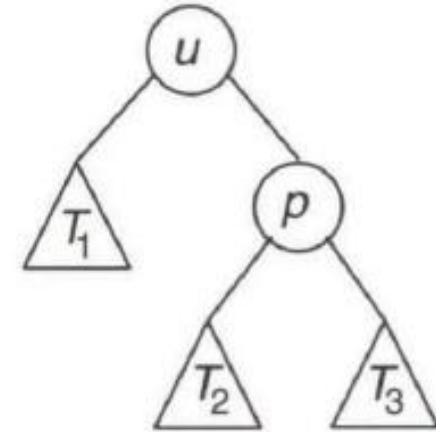
Aplicar a Rotação à Direita!

(a)



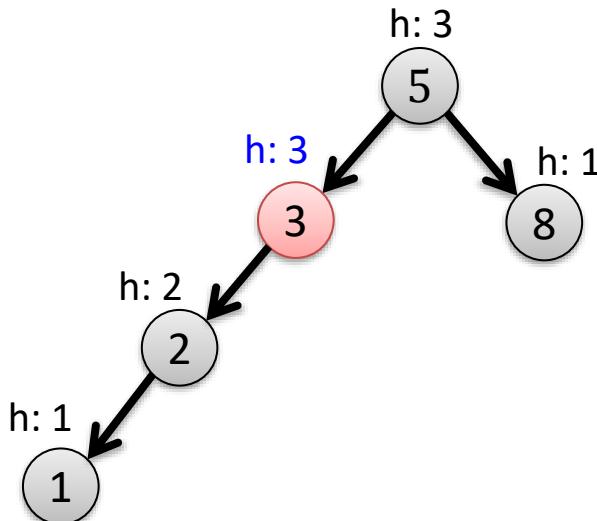
→
rotação
direita

(b)



– Exemplo:

inserir(1)



Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $1 - 0 = 1$

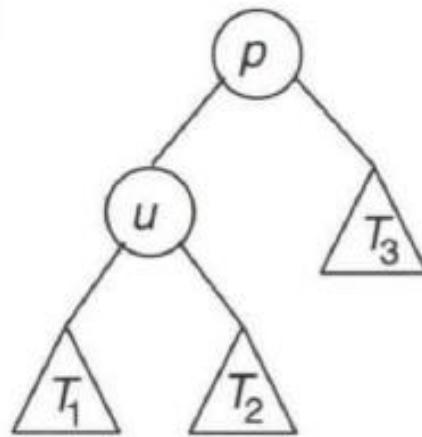
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $2 - 0 = 2$

Definição do caso: $1 < 2$? Sim! Caso I

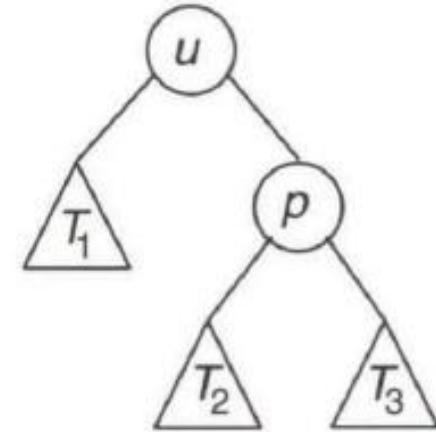
Aplicar a Rotação à Direita!

(a)

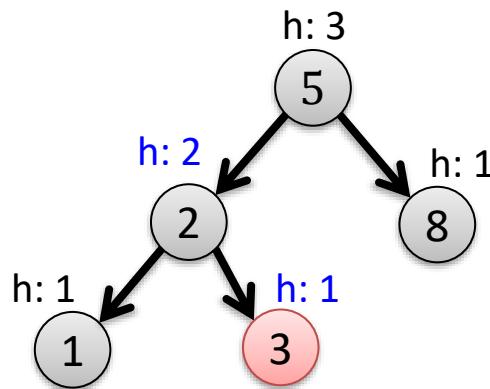


→
rotação
direita

(b)



– Exemplo:



inserir(1)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $1 - 0 = 1$

Atualizar altura do nó atual

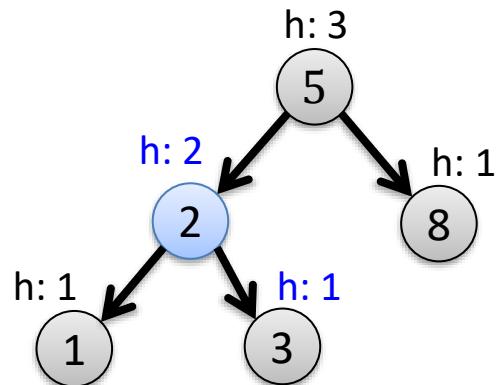
Calcular balanço: $2 - 0 = 2$

Definição do caso: $1 < 2$? Sim! Caso I

Aplicar a Rotação à Direita!

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $1 - 0 = 1$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $2 - 0 = 2$

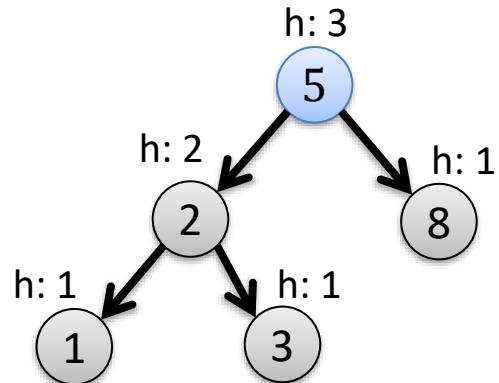
Definição do caso: $1 < 2$? Sim! Caso I

Aplicar a Rotação à Direita!

inserir(1)

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $1 - 0 = 1$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $2 - 0 = 2$

Definição do caso: $1 < 2$? Sim! Caso I

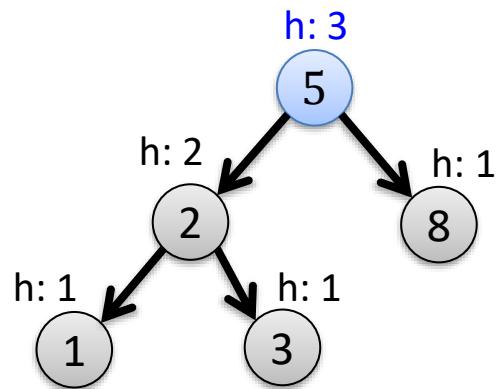
Aplicar a Rotação à Direita!

Atualizar altura do nó atual

inserir(1)

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $1 - 0 = 1$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $2 - 0 = 2$

Definição do caso: $1 < 2$? Sim! Caso I

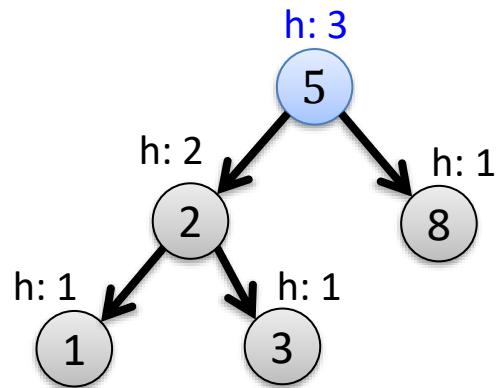
Aplicar a Rotação à Direita!

Atualizar altura do nó atual

inserir(1)

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $1 - 0 = 1$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $2 - 0 = 2$

Definição do caso: $1 < 2$? Sim! Caso I

Aplicar a Rotação à Direita!

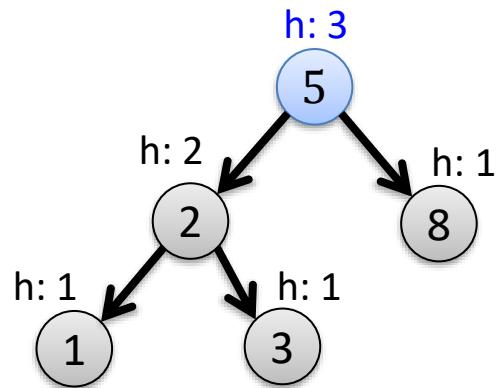
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:

inserir(1)

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $1 - 0 = 1$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $2 - 0 = 2$

Definição do caso: $1 < 2$? Sim! Caso I

Aplicar a Rotação à Direita!

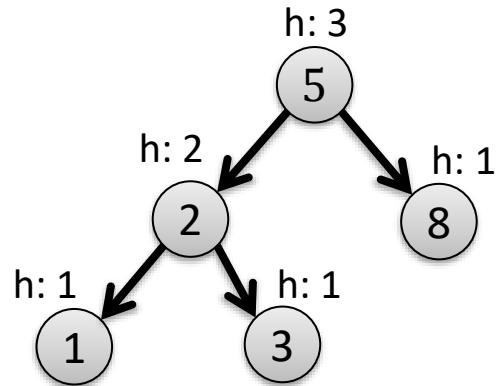
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $2 - 1 = 1$

inserir(1)

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $1 - 0 = 1$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $2 - 0 = 2$

Definição do caso: $1 < 2$? Sim! Caso I

Aplicar a Rotação à Direita!

