

# ALGORITMOS EM GRAFOS

---

*Bacharelado em Sistemas da Informação*

*Prof. Marco André Abud Kappel*

**Aula 8 – Árvores AVL**

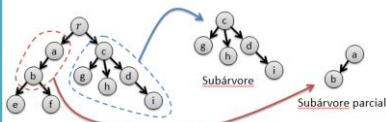
# Árvores Balanceadas

- Nas últimas aulas:

Grafos



Árvores



Pré-ordem

Em ordem simétrica:

Pós-ordem

Árvores Binárias de Busca

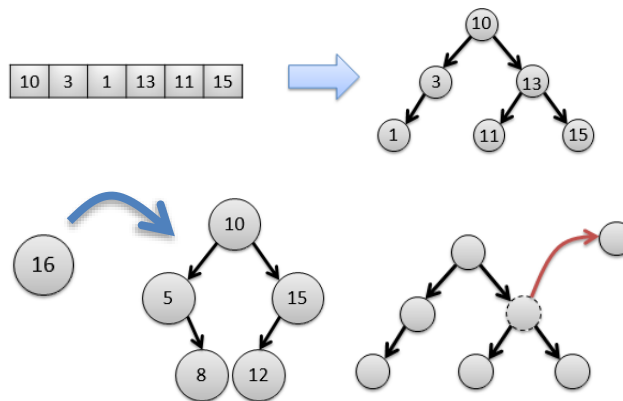


ABB  
Balanceadas

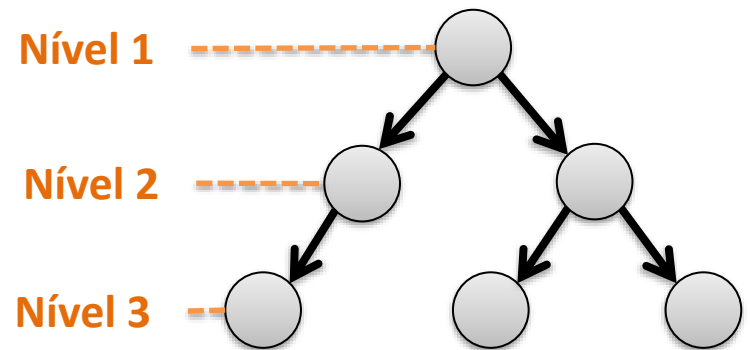
Hoje

Árvores AVL

Árvores Rubro-  
Negras

# Árvores Binárias de Busca

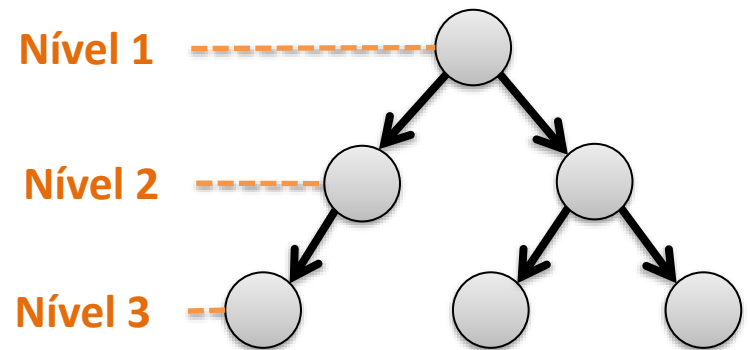
- **Análise de complexidade**
  - O objetivo é identificar o **custo de acesso** a uma chave desejada.
  - A análise de **complexidade** da busca numa ABB é simples:
    - O tempo gasto em **cada nível** é  $O(1)$ .
    - Neste caso, qual será o **maior número de níveis** necessários percorrer para encontrar um elemento?



# Árvores Binárias de Busca

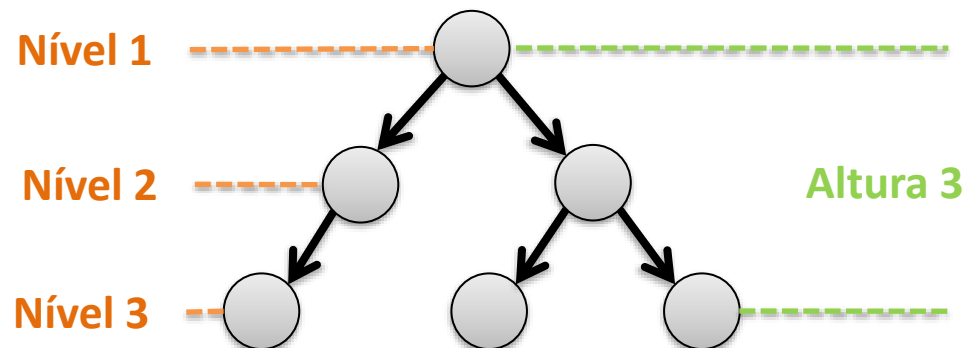
- **Análise de complexidade**

- O objetivo é identificar o **custo de acesso** a uma chave desejada.
- A análise de **complexidade** da busca numa ABB é simples:
  - O tempo gasto em **cada nível** é  $O(1)$ .
  - Neste caso, qual será o **maior número de níveis** necessários percorrer para encontrar um elemento?
  - O maior número de níveis será igual à **altura** da árvore.



# Árvores Binárias de Busca

- **Análise de complexidade**
  - Para determinar a **complexidade** do algoritmo de busca em uma ABB, basta observar que, em cada passo, é efetuado um **número constante de operações**.
  - O **número de operações** será, exatamente, o **nível** em que o elemento se encontra.
  - No pior caso, o elemento está em um **nível igual à altura da árvore**.



# Árvores Binárias de Busca

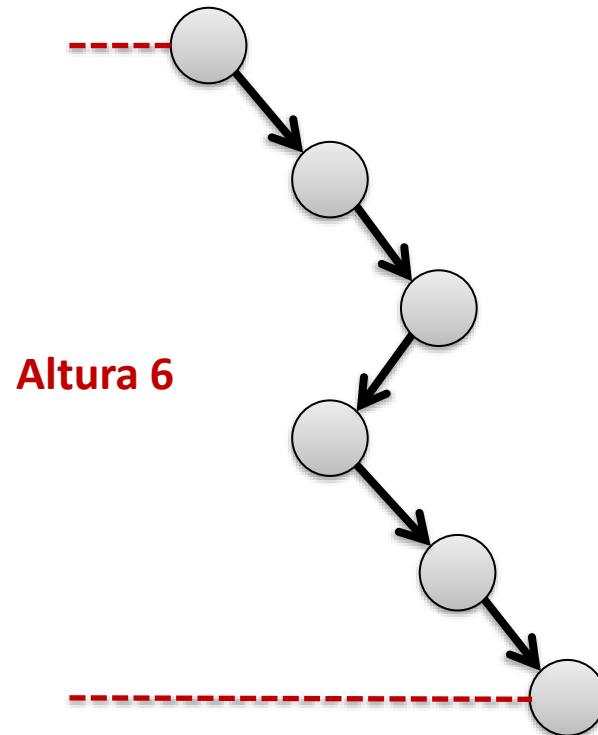
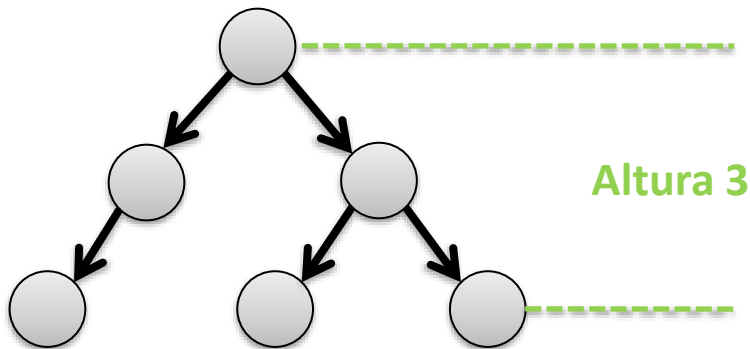
---

- **Análise de complexidade**
  - Ou seja, a **complexidade da busca** em uma ABB é  $O(h)$ .
  - A eficiência do algoritmo será **proporcional à altura da árvore**.
  - Portanto, é conveniente tentar uma **construção** da árvore de modo a obtê-la com **altura mínima**.
  - A melhor característica que uma árvore pode ter, então, é ser **completa**.

# Árvores Binárias de Busca

- **Análise de complexidade**

- Por exemplo:



# Árvores Binárias de Busca

- **Análise de complexidade**

- A **complexidade** da busca em uma ABB será  $O(h)$ .
- A altura de uma **árvore completa** com  $n$  nós será:



$h$	$n_{MAX}$
1	



# Árvores Binárias de Busca

- **Análise de complexidade**

- A **complexidade** da busca em uma ABB será  $O(h)$ .
- A altura de uma **árvore completa** com  $n$  nós será:



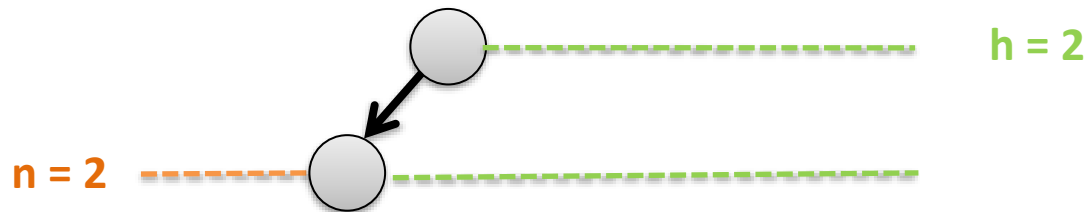
$h$	$n_{MAX}$
1	1

# Árvores Binárias de Busca

- **Análise de complexidade**

- A **complexidade** da busca em uma ABB será  $O(h)$ .
- A altura de uma **árvore completa** com  $n$  nós será:

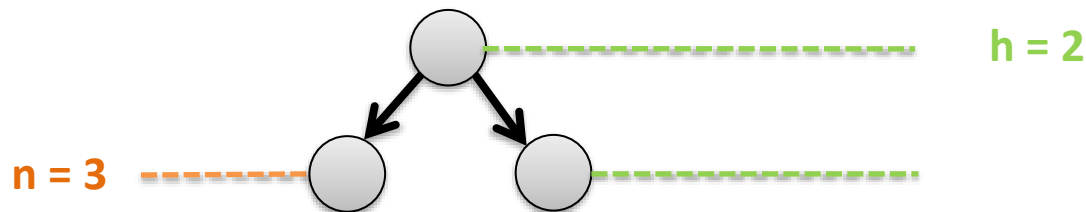
$h$	$n_{MAX}$
1	1
2	



# Árvores Binárias de Busca

- **Análise de complexidade**

- A **complexidade** da busca em uma ABB será  $O(h)$ .
- A altura de uma **árvore completa** com  $n$  nós será:



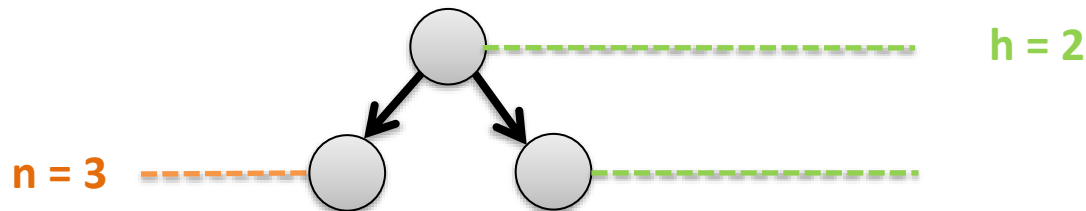
$h$	$n_{MAX}$
1	1
2	

# Árvores Binárias de Busca

- **Análise de complexidade**

- A **complexidade** da busca em uma ABB será  $O(h)$ .
- A altura de uma **árvore completa** com  $n$  nós será:

$h$	$n_{MAX}$
1	1
2	3

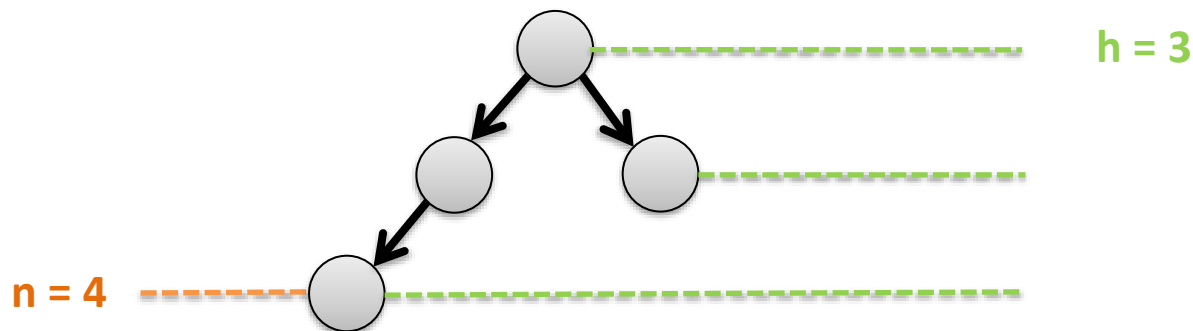


# Árvores Binárias de Busca

- **Análise de complexidade**

- A **complexidade** da busca em uma ABB será  $O(h)$ .
- A altura de uma **árvore completa** com  $n$  nós será:

$h$	$n_{MAX}$
1	1
2	3
3	

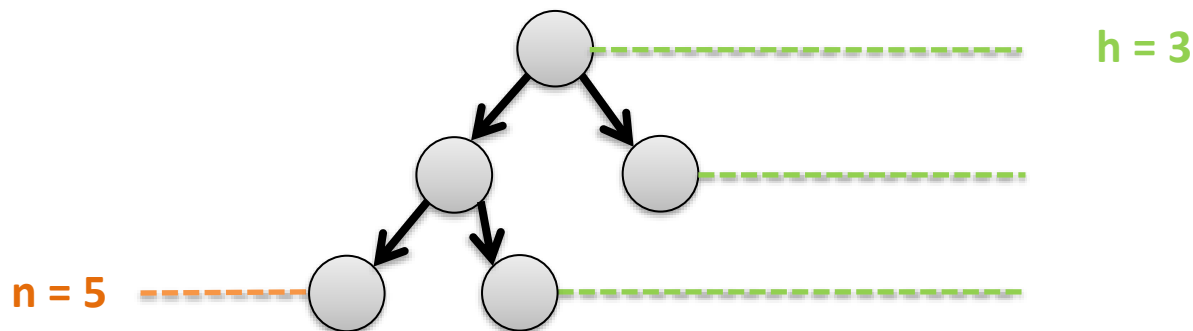


# Árvores Binárias de Busca

- **Análise de complexidade**

- A **complexidade** da busca em uma ABB será  $O(h)$ .
- A altura de uma **árvore completa** com  $n$  nós será:

$h$	$n_{MAX}$
1	1
2	3
3	

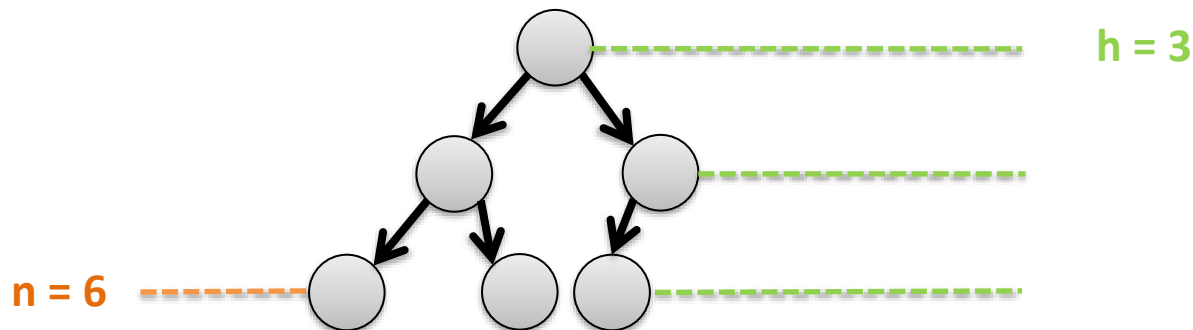


# Árvores Binárias de Busca

- **Análise de complexidade**

- A **complexidade** da busca em uma ABB será  $O(h)$ .
- A altura de uma **árvore completa** com  $n$  nós será:

$h$	$n_{MAX}$
1	1
2	3
3	

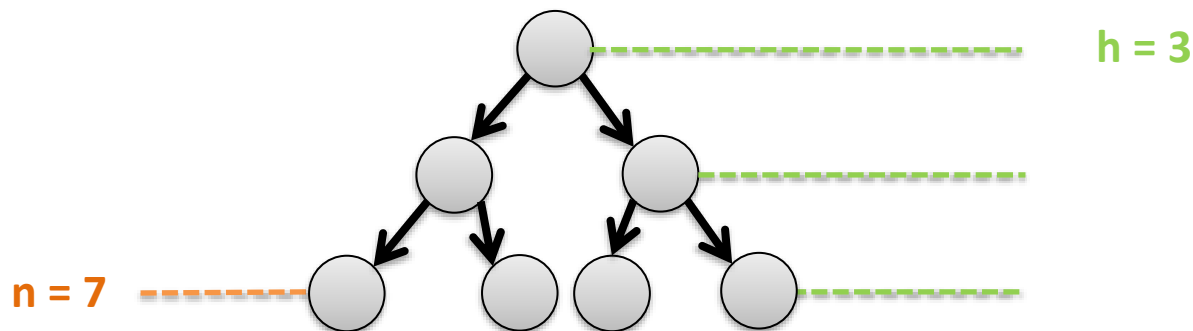


# Árvores Binárias de Busca

- **Análise de complexidade**

- A **complexidade** da busca em uma ABB será  $O(h)$ .
- A altura de uma **árvore completa** com  $n$  nós será:

$h$	$n_{MAX}$
1	1
2	3
3	



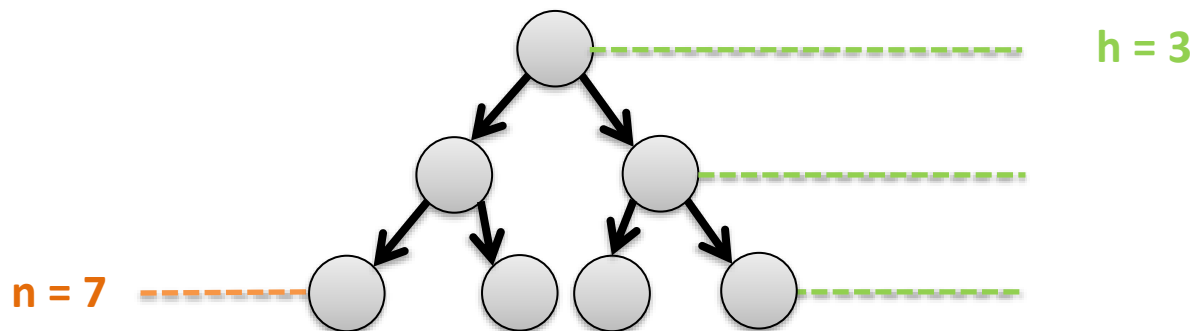


# Árvores Binárias de Busca

- **Análise de complexidade**

- A **complexidade** da busca em uma ABB será  $O(h)$ .
- A altura de uma **árvore completa** com  $n$  nós será:

$h$	$n_{MAX}$
1	1
2	3
3	7

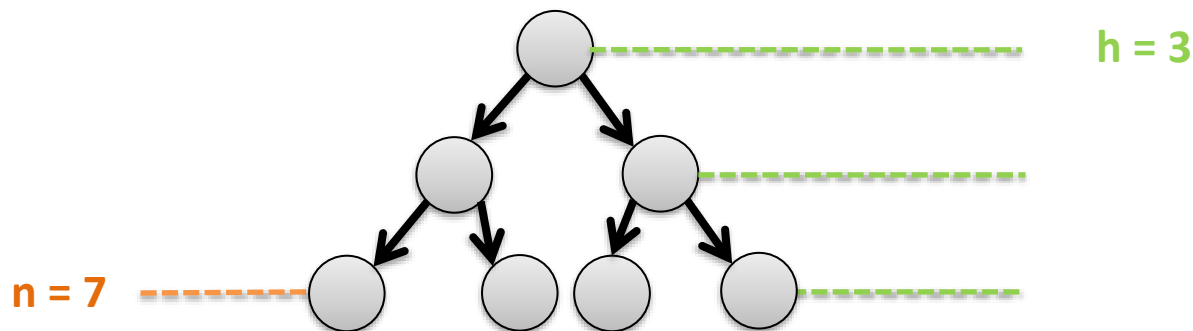


# Árvores Binárias de Busca

- **Análise de complexidade**

- A **complexidade** da busca em uma ABB será  $O(h)$ .
- A altura de uma **árvore completa** com  $n$  nós será:

$h$	$n_{MAX}$
1	1
2	3
3	7
4	?

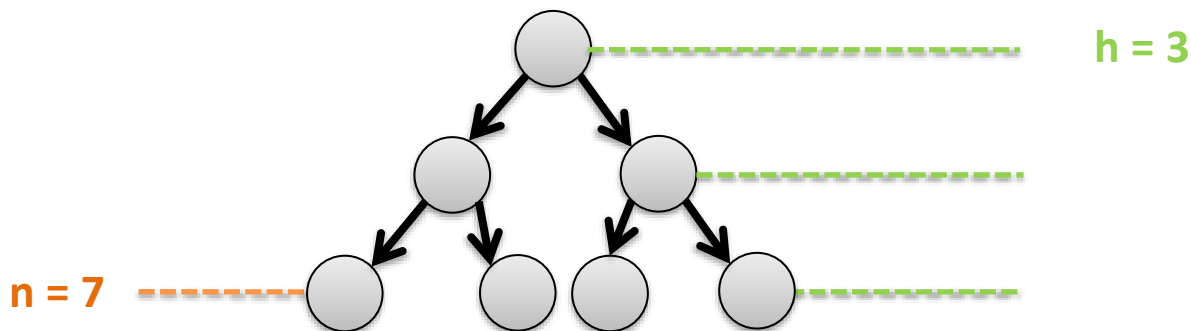


# Árvores Binárias de Busca

- **Análise de complexidade**

- A **complexidade** da busca em uma ABB será  $O(h)$ .
- A altura de uma **árvore completa** com  $n$  nós será:

$h$	$n_{MAX}$
1	1
2	3
3	7
4	?



$$n_{MAX} = 2^h - 1$$

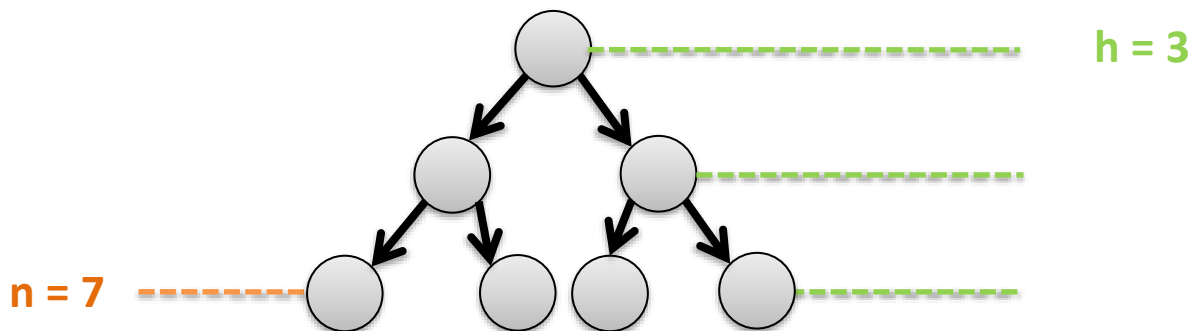
O máximo de nós  $n$  em uma ABB completa de altura  $h$  é a soma do número de nós a cada nível!

