Неделя 10

№22.5

$$I = \oint[(ap + bq)\delta q + (\alpha p+\beta q)\delta p] =$$

$$= \oint[ap\delta q + \cancel{bq\delta q} + \cancel{\alpha p\delta p} + \beta q\delta p] = \oint[ap\delta q + \beta q\delta p] =$$

0 т.к. интегр. по замкн. конт.

$$= \left| \begin{matrix} \delta(pq) = p\delta q + q\delta p \\ q\delta p = \delta(pq) - p\delta q \end{matrix} \right| = \oint[ap\delta q + \beta(\delta(qp) - p\delta q)] =$$

$$= \oint[ap\delta q - \beta p\delta q] = \oint(a-\beta)p\delta q$$ — привели к виду универсального ~~инв~~ интегр. ~~инв~~ инв.

$I_n = \oint p^T\delta q$ — универ. интегр. инвар. Пуанкаре

$\Rightarrow I = (a-\beta) I_n$ — связь с инв. Пуанкаре.

№22.12 $\Phi(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$

$$I = \oint_C \left[\sum_{i=1}^{n} p_i\delta q_i - \Phi(q_1,\dots q_n, p_1, \dots p_n, t)\delta t\right]$$

$$I = \oint_C \left[\sum_{i=1}^{n} p_i\delta q_i - H\delta t\right] + \oint_C (H-\Phi)\delta t = const + \oint_C (H-\Phi)\delta t$$

По условию I — интегр. инвар. $\Rightarrow \oint_C (H-\Phi)\delta t = inv$

$H - \Phi = f(t) \Rightarrow \underline{\Phi = H + F(t)}$

№22.18 $H = H[Y_1(q_1,p_1), \dots, Y_k(p_k, q_k), t]$

$$I_k = \int\limits_{G_{2n}}\dots\int Y_k(q_k,p_k)\delta q_1\dots dq_k\, dp_1\dots dp_k \quad (k=\overline{1,n})$$

$\Rightarrow$ по т. Ли Хуа-Чжуна: $Y_k - C_k I_{1k} = \int\limits_{G_{2n}}\dots\int Y_k(q_k,p_k)dq_1\dots dq_k\, dp_1\dots dp_k -$

$$- C_k\oint p_k\delta q_k = \int_{p_{1k}}^{p_{2k}}\delta p_k\left(\int_{f_1(p_k)}^{f_2(p_k)}(Y_k - C_k p_k)\delta q_k\right) = 0$$

Y_k — инт. инвар. $\Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial q_k}\left(\displaystyle\int_{f_1(p_k)}^{f_2(p_k)}(Y_k - c_k p_k)\delta q_k\right) = 0 =$

$$= (Y_k - C_k p_k)\frac{\partial f_2(p_k)}{\partial q_k} + (Y_k - C_k p_k)\frac{\partial f_1(p_k)}{\partial q_k} + \int_{q_k = f_1(p_k)}^{q_k=f_2(p_k)}\frac{\partial}{\partial q_k}(Y_k - C_k p_k)\delta q_k =$$

$$= \int_{q_k(p_k)}^{q_k(p_k)}\frac{\partial Y_k}{\partial q_k}\delta q_k = 0$$

$Y_k = const$ — перв. инт.

№22.29 $\dot{x} = Ax$ $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$V_t = \int\limits_{\Gamma_t}\dots\int dV^* = \int\limits_{\Gamma_t}\dots\int dx_1^*\dots dx_n^*\, dp_1^*\dots dp_n^*$$

Для малых t: $x = x^0 + Ax^0 \cdot t + o(t) = \{E + At\}x^0 + o(t)$

$$V_t = \int\limits_{\Gamma_t}\dots\int dV^* = \int\limits_{\Gamma_0}\dots\int \left|\frac{\partial x}{\partial x^0}\right| dV = \int\limits_{\Gamma_0}\dots\int [1 + t \cdot trA + o(t)]\, dV =$$

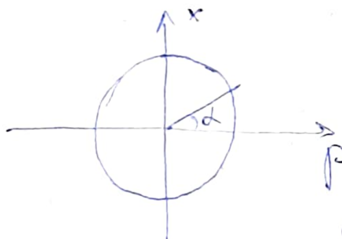
$$= V_0 + \int\limits_{\Gamma_0}\dots\int [t \cdot trA + o(t)]\, dV$$

$\dot{V}_t = \int\limits_{\Gamma_0}\dots\int trA\, dV$ $\quad$ Для $t - t_0$ с тем же набором действий получим:

$$\dot{V}_t = \int\limits_{\Gamma_0}\dots\int trA\, dV \Rightarrow V_t = const \Leftrightarrow trA = 0 \Rightarrow trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$$

№22.51 Мат. точка движется по инерции $\Rightarrow \ddot{x} = 0$

$x = At + B$



Зададим Γ_0: $\begin{cases} x_0 = \sin\alpha \\ p_{t0} = \cos\alpha \end{cases}$ $\quad \alpha = [0; 2\pi]$

$$H = \frac{p_t^2}{2} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = p_t \\ \dot{p}_t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + p_{t0} t = \sin\alpha + t\cos\alpha \\ p_t = p_{t0} = \cos\alpha \end{cases}$$

$(x - p_t t)^2 + p_t^2 = (\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$ – инв. фаз. кривая.

$(x - p_t t)^2 + p_t^2 = 1$ – эллипс

Для фазового потока: $V(0) = \pi \cdot 1^2 = \pi$

Для произв. t: S(элл.) – ?

S – $\begin{cases} a = x - p_t t \\ b = p_t \end{cases} \Rightarrow V' = V\,|\det S|$ – для лин. преобр.

$V = \dfrac{V'}{\det S}$, $\quad a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow V' = \pi \cdot 1^2 = \pi$.

$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\det S| = 1$.

$\Rightarrow V(t) = V'(t) = \pi = const \Rightarrow$ фаз. объем сохраняется.