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $2 - 1 = 1$

inserir(1)

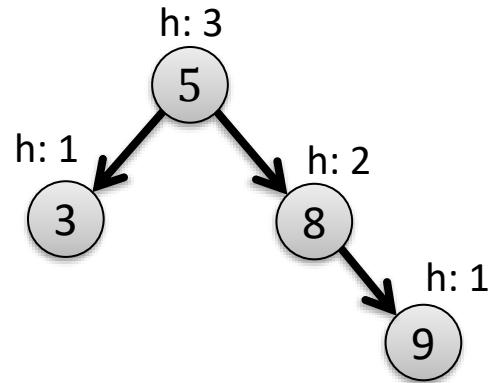
FIM DA INCLUSÃO

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:

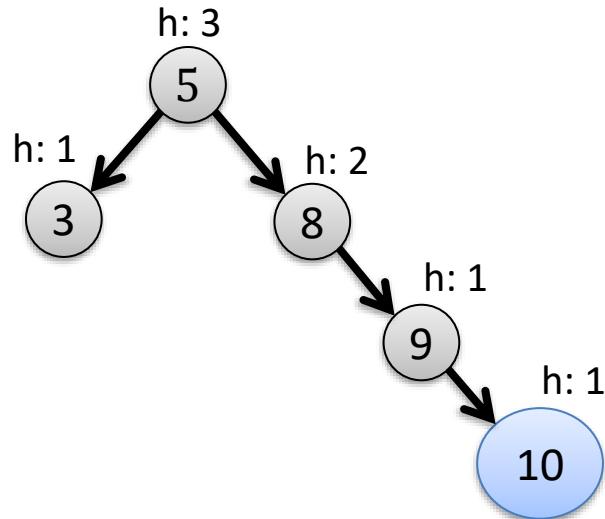
inserir(10)



Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



inserir(10)

Inserir nó

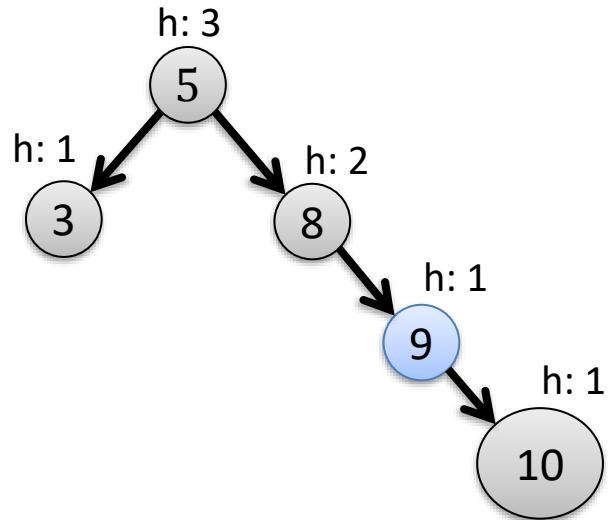
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



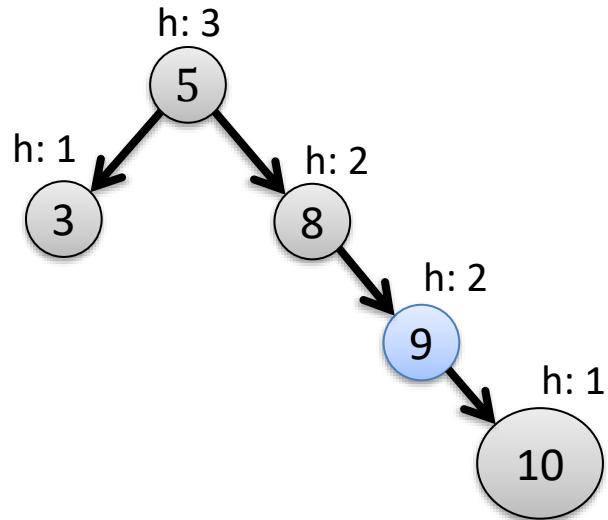
inserir(10)

Inserir nó
Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



inserir(10)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

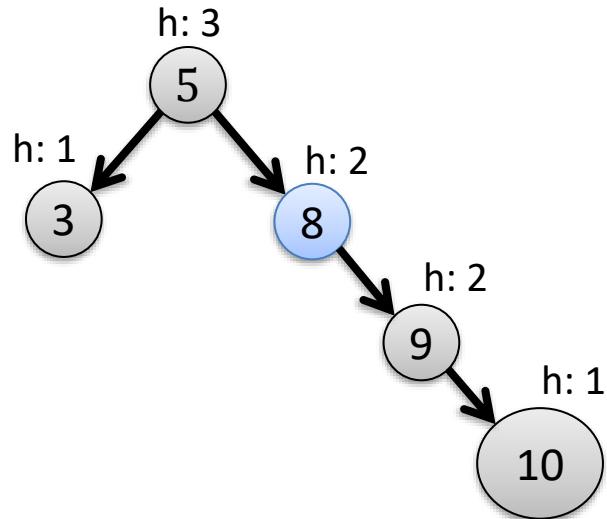
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $0 - 1 = -1$

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



inserir(10)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

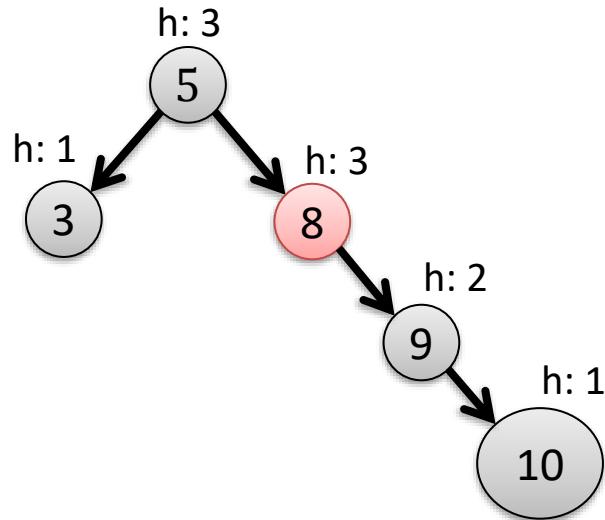
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $0 - 1 = -1$

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



inserir(10)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $0 - 1 = -1$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $0 - 2 = -2$

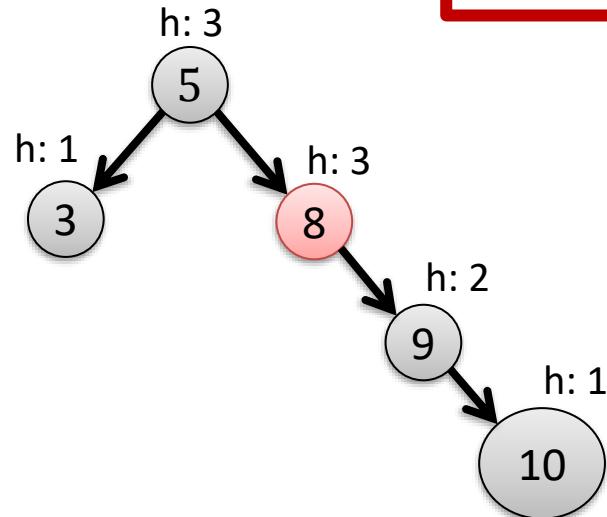
Definição do caso: $-2 < -1$? Sim! Caso II

Aplicar a Rotação à Esquerda!

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



– Casos para rebalanceamento:

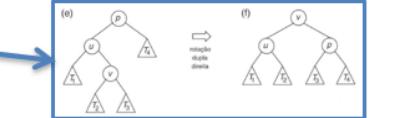
I. $\text{balanço}(n) > 1$ e novoNoh < n → filhoEsq



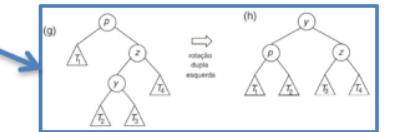
II. $\text{balanço}(n) < -1$ e novoNoh > n → filhoDir



III. $\text{balanço}(n) > 1$ e novoNoh > n → filhoEsq



IV. $\text{balanço}(n) < -1$ e novoNoh < n → filhoDir



Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $0 - 1 = -1$

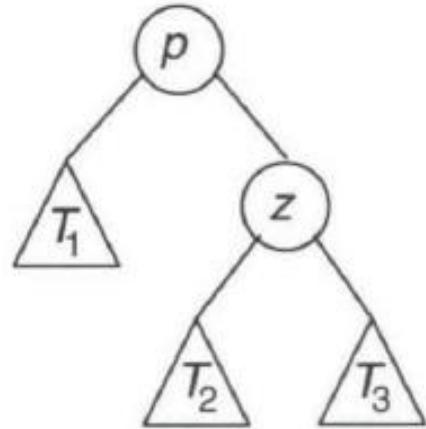
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $0 - 2 = -2$

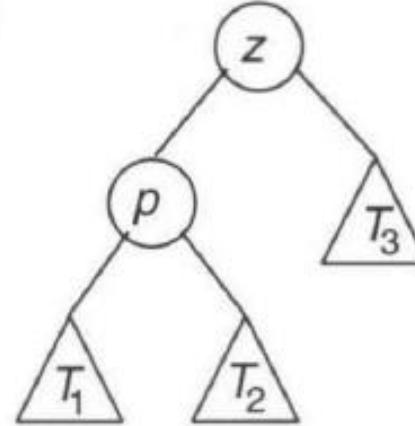
Definição do caso: $-2 < -1$? Sim! Caso II

Aplicar a Rotação à Esquerda!

