Исследование операций. Лекция 5.

Крамаренко К.Е.

Кафедра ВС

Динамическое программирование

ДП - определяет оптимальное решение **n**-мерной задачи путем ее декомпозиции на **n** этапов, каждый из которых представляет подзадачу относительно одной переменной.

Динамическое программирование

Основные элементы модели ДП:

1. Определение этапов.
2. Определение на каждом этапе вариантов решения(альтернатив).
3. Определение состояний на каждом этапе.

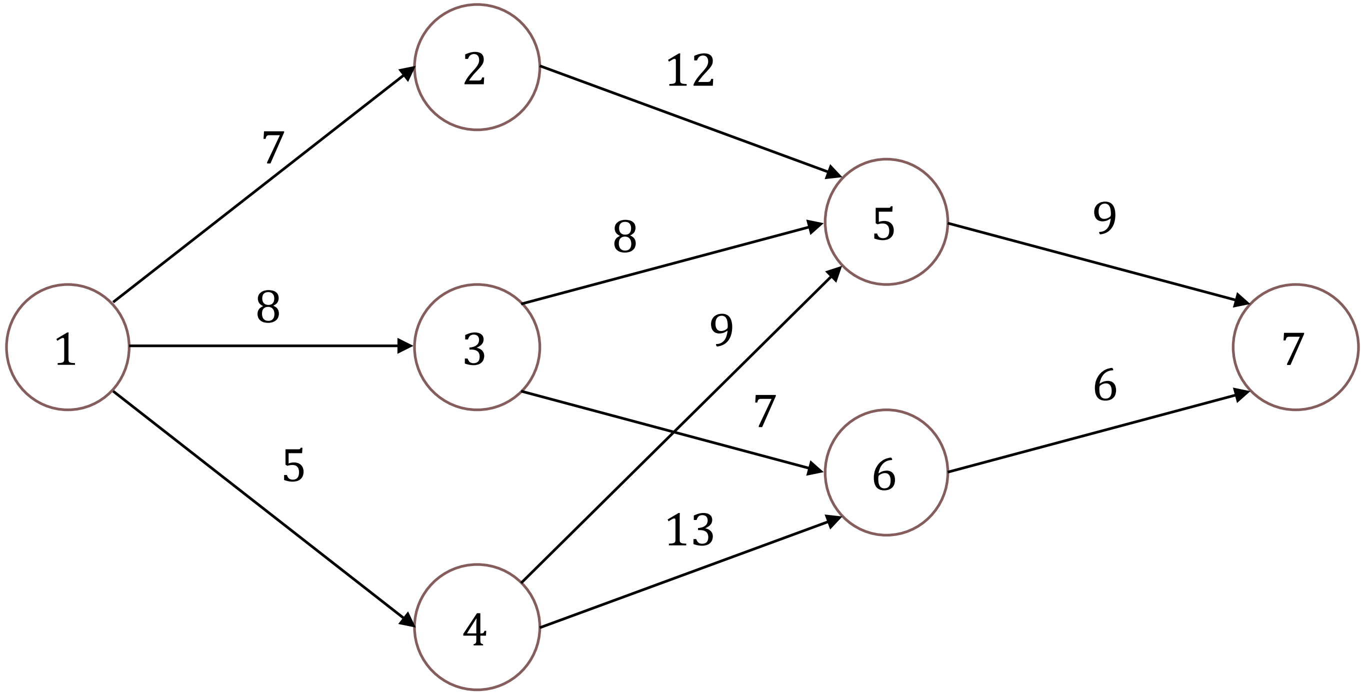
Рекуррентная природа вычислений ДП

Вычисления в ***ДП*** выполняются рекуррентно в том смысле, что оптимальное решение одной подзадачи используется в качестве исходных данных для следующей.

