# ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ. ЛЕКЦИЯ 3.

**Крамаренко К.Е.**

**Кафедра ВС**

# Линейное программирование

***ЛП*** - это метод оптимизации моделей, в которых целевые функции и ограничения строго линейны.

Успешно применяется:

- военной области;
- транспортной области;
- экономике.

# Линейное программирование

- Будем считать, что задача линейного программирования (ЗЛП) записана в ***каноническом*** форме, если ее целевая функция максимизируется, ограничения имеют вид равенств с неотрицательной правой частью и все переменные неотрицательны.

# Графический метод

Применяется для решения ЗЛП с двумя переменными.

Рассмотрим ЗЛП в стандартной форме записи:

$$\max f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \,, \qquad i = 1, 2, \ldots m,$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

# Графический метод

Применяется для решения ЗЛП с двумя переменными.

Рассмотрим ЗЛП в стандартной форме записи:

$$\max f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \,, \qquad i = 1, 2, \ldots m,$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Положим *n=2*, т.е. рассмотрим эту задачу на плоскости. Пусть система неравенств совместна (имеет хотя бы одно решение).

# Графический метод

Каждое неравенство этой системы геометрически определяет полуплоскость с граничной прямой

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 = b_i \quad , i=1,2,\ldots m.$$

Условия неотрицательности определяют полуплоскости, соответственно, с граничными прямыми x1=0,x2 =0.

Система совместна, поэтому полуплоскости, как выпуклые множества, пересекаясь, образуют общую часть, которая является выпуклым множеством и представляет собой совокупность точек, координаты каждой из которых являются решением данной системы. Совокупность этих точек называют многоугольником решений. Он может быть точкой, отрезком, лучом, многоугольником, неограниченной многоугольной областью.

# Графический метод

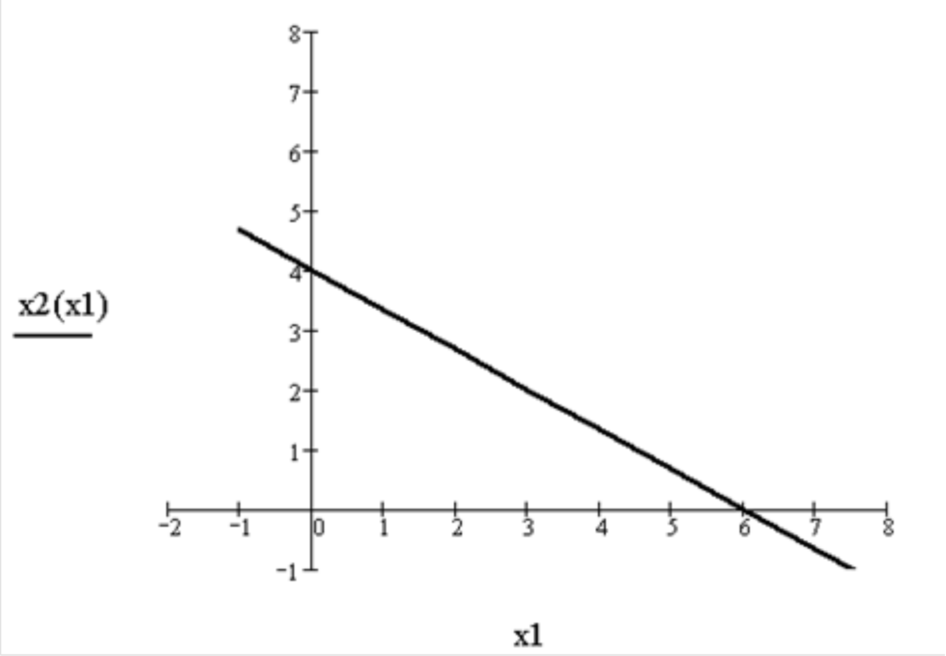
Таким образом, геометрически ЗЛП представляет собой отыскание такой точки многоугольника решений, координаты которой доставляют линейной функции цели максимальное (минимальное) значение, причем допустимыми решениями являются все точки многоугольника решений.