(c)



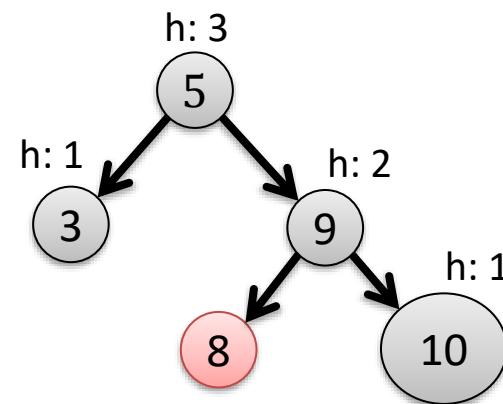
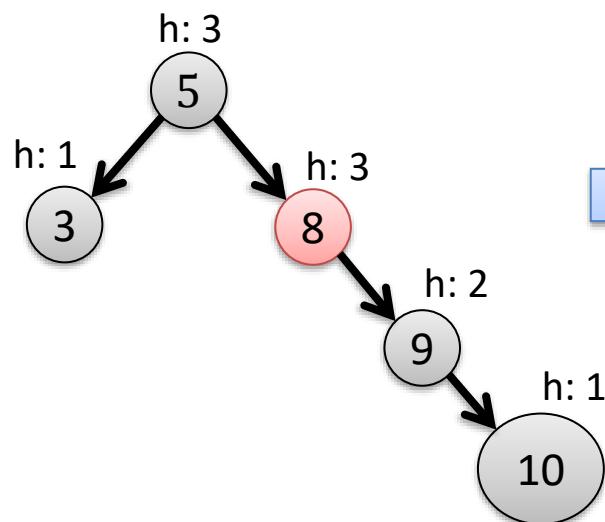
(d)



→
rotação
esquerda

– Exemplo:

inserir(10)



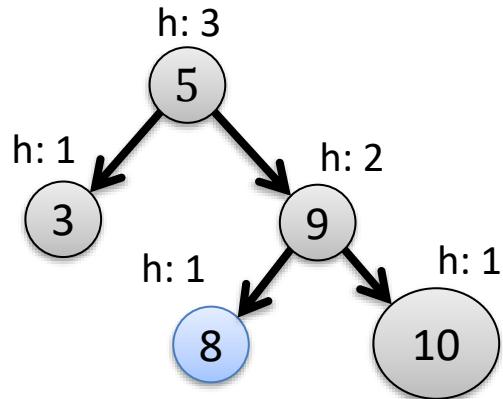
Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:

inserir(10)

Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

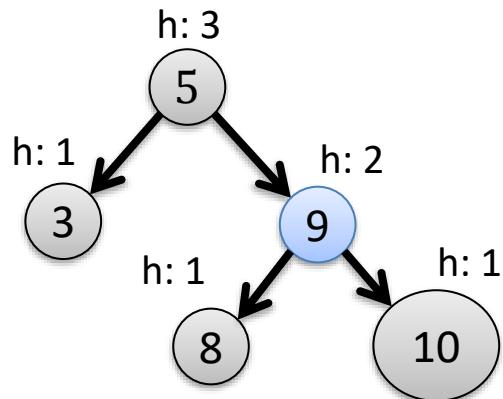


Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:

inserir(10)

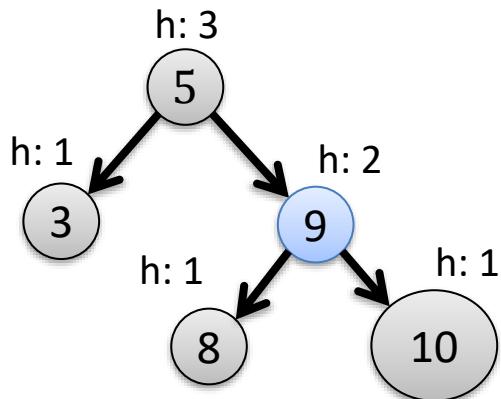


Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



inserir(10)

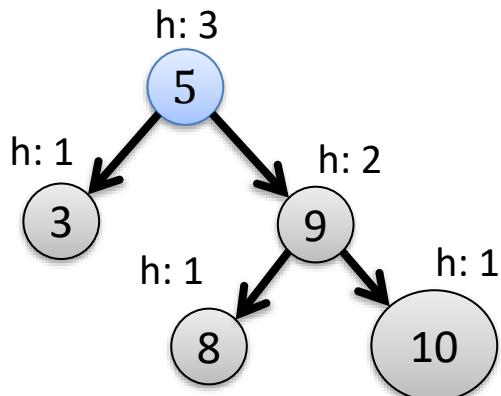
Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $1 - 1 = 0$

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



inserir(10)

Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $1 - 1 = 0$

Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $1 - 2 = -1$

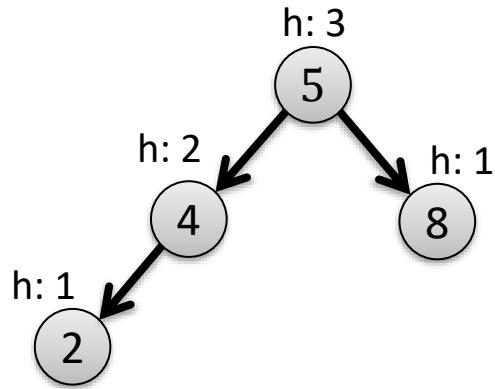
FIM DA INCLUSÃO

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:

inserir(3)

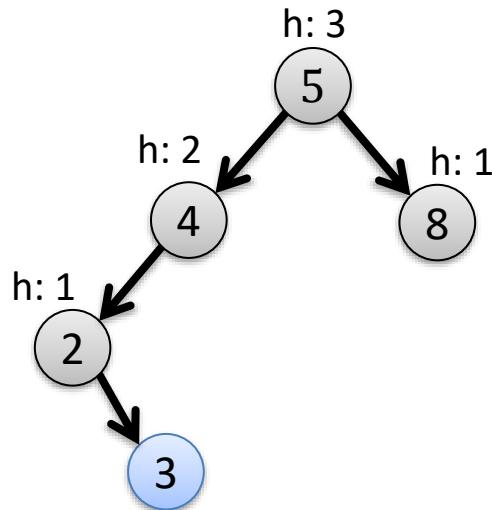


Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:

inserir(3)



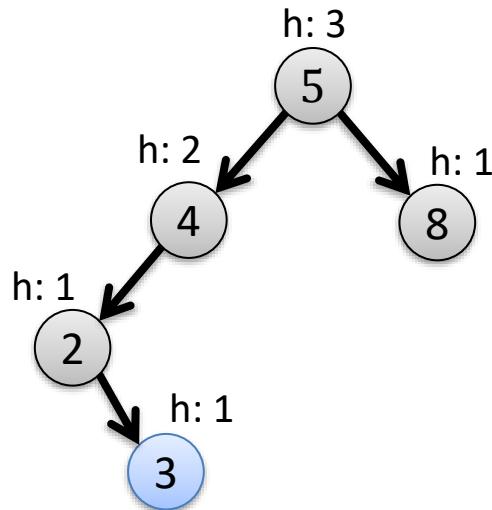
Inserir nó

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:

inserir(3)



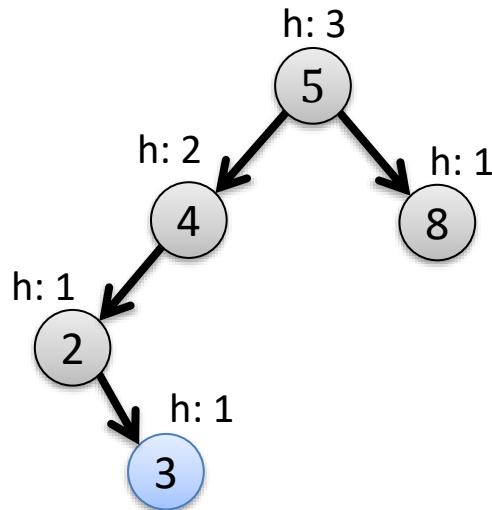
Inserir nó
Atualizar altura do nó atual

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:

inserir(3)



Inserir nó

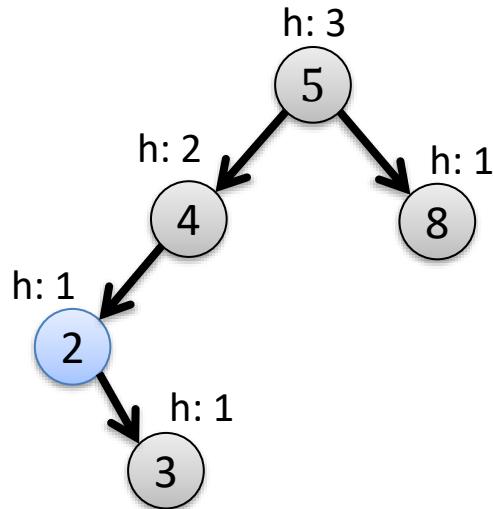
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