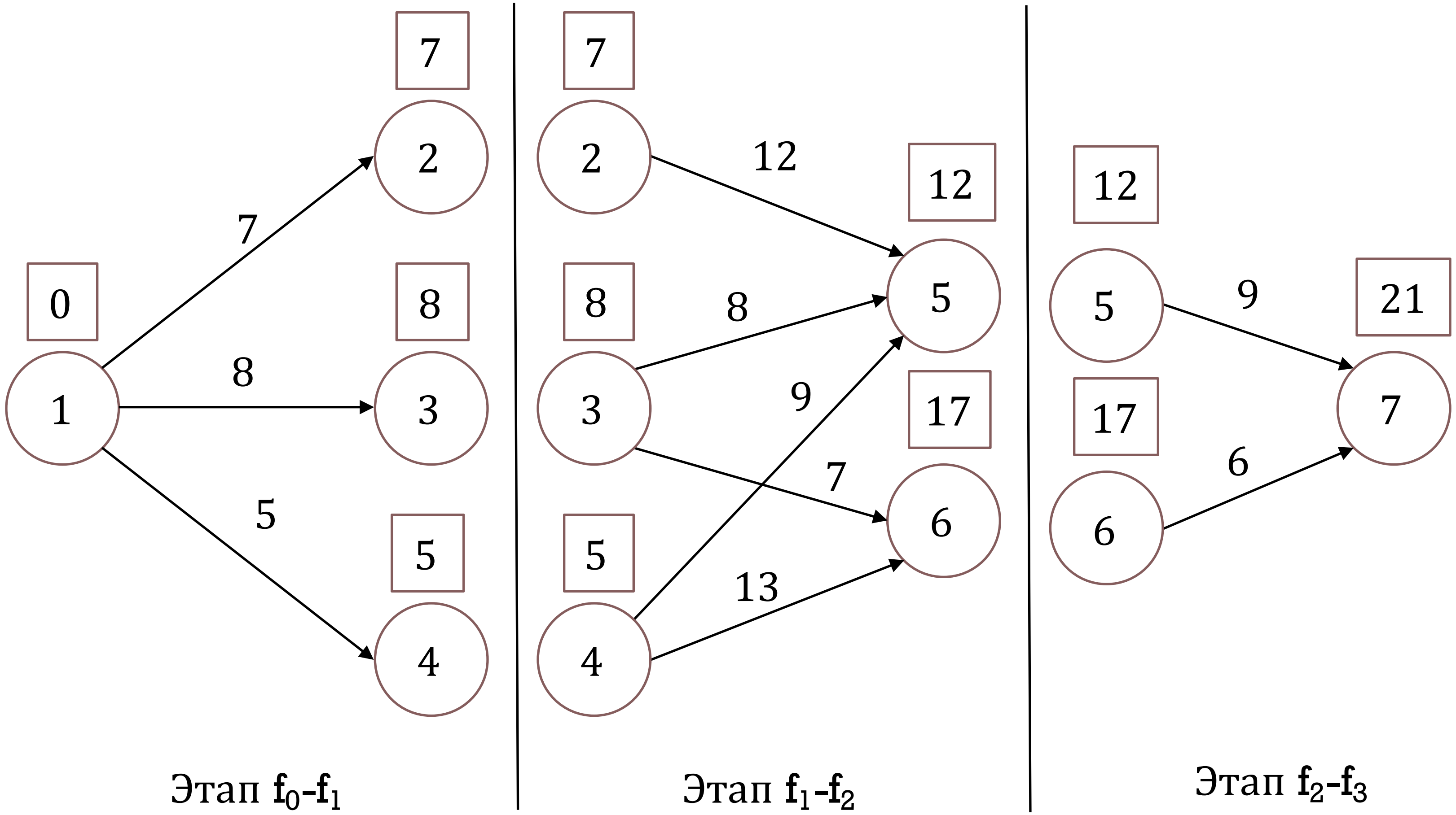
Рекуррентная природа вычислений ДП

Вычисления в ***ДП*** выполняются рекуррентно в том смысле, что оптимальное решение одной подзадачи используется в качестве исходных данных для следующей.