# Графический метод

Линейное уравнение описывает множество точек, лежащих на одной прямой. Линейное неравенство описывает некоторую область на плоскости. Определим, какую часть плоскости описывает неравенство 2x1+3x2 = 12.

Во-первых, построим прямую 2x1+3x2=12.

Эта прямая проходит через точки (6, 0) и (0, 4).



# Графический метод

Для нахождения экстремального значения целевой функции при графическом решении задач ЛП используют вектор–градиент

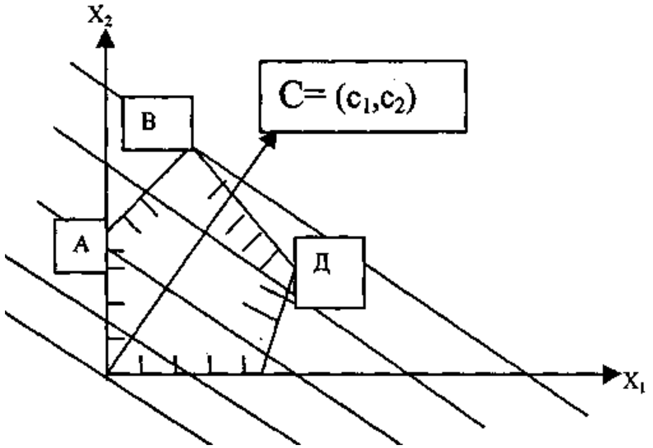
$$\nabla = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} = c_1, \frac{\partial f}{\partial x_2} = c_2\right)$$

Этот вектор показывает направление наискорейшего изменения целевой функции.

# Графический метод

Прямая $c_1x_1 + c_2x_2 = f(\bar{x}_0)$, перпендикулярная вектору–градиенту, является ***линией уровня*** целевой функции. В любой точке линии уровня целевая функция принимает одно и то же значение. Приравняем целевую функцию постоянной величине “а”. Меняя значение “а”, получим семейство параллельных прямых, каждая из которых является линией уровня.

Важное свойство линии уровня линейной функции состоит в том, что при параллельном смещении линии в одну сторону уровень только возрастает, а при смещении в другую сторону – убывает.



# Графический метод

С геометрической точки зрения в ЗЛП ищется такая угловая точка или набор точек из допустимого множества решений, на котором достигается самая верхняя (нижняя) линия уровня, расположенная дальше (ближе) остальных в направлении наискорейшего роста.

# Графический метод

Графический метод решения ЗЛП состоит из следующих этапов.

1. Строится многоугольная область допустимых решений ЗЛП – ОДР.
2. Строится вектор-градиент ЦФ в какой-нибудь точке X0 принадлежащей ОДР.
3. Линия уровня $C1x1+C2x2 = a$ (a–постоянная величина) - прямая, перпендикулярная вектору –градиенту – передвигается в направлении этого вектора в случае максимизации f(x1,x2) до тех пор, пока не покинет пределов ОДР. Предельная точка (или точки) области при этом движении и является точкой максимума f(x1,x2).
4. Для нахождения ее координат достаточно решить два уравнения прямых, получаемых из соответствующих ограничений и дающих в пересечении точку максимума. Значение f(x1,x2), найденное в получаемой точке, является максимальным.

# Графический метод

- При минимизации f(x1,x2) линия уровня перемещается в направлении, противоположном вектору-градиенту. Если прямая при своем движении не покидает ОДР, то соответствующий максимум или минимум f(x1,x2) не существует.
- Если линия уровня параллельна какому-либо функциональному ограничению задачи, то оптимальное значение ЦФ будет достигаться в любой точке этого ограничения, лежащей между двумя оптимальными угловыми точками, и, соответственно, любая из этих точек является оптимальным решением ЗЛП.