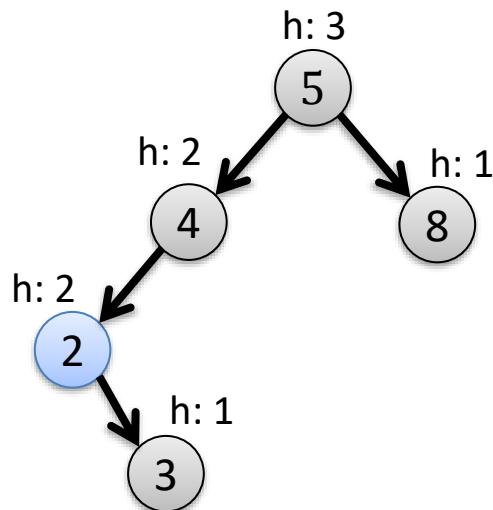
inserir(3)

Inserir nó
Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



inserir(3)

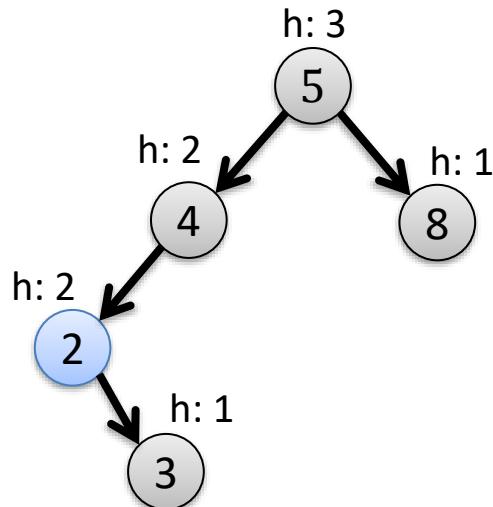
Inserir nó
Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



inserir(3)

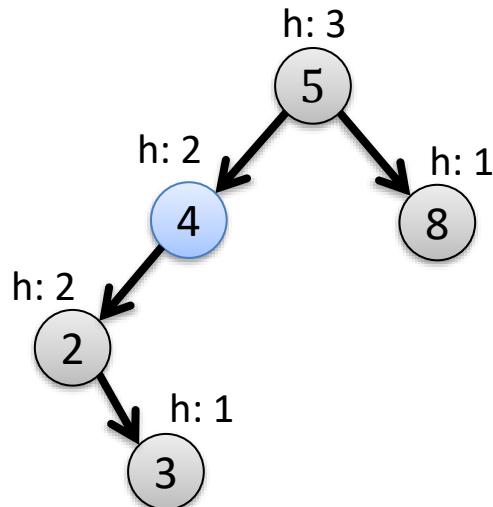
Inserir nó
Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $0 - 1 = -1$

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



inserir(3)

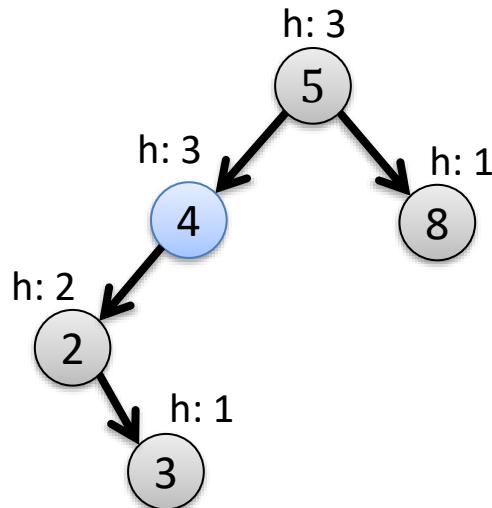
Inserir nó
Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $0 - 1 = -1$

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



inserir(3)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

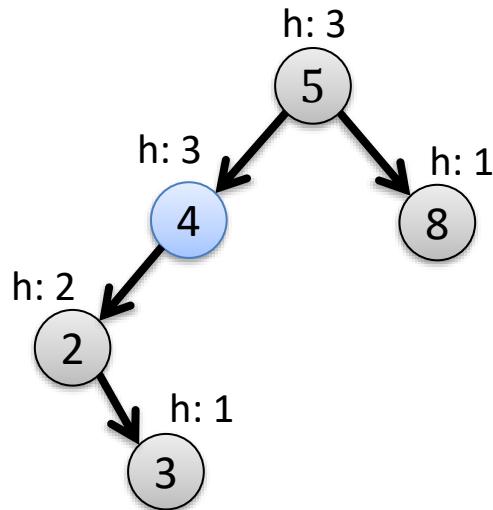
Calcular balanço: $0 - 1 = -1$

Atualizar altura do nó atual

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



inserir(3)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

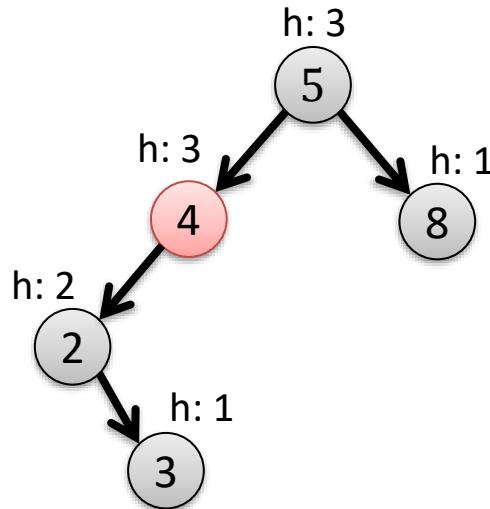
Calcular balanço: $0 - 1 = -1$

Atualizar altura do nó atual
Calcular balanço: $2 - 0 = 2$

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



– Casos para rebalanceamento:

I. $\text{balanço}(n) > 1$ e novoNoh < n → filhoEsq



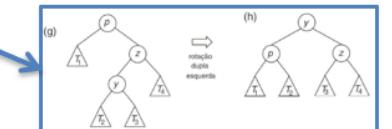
II. $\text{balanço}(n) < -1$ e novoNoh > n → filhoDir



III. $\text{balanço}(n) > 1$ e novoNoh > n → filhoEsq



IV. $\text{balanço}(n) < -1$ e novoNoh < n → filhoDir



Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $0 - 1 = -1$

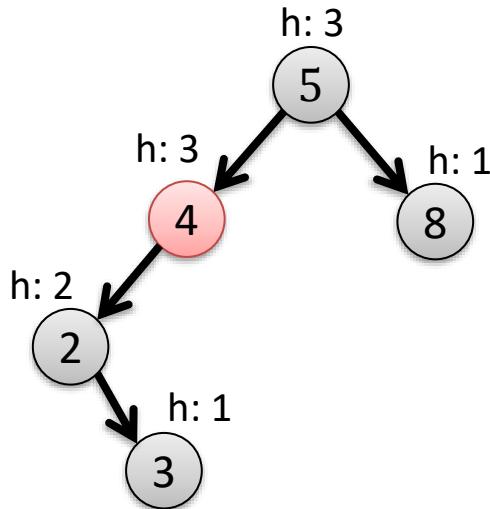
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $2 - 0 = 2$

Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



inserir(3)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

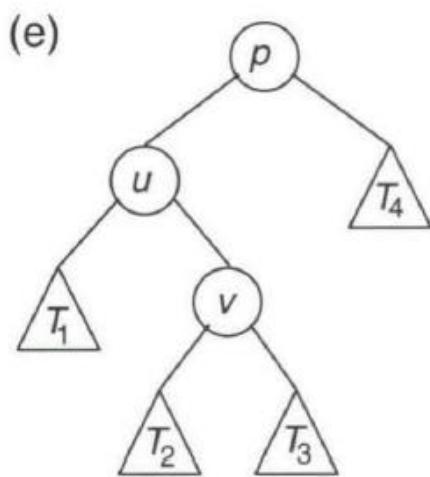
Calcular balanço: $0 - 1 = -1$

Atualizar altura do nó atual

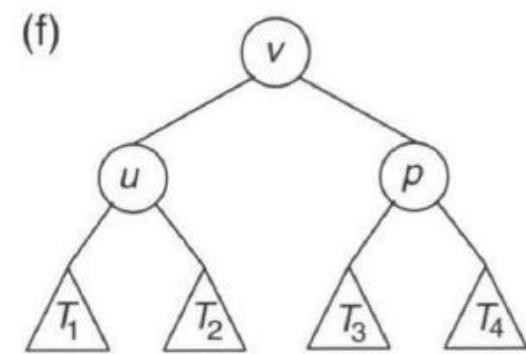
Calcular balanço: $2 - 0 = 2$

Definição do caso: $3 < 2$? Não! Caso III

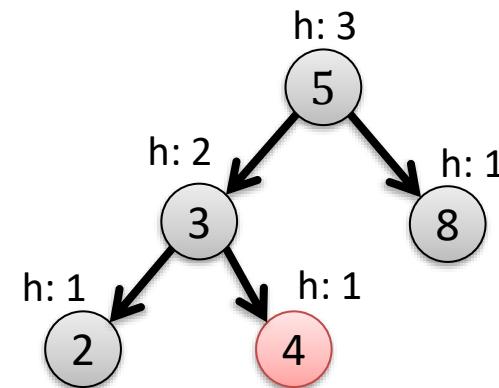
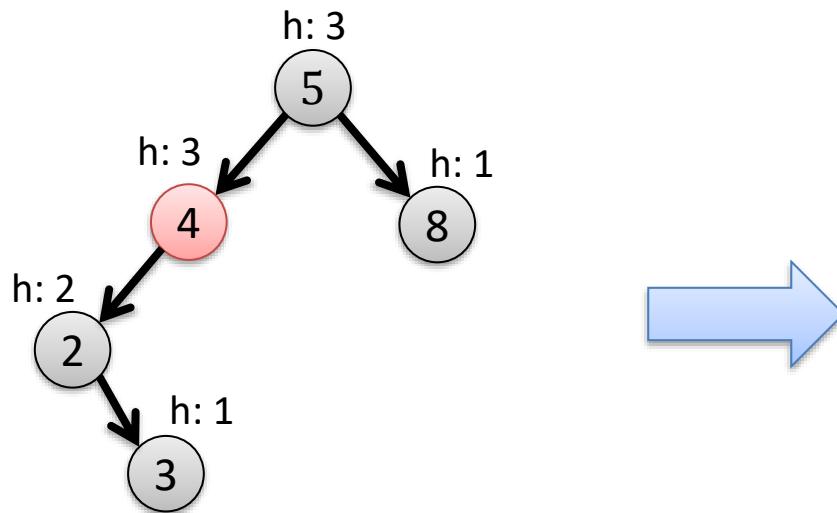
Aplicar a Rotação Dupla à Direita!