# Árvores Binárias de Busca

- **Análise de complexidade**

- A **complexidade** da busca em uma ABB será  $O(h)$ .
- A altura de uma **árvore completa** com  $n$  nós será:

$h$	$n_{MAX}$
1	1
2	3
3	7
4	15

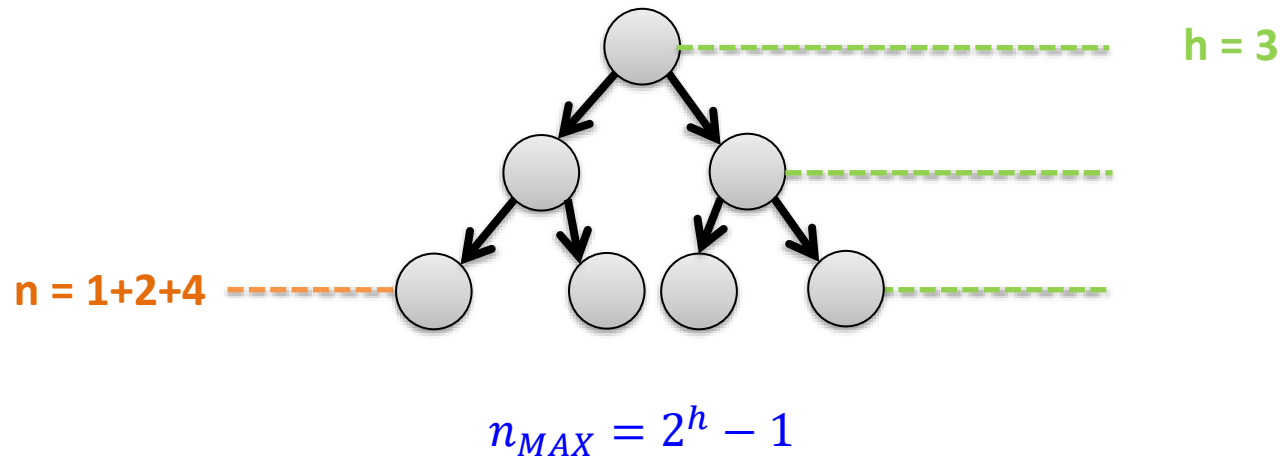


$$n_{MAX} = 2^h - 1$$

O máximo de nós  $n$  em uma ABB completa de altura  $h$  é a soma do número de nós a cada nível!

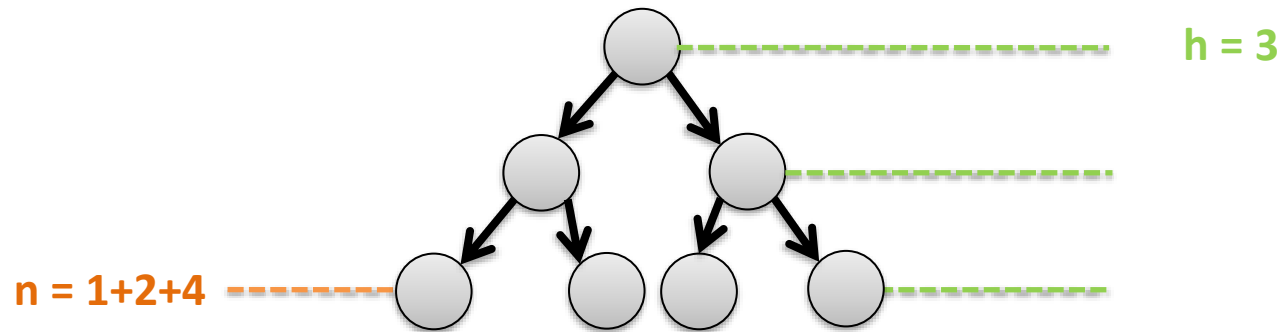
# Árvores Binárias de Busca

- Análise de complexidade



# Árvores Binárias de Busca

- Análise de complexidade

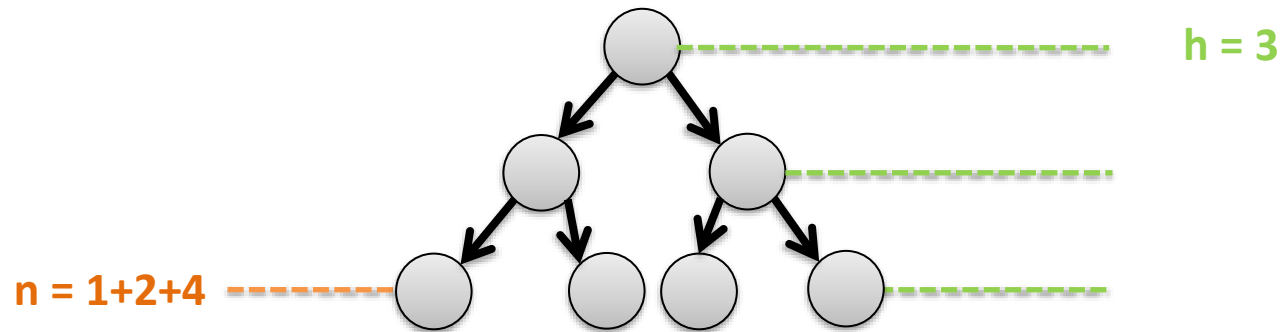


$$n_{MAX} = 2^h - 1$$

$$n_{MAX} + 1 = 2^h$$

# Árvores Binárias de Busca

- Análise de complexidade



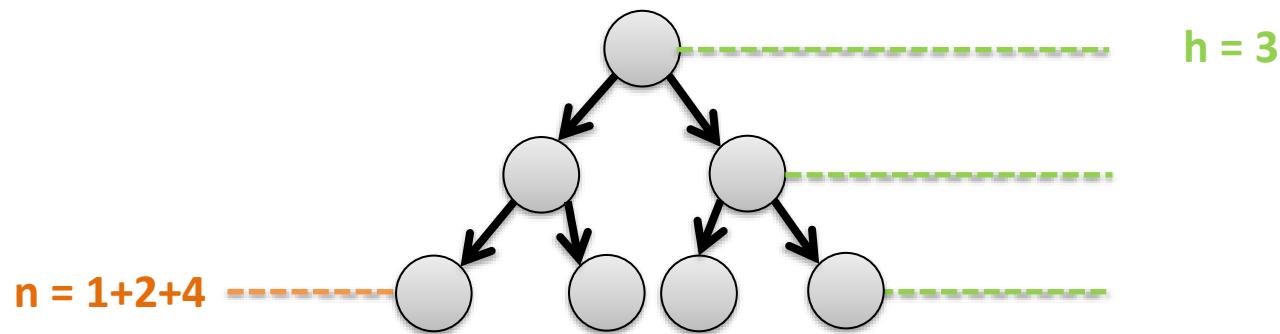
$$n_{MAX} = 2^h - 1$$

$$n_{MAX} + 1 = 2^h$$

$$\log_2(n_{MAX} + 1) = \log_2(2^h)$$

# Árvores Binárias de Busca

- Análise de complexidade



$$n_{MAX} = 2^h - 1$$

$$n_{MAX} + 1 = 2^h$$

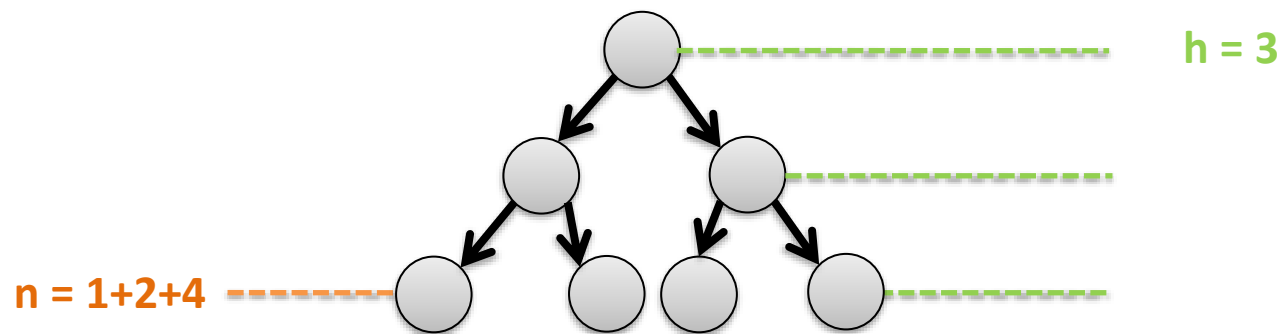
$$\log_2(n_{MAX} + 1) = \log_2(2^h)$$

$$\log_2(n_{MAX} + 1) = h$$



# Árvores Binárias de Busca

- Análise de complexidade



$$n_{MAX} = 2^h - 1$$

$$n_{MAX} + 1 = 2^h$$

$$\log_2(n_{MAX} + 1) = \log_2(2^h)$$

$$\log_2(n_{MAX} + 1) = h$$

$$h = \log_2(n_{MAX} + 1)$$

Altura máxima de uma  
árvore completa!

# Árvores Binárias de Busca

---

- **Análise de complexidade**
  - Assim, a complexidade da busca em uma ABB completa será  $O(\log n)$ , muito melhor que  $O(n)$ .
  - Precisamos, então, de uma forma de controlar as **inserções** e **remoções** na árvore de maneira que ela se mantenha sempre próximo a uma árvore **completa**.
  - Com esse objetivo, começaremos a ver as **árvores balanceadas**.

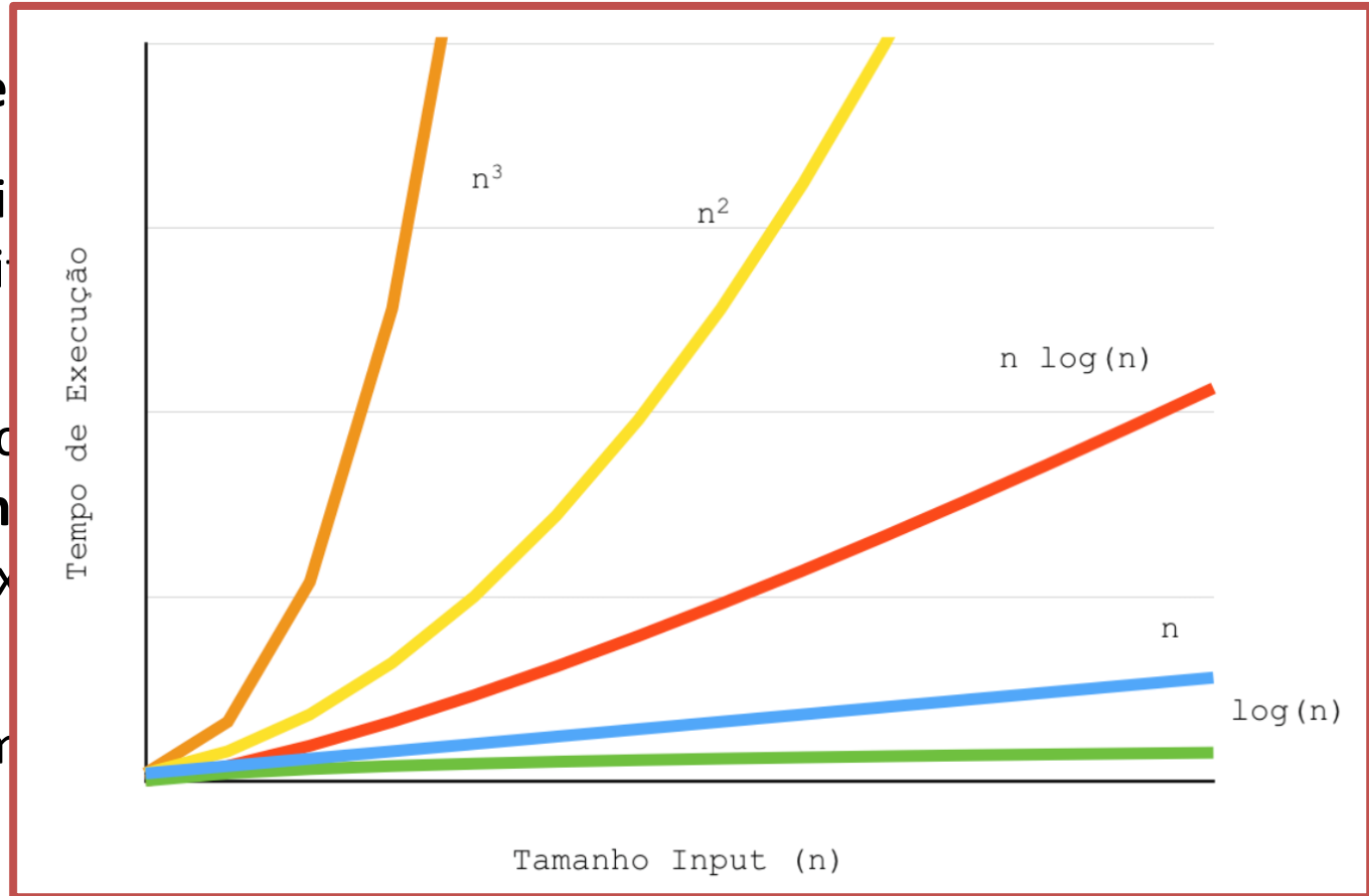
# Árvores Binárias de Busca

- **Análise**

- Assim
  - muito

- Prec
  - rem**
  - próx

- Com



$O(\log n)$ ,

**ações e**  
sempre

**as.**

# Árvores Binárias de Busca

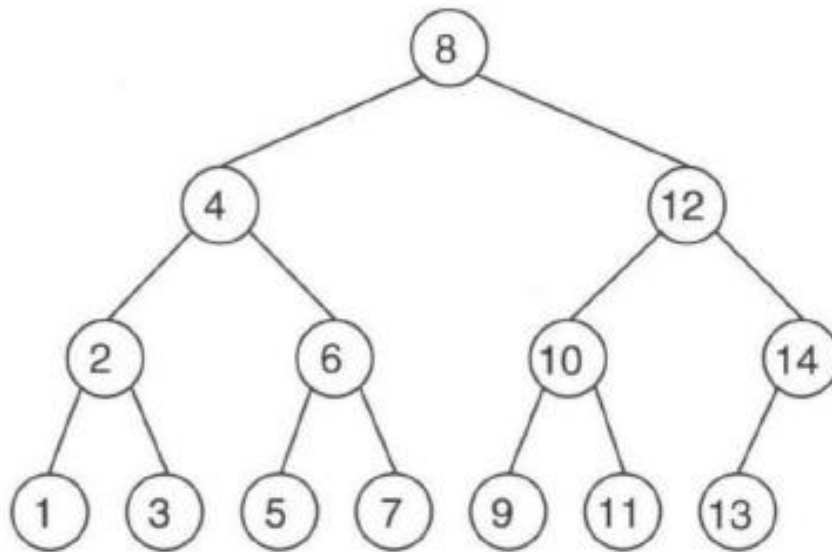
---

- **Análise de complexidade**
  - Assim, a complexidade da busca em uma ABB completa será  $O(\log n)$ , muito melhor que  $O(n)$ .
  - Precisamos, então, de uma forma de controlar as **inserções** e **remoções** na árvore de maneira que ela se mantenha sempre próximo a uma árvore **completa**.
  - Com esse objetivo, começaremos a ver as **árvores balanceadas**.

# Árvores Balanceadas

- **Buscando uma solução**

- O ideal seria **remodelar** as árvores em **árvores completas** sempre que necessário.
- Esse **rearranjo**, porém, pode ser **custoso** –  $O(n)$ .
- Exemplo:



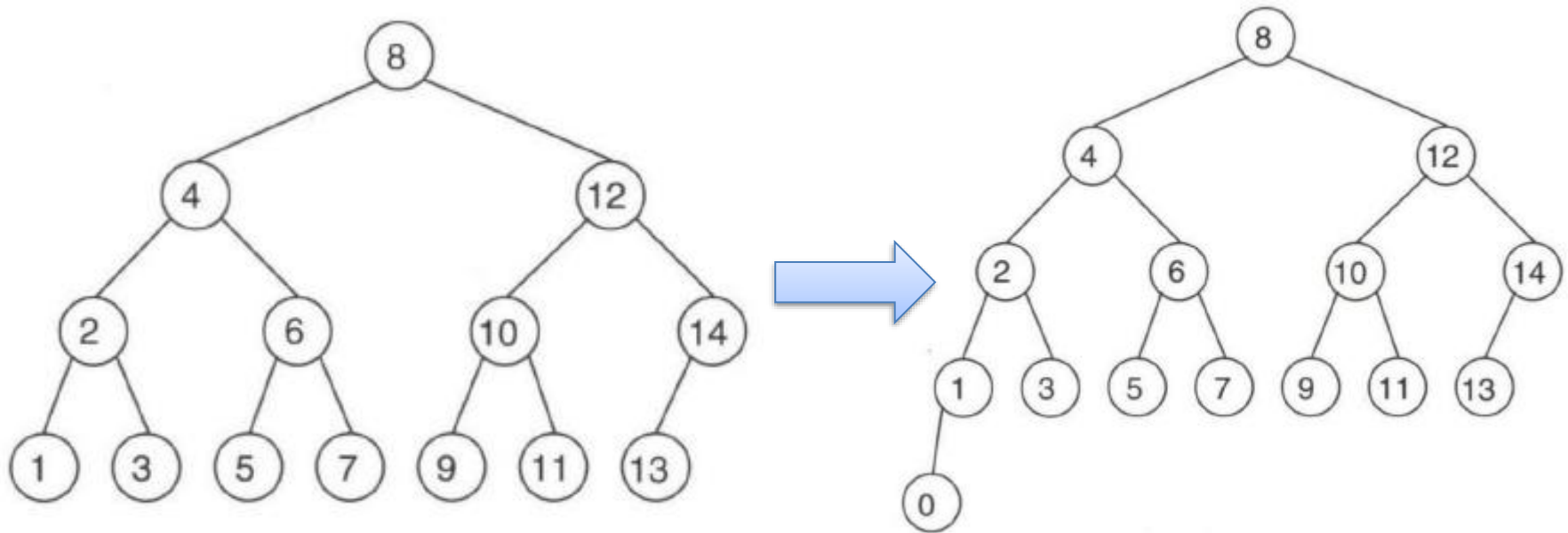
Inserir 15 → OK

Inserir 0 → ???

# Árvores Balanceadas

- Buscando uma solução

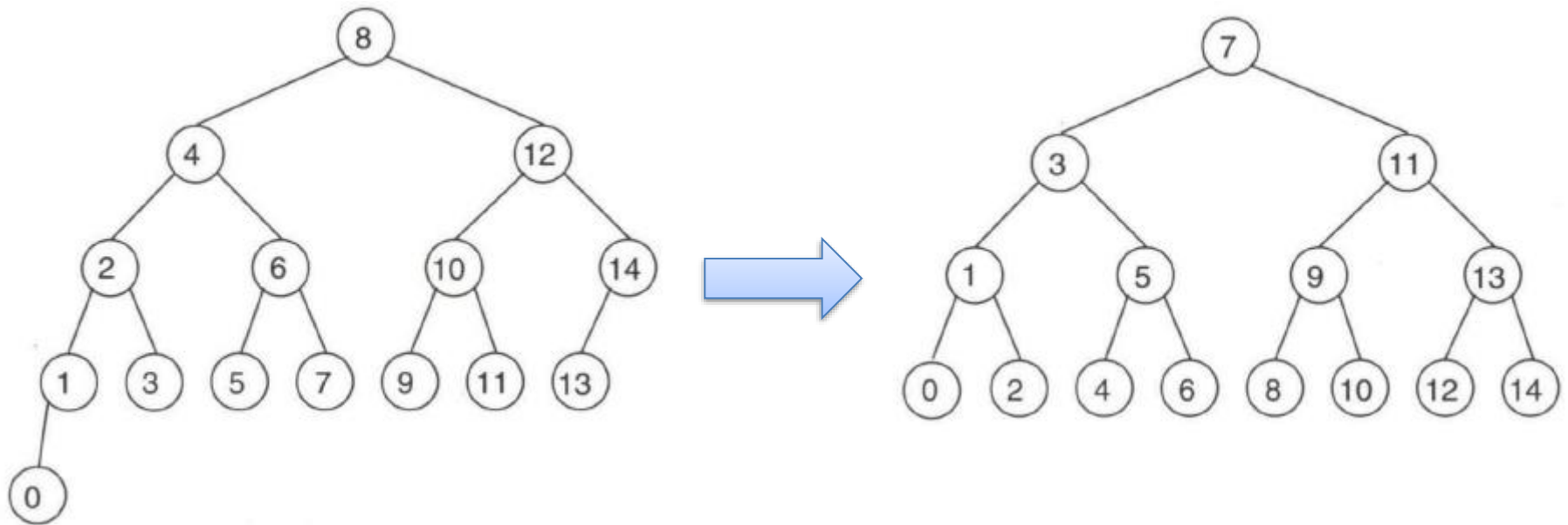
- Inserindo 0:



- A árvore **não é mais completa**. Vamos tentar reorganizar:

# Árvores Balanceadas

- **Buscando uma solução**
  - Rearranjo para tornar a árvore completa:



- **Todos** os nós mudam de posição!!!

# Árvores Balanceadas

---

- **Balanceamento**

- A solução é **balancear cada inserção!**
  - **Nova estratégia:** Diminuir a **diferença de altura** entre a subárvore à **esquerda** e a subárvore à **direita** de cada nó.
  - A maior parte das **árvores balanceadas (graduadas)** utilizam um **campo** a mais em cada nó: o **rank**.
  - O **rank** pode ser a **altura** do nó, ou algo **relacionado** a isso.
- De acordo com a **lógica** da árvore balanceada, serão efetuadas **rotações**.



# Árvores Balanceadas

---

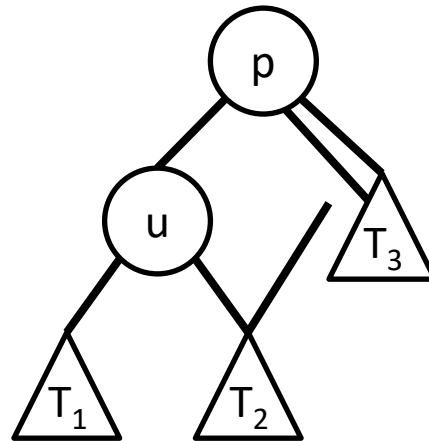
- **Rotações**

- Operações de **reestruturação** usadas em **todas** as árvores balanceadas.
- Quatro tipos:
  - I. Rotação à direita
  - II. Rotação à esquerda
  - III. Rotação dupla à direita
  - IV. Rotação dupla à esquerda

# Árvores Balanceadas

- **Rotações**

- I. Rotação à direita (em p)



# Árvores Balanceadas

- Rotações

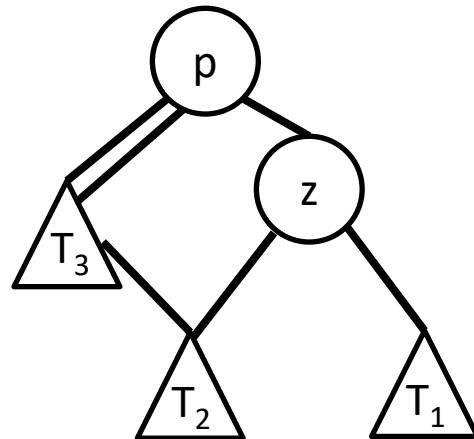
- I. Rotação à direita (em p)



# Árvores Balanceadas

- **Rotações**

- II. Rotação à esquerda (em p)

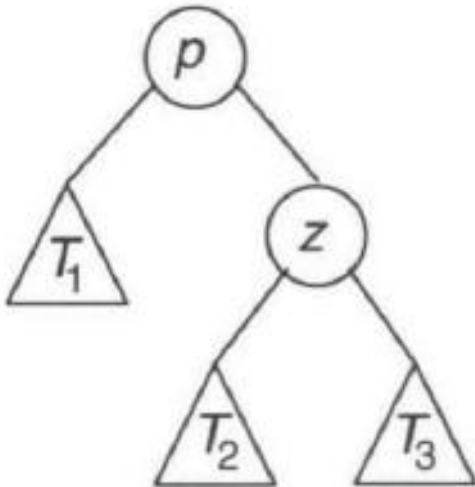


# Árvores Balanceadas

- Rotações

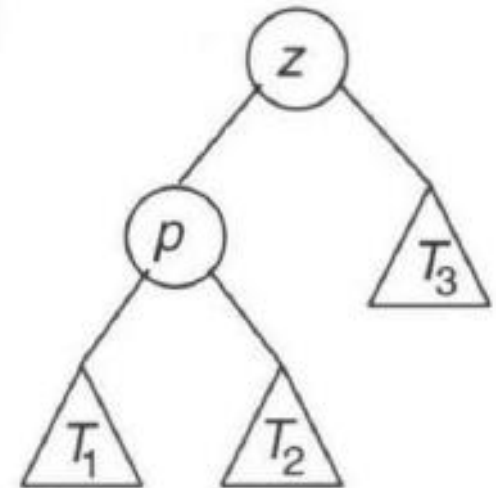
- II. Rotação à esquerda (em  $p$ )

(c)



→  
rotação  
esquerda

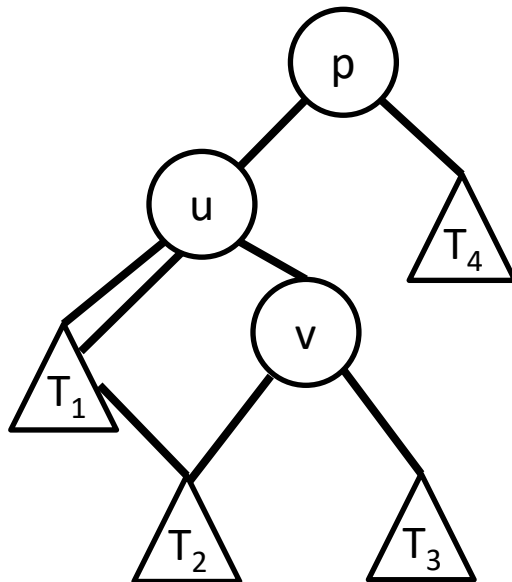
(d)



# Árvores Balanceadas

- **Rotações**

## III. Rotação dupla à direita (em p)

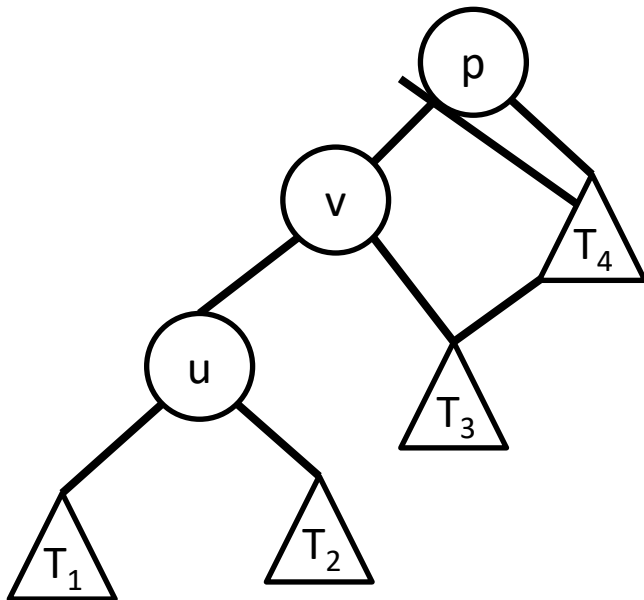


Obs: Também conhecida como rotação **esquerda-direita** (esquerda no filhoEsq e direita em p).