# Графический метод

***Пример:***

$f(x) = 10 * x1 + 20 * x2 \to \max.$

Ограничения задачи имеют вид:

$x1 + x2 <= 150$

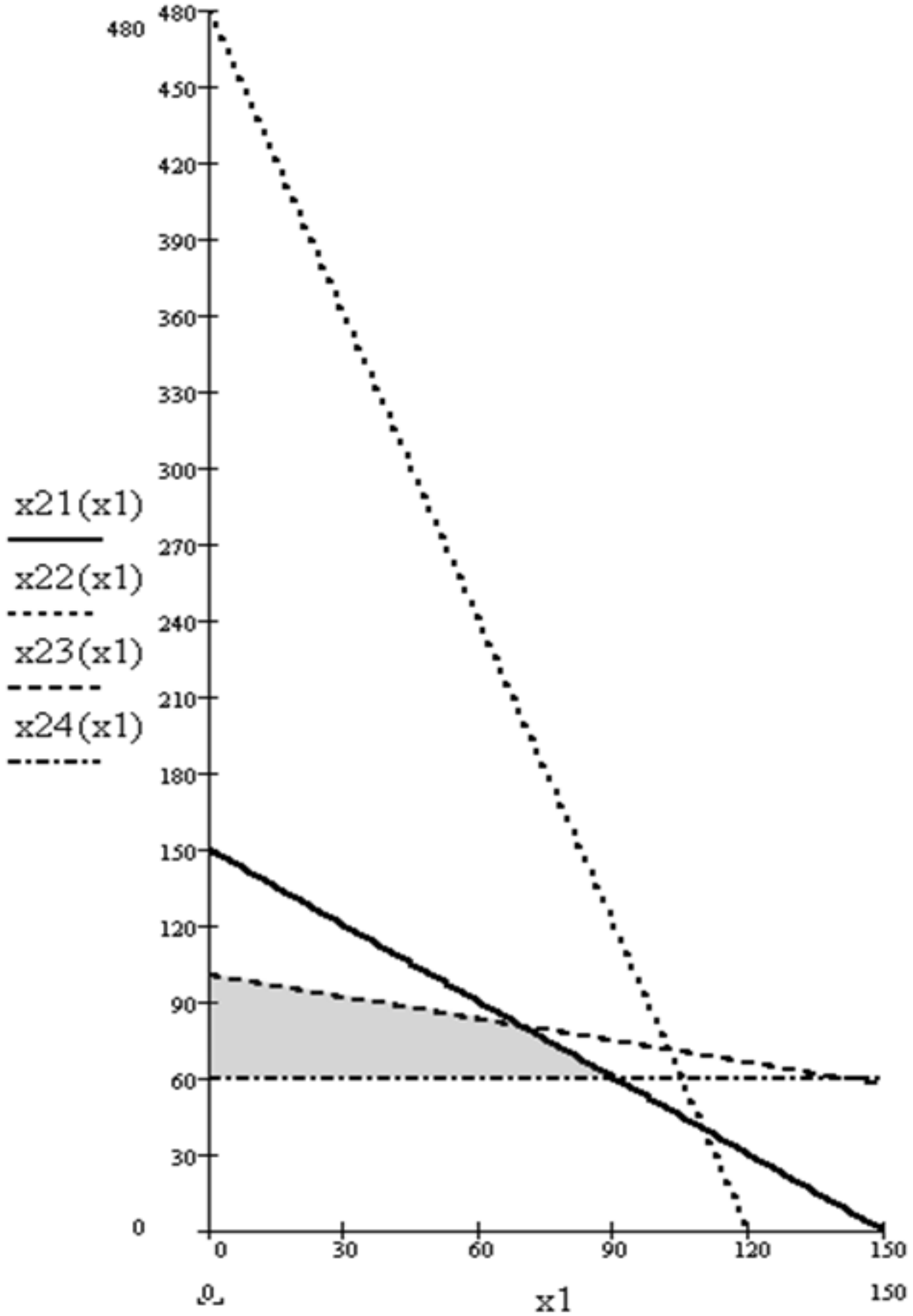
$2 * x1 + 0.5 * x2 <= 240$

$x1 + 3.5 * x2 <= 350$

$x2 >= 60$

$x1 >= 0$

# Графический метод

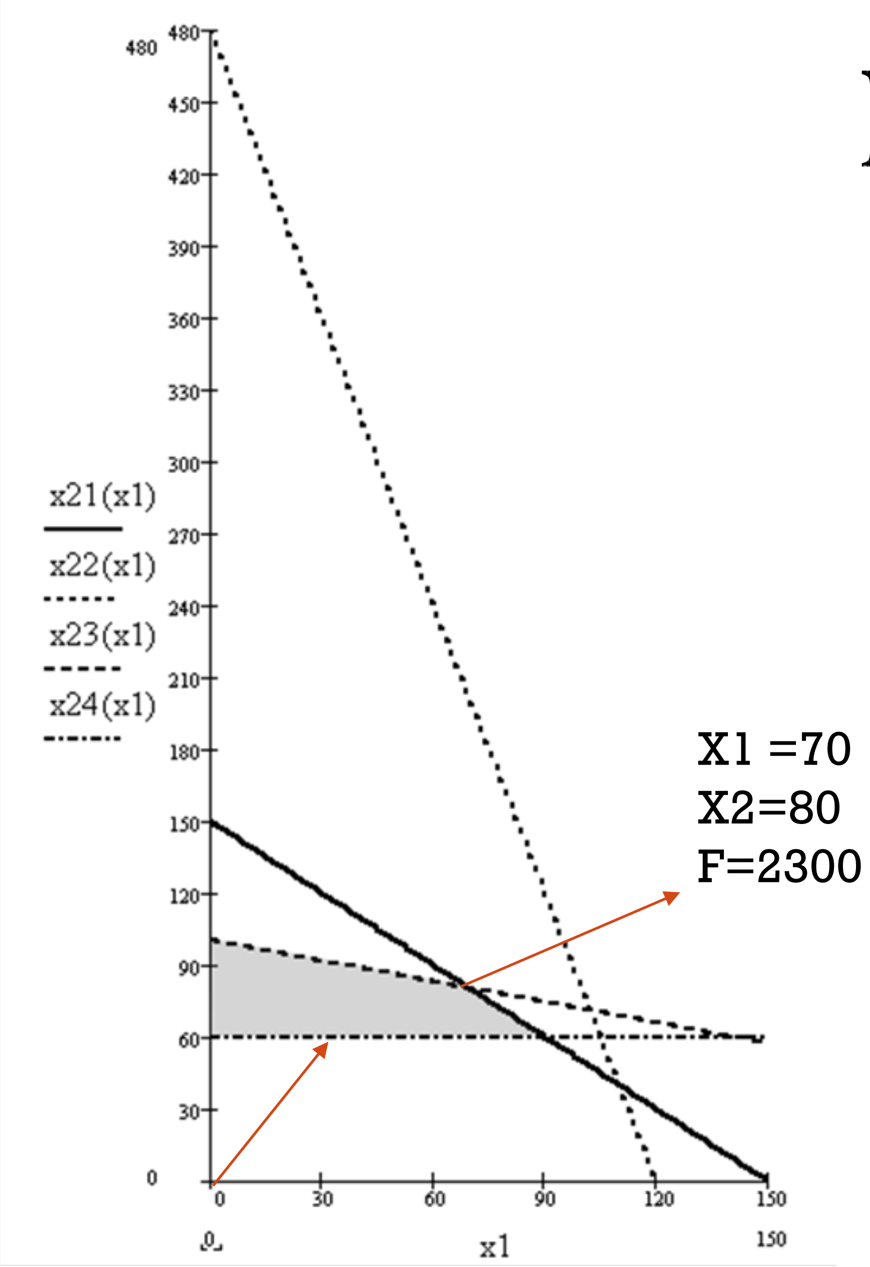


# Графический метод

Для определения направления движения к оптимуму построим вектор-градиент, координаты которого являются частными производными целевой функции, т.е. = (10;20).

$$\nabla = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} = c_1, \frac{\partial f}{\partial x_2} = c_2\right) = (10;20).$$

Что бы построить этот вектор, нужно соединить точку (10;20) с началом координат.




# Графический метод

x1 + 3.5 * x2 = 350
x1 + x2 = 150