Пример: Нахождение кратчайшего путь



Пример: Нахождение кратчайшего путь



Пример: Нахождение кратчайшего путь

Этап 1:

Кратчайший путь к узлу 2 равен 7 (из узла 1)

Кратчайший путь к узлу 2 равен 7 (из узла 1)

Кратчайший путь к узлу 2 равен 7 (из узла 1)

Пример: Нахождение кратчайшего путь

Этап 2:

$$\begin{pmatrix}\text{Кратчайший}\\ \text{путь к узлу 5}\end{pmatrix} = \min_{i=2,3,4}\left\{\begin{pmatrix}\text{Кратчайший}\\ \text{путь к узлу } i\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Расстояние от}\\ \text{узла } i \text{ к узлу 5}\end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \min_{i=2,3,4}\begin{Bmatrix}7+12=19\\ 8+8=16\\ 5+7=12\end{Bmatrix} = 12(\text{из узла 4})$$

$$\begin{pmatrix}\text{Кратчайший}\\ \text{путь к узлу 6}\end{pmatrix} = \min_{i=3,4}\left\{\begin{pmatrix}\text{Кратчайший}\\ \text{путь к узлу } i\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Расстояние от}\\ \text{узла } i \text{ к узлу 6}\end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \min_{i=3,4}\begin{Bmatrix}8+9=17\\ 5+13=18\end{Bmatrix} = 17(\text{из узла 3})$$

Пример: Нахождение кратчайшего путь

Этап 3:

$$\begin{pmatrix}\text{Кратчайший}\\ \text{путь к узлу 7}\end{pmatrix} = \min_{i=5,6}\left\{\begin{pmatrix}\text{Кратчайший}\\ \text{путь к узлу } i\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Расстояние от}\\ \text{узла } i \text{ к узлу 7}\end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \min_{i=5,6}\begin{Bmatrix}12+9=21\\ 17+6=23\end{Bmatrix} = 21(\text{из узла 5})$$

Алгоритмы прямой и обратной прогонки

Прямая прогонка:

$$f_i(x_i) = \min_{\substack{\text{все допустимые} \\ \text{маршруты}}} \{d(x_{i-1}, x_i) + f_{i-1}(x_{i-1})\}, \text{где } i = 1,2,3,$$

при **i=1** полагаем $\mathbf{f_0(x_0)} = 0$.

Обратная прогонка:

$$f_i(x_i) = \min_{\substack{\text{все допустимые} \\ \text{маршруты}}} \{d(x_i, x_{i+1}) + f_{i+1}(x_{i+1})\}, \text{где } i = 1,2,3,$$

где $\mathbf{f_4(x_4)} = 0$ для $\mathbf{x_4}=7$.

Обратной прогонки

$d(x_3,x_4)$		Оптимальное решение	
x_3	$x_4=7$	$f_3(x_3)$	x_4^*
5	9	9	7
6	6	6	7

$d(x_2,x_3) + f_3(x_3)$			Оптимальное решение	
x_2	$x_3=5$	$x_3=6$	$f_2(x_2)$	x_3^*
2	12+9=21	-	21	5
3	8+9=17	9+6=15	15	6
4	7+9=16	13+6=19	16	5

$d(x_2,x_3) + f_3(x_3)$				Оптимальное решение	
x_1	$x_2=2$	$x_2=3$	$x_2=4$	$f_1(x_1)$	x_2^*
1	7+21=28	8+15=23	5+16=21	21	4

Задача о загрузке

Это задача о рациональной загрузке рюкзака(судна, самолета, склада), который имеет ограничения по объему или грузоподъемности.

W – грузоподъемность рюкзака(судна, самолета, склада).

n – количество наименований предметов.

m_i – количество предметов i-го наименования, подлежащих загрузки.

r_i – прибыль, которую приносит один загруженный предмет i-го наименования.

w_i – вес одного предмета i-го наименования.