# Árvores Balanceadas

- **Rotações**

## III. Rotação dupla à direita (em p)

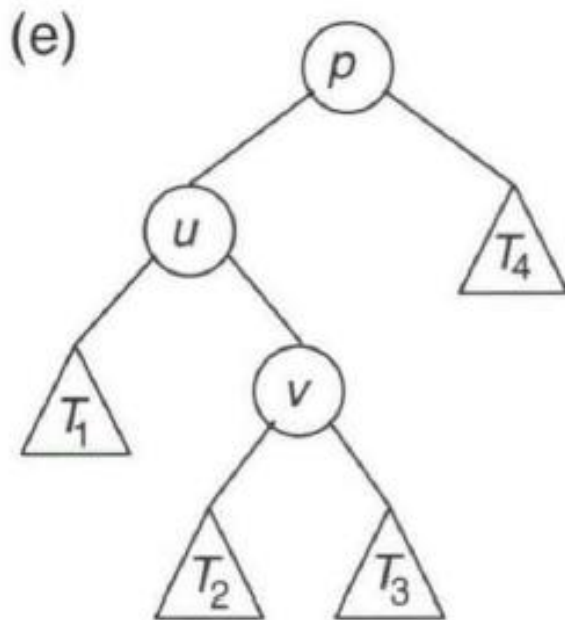


Obs: Também conhecida como rotação **esquerda-direita** (esquerda no filhoEsq e direita em p).

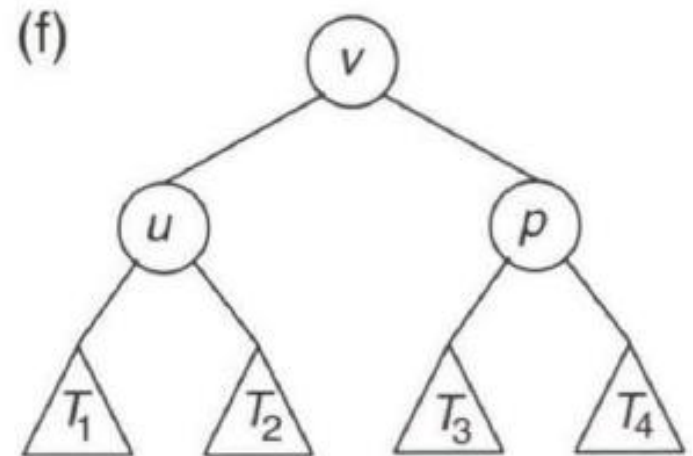
# Árvores Balanceadas

- Rotações

## III. Rotação dupla à direita (em p)



→  
rotação  
dupla  
direita



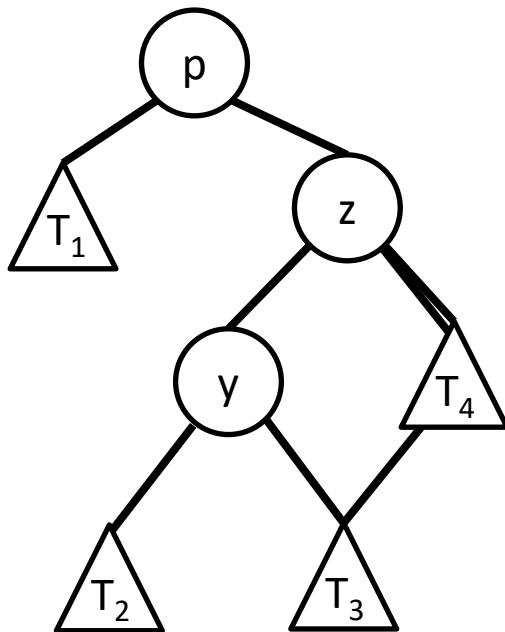
Obs: Também conhecida como rotação **esquerda-direita** (esquerda no filho Esq e direita em p).



# Árvores Balanceadas

- Rotações

## IV. Rotação dupla à esquerda (em p)

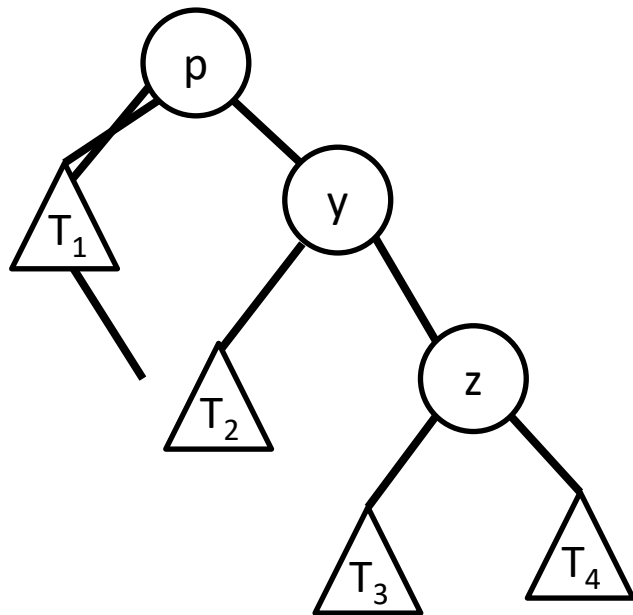


Obs: Também conhecida como rotação **direita-esquerda** (direita no filhoDir e esquerda em p).

# Árvores Balanceadas

- Rotações

## IV. Rotação dupla à esquerda (em p)

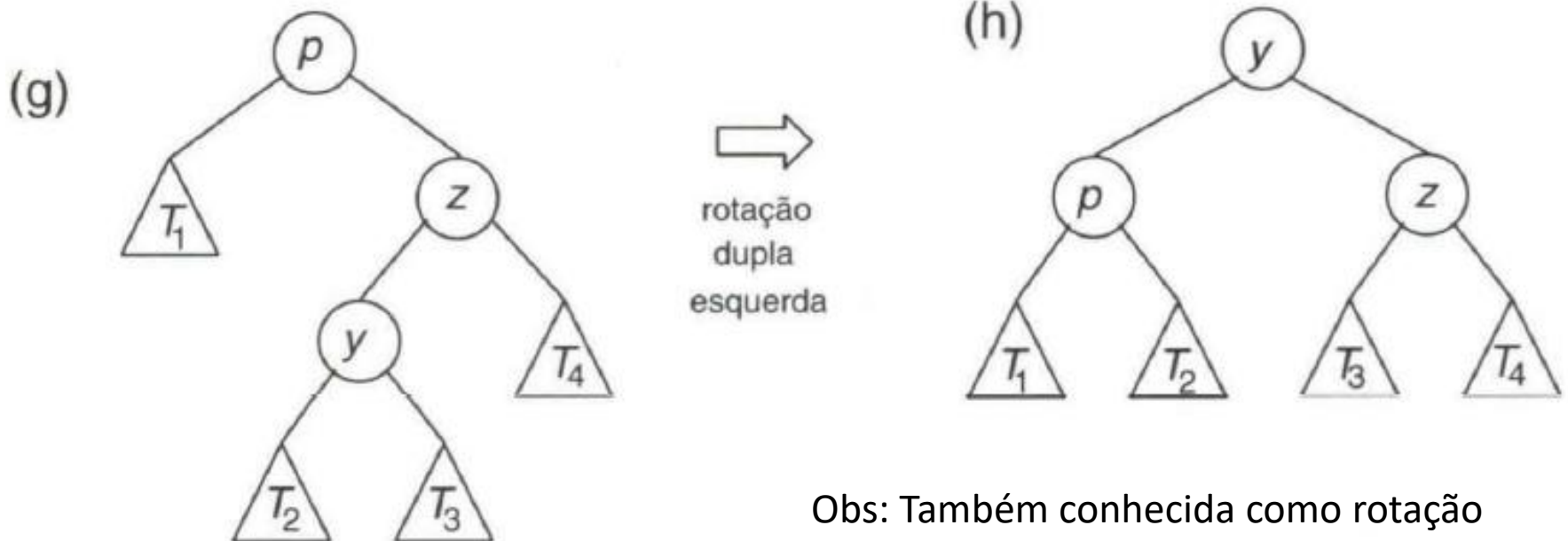


Obs: Também conhecida como rotação **direita-esquerda** (direita no filhoDir e esquerda em p).

# Árvores Balanceadas

- Rotações

## IV. Rotação dupla à esquerda (em p)



Obs: Também conhecida como rotação **direita-esquerda** (direita no filhoDir e esquerda em p).

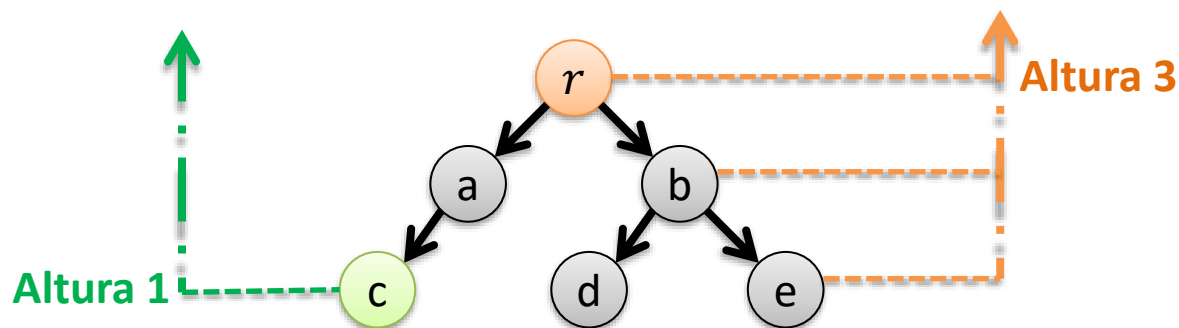
# Árvores AVL

---

# Árvores AVL

- **Introdução**

- É o tipo mais **antigo** de árvore balanceada (1962).
- A árvore foi nomeada por seus criadores: **Adelson-Velskii & Landis**.
- É uma árvore **graduada**, em que o **rank** é exatamente a **altura h** do nó.



Nó	Rank
r	3
a	2
b	2
c	1
d	1
e	1

# Árvores AVL

- **Definição**

- **Regra:** Para qualquer nó  $v$  de uma árvore  $T$ , as alturas

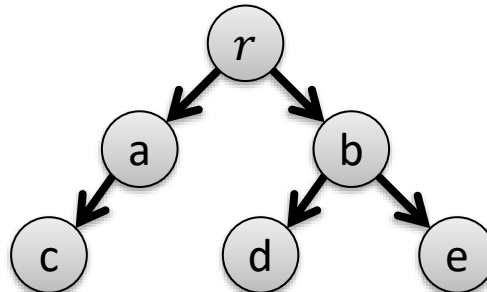
- $h_E(v)$ : altura da subárvore esquerda de  $v$

- $h_D(v)$ : altura da subárvore direita de  $v$

- diferem, em módulo, de até uma unidade:

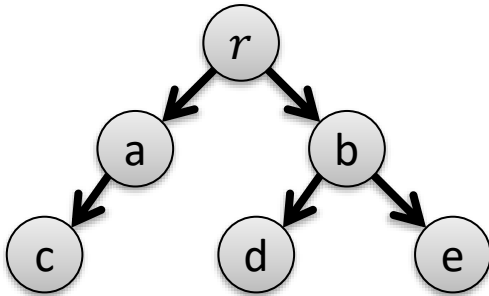
$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$

- Exemplo:



# Árvores AVL

- **Definição**
  - Exemplo: Esta árvore é AVL?

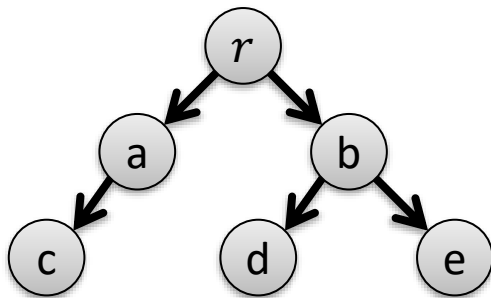


# Árvores AVL

- **Definição**

- Exemplo: Esta árvore é AVL?

$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$



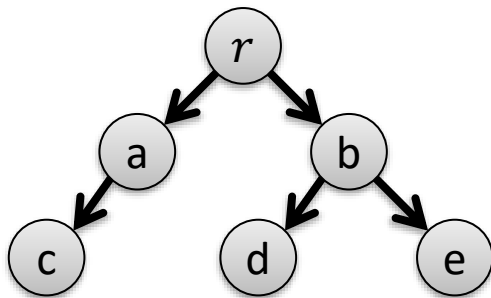


# Árvores AVL

- **Definição**

- Exemplo: Esta árvore é AVL?

$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$



*nó r:*

*nó a:*

*nó b:*

*nó c:*

*nó d:*

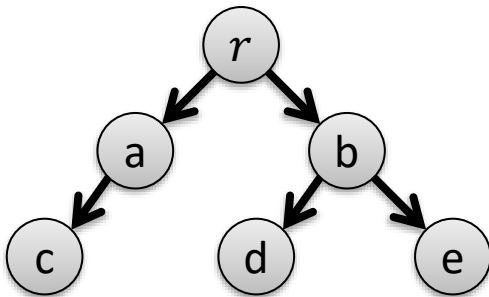
*nó e:*

# Árvores AVL

- **Definição**

$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$

- Exemplo: Esta árvore é AVL?



nó  $r$ :  $|h_E(r) - h_D(r)|$

nó  $a$ :

nó  $b$ :

nó  $c$ :

nó  $d$ :

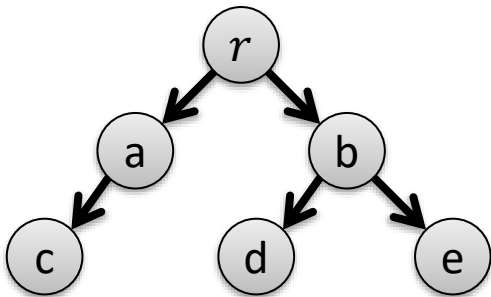
nó  $e$ :

# Árvores AVL

- **Definição**

$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$

– Exemplo: Esta árvore é AVL?



nó  $r$ :  $|h_E(r) - h_D(r)| = |2 - 2| = 0 < 2$

nó  $a$ :

nó  $b$ :

nó  $c$ :

nó  $d$ :

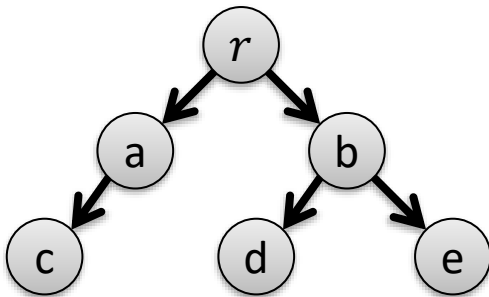
nó  $e$ :

# Árvores AVL

- Definição

$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$

– Exemplo: Esta árvore é AVL?



nó  $r$ :  $|h_E(r) - h_D(r)| = |2 - 2| = 0 < 2$

nó  $a$ :  $|h_E(a) - h_D(a)|$

nó  $b$ :

nó  $c$ :

nó  $d$ :

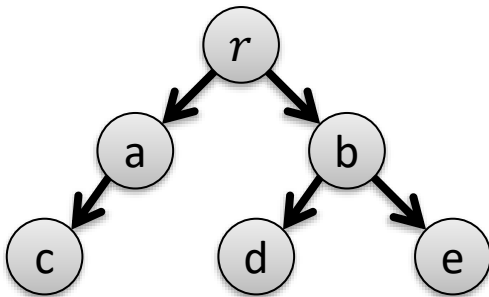
nó  $e$ :

# Árvores AVL

- **Definição**

$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$

– Exemplo: Esta árvore é AVL?



nó  $r$ :  $|h_E(r) - h_D(r)| = |2 - 2| = 0 < 2$

nó  $a$ :  $|h_E(a) - h_D(a)| = |1 - 0| = 1 < 2$

nó  $b$ :

nó  $c$ :

nó  $d$ :

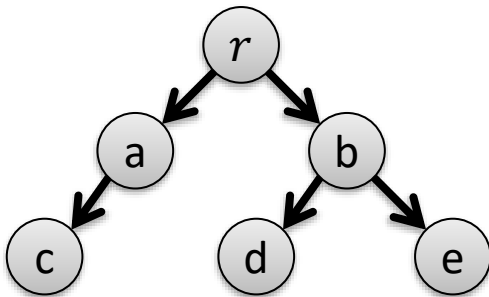
nó  $e$ :

# Árvores AVL

- Definição

$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$

– Exemplo: Esta árvore é AVL?



nó  $r$ :  $|h_E(r) - h_D(r)| = |2 - 2| = 0 < 2$

nó  $a$ :  $|h_E(a) - h_D(a)| = |1 - 0| = 1 < 2$

nó  $b$ :  $|h_E(b) - h_D(b)|$

nó  $c$ :

nó  $d$ :

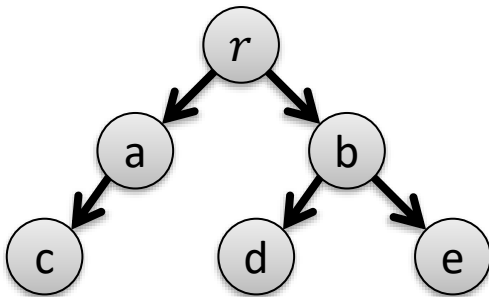
nó  $e$ :

# Árvores AVL

- Definição

$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$

– Exemplo: Esta árvore é AVL?



*nó r:*  $|h_E(r) - h_D(r)| = |2 - 2| = 0 < 2$

*nó a:*  $|h_E(a) - h_D(a)| = |1 - 0| = 1 < 2$

*nó b:*  $|h_E(b) - h_D(b)| = |1 - 1| = 0 < 2$

*nó c:*

*nó d:*

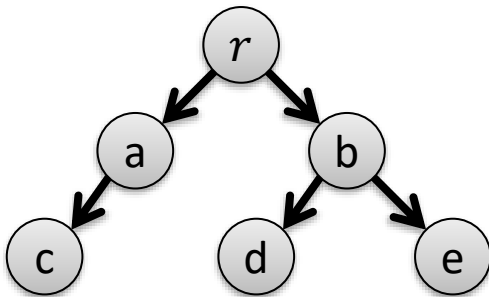
*nó e:*

# Árvores AVL

- Definição

$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$

– Exemplo: Esta árvore é AVL?



nó  $r$ :  $|h_E(r) - h_D(r)| = |2 - 2| = 0 < 2$

nó  $a$ :  $|h_E(a) - h_D(a)| = |1 - 0| = 1 < 2$

nó  $b$ :  $|h_E(b) - h_D(b)| = |1 - 1| = 0 < 2$

nó  $c$ :  $|h_E(c) - h_D(c)|$

nó  $d$ :

nó  $e$ :

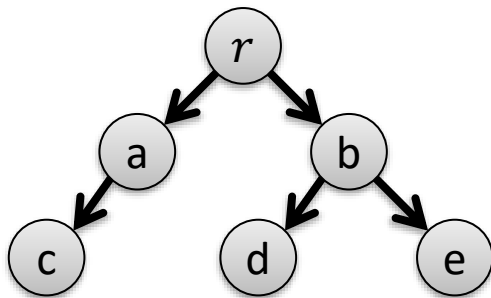


# Árvores AVL

- Definição

$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$

– Exemplo: Esta árvore é AVL?



nó  $r$ :  $|h_E(r) - h_D(r)| = |2 - 2| = 0 < 2$

nó  $a$ :  $|h_E(a) - h_D(a)| = |1 - 0| = 1 < 2$

nó  $b$ :  $|h_E(b) - h_D(b)| = |1 - 1| = 0 < 2$

nó  $c$ :  $|h_E(c) - h_D(c)| = |0 - 0| = 0 < 2$

nó  $d$ :

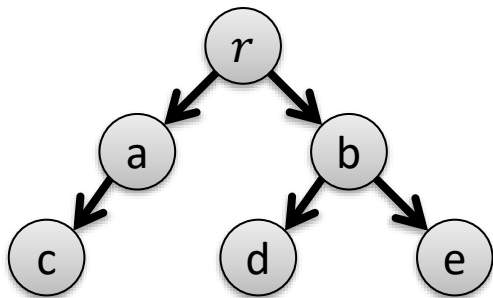
nó  $e$ :

# Árvores AVL

- Definição

$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$

– Exemplo: Esta árvore é AVL?



$$\text{nó } r: |h_E(r) - h_D(r)| = |2 - 2| = 0 < 2$$

$$\text{nó } a: |h_E(a) - h_D(a)| = |1 - 0| = 1 < 2$$

$$\text{nó } b: |h_E(b) - h_D(b)| = |1 - 1| = 0 < 2$$

$$\text{nó } c: |h_E(c) - h_D(c)| = |0 - 0| = 0 < 2$$

$$\text{nó } d: |h_E(d) - h_D(d)|$$

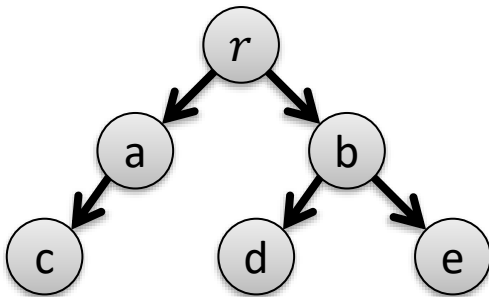
nó e:

# Árvores AVL

- Definição

$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$

– Exemplo: Esta árvore é AVL?



nó  $r$ :  $|h_E(r) - h_D(r)| = |2 - 2| = 0 < 2$

nó  $a$ :  $|h_E(a) - h_D(a)| = |1 - 0| = 1 < 2$

nó  $b$ :  $|h_E(b) - h_D(b)| = |1 - 1| = 0 < 2$

nó  $c$ :  $|h_E(c) - h_D(c)| = |0 - 0| = 0 < 2$

nó  $d$ :  $|h_E(d) - h_D(d)| = |0 - 0| = 0 < 2$

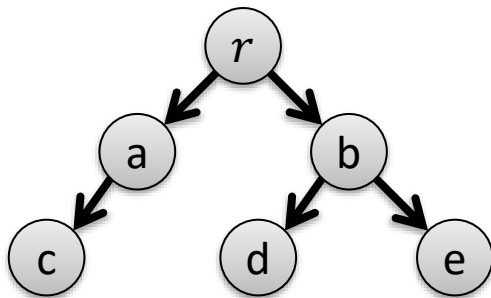
nó  $e$ :

# Árvores AVL

- Definição

$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$

– Exemplo: Esta árvore é AVL?



$$\text{nó } r: |h_E(r) - h_D(r)| = |2 - 2| = 0 < 2$$

$$\text{nó } a: |h_E(a) - h_D(a)| = |1 - 0| = 1 < 2$$

$$\text{nó } b: |h_E(b) - h_D(b)| = |1 - 1| = 0 < 2$$

$$\text{nó } c: |h_E(c) - h_D(c)| = |0 - 0| = 0 < 2$$

$$\text{nó } d: |h_E(d) - h_D(d)| = |0 - 0| = 0 < 2$$

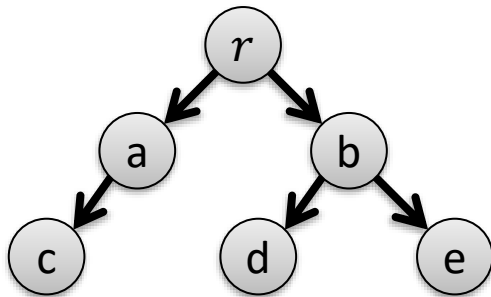
$$\text{nó } e: |h_E(e) - h_D(e)|$$

# Árvores AVL

- Definição

$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$

– Exemplo: Esta árvore é AVL?



$$\text{nó } r: |h_E(r) - h_D(r)| = |2 - 2| = 0 < 2$$

$$\text{nó } a: |h_E(a) - h_D(a)| = |1 - 0| = 1 < 2$$

$$\text{nó } b: |h_E(b) - h_D(b)| = |1 - 1| = 0 < 2$$

$$\text{nó } c: |h_E(c) - h_D(c)| = |0 - 0| = 0 < 2$$

$$\text{nó } d: |h_E(d) - h_D(d)| = |0 - 0| = 0 < 2$$

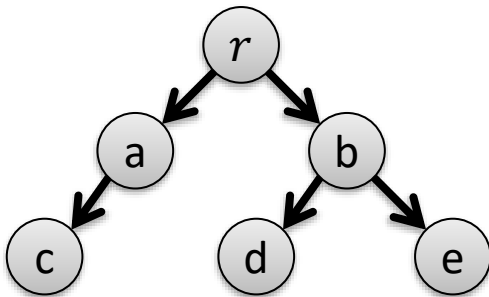
$$\text{nó } e: |h_E(e) - h_D(e)| = |0 - 0| = 0 < 2$$

# Árvores AVL

- Definição

$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$

– Exemplo: Esta árvore é AVL? [Sim](#)



$$\text{nó } r: |h_E(r) - h_D(r)| = |2 - 2| = 0 < 2$$

$$\text{nó } a: |h_E(a) - h_D(a)| = |1 - 0| = 1 < 2$$

$$\text{nó } b: |h_E(b) - h_D(b)| = |1 - 1| = 0 < 2$$

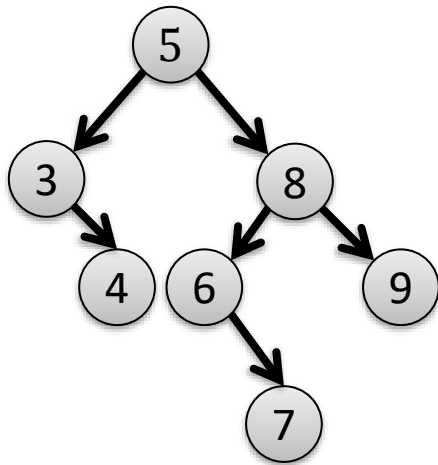
$$\text{nó } c: |h_E(c) - h_D(c)| = |0 - 0| = 0 < 2$$

$$\text{nó } d: |h_E(d) - h_D(d)| = |0 - 0| = 0 < 2$$

$$\text{nó } e: |h_E(e) - h_D(e)| = |0 - 0| = 0 < 2$$

# Árvores AVL

- **Exercício 1:**
  - Esta árvore é AVL?