→
rotação
dupla
direita



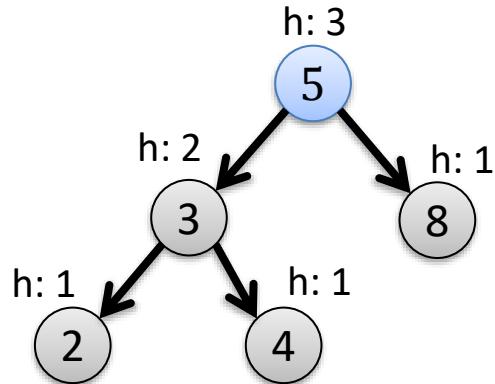
– Exemplo:



inserir(3)

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $0 - 1 = -1$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $2 - 0 = 2$

Definição do caso: $3 < 2$? Não! Caso III

Aplicar a Rotação Dupla à Direita!

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço: $2 - 1 = 1$

inserir(3)

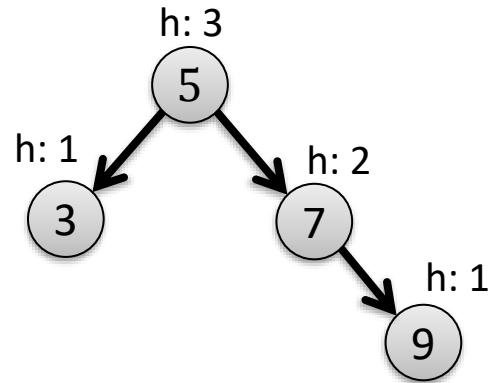
FIM DA INCLUSÃO

Árvores AVL

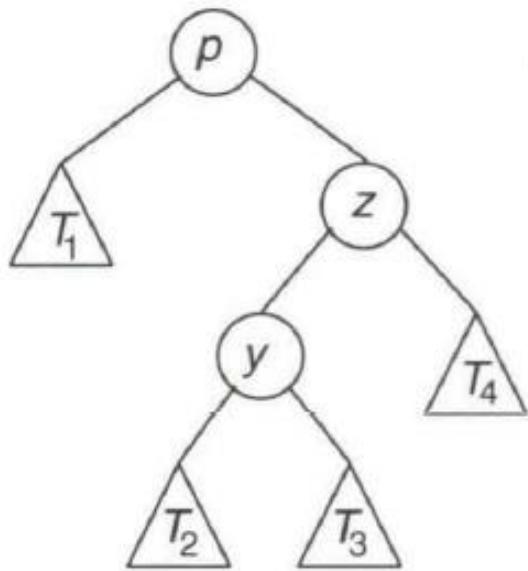
- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:

inserir(8)

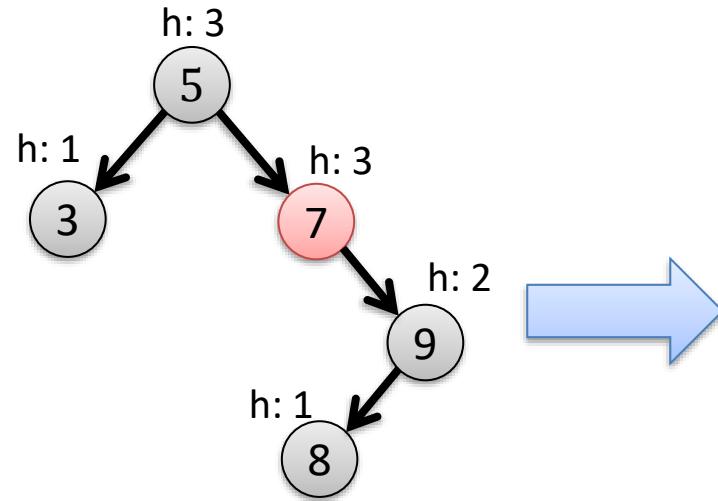
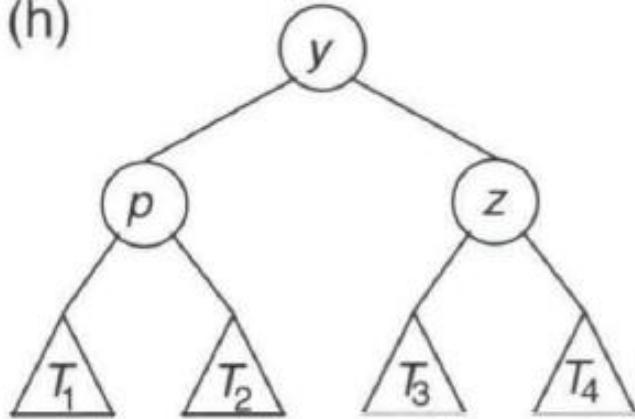


(g)



→
rotação
dupla
esquerda

(h)



inserir(8)

- **Exercício 3:**
 - Converta o vetor abaixo em uma árvore AVL, inserindo os elementos na árvore na ordem que eles aparecem.

8	4	1	9	11
---	---	---	---	----

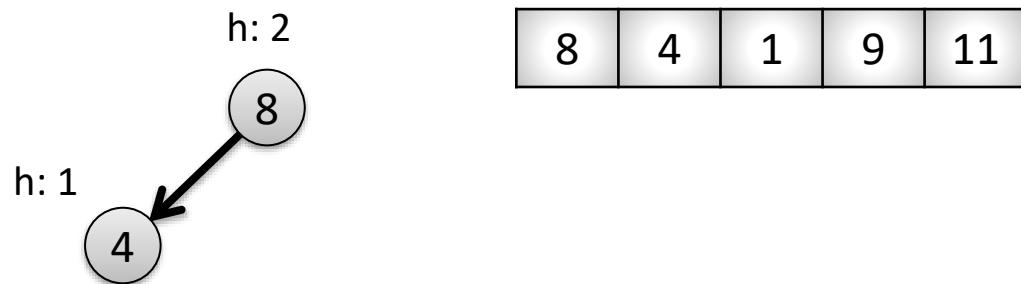
- **Exercício 3:**
 - Converta o vetor abaixo em uma árvore AVL, inserindo os elementos na árvore na ordem que eles aparecem.

h: 1

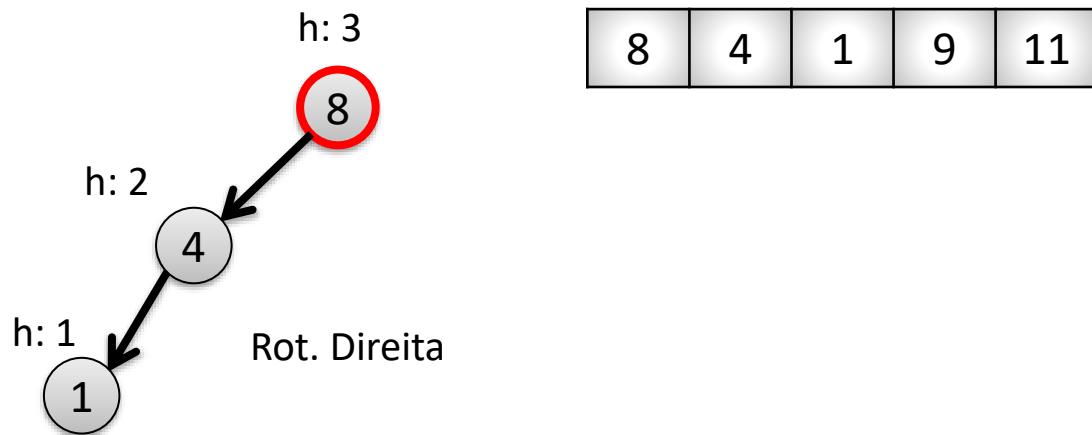
8

8	4	1	9	11
---	---	---	---	----

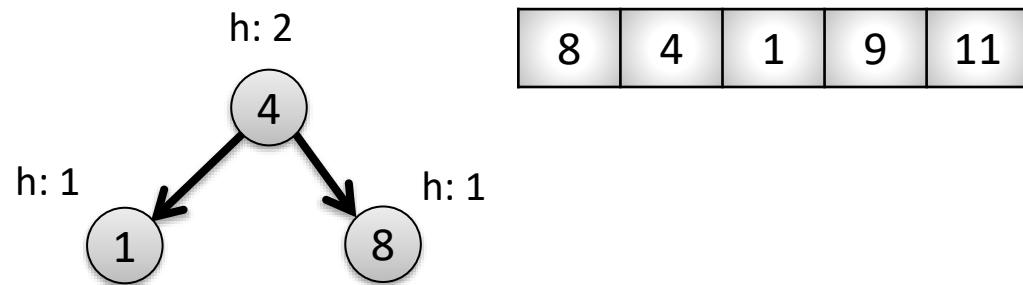
- **Exercício 3:**
 - Converta o vetor abaixo em uma árvore AVL, inserindo os elementos na árvore na ordem que eles aparecem.