Задача о загрузке

ЗЛП:

Максимизировать $z = r_1 m_1 + r_2 m_2 + \cdots + r_n m_n$

при условии, что

$w_1 m_1 + w_2 m_2 + \cdots + w_n m_n \leq W$,

$m_1, m_2, \ldots, m_n \geq 0$ и целые

1. Этап **i** соответствует **i**-му наименованию.
2. Вариант решения описывается $\mathbf{m_i}$ (в пределах от 0 до **[W/w$_i$]**).
3. Состояние $\mathbf{x_i}$ на этапе **i** выражает суммарный вес предметов, решения о погрузки которых приняты на этапах **i, i+1,…,n**.

Задача о загрузке

Пусть $\mathbf{f_i(x_i)}$ – максимальная суммарная прибыль от этапов **i, i+1,..n** при заданном состоянии $\mathbf{x_i}$.

$$f_i(x_i) = \max_{\substack{m_i=0,1,\dots,\left[\frac{W}{w_i}\right] \\ x_i=0,1,\dots,W}} \{r_i m_i + f_{i+1}(x_{i+1})\}, \text{где } i = 1,2,..,n,$$

где $\mathbf{f_{n+1}(x_{n+1})=0}$.

$$x_i - x_{i+1} = w_i m_i$$
$$x_{i+1} = x_i - w_i m_i$$

$$f_i(x_i) = \max_{\substack{m_i=0,1,\dots,\left[\frac{W}{w_i}\right] \\ x_i=0,1,\dots,W}} \{r_i m_i + f_{i+1}(x_i - w_i m_i)\}, \text{где } i = 1,2,..,n,$$

Задача о загрузке

W = 4

Предмет i	w_i	r_i
1	2	31
2	3	47
3	1	14

$f_3(x_3) = \max_{m_3}\{14m_3\}$, $\max\{m_3\} = \left[\frac{4}{1}\right] = 4.$ m_3 является допустимым, если $w_3 m_3 \le x_3$

	14m_3					Оптимальное решение	
x_3	$m_3=0$	$m_3=1$	$m_3=2$	$m_3=3$	$m_3=4$	$f_3(x_3)$	m_3^*
0	0	-	-	-	-	0	0
1	0	14	-	-	-	14	1
2	0	14	28	-	-	28	2
3	0	14	28	42	-	42	3
4	0	14	28	42	56	56	4

Задача о загрузке

$$f_2(x_2) = \max_{m_2}\{47m_2 + f_3(x_2 - 3m_2)\}, \ \max\{m_2\} = \left[\frac{4}{3}\right] = 1.$$

	$47m_2+f_3(x_2-3m_2)$		Оптимальное решение	
x_2	$m_2=0$	$m_2=1$	$f_2(x_2)$	m_2^*
0	0 + 0 = 0	-	0	0
1	0 + 14 =14	-	14	0
2	0 + 28 = 28	-	28	0
3	0 + 42 = 42	47 + 0 = 47	47	1
4	0 + 56 = 56	47 + 14 = 61	61	1

Задача о загрузке

$$f_1(x_1) = \max_{m_1}\{31m_1 + f_2(x_1 - 2m_1)\}, \ \max\{m_1\} = \left[\frac{4}{2}\right] = 2.$$

	$31m_1+f_2(x_1-2m_1)$			Оптимальное решение	
x_1	$m_1=0$	$m_1=1$	$m_1=2$	$f_1(x_1)$	m_1^*
0	0 + 0 = 0	-	-	0	0
1	0 + 14 = 14	-	-	14	0
2	0 + 28 = 28	31 + 0 = 31	-	31	1
3	0 + 47 = 47	31 + 14 = 45	-	47	0
4	0 + 61 = 61	31 + 28 = 59	62 + 0 = 0	62	2

$m_1^* = 2$, $x_2 = x_1 - 2m_1^* = 4 – 2 * 2 = 0$
$x_2 = 0$ -> $m_2^* = 0$, $x_3 = x_2 – 3m_2^* = 0 – 3 * 0 = 0$
$x_3 = 0$ -> $m_3^* = 0$