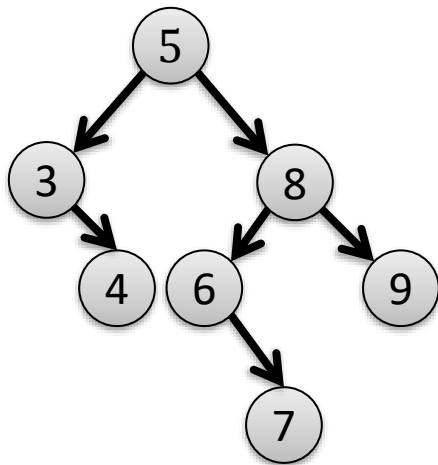


# Árvores AVL

- **Exercício 1:**

- Esta árvore é AVL?

$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$



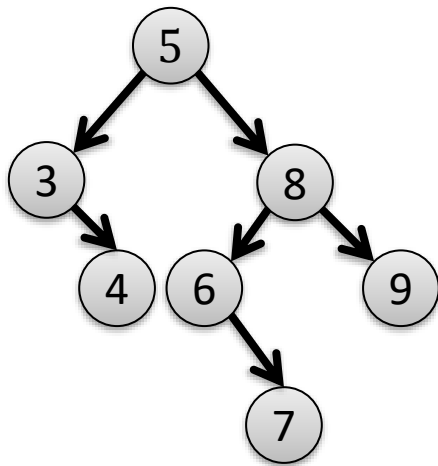


# Árvores AVL

- Exercício 1:

— Esta árvore é AVL? **Sim**

$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$



nó 5:  $|h_E(5) - h_D(5)| = |2 - 3| = 1 < 2$

nó 3:  $|h_E(3) - h_D(3)| = |0 - 1| = 1 < 2$

nó 4:  $|h_E(4) - h_D(4)| = |0 - 0| = 0 < 2$

nó 8:  $|h_E(8) - h_D(8)| = |2 - 1| = 1 < 2$

nó 9:  $|h_E(9) - h_D(9)| = |0 - 0| = 0 < 2$

nó 6:  $|h_E(6) - h_D(6)| = |0 - 1| = 0 < 2$

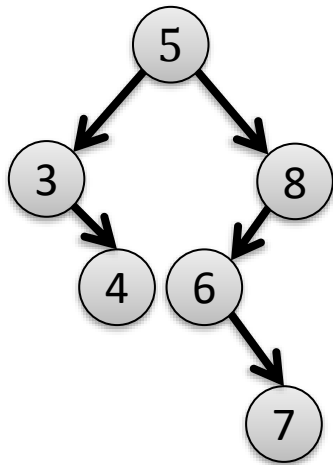
nó 7:  $|h_E(7) - h_D(7)| = |0 - 0| = 0 < 2$

# Árvores AVL

- **Exercício 2:**

- Esta árvore é AVL?

$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$

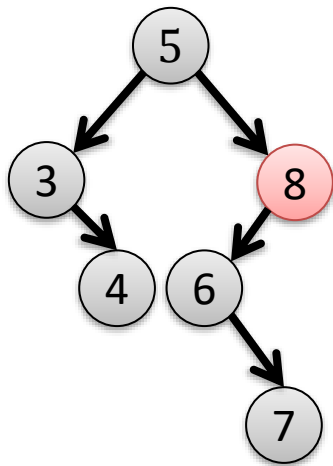


# Árvores AVL

- Exercício 2:

— Esta árvore é AVL? **Não**

$$|h_E(v) - h_D(v)| < 2$$



nó 5:  $|h_E(5) - h_D(5)| = |2 - 3| = 1 < 2$

nó 3:  $|h_E(3) - h_D(3)| = |0 - 1| = 1 < 2$

nó 4:  $|h_E(4) - h_D(4)| = |0 - 0| = 0 < 2$

nó 8:  $|h_E(8) - h_D(8)| = |2 - 0| = 2 < 2$

nó 6:  $|h_E(6) - h_D(6)| = |0 - 1| = 0 < 2$

nó 7:  $|h_E(7) - h_D(7)| = |0 - 0| = 0 < 2$

# Árvores AVL

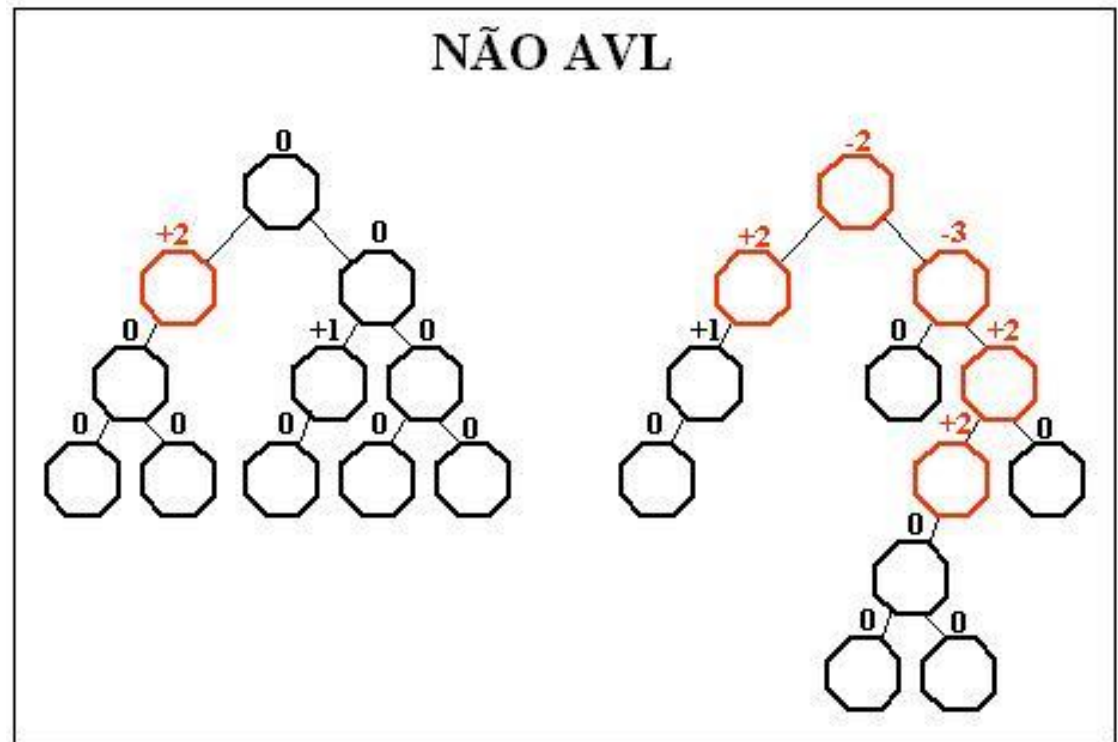
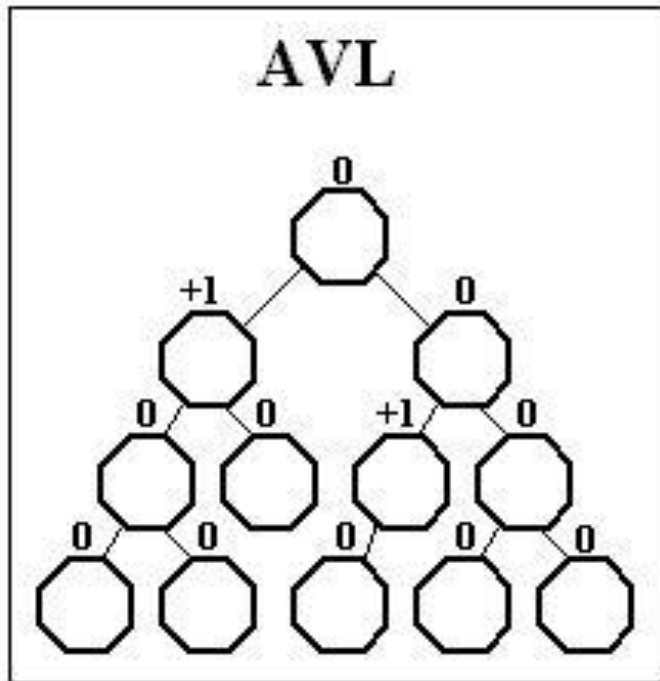
- **Fator de balanceamento**

- O **fator de balanceamento** de um nó  $X$  em uma árvore binária é definido como sendo  $h_E(X) - h_D(X)$ , onde  $h_E$  e  $h_D$  são, respectivamente as **alturas das** subárvores esquerda e direita de  $X$ .
- Para qualquer nó  $X$  em uma árvore AVL, o **fator de balanceamento** é -1, 0 ou 1.
- Para avaliar o **fator de balanceamento** de um nó  $X$ , bastaria chamar uma função “balanço( $X$ )”.

```
int balanço(TREENODE noh) {  
    if (noh == NULL)  
        return 0;  
    return altura(noh->filhoEsq) - altura(noh->filhoDir);  
}
```

# Árvores AVL

- Fator de balanceamento
  - Exemplos:



# Árvores AVL

- **Inclusão na árvore AVL**

- O processo de **inclusão** de um novo nó na árvore verificará a situação do grafo e **decidirá** quais **rotações** deverão ser aplicadas.

- Algoritmo:

- 1. Fazer a inserção em ABB simples.

- 2. Atualizar a altura do nó atual:

$$altura(n) = \max(h_E(n), h_D(n)) + 1$$

- 3. Calcular o balanço do nó atual:

$$balanço(n) = h_E(n) - h_D(n)$$

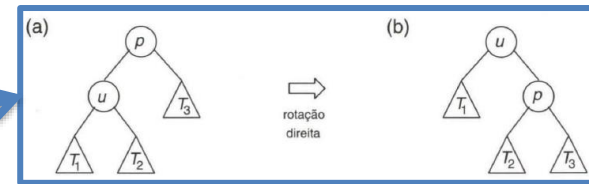
- 4. **Rebalancear** o nó atual usando rotações de acordo com o caso:

# Árvores AVL

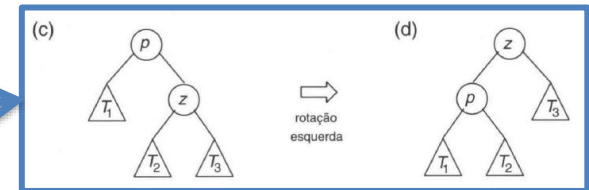
- Inclusão na árvore AVL

- Casos para **rebalanceamento**:

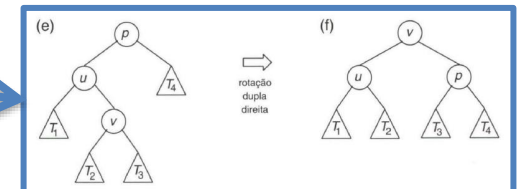
I.  $\text{balanço}(n) > 1$  e  $\text{novoNoh} < n \rightarrow \text{filhoEsq}$



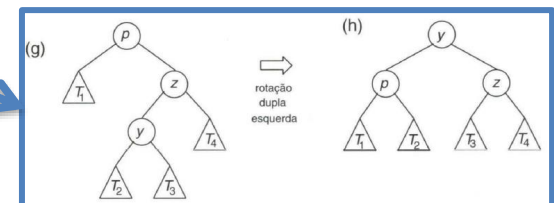
II.  $\text{balanço}(n) < -1$  e  $\text{novoNoh} > n \rightarrow \text{filhoDir}$



III.  $\text{balanço}(n) > 1$  e  $\text{novoNoh} > n \rightarrow \text{filhoEsq}$



IV.  $\text{balanço}(n) < -1$  e  $\text{novoNoh} < n \rightarrow \text{filhoDir}$



# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Casos para rebalanceamento:



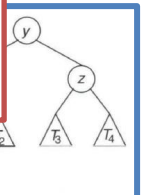
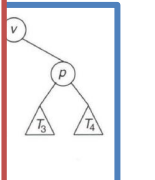
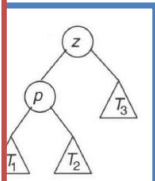
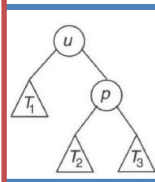
I. balanço(r

II. balanço(r

III. balanço(r

IV. balanço(r

**Atenção!** Tudo isso será feito dentro da mesma função de inclusão, ou seja, todos os nós ancestrais do nó inserido terão sua altura atualizada e serão rebalanceados de acordo com o caso.



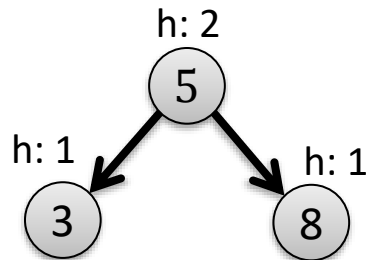


# Árvores AVL

- **Inclusão na árvore AVL**

- Exemplo:

inserir(2)



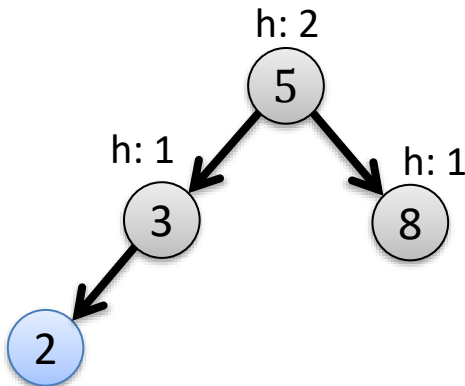
# Árvores AVL

- **Inclusão na árvore AVL**

— Exemplo:

inserir(2)

Inserir nó

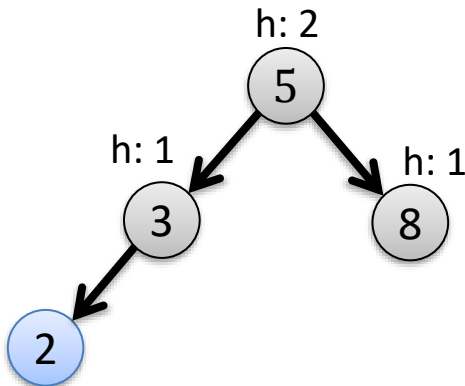


# Árvores AVL

- **Inclusão na árvore AVL**

- Exemplo:

inserir(2)



Inserir nó

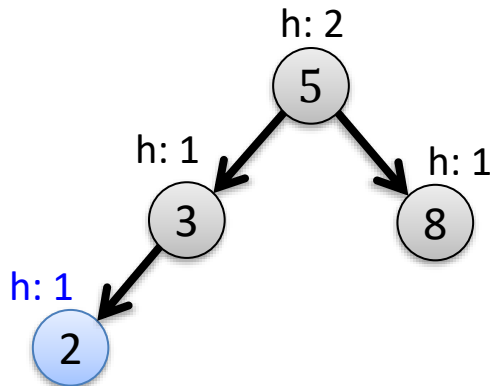
Atualizar altura do nó atual

# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

— Exemplo:

inserir(2)



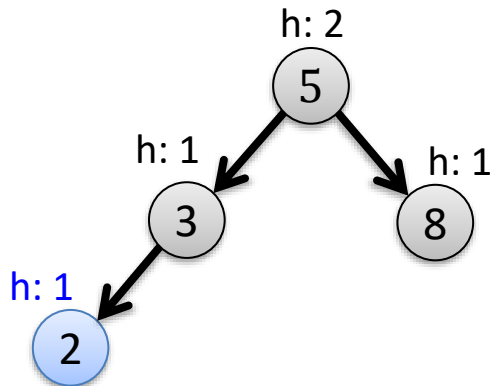
Inserir nó  
Atualizar altura do nó atual

# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

— Exemplo:

inserir(2)



Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

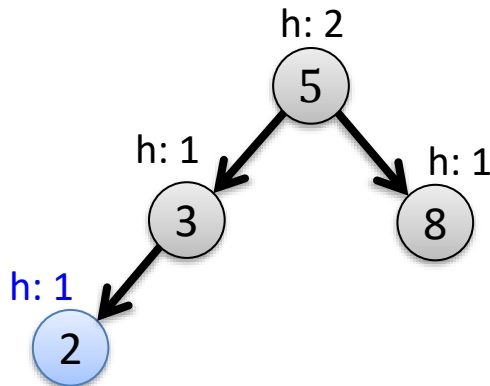
Calcular balanço:

# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

— Exemplo:

inserir(2)



Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

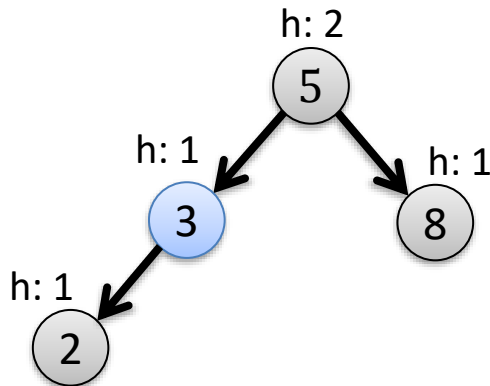
Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

— Exemplo:

inserir(2)



Inserir nó

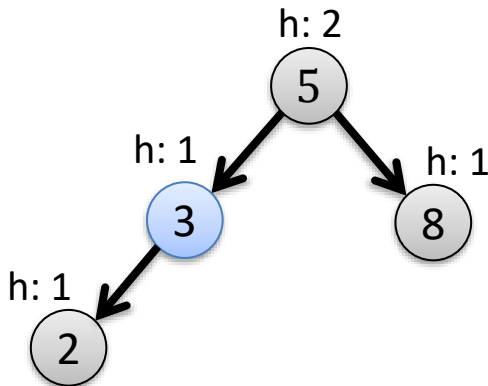
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

— Exemplo:



inserir(2)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

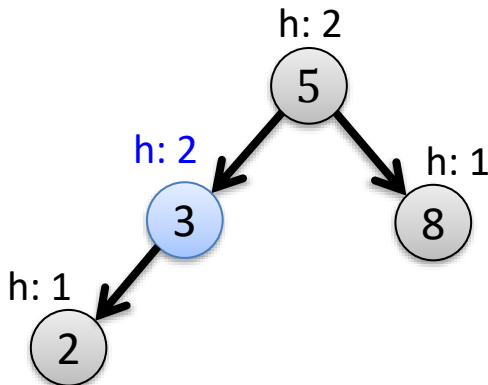
Atualizar altura do nó atual



# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

— Exemplo:



inserir(2)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

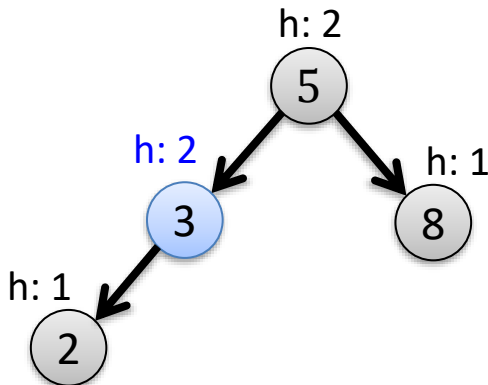
Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

— Exemplo:



inserir(2)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

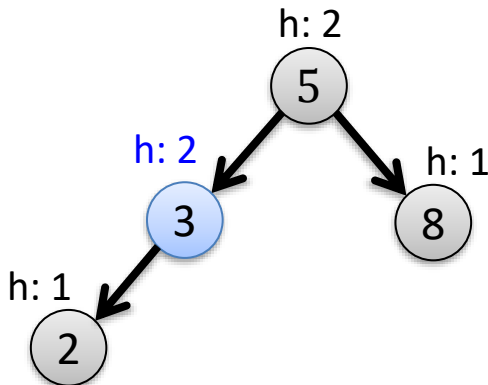
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:

# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

— Exemplo:



inserir(2)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

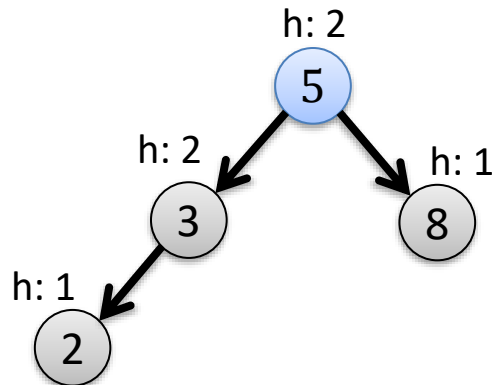
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $1 - 0 = 1$

# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

— Exemplo:



inserir(2)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

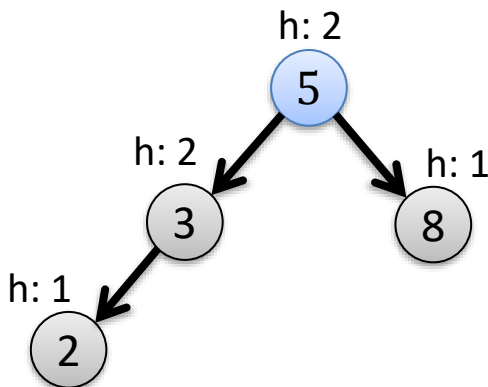
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $1 - 0 = 1$