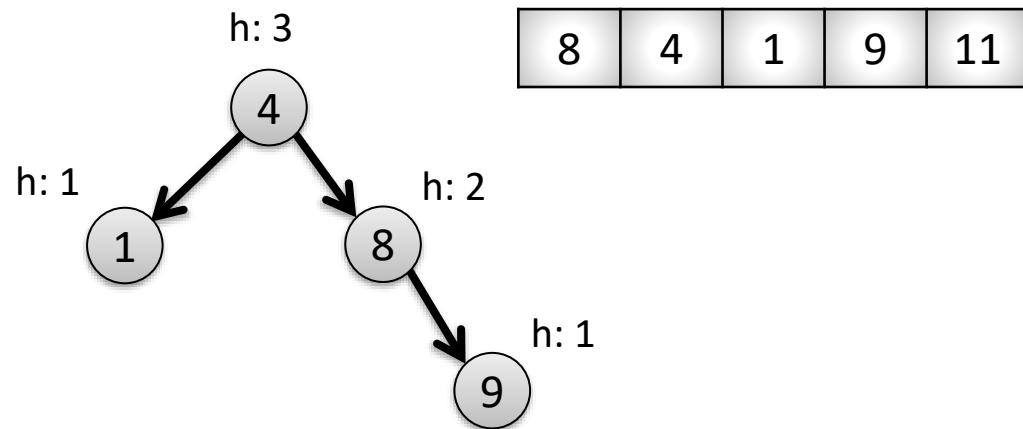
- **Exercício 3:**
 - Converta o vetor abaixo em uma árvore AVL, inserindo os elementos na árvore na ordem que eles aparecem.



- **Exercício 3:**
 - Converta o vetor abaixo em uma árvore AVL, inserindo os elementos na árvore na ordem que eles aparecem.

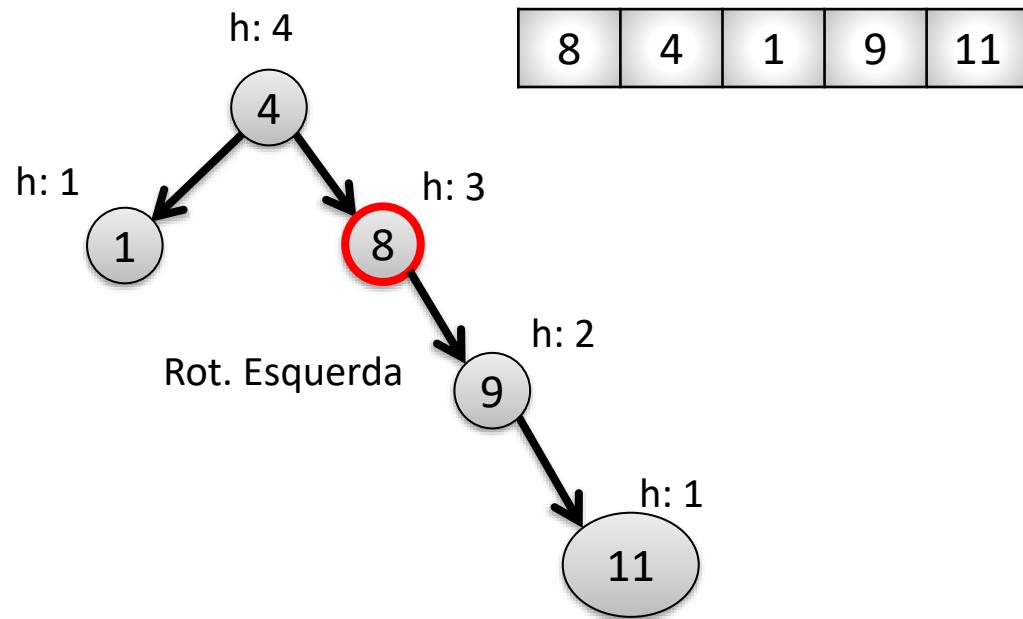


- **Exercício 3:**
 - Converta o vetor abaixo em uma árvore AVL, inserindo os elementos na árvore na ordem que eles aparecem.

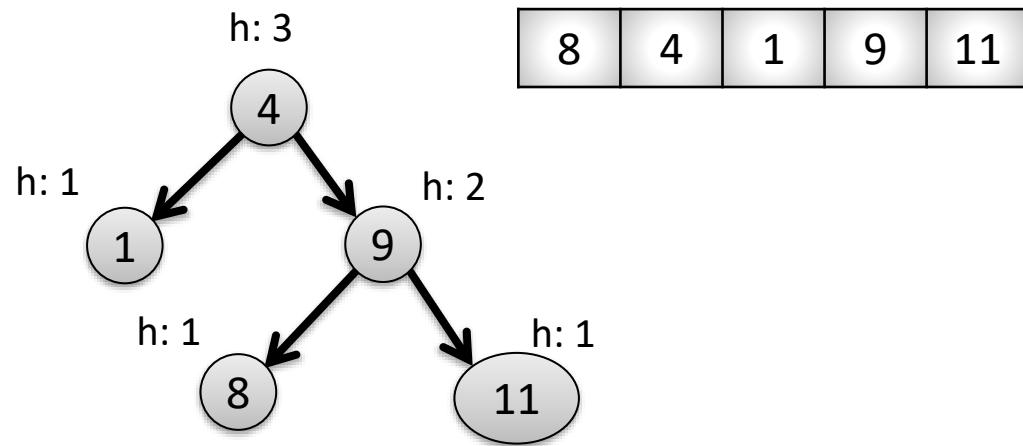


- **Exercício 3:**

- Converta o vetor abaixo em uma árvore AVL, inserindo os elementos na árvore na ordem que eles aparecem.



- **Exercício 3:**
 - Converta o vetor abaixo em uma árvore AVL, inserindo os elementos na árvore na ordem que eles aparecem.



Árvores AVL

- **Exclusão em árvore AVL**
 - O processo de exclusão de um novo nó na árvore seguirá a mesma lógica da inclusão, identificando casos para aplicar as rotações.
 - Algoritmo:
 1. Fazer a remoção em ABB simples.
 2. Atualizar a altura do nó atual:
$$\text{altura}(n) = \max(h_E(n), h_D(n)) + 1$$
 3. Calcular o balanço do nó atual:
$$\text{balanço}(n) = h_E(n) - h_D(n)$$
 4. Rebalancear o nó atual usando rotações de acordo com o caso:

Árvores AVL

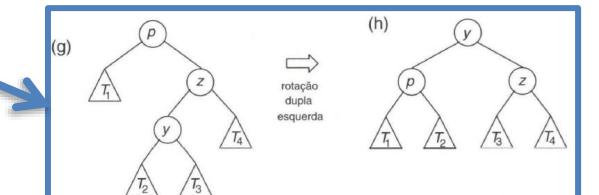
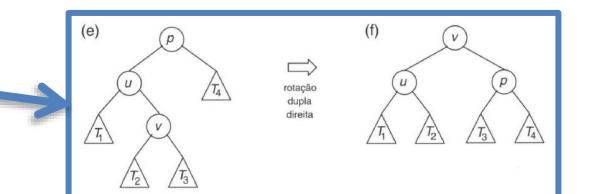
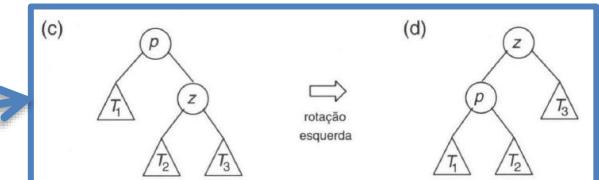
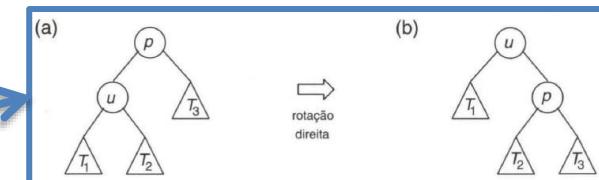
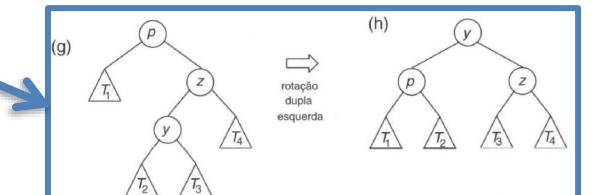
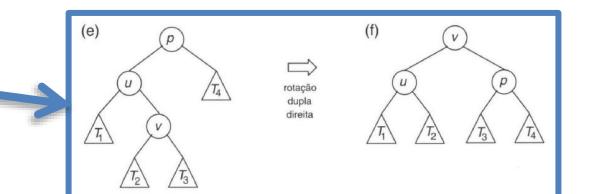
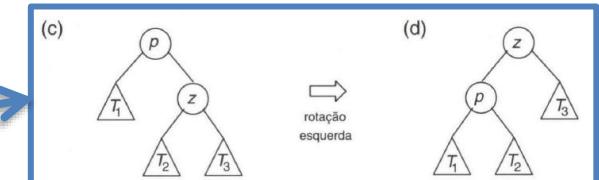
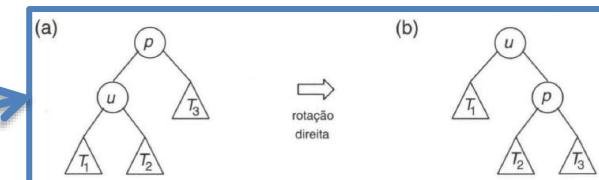
- Exclusão em árvore AVL
 - Casos para rebalanceamento:

I. $\text{balanço}(n) > 1$ e $\text{balanço}(n \rightarrow \text{filhoEsq}) \geq 0$

II. $\text{balanço}(n) < -1$ e $\text{balanço}(n \rightarrow \text{filhoDir}) \leq 0$

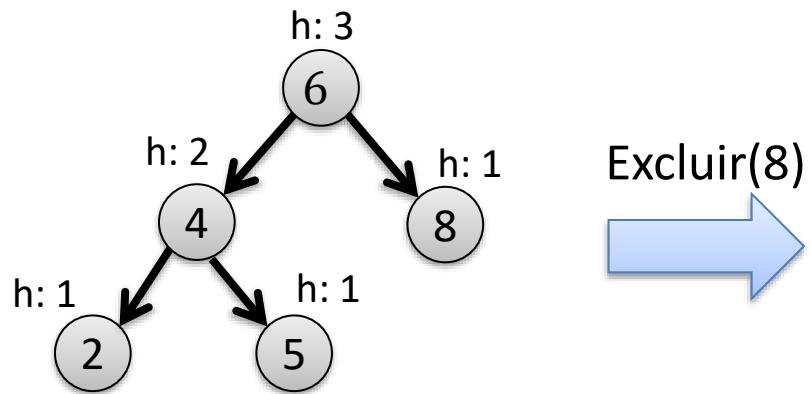
III. $\text{balanço}(n) > 1$ e $\text{balanço}(n \rightarrow \text{filhoEsq}) < 0$

IV. $\text{balanço}(n) < -1$ e $\text{balanço}(n \rightarrow \text{filhoDir}) > 0$



Árvores AVL

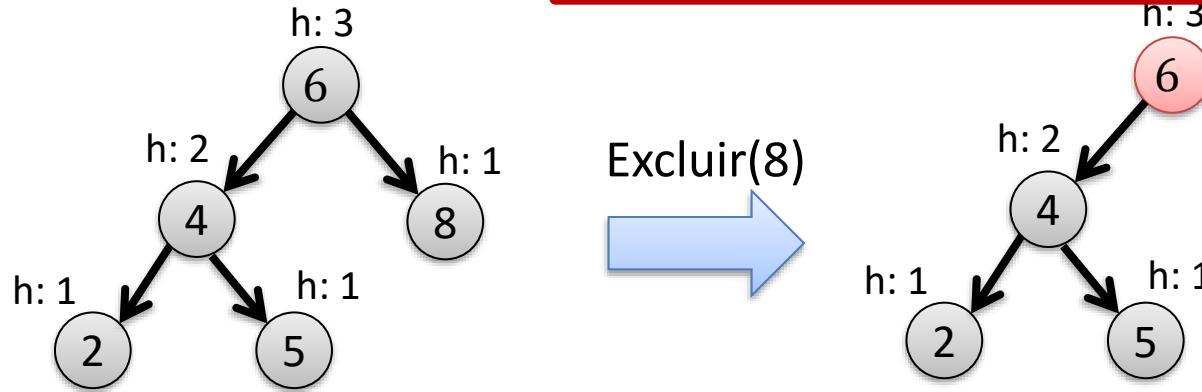
- Exclusão em árvore AVL
 - Exemplo:



Árvores AVL

- Exclusão em árvore AVL

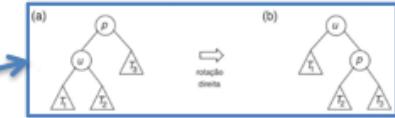
- Exemplo:



6 está desbalanceado!
Identificando caso:

- Casos para rebalanceamento:

I. $\text{balanço}(n) > 1$ e $\text{balanço}(n \rightarrow \text{filhoEsq}) \geq 0$



II. $\text{balanço}(n) < -1$ e $\text{balanço}(n \rightarrow \text{filhoDir}) \leq 0$



III. $\text{balanço}(n) > 1$ e $\text{balanço}(n \rightarrow \text{filhoEsq}) < 0$



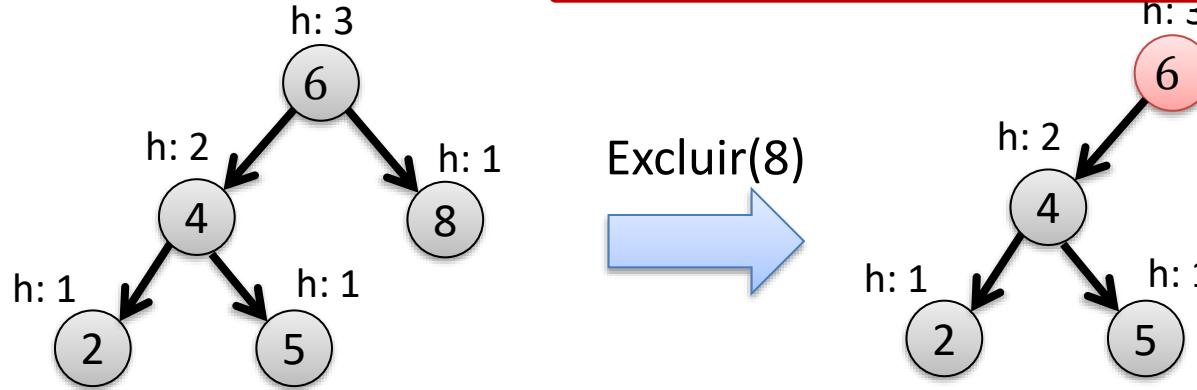
IV. $\text{balanço}(n) < -1$ e $\text{balanço}(n \rightarrow \text{filhoDir}) > 0$



Árvores AVL

- Exclusão em árvore AVL

- Exemplo:



– Casos para rebalanceamento:

I. $\text{balanço}(n) > 1$ e $\text{balanço}(n \rightarrow \text{filhoEsq}) \geq 0$



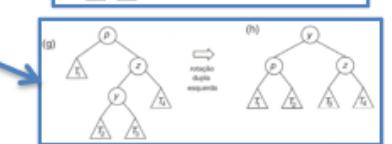
II. $\text{balanço}(n) < -1$ e $\text{balanço}(n \rightarrow \text{filhoDir}) \leq 0$



III. $\text{balanço}(n) > 1$ e $\text{balanço}(n \rightarrow \text{filhoEsq}) < 0$



IV. $\text{balanço}(n) < -1$ e $\text{balanço}(n \rightarrow \text{filhoDir}) > 0$



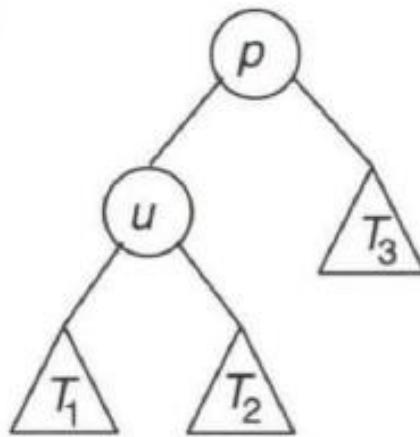
6 está desbalanceado!

Identificando caso:

$2 > 1$ e $\text{balanço}(n \rightarrow \text{filhoEsq}) \geq 0$: Caso I

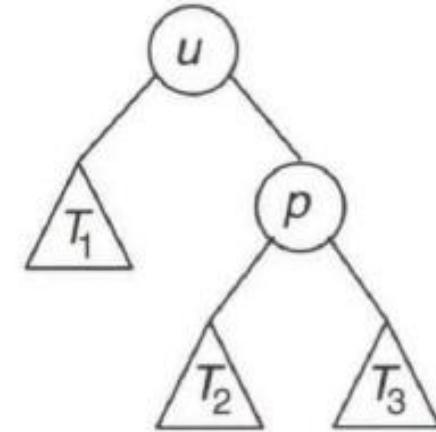
Aplicar Rotação à Direita!