# Árvores AVL

- **Inclusão na árvore AVL**

— Exemplo:



inserir(2)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

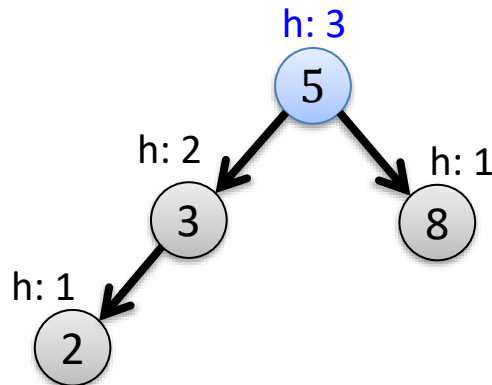
Calcular balanço:  $1 - 0 = 1$

Atualizar altura do nó atual

# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

— Exemplo:



inserir(2)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

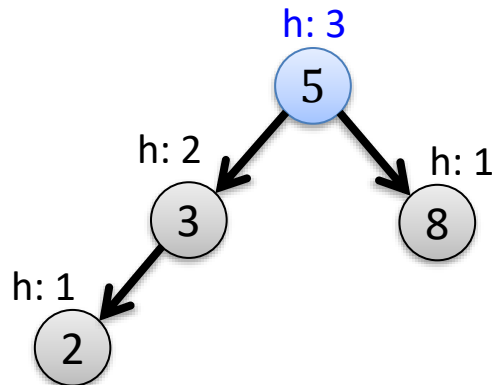
Calcular balanço:  $1 - 0 = 1$

Atualizar altura do nó atual

# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

— Exemplo:



inserir(2)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $1 - 0 = 1$

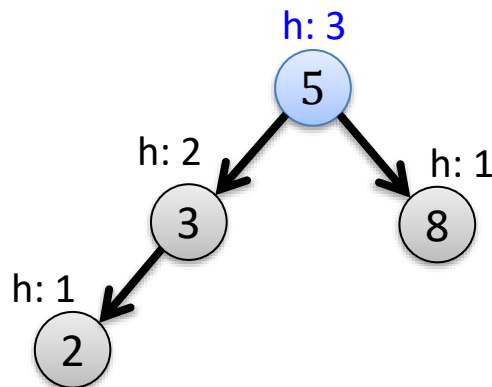
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:

# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

— Exemplo:



inserir(2)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $1 - 0 = 1$

Atualizar altura do nó atual

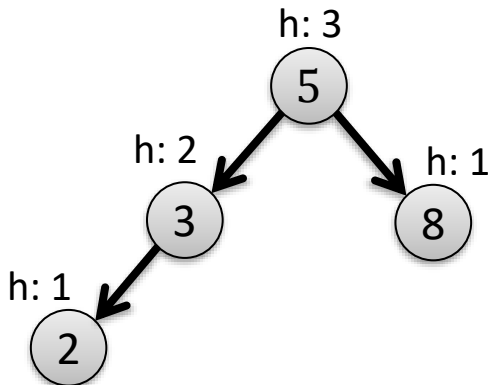
Calcular balanço:  $2 - 1 = 1$



# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

— Exemplo:



inserir(2)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $1 - 0 = 1$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $2 - 1 = 1$

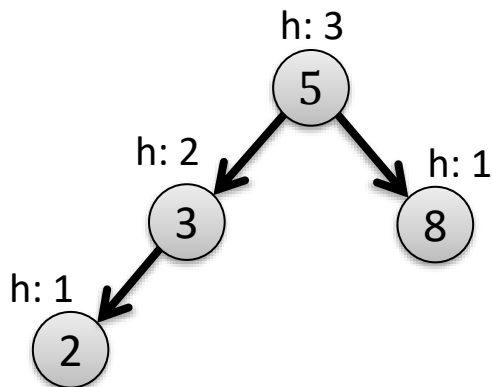
FIM DA INCLUSÃO

# Árvores AVL

- **Inclusão na árvore AVL**

— Exemplo:

inserir(1)



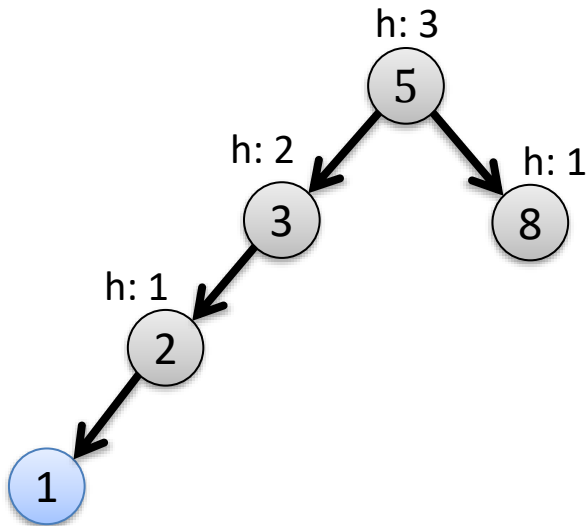
# Árvores AVL

- **Inclusão na árvore AVL**

— Exemplo:

inserir(1)

Inserir nó



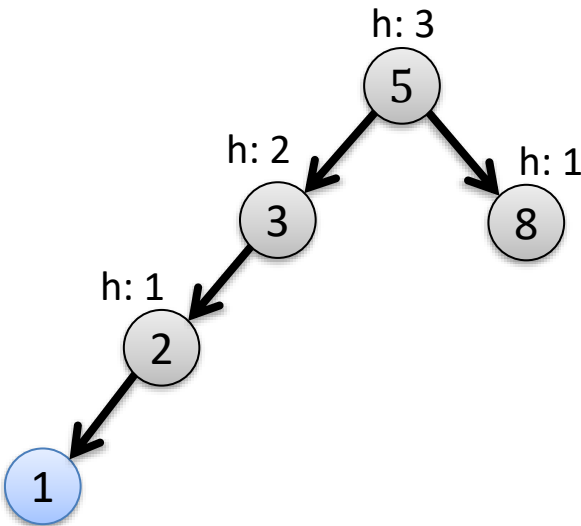
# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

— Exemplo:

inserir(1)

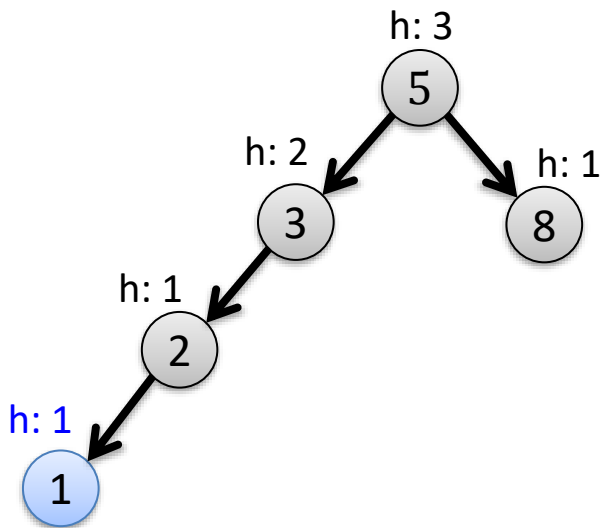
Inserir nó  
Atualizar altura do nó atual



# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

— Exemplo:



inserir(1)

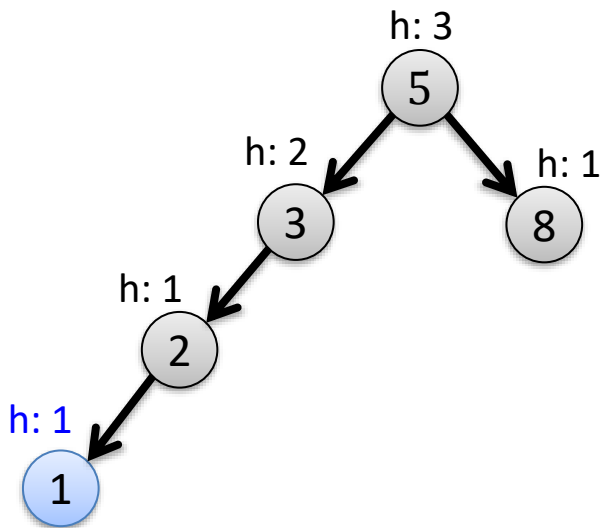
Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

# Árvores AVL

- **Inclusão na árvore AVL**

— Exemplo:



inserir(1)

Inserir nó

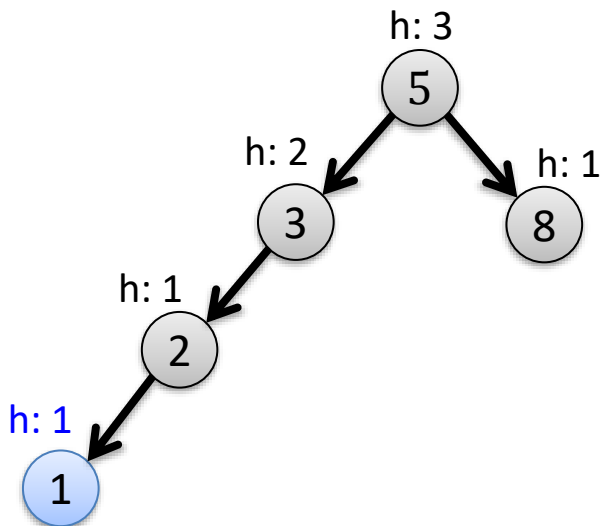
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:

# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

— Exemplo:



inserir(1)

Inserir nó

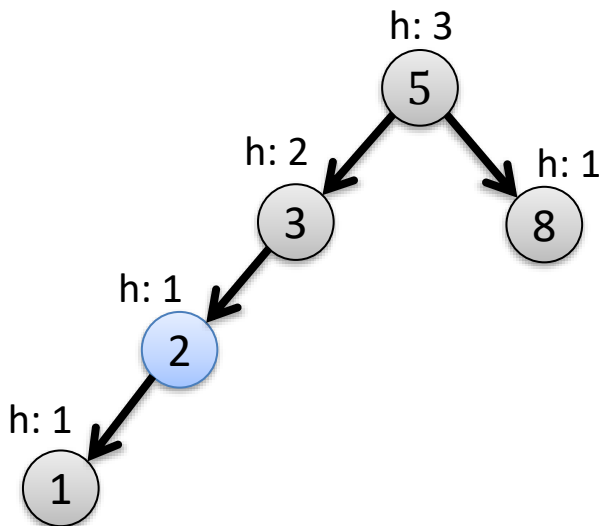
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

– Exemplo:



inserir(1)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

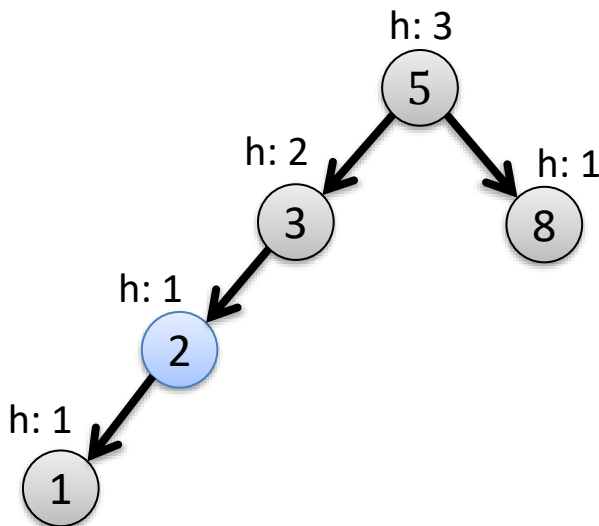
Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$



# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

– Exemplo:



inserir(1)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

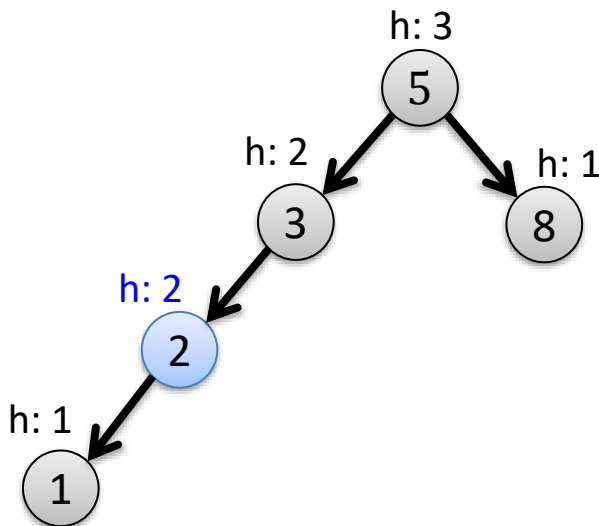
Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

— Exemplo:



inserir(1)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

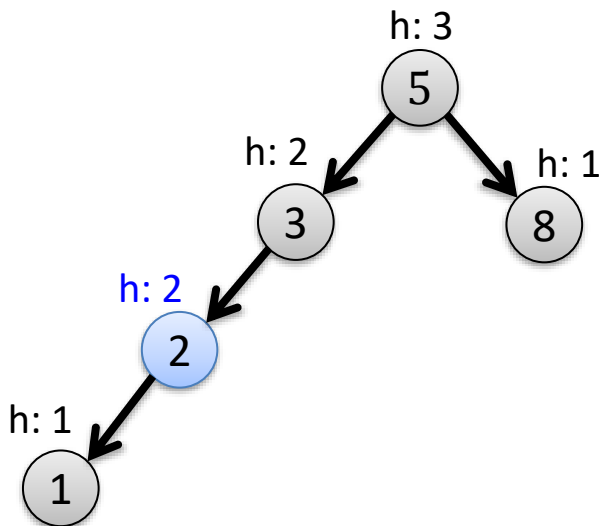
Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

— Exemplo:



inserir(1)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

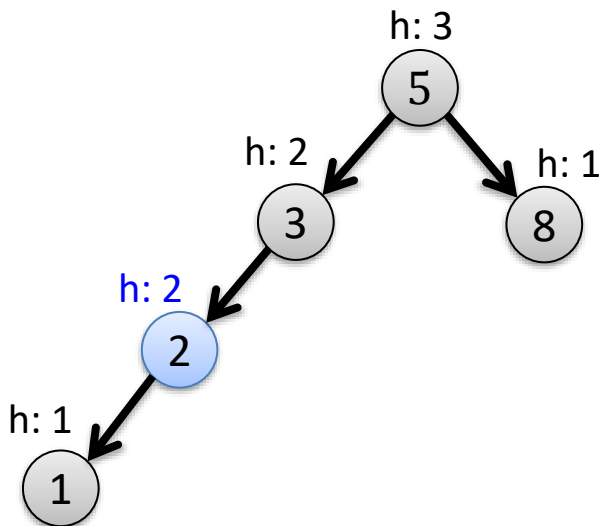
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:

# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

— Exemplo:



inserir(1)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

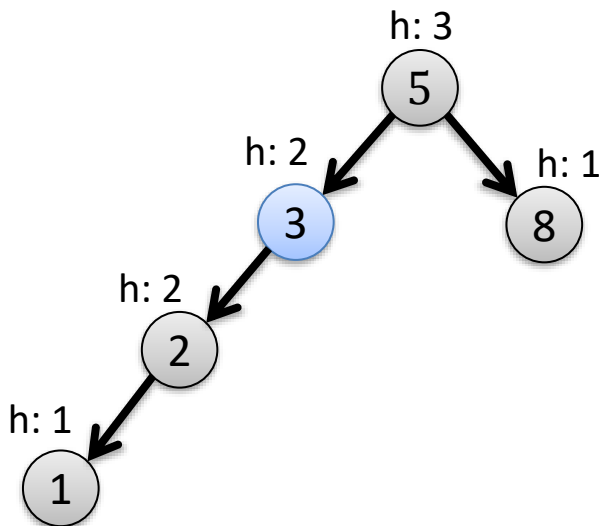
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $1 - 0 = 1$

# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

– Exemplo:



inserir(1)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

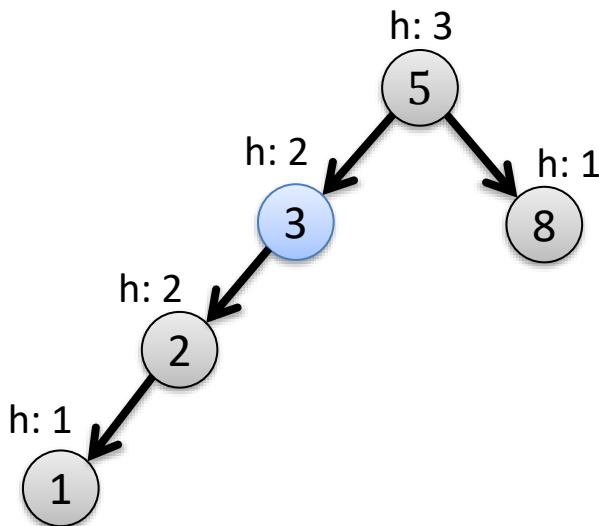
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $1 - 0 = 1$

# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

– Exemplo:



inserir(1)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

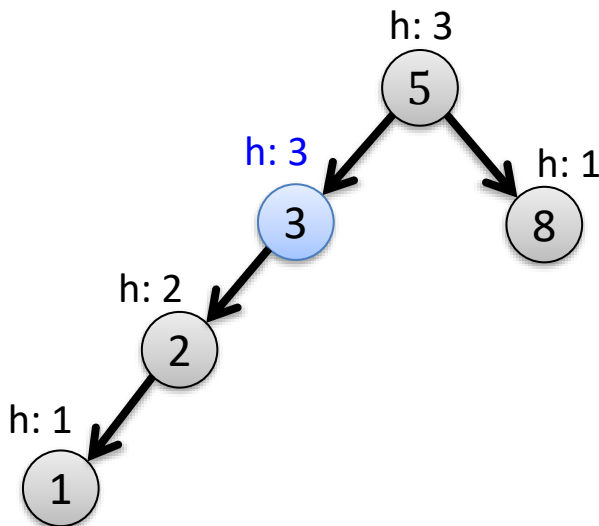
Calcular balanço:  $1 - 0 = 1$

Atualizar altura do nó atual

# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

– Exemplo:



inserir(1)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

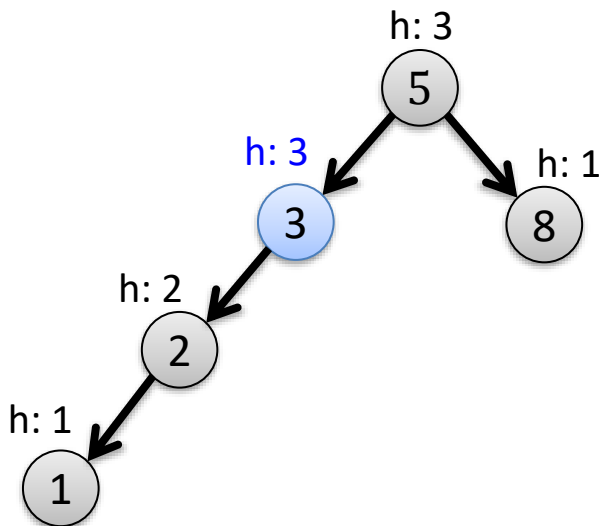
Calcular balanço:  $1 - 0 = 1$

Atualizar altura do nó atual

# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

— Exemplo:



inserir(1)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $1 - 0 = 1$

Atualizar altura do nó atual

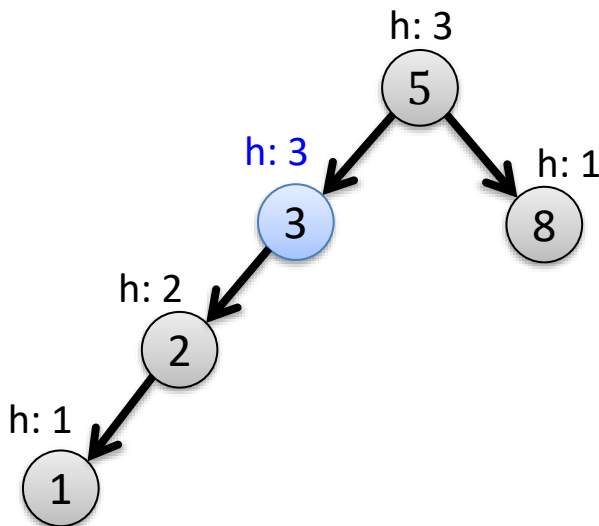
Calcular balanço:



# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

– Exemplo:



inserir(1)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $1 - 0 = 1$

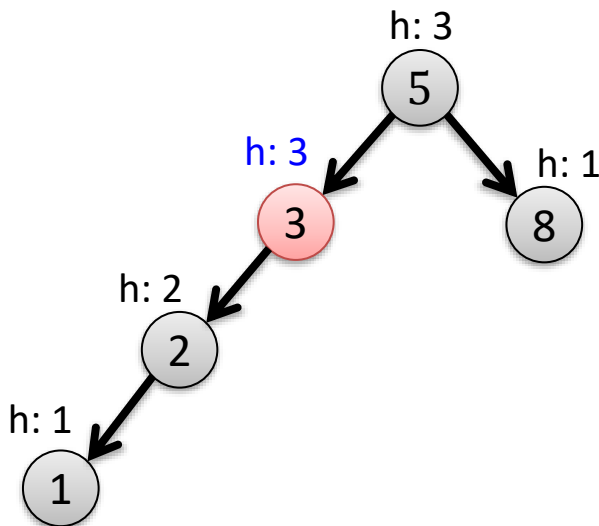
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $2 - 0 = 2$

# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

– Exemplo:



inserir(1)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $1 - 0 = 1$

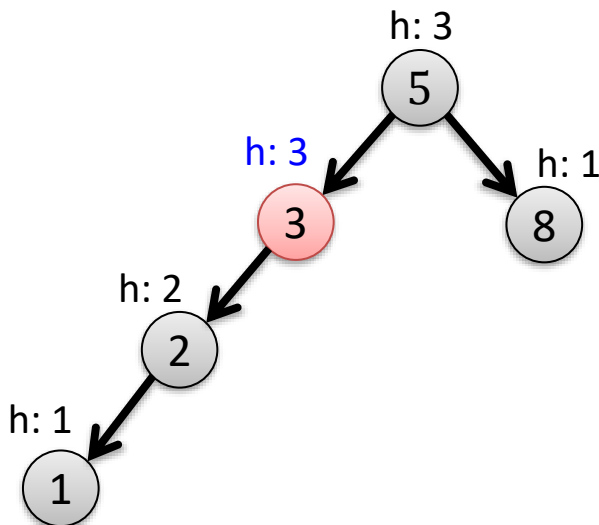
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $2 - 0 = 2$

# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

– Exemplo:

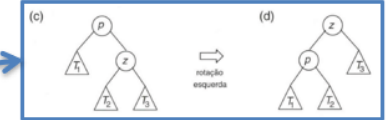


– Casos para rebalanceamento:

I.  $\text{balanço}(n) > 1$  e  $\text{novoNoh} < n \rightarrow \text{filhoEsq}$



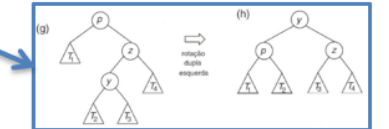
II.  $\text{balanço}(n) < -1$  e  $\text{novoNoh} > n \rightarrow \text{filhoDir}$



III.  $\text{balanço}(n) > 1$  e  $\text{novoNoh} > n \rightarrow \text{filhoEsq}$



IV.  $\text{balanço}(n) < -1$  e  $\text{novoNoh} < n \rightarrow \text{filhoDir}$



Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $1 - 0 = 1$

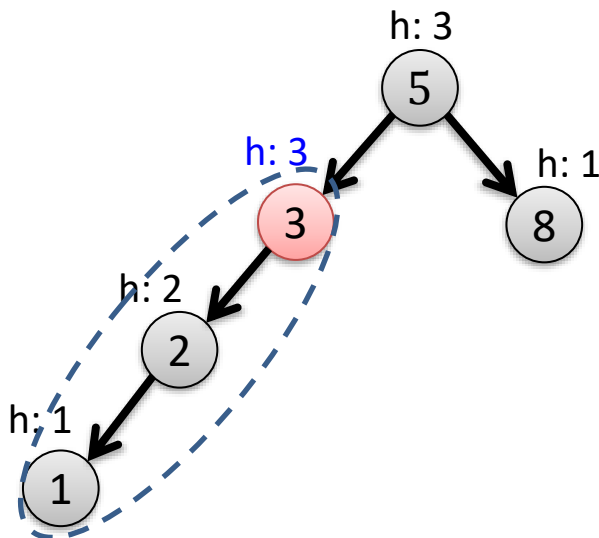
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $2 - 0 = 2$

# Árvores AVL

## • Inclusão na árvore AVL

– Exemplo:



– Casos para rebalanceamento:

I.  $\text{balanço}(n) > 1$  e  $\text{novoNoh} < n \rightarrow \text{filhoEsq}$



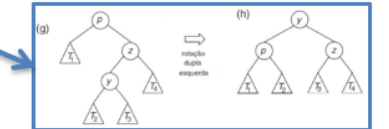
II.  $\text{balanço}(n) < -1$  e  $\text{novoNoh} > n \rightarrow \text{filhoDir}$



III.  $\text{balanço}(n) > 1$  e  $\text{novoNoh} > n \rightarrow \text{filhoEsq}$



IV.  $\text{balanço}(n) < -1$  e  $\text{novoNoh} < n \rightarrow \text{filhoDir}$



Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

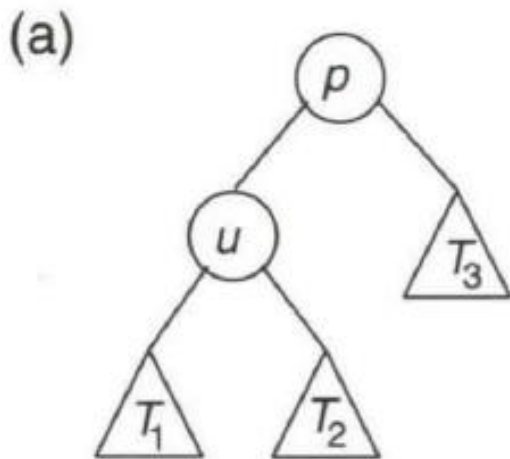
Calcular balanço:  $1 - 0 = 1$

Atualizar altura do nó atual

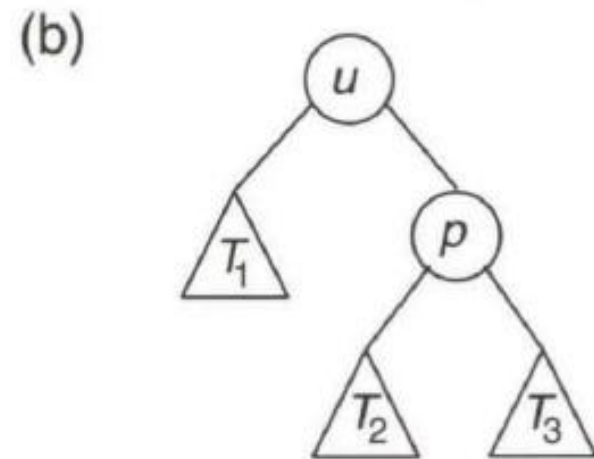
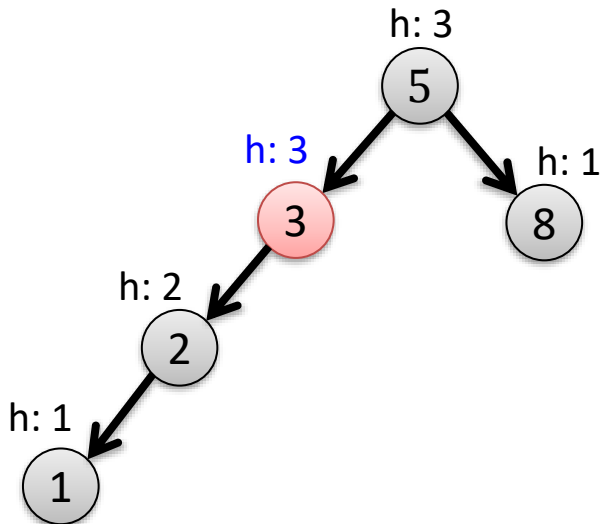
Calcular balanço:  $2 - 0 = 2$

Definição do caso:  $1 < 2$ ? Sim! Caso I

**Aplicar a Rotação à Direita!**



— Exemplo:



→  
rotação  
direita

inserir(1)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

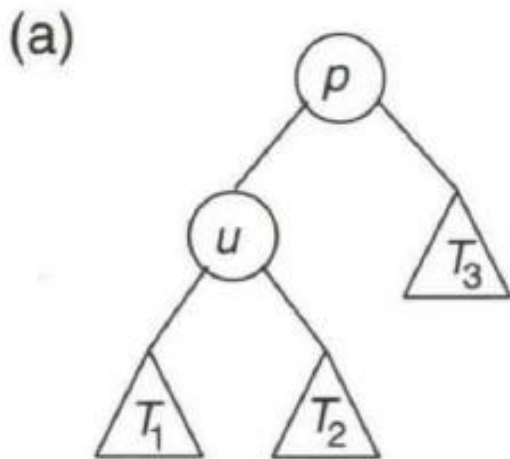
Calcular balanço:  $1 - 0 = 1$

Atualizar altura do nó atual

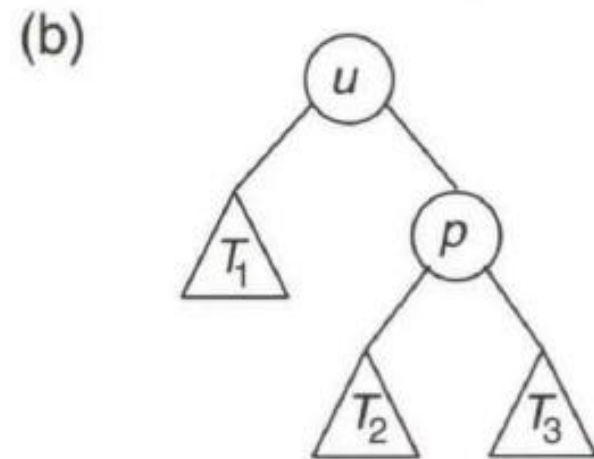
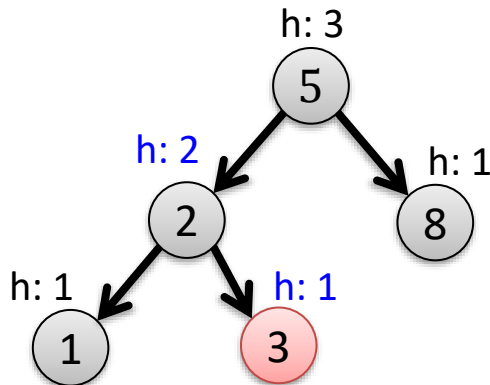
Calcular balanço:  $2 - 0 = 2$

Definição do caso:  $1 < 2$ ? Sim! Caso I

**Aplicar a Rotação à Direita!**



— Exemplo:



→  
rotação  
direita

inserir(1)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $1 - 0 = 1$

Atualizar altura do nó atual

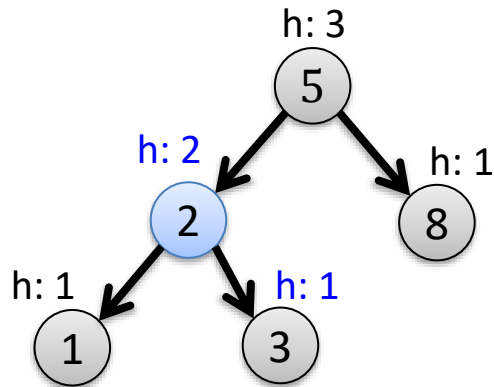
Calcular balanço:  $2 - 0 = 2$

Definição do caso:  $1 < 2$ ? Sim! Caso I

**Aplicar a Rotação à Direita!**

- **Inclusão na árvore AVL**

- Exemplo:



Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $1 - 0 = 1$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $2 - 0 = 2$

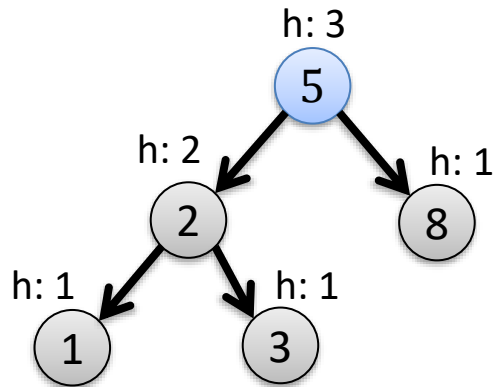
Definição do caso:  $1 < 2$ ? Sim! Caso I

**Aplicar a Rotação à Direita!**

inserir(1)

- **Inclusão na árvore AVL**

- Exemplo:



Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $1 - 0 = 1$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $2 - 0 = 2$

Definição do caso:  $1 < 2$ ? Sim! Caso I

**Aplicar a Rotação à Direita!**

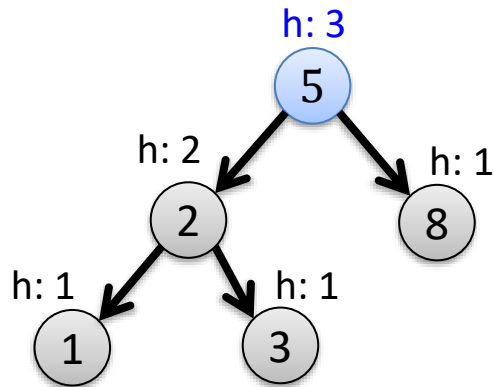
Atualizar altura do nó atual

inserir(1)



- **Inclusão na árvore AVL**

- Exemplo:



Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $1 - 0 = 1$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $2 - 0 = 2$

Definição do caso:  $1 < 2$ ? Sim! Caso I

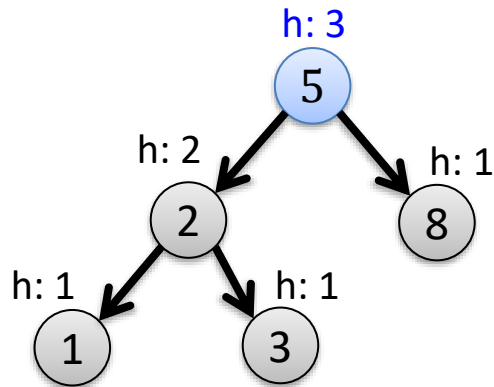
**Aplicar a Rotação à Direita!**

Atualizar altura do nó atual

inserir(1)

- **Inclusão na árvore AVL**

- Exemplo:



Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $1 - 0 = 1$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $2 - 0 = 2$

Definição do caso:  $1 < 2$ ? Sim! Caso I

**Aplicar a Rotação à Direita!**

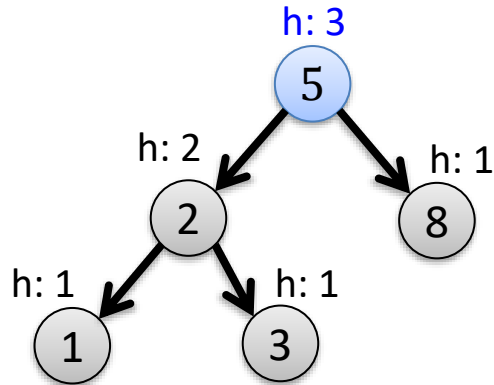
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:

inserir(1)

- **Inclusão na árvore AVL**

- Exemplo:



Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $1 - 0 = 1$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $2 - 0 = 2$

Definição do caso:  $1 < 2$ ? Sim! Caso I

**Aplicar a Rotação à Direita!**

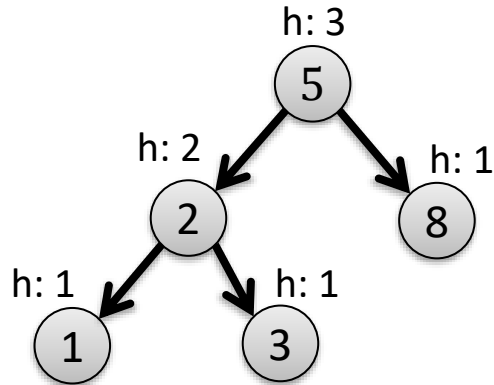
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $2 - 1 = 1$

inserir(1)

- **Inclusão na árvore AVL**

- Exemplo:



Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $1 - 0 = 1$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $2 - 0 = 2$

Definição do caso:  $1 < 2$ ? Sim! Caso I

**Aplicar a Rotação à Direita!**

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $2 - 1 = 1$

inserir(1)

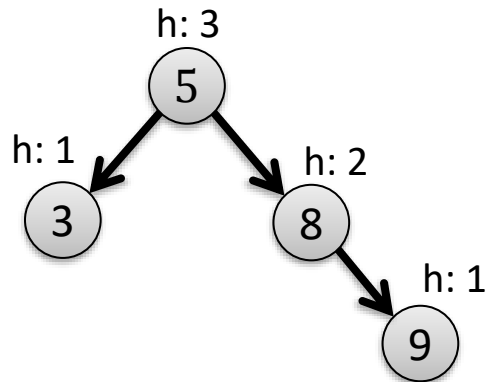
FIM DA INCLUSÃO

# Árvores AVL

- **Inclusão na árvore AVL**

— Exemplo:

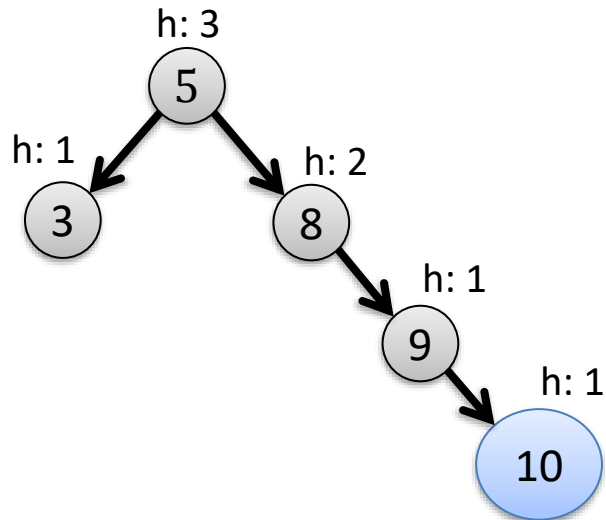
inserir(10)



# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



inserir(10)

Inserir nó

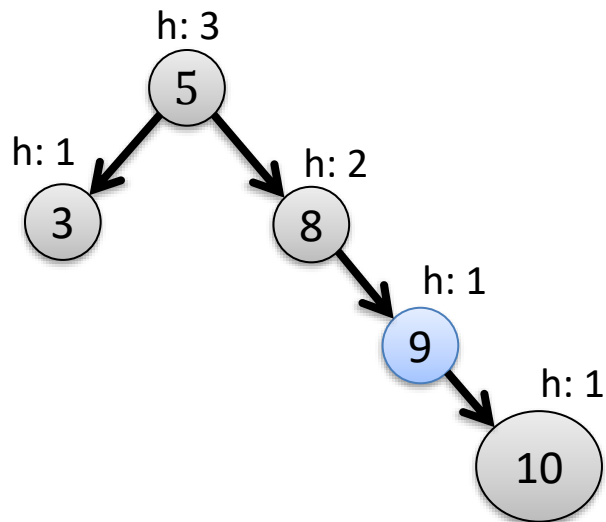
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



inserir(10)

Inserir nó

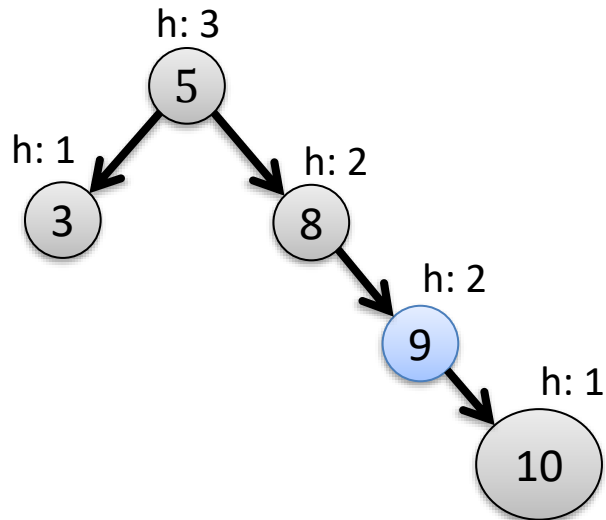
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

# Árvores AVL

- **Inclusão na árvore AVL**

- Exemplo:



inserir(10)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

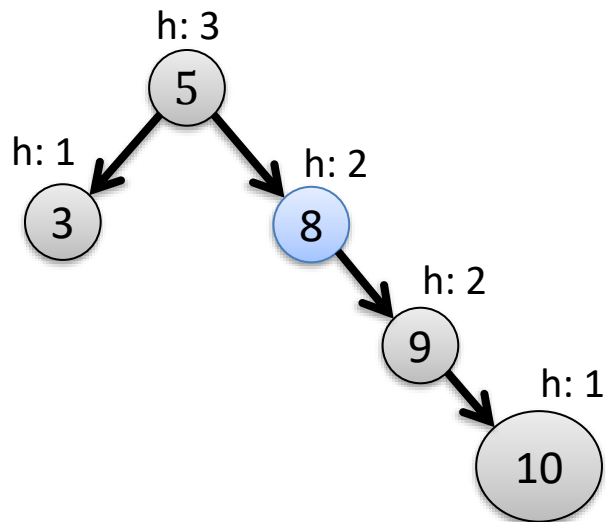
Calcular balanço:  $0 - 1 = -1$



# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

- Exemplo:



inserir(10)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

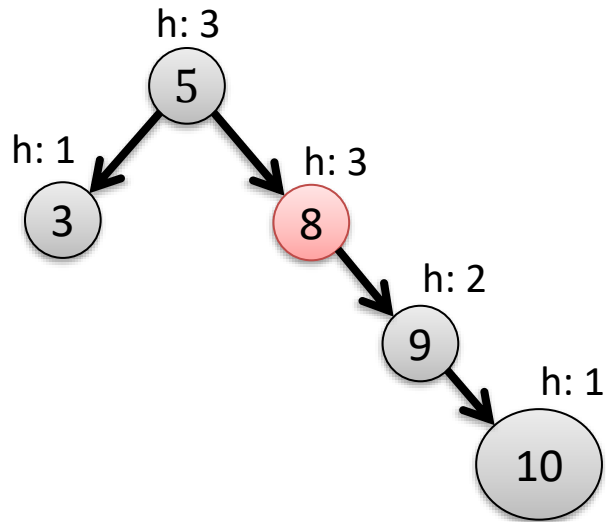
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 1 = -1$

# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

– Exemplo:



inserir(10)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 1 = -1$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 2 = -2$

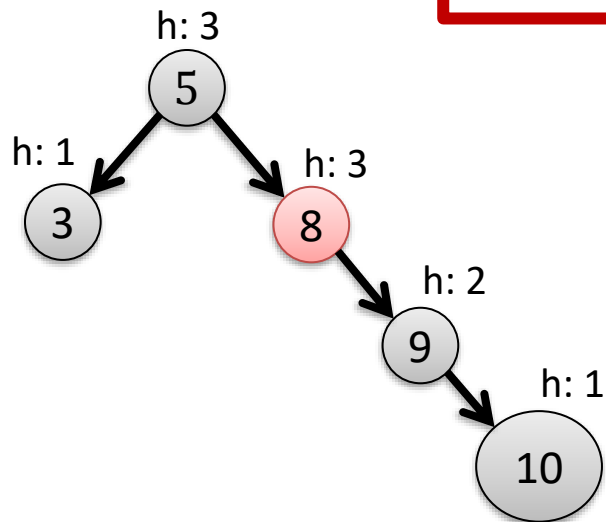
Definição do caso:  $-2 < -1$ ? Sim! Caso II

**Aplicar a Rotação à Esquerda!**

# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

– Exemplo:



– Casos para rebalanceamento:

I.  $\text{balanço}(n) > 1$  e  $\text{novoNoh} < n \rightarrow \text{filhoEsq}$



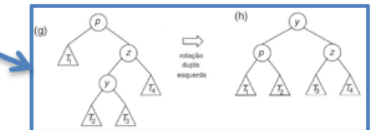
II.  $\text{balanço}(n) < -1$  e  $\text{novoNoh} > n \rightarrow \text{filhoDir}$



III.  $\text{balanço}(n) > 1$  e  $\text{novoNoh} > n \rightarrow \text{filhoEsq}$



IV.  $\text{balanço}(n) < -1$  e  $\text{novoNoh} < n \rightarrow \text{filhoDir}$



Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 1 = -1$

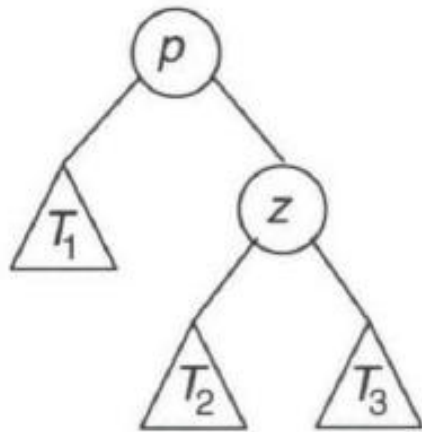
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 2 = -2$

Definição do caso:  $-2 < -1$ ? Sim! Caso II

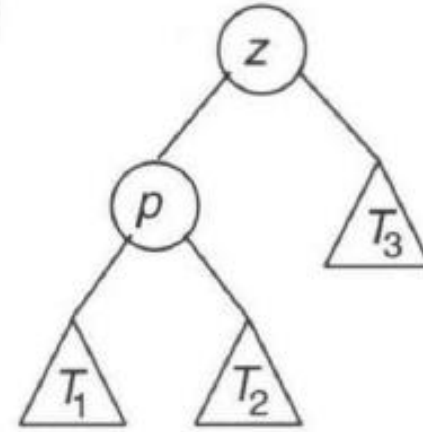
**Aplicar a Rotação à Esquerda!**

(c)



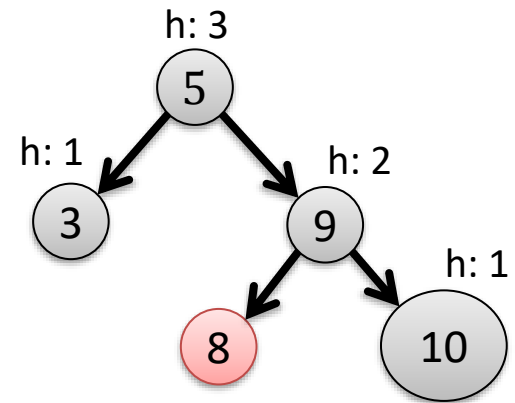
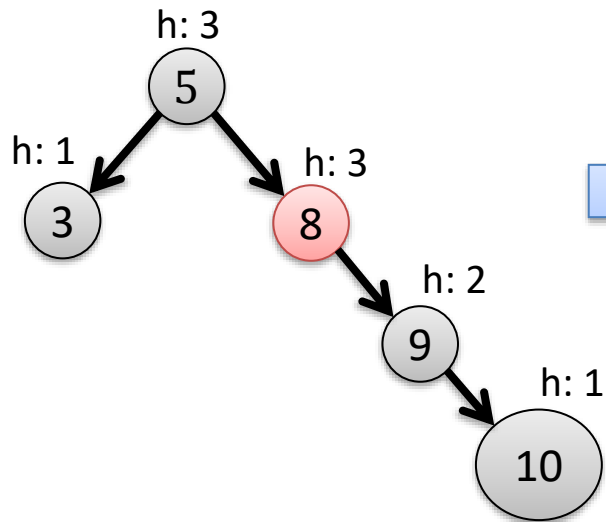
→  
rotação  
esquerda

(d)



— Exemplo:

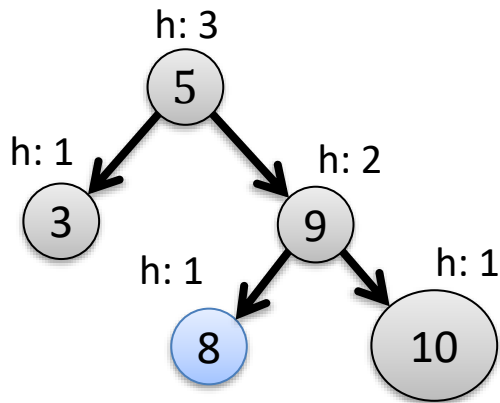
inserir(10)



# Árvores AVL

- **Inclusão na árvore AVL**

- Exemplo:



inserir(10)

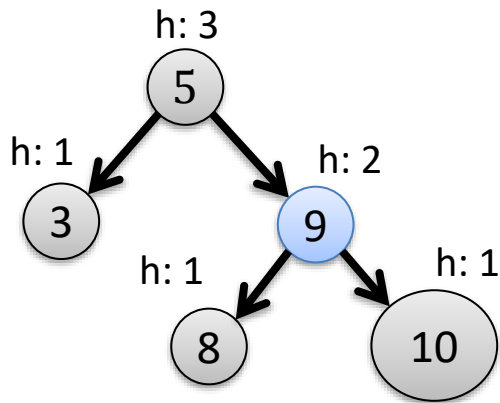
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

# Árvores AVL

- **Inclusão na árvore AVL**

- Exemplo:



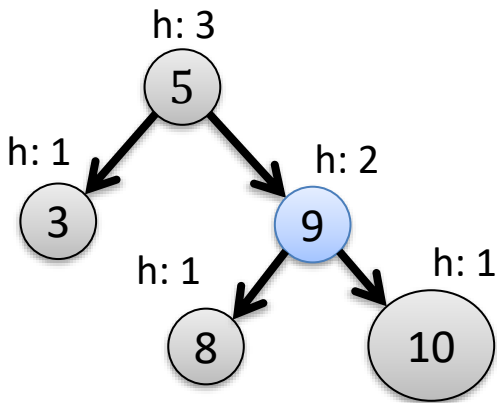
inserir(10)

Atualizar altura do nó atual  
Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

# Árvores AVL

- **Inclusão na árvore AVL**

- Exemplo:



inserir(10)

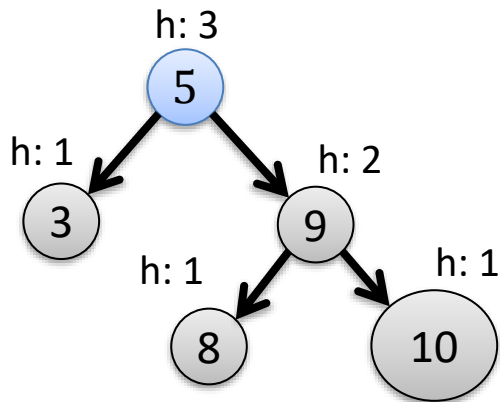
Atualizar altura do nó atual  
Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual  
Calcular balanço:  $1 - 1 = 0$

# Árvores AVL

- **Inclusão na árvore AVL**

– Exemplo:



inserir(10)

Atualizar altura do nó atual  
Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual  
Calcular balanço:  $1 - 1 = 0$

Atualizar altura do nó atual  
Calcular balanço:  $1 - 2 = -1$

FIM DA INCLUSÃO

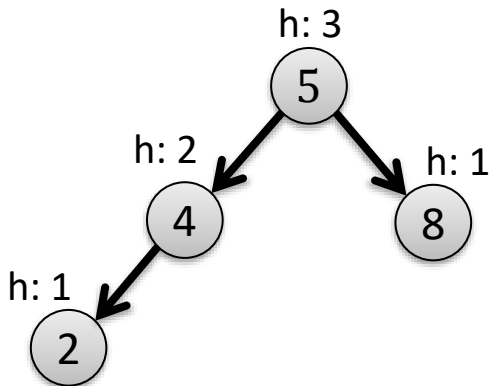


# Árvores AVL

- **Inclusão na árvore AVL**

— Exemplo:

inserir(3)



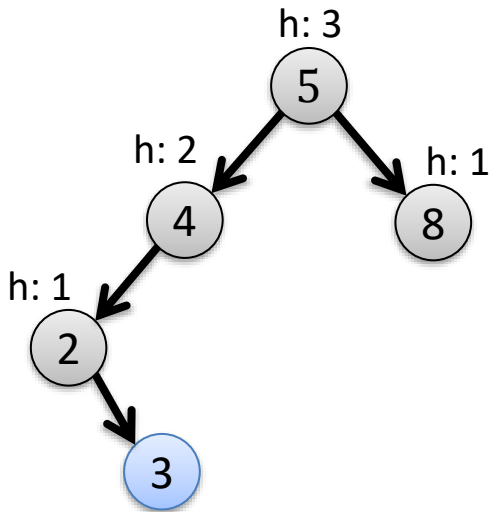
# Árvores AVL

- **Inclusão na árvore AVL**

— Exemplo:

inserir(3)

Inserir nó

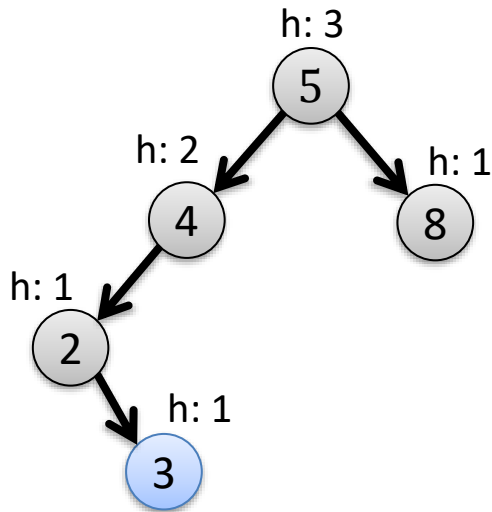


# Árvores AVL

- **Inclusão na árvore AVL**

— Exemplo:

inserir(3)



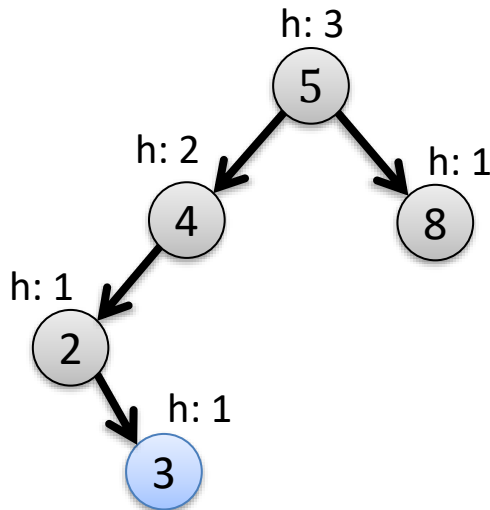
Inserir nó  
Atualizar altura do nó atual

# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

— Exemplo:

inserir(3)



Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

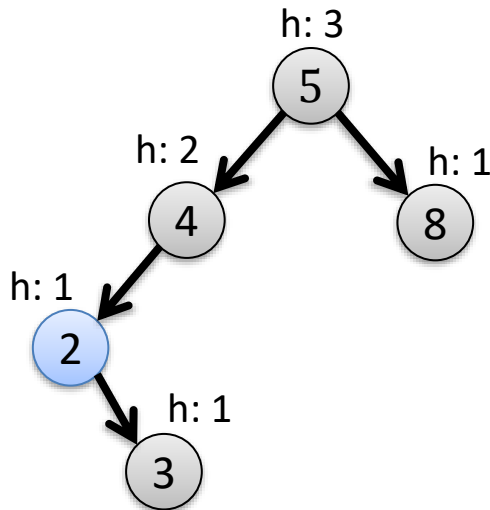
Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

# Árvores AVL

- **Inclusão na árvore AVL**

— Exemplo:

inserir(3)



Inserir nó

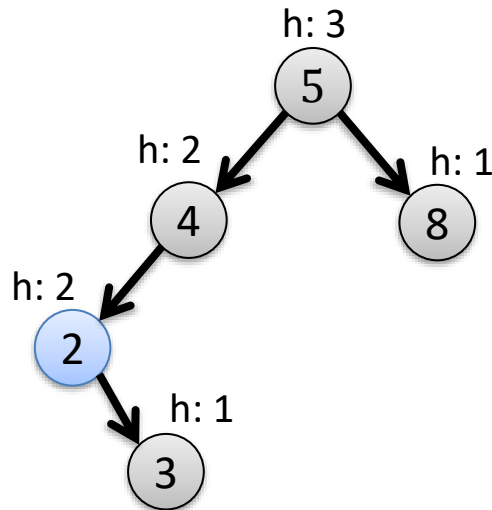
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

# Árvores AVL

- **Inclusão na árvore AVL**

— Exemplo:



inserir(3)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

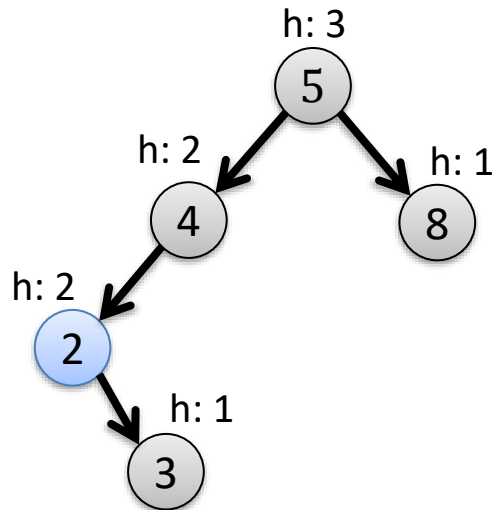
Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

— Exemplo:



inserir(3)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

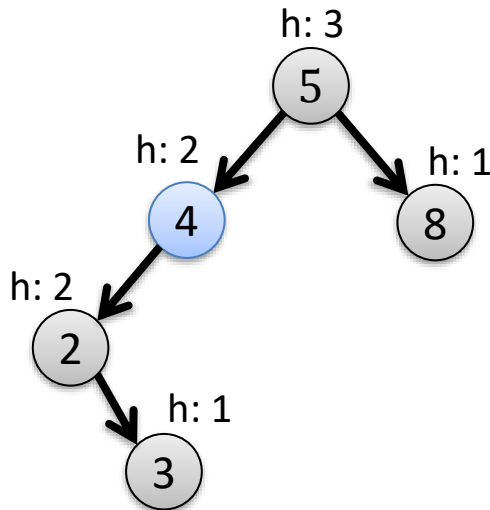
Calcular balanço:  $0 - 1 = -1$

# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

— Exemplo:

inserir(3)



Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

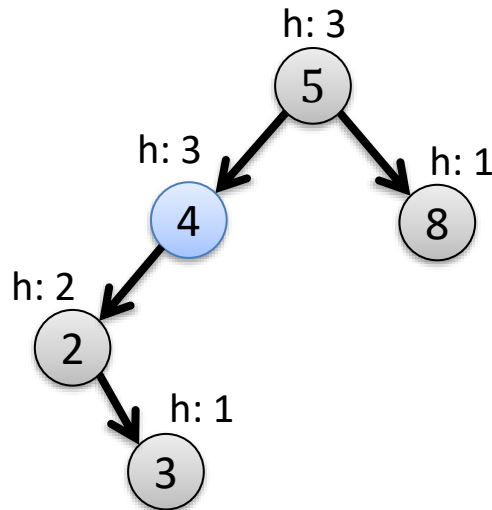
Calcular balanço:  $0 - 1 = -1$



# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

— Exemplo:



inserir(3)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

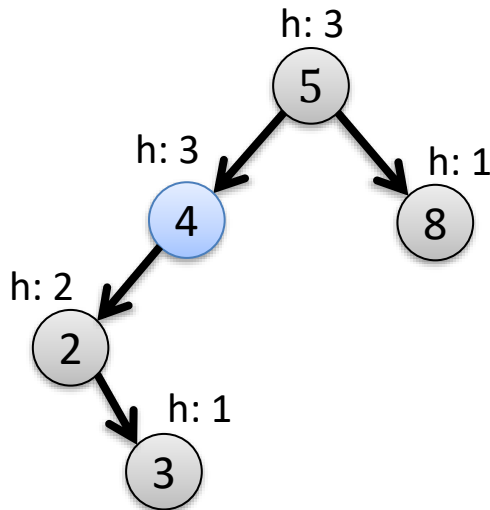
Calcular balanço:  $0 - 1 = -1$

Atualizar altura do nó atual

# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

— Exemplo:



inserir(3)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 1 = -1$

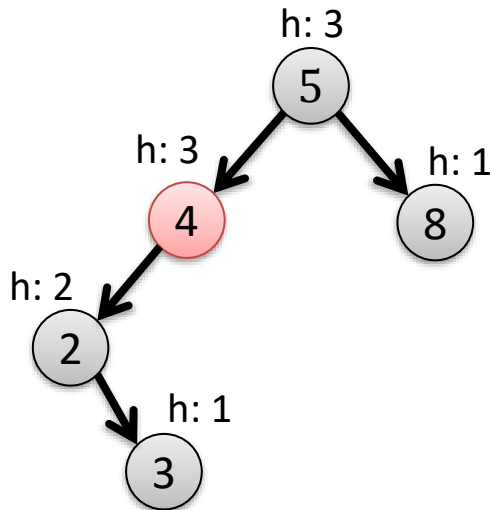
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $2 - 0 = 2$

# Árvores AVL

## • Inclusão na árvore A

– Exemplo:

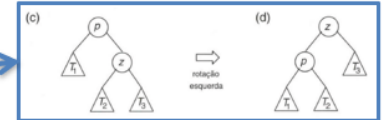


– Casos para rebalanceamento:

I.  $\text{balanço}(n) > 1$  e  $\text{novoNoh} < n \rightarrow \text{filhoEsq}$



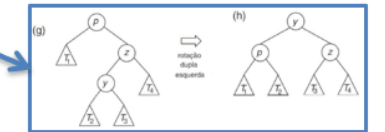
II.  $\text{balanço}(n) < -1$  e  $\text{novoNoh} > n \rightarrow \text{filhoDir}$



III.  $\text{balanço}(n) > 1$  e  $\text{novoNoh} > n \rightarrow \text{filhoEsq}$



IV.  $\text{balanço}(n) < -1$  e  $\text{novoNoh} < n \rightarrow \text{filhoDir}$



Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 1 = -1$

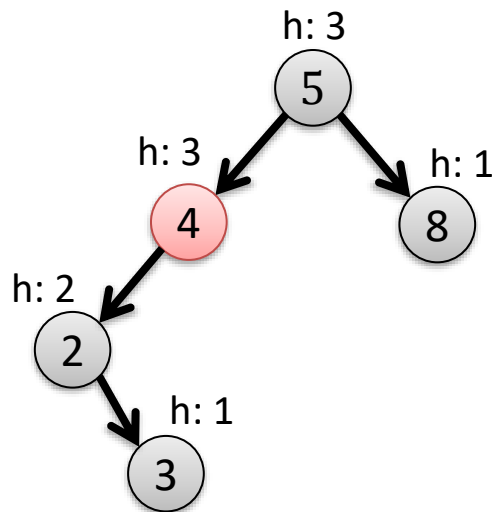
Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $2 - 0 = 2$

# Árvores AVL

- Inclusão na árvore AVL

– Exemplo:



inserir(3)

Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

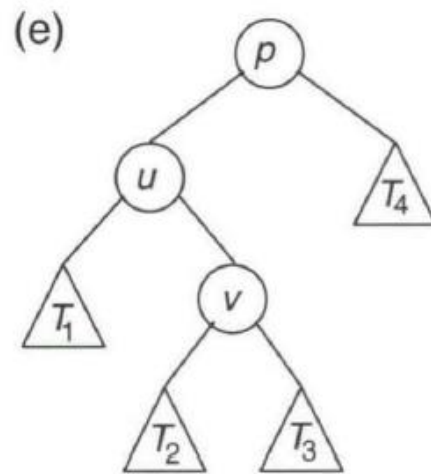
Calcular balanço:  $0 - 1 = -1$


Atualizar altura do nó atual

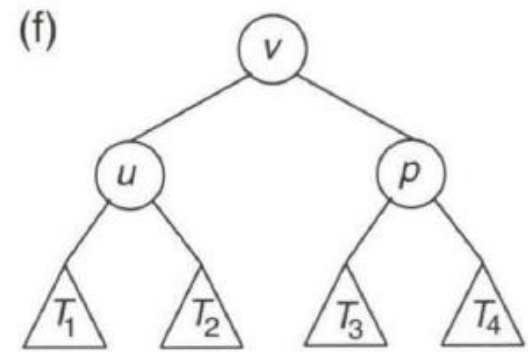
Calcular balanço:  $2 - 0 = 2$

Definição do caso:  $3 < 2$ ? Não! Caso III

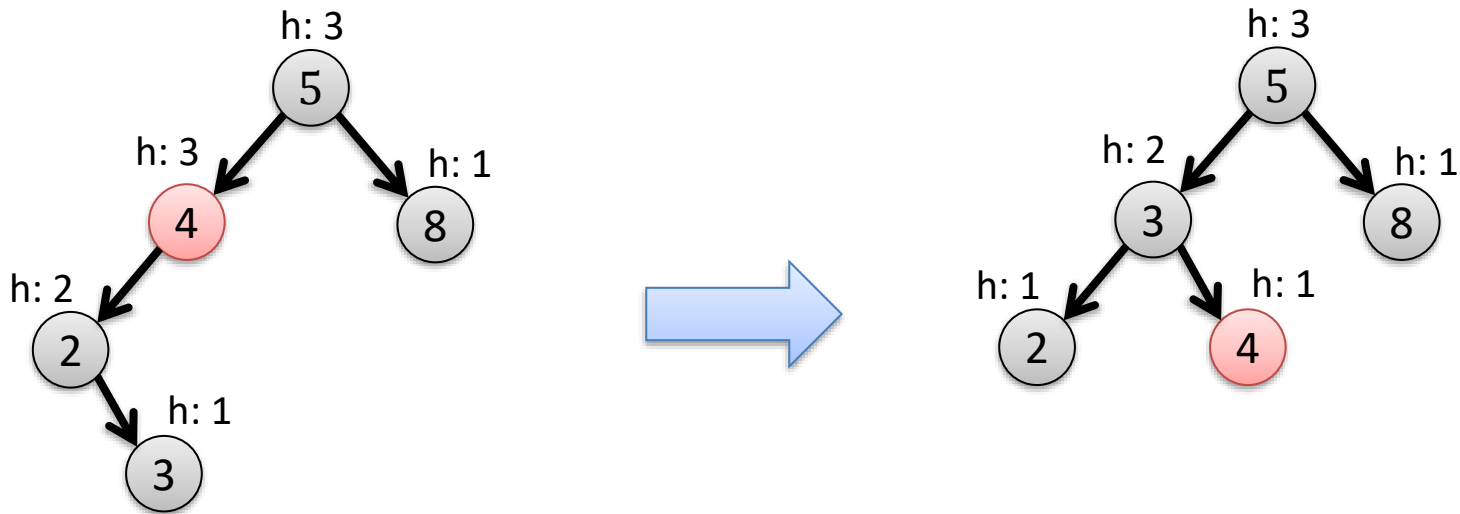
**Aplicar a Rotação Dupla à Direita!**



  
 rotação  
 dupla  
 direita



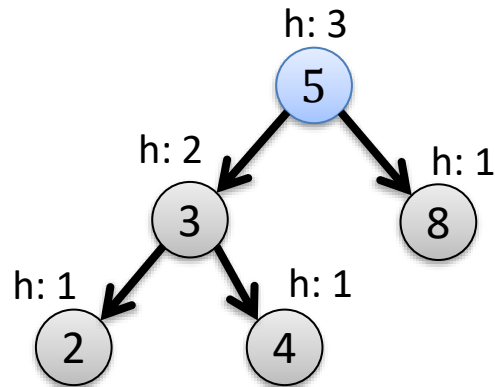
– Exemplo:



inserir(3)

- **Inclusão na árvore AVL**

- Exemplo:



Inserir nó

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 0 = 0$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $0 - 1 = -1$

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $2 - 0 = 2$

Definição do caso:  $3 < 2$ ? Não! Caso III

**Aplicar a Rotação Dupla à Direita!**

Atualizar altura do nó atual

Calcular balanço:  $2 - 1 = 1$

inserir(3)

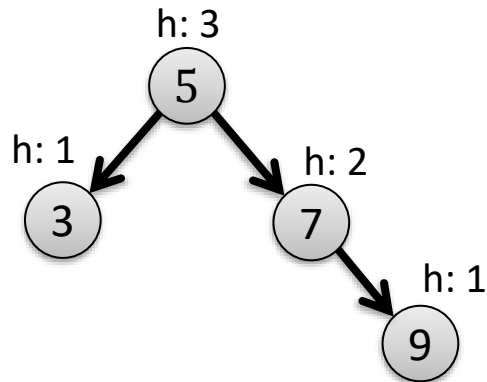
FIM DA INCLUSÃO

# Árvores AVL

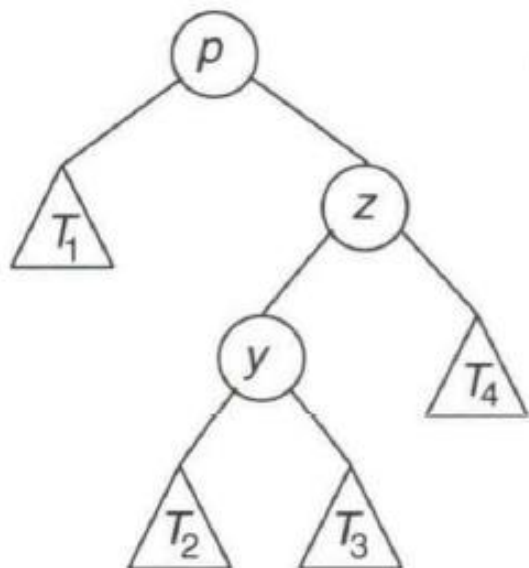
- **Inclusão na árvore AVL**

- Exemplo:

inserir(8)

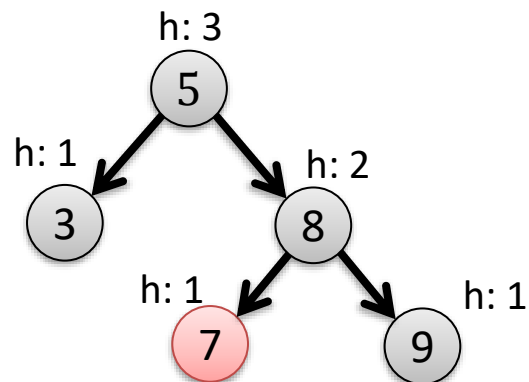
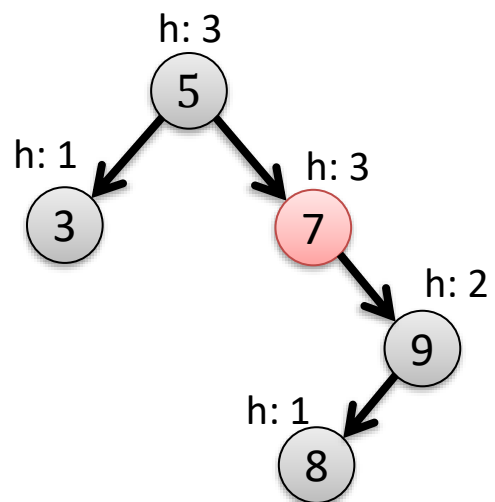
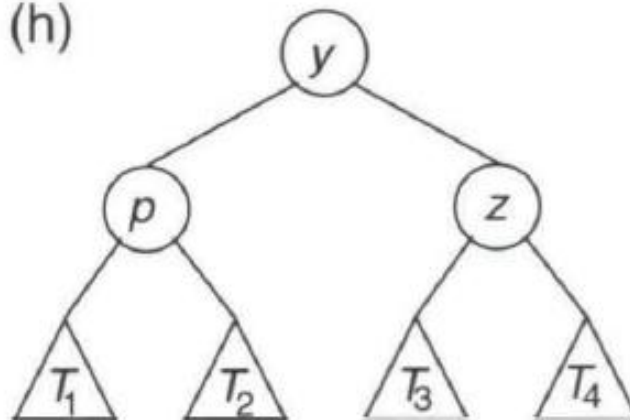


(g)



rotação  
dupla  
esquerda

(h)



inserir(8)



- **Exercício 3:**

- Converta o vetor abaixo em uma árvore AVL, inserindo os elementos na árvore na ordem que eles aparecem.

8	4	1	9	11
---	---	---	---	----

- **Exercício 3:**

- Converta o vetor abaixo em uma árvore AVL, inserindo os elementos na árvore na ordem que eles aparecem.

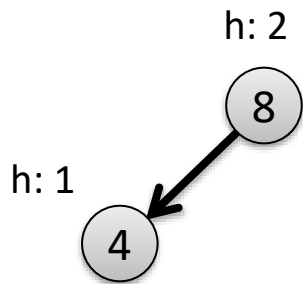
h: 1



8	4	1	9	11
---	---	---	---	----

- **Exercício 3:**

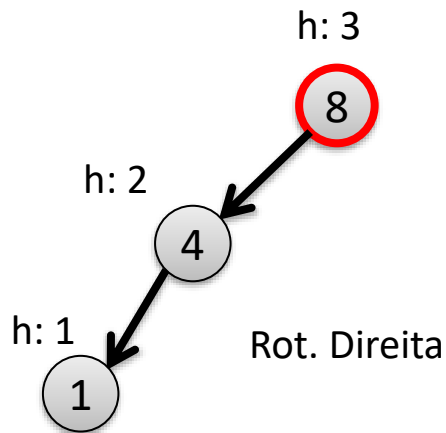
- Converta o vetor abaixo em uma árvore AVL, inserindo os elementos na árvore na ordem que eles aparecem.