(a)

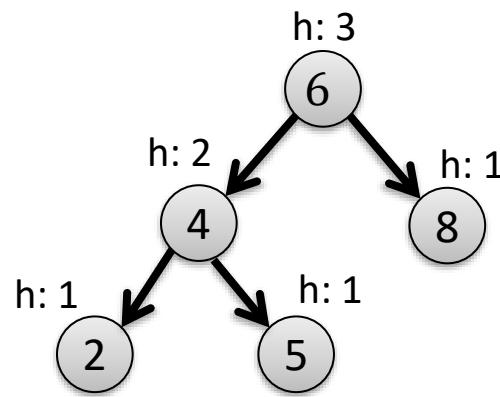


→
rotação
direita

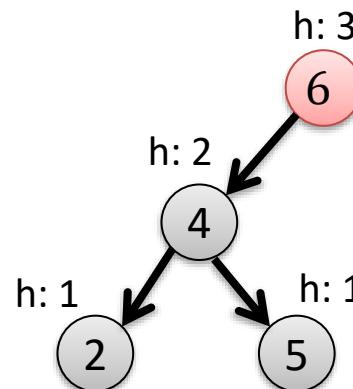
(b)



– Exemplo:



Excluir(8)



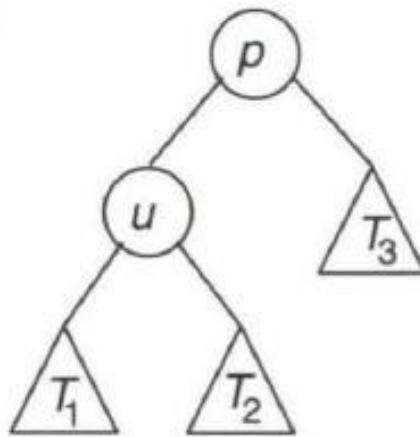
6 está desbalanceado!

Identificando caso:

$2 > 1$ e $\text{balanço}(n \rightarrow \text{filhoEsq}) \geq 0$: Caso I

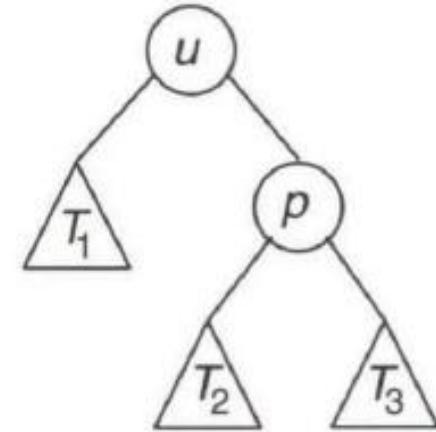
Aplicar Rotação à Direita!

(a)

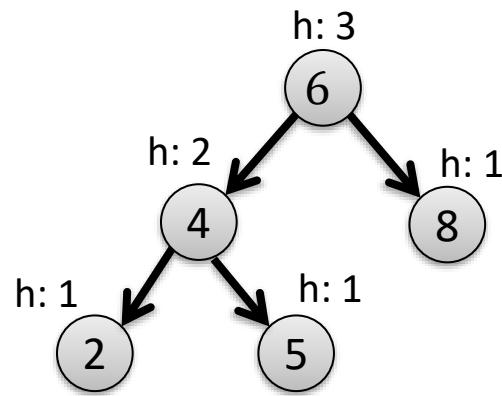


→
rotação
direita

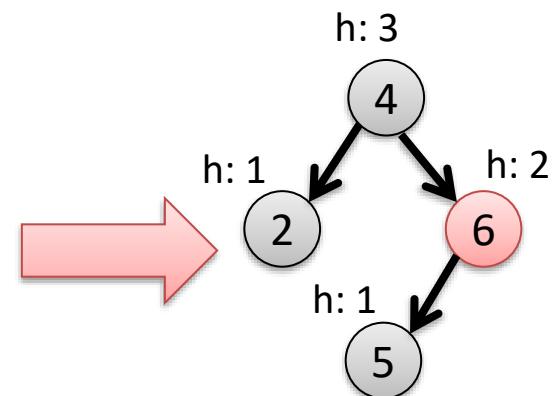
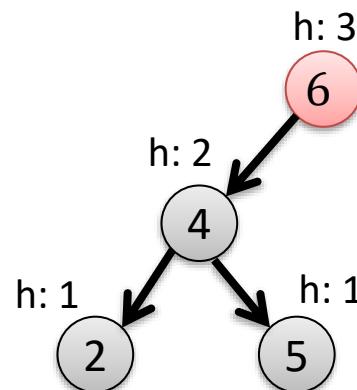
(b)



– Exemplo:



Excluir(8)



6 está desbalanceado!

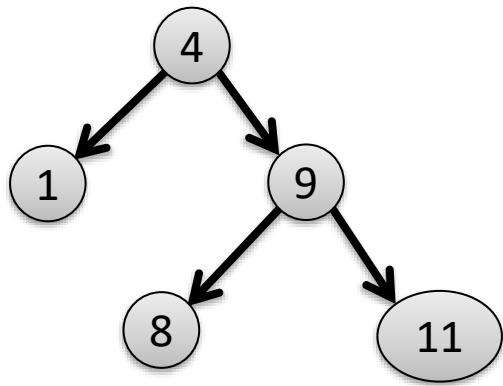
Identificando caso:

$2 > 1$ e $\text{balanço}(n \rightarrow \text{filhoEsq}) \geq 0$: Caso I

Aplicar Rotação à Direita!

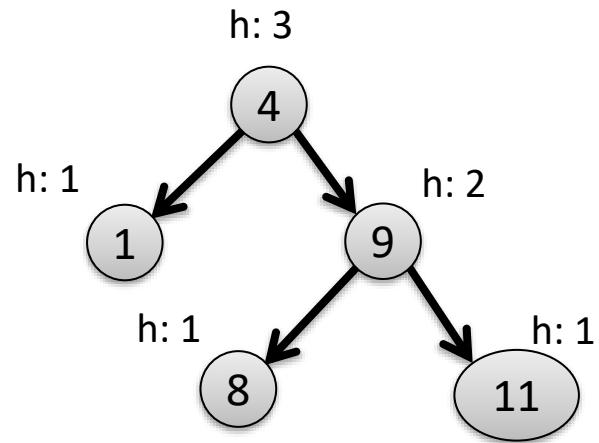
- **Exercício 4:**

- Faça a exclusão dos nós 4, 1, 8 e 9 na seguinte árvore AVL:



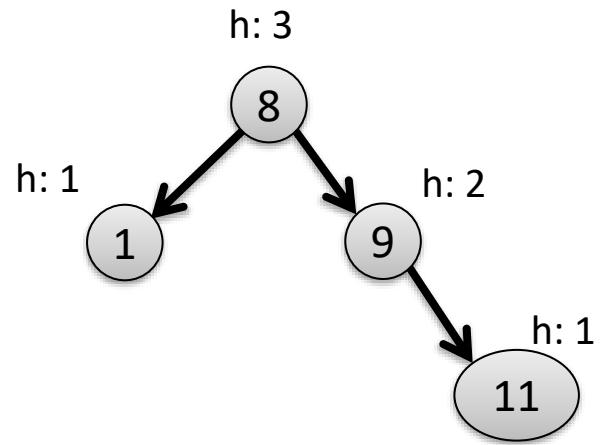
- **Exercício 4:**

- Faça a exclusão dos nós 4, 1, 8 e 9 na seguinte árvore AVL:



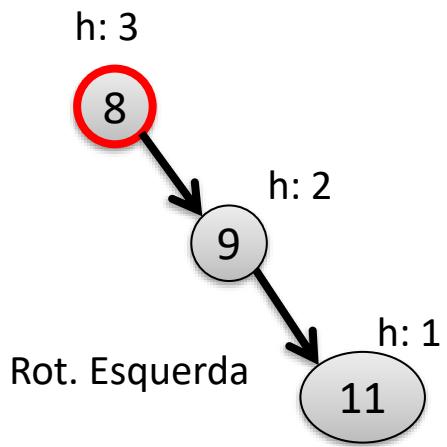
- **Exercício 4:**

- Faça a exclusão dos nós 4, 1, 8 e 9 na seguinte árvore AVL:



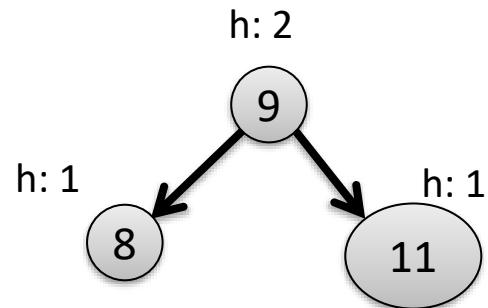
- **Exercício 4:**

- Faça a exclusão dos nós 4, 1, 8 e 9 na seguinte árvore AVL:



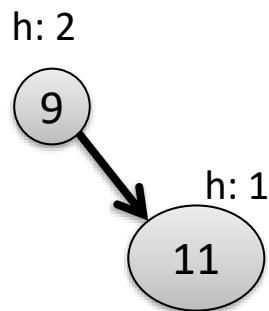
- **Exercício 4:**

- Faça a exclusão dos nós 4, 1, 8 e 9 na seguinte árvore AVL:

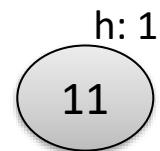


- **Exercício 4:**

- Faça a exclusão dos nós 4, 1, 8 e 9 na seguinte árvore AVL:



- **Exercício 4:**
 - Faça a exclusão dos nós 4, 1, 8 e 9 na seguinte árvore AVL:



Árvores AVL

FIM