8	4	1	9	11
---	---	---	---	----

- **Exercício 3:**

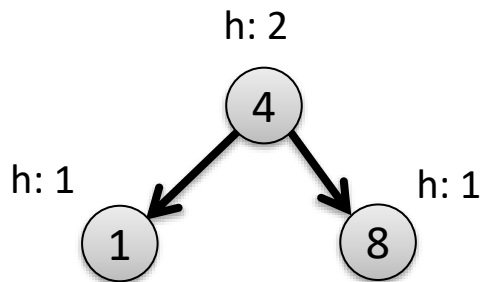
- Converta o vetor abaixo em uma árvore AVL, inserindo os elementos na árvore na ordem que eles aparecem.



8	4	1	9	11
---	---	---	---	----

- **Exercício 3:**

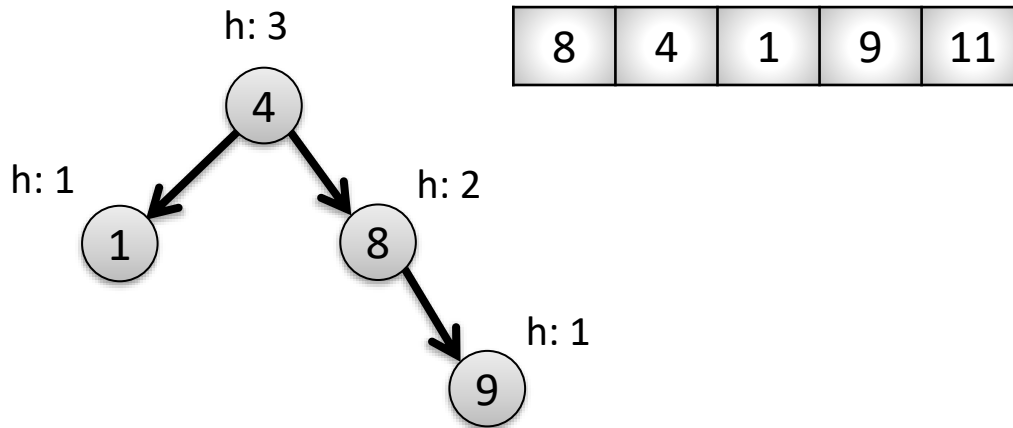
- Converta o vetor abaixo em uma árvore AVL, inserindo os elementos na árvore na ordem que eles aparecem.



8	4	1	9	11
---	---	---	---	----

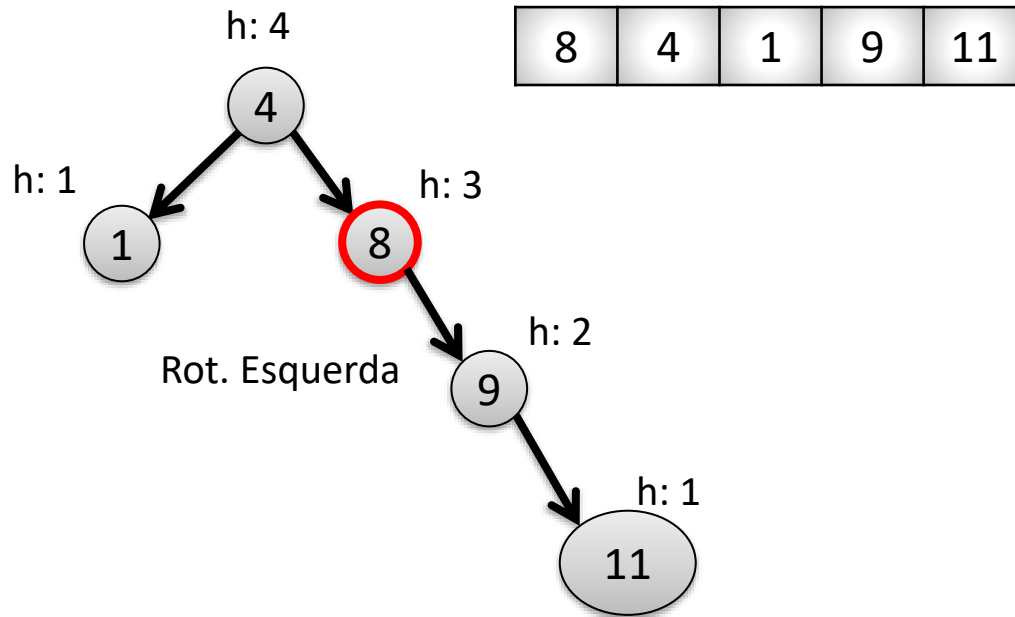
- **Exercício 3:**

- Converta o vetor abaixo em uma árvore AVL, inserindo os elementos na árvore na ordem que eles aparecem.



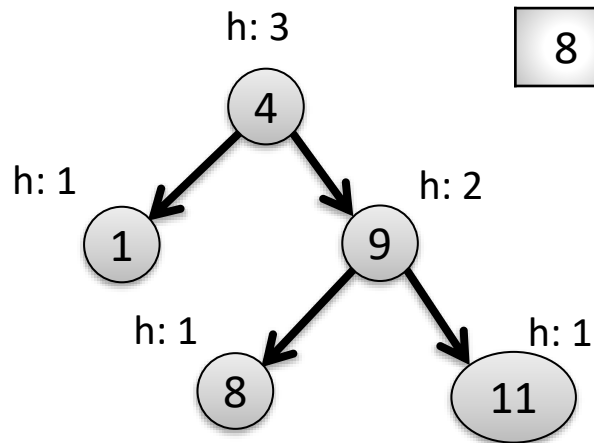
- **Exercício 3:**

- Converta o vetor abaixo em uma árvore AVL, inserindo os elementos na árvore na ordem que eles aparecem.



- **Exercício 3:**

- Converta o vetor abaixo em uma árvore AVL, inserindo os elementos na árvore na ordem que eles aparecem.



8	4	1	9	11
---	---	---	---	----



# Árvores AVL

- **Exclusão em árvore AVL**

- O processo de exclusão de um novo nó na árvore seguirá a mesma lógica da inclusão, identificando casos para aplicar as rotações.

- Algoritmo:

- 1. Fazer a remoção em ABB simples.

- 2. Atualizar a altura do nó atual:

$$altura(n) = \max(h_E(n), h_D(n)) + 1$$

- 3. Calcular o balanço do nó atual:

$$balanço(n) = h_E(n) - h_D(n)$$

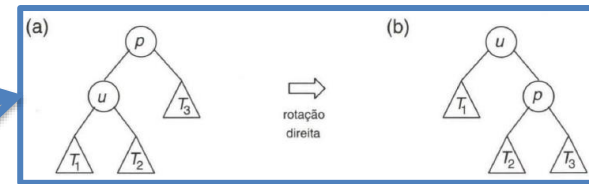
- 4. Rebalancear o nó atual usando rotações de acordo com o caso:

# Árvores AVL

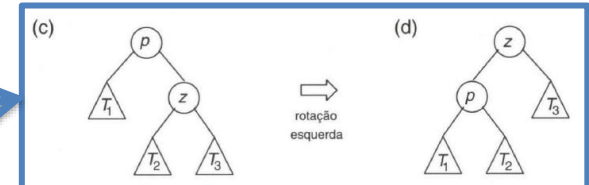
- **Exclusão em árvore AVL**

- Casos para rebalanceamento:

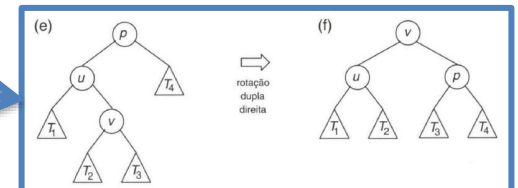
I.  $\text{balanço}(n) > 1$  e  $\text{balanço}(n \rightarrow \text{filhoEsq}) \geq 0$



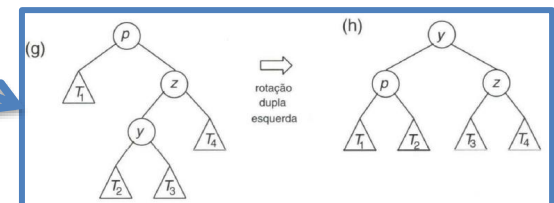
II.  $\text{balanço}(n) < -1$  e  $\text{balanço}(n \rightarrow \text{filhoDir}) \leq 0$



III.  $\text{balanço}(n) > 1$  e  $\text{balanço}(n \rightarrow \text{filhoEsq}) < 0$



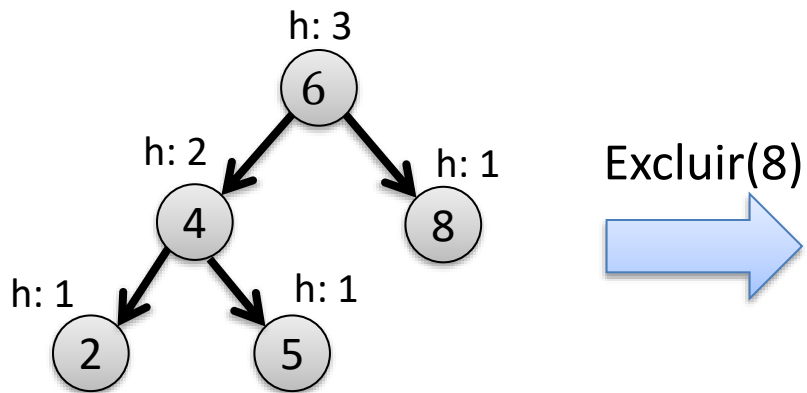
IV.  $\text{balanço}(n) < -1$  e  $\text{balanço}(n \rightarrow \text{filhoDir}) > 0$



# Árvores AVL

- **Exclusão em árvore AVL**

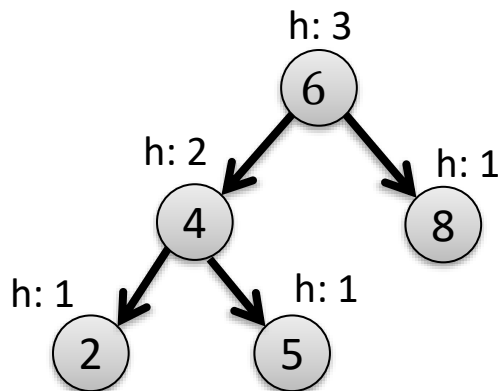
— Exemplo:



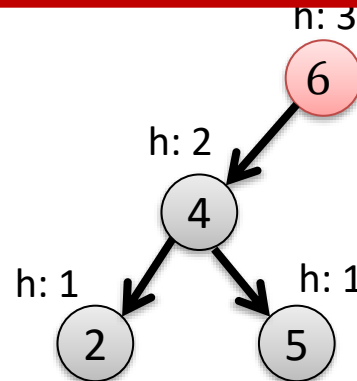
# Árvores AVL

- Exclusão em árvore

— Exemplo:



Excluir(8)



6 está desbalanceado!

Identificando caso:

— Casos para rebalanceamento:

I.  $\text{balanço}(n) > 1$  e  $\text{balanço}(n \rightarrow \text{filhoEsq}) \geq 0$



II.  $\text{balanço}(n) < -1$  e  $\text{balanço}(n \rightarrow \text{filhoDir}) \leq 0$



III.  $\text{balanço}(n) > 1$  e  $\text{balanço}(n \rightarrow \text{filhoEsq}) < 0$



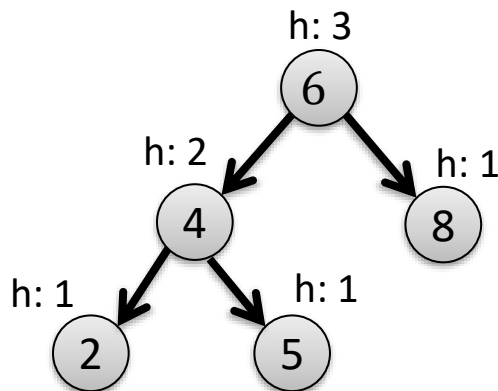
IV.  $\text{balanço}(n) < -1$  e  $\text{balanço}(n \rightarrow \text{filhoDir}) > 0$



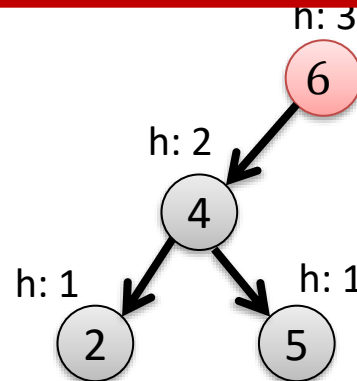
# Árvores AVL

- Exclusão em árvore

— Exemplo:



Excluir(8)



— Casos para rebalanceamento:

I.  $\text{balanço}(n) > 1$  e  $\text{balanço}(n \rightarrow \text{filhoEsq}) \geq 0$



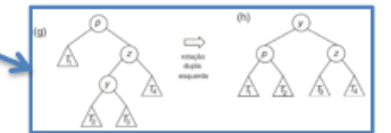
II.  $\text{balanço}(n) < -1$  e  $\text{balanço}(n \rightarrow \text{filhoDir}) \leq 0$



III.  $\text{balanço}(n) > 1$  e  $\text{balanço}(n \rightarrow \text{filhoEsq}) < 0$



IV.  $\text{balanço}(n) < -1$  e  $\text{balanço}(n \rightarrow \text{filhoDir}) > 0$

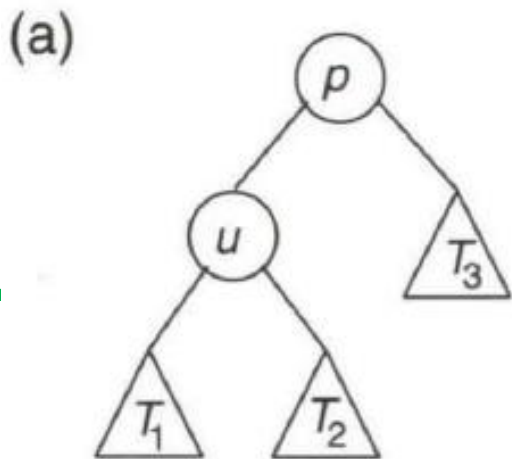


6 está desbalanceado!

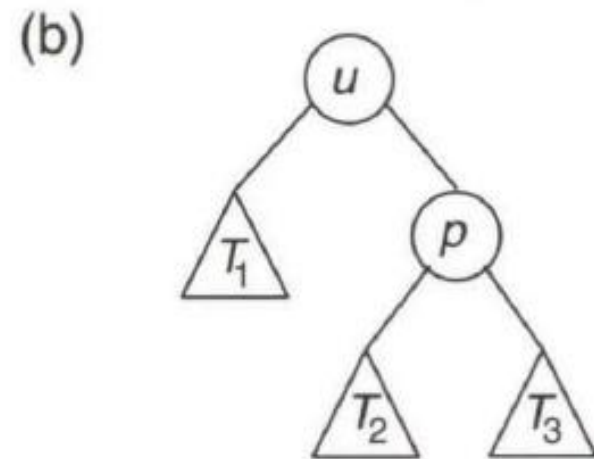
Identificando caso:

$2 > 1$  e  $\text{balanço}(n \rightarrow \text{filhoEsq}) \geq 0$ : Caso I

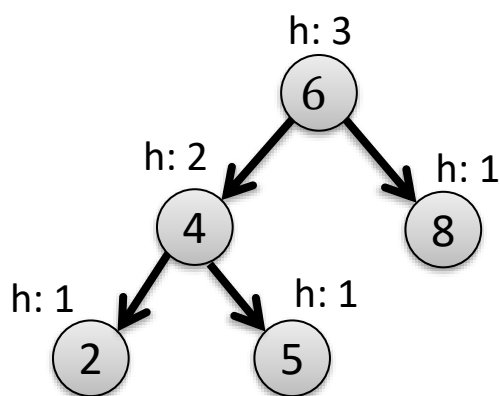
**Aplicar Rotação à Direita!**



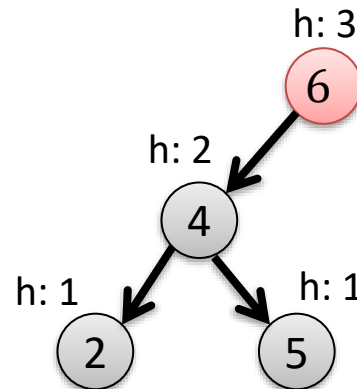
→  
rotação  
direita



— Exemplo:



Excluir(8)

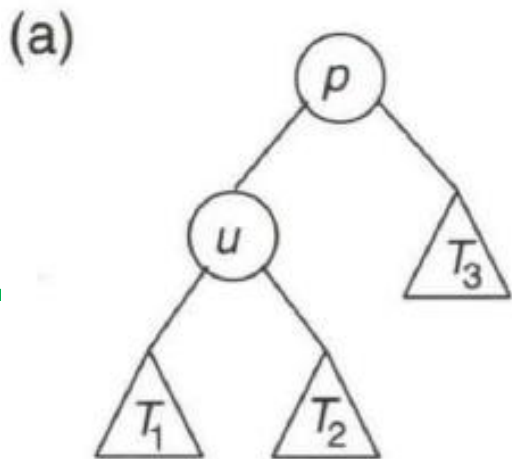


6 está desbalanceado!

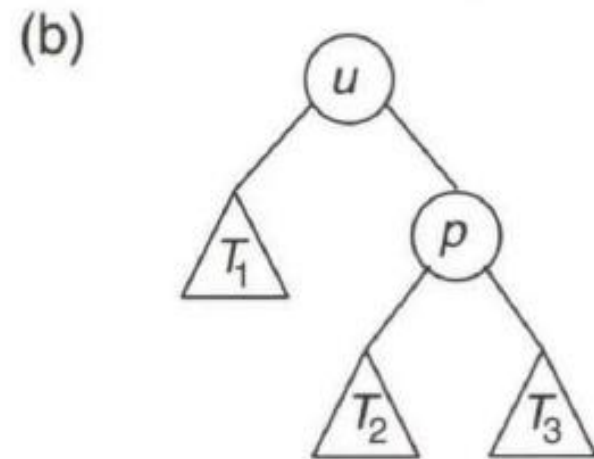
Identificando caso:

$2 > 1$  e  $\text{balanço}(n \rightarrow \text{filhoEsq}) \geq 0$ : Caso I

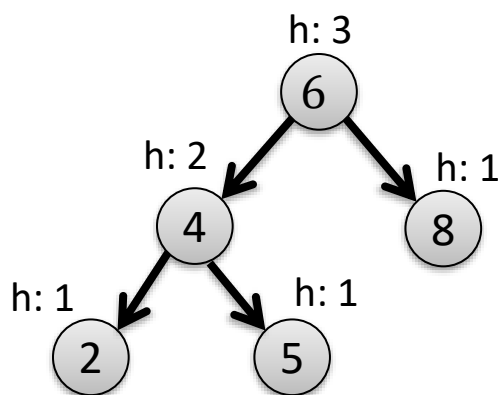
**Aplicar Rotação à Direita!**



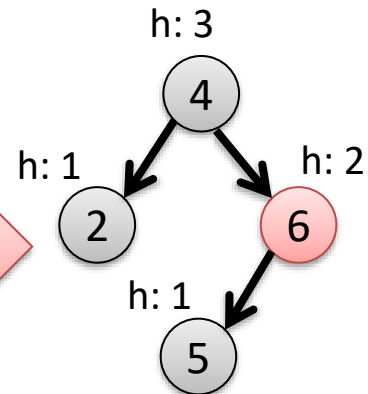
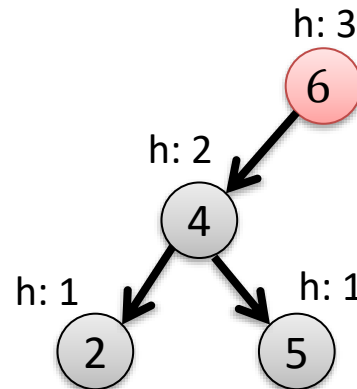
→  
rotação  
direita



— Exemplo:



Excluir(8)



6 está desbalanceado!

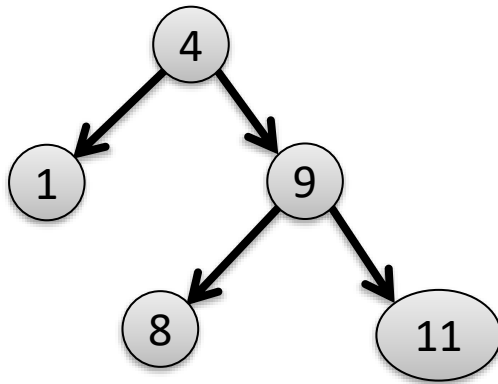
Identificando caso:

$2 > 1$  e  $\text{balanço}(n \rightarrow \text{filhoEsq}) \geq 0$ : Caso I

**Aplicar Rotação à Direita!**

- **Exercício 4:**

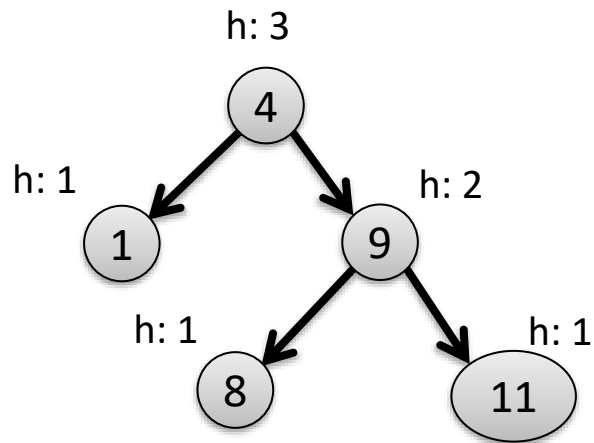
- Faça a exclusão dos nós 4, 1, 8 e 9 na seguinte árvore AVL:





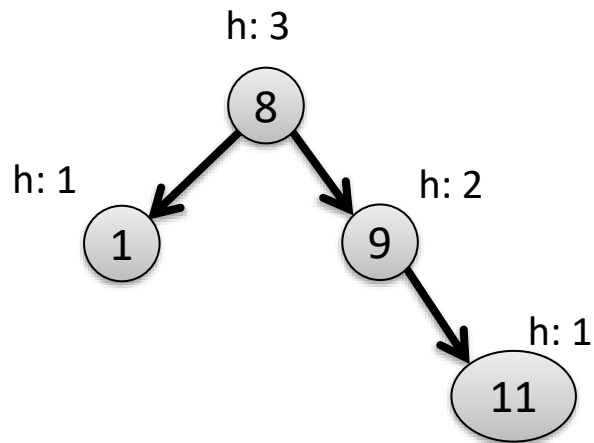
- **Exercício 4:**

- Faça a exclusão dos nós 4, 1, 8 e 9 na seguinte árvore AVL:



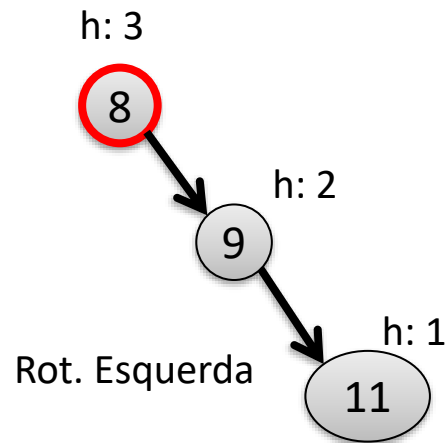
- **Exercício 4:**

- Faça a exclusão dos nós 4, 1, 8 e 9 na seguinte árvore AVL:



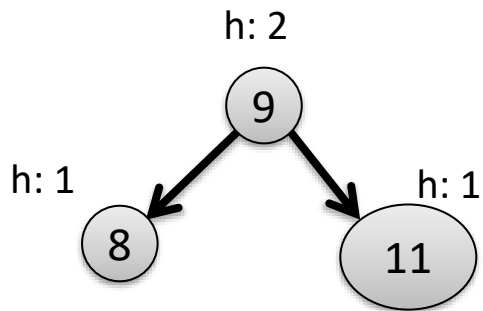
- **Exercício 4:**

- Faça a exclusão dos nós 4, 1, 8 e 9 na seguinte árvore AVL:



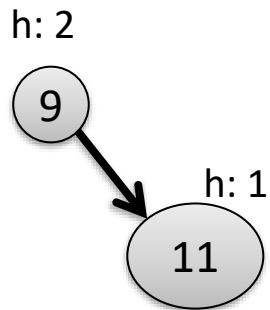
- **Exercício 4:**

- Faça a exclusão dos nós 4, 1, 8 e 9 na seguinte árvore AVL:



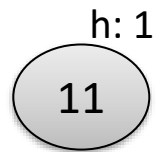
- **Exercício 4:**

- Faça a exclusão dos nós 4, 1, 8 e 9 na seguinte árvore AVL:



- **Exercício 4:**

- Faça a exclusão dos nós 4, 1, 8 e 9 na seguinte árvore AVL:



# Árvores AVL

---

FIM