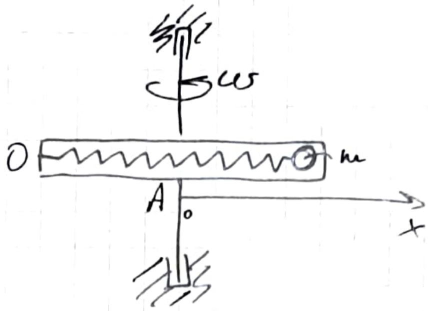
Неделя 5

№17.1

m

c



$$\Pi = \frac{cx^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2}$$

$$L = T - \Pi = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{cx^2}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m\omega^2 x - cx$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \tilde{Q} \Rightarrow m\ddot{x} - m\omega^2 x + cx = -\beta\dot{x}$$ – т.к. сила кориолиса

Опр П.Р $x = const$, $x = 0$

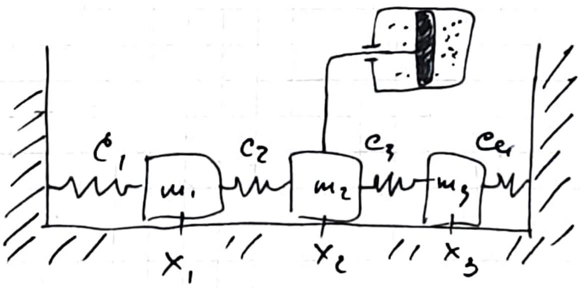
$$\lambda^2 + \lambda\frac{\beta}{m} + \left(\frac{c}{m} - \omega^2\right) = 0 \Rightarrow$$ Критерий Гурвица:

$$\begin{pmatrix} \frac{\beta}{m} & 0 \\ 1 & \frac{c}{m} - \omega^2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 > 0$$

$$\Delta_2 = \frac{\beta}{m}\left(\frac{c}{m} - \omega^2\right) > 0 \text{ при } \frac{c}{m} - \omega^2 > 0$$

№17.4



$$\Pi = \frac{c_1 x_1^2}{2} + \frac{c_2}{2}(x_2 - x_1)^2 + \frac{c_3}{2}(x_3 - x_2)^2 + \frac{c_4}{2}x_3^2$$

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}_2^2 + \frac{m_3}{2}\dot{x}_3^2$$

$$\Rightarrow L = T - \Pi = \frac{1}{2}\left(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2 + m_3\dot{x}_3^2\right) - \frac{1}{2}\left(c_1 x_1^2 + c_2(x_2 - x_1)^2 + c_3(x_3 - x_2)^2 + c_4 x_3^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = \tilde{Q}_1 \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial L}{\partial x_2} = \tilde{Q}_2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} - \frac{\partial L}{\partial x_3} = \tilde{Q}_3 \qquad \tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_2 = 0$$

$$\tilde{Q}_3 = -\beta\dot{x}$$

т.к. $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = m_k \dot{x}_k$ $\qquad \frac{\partial L}{\partial x_1} = -c_1 x_1 - c_2(x_2 - x_1)$ $\quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = c_2(x_2 - x_1) - c_3(x_3 - x_2)$

$$\frac{\partial h}{\partial x_3} = c_3(x_3 - x_2) + c_4 x_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{c_1+c_2}{m_1} x_1 - \frac{c_2}{m_1} x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \frac{\beta}{m_2}\dot{x}_2 - \frac{c_2}{m_2} x_1 + \frac{c_2+c_3}{m_2} x_2 - \frac{c_3}{m_2} x_3 = 0 \\ \ddot{x}_3 - \frac{c_3}{m_3} x_2 + \frac{c_3+c_4}{m_3} x_3 = 0 \end{cases}$$

Для сущ. асимптотической устойчивости нужно чтобы полная энерг. $E < 0$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = -\beta \dot{x}_2 \cdot \dot{x}_2 = -\beta \dot{x}_2^2 \leq 0$$

$\Rightarrow$ Для асимпт. уст. возьмем $x_2 = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{c_1+c_2}{m_1} x_1 = 0 \\ -\frac{c_2}{m_1} x_1 - \frac{c_3}{m_2} x_3 = 0 \\ \ddot{x}_3 + \frac{c_3+c_4}{m_3} x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_3 = -\frac{c_2}{c_3} x_1$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{c_1+c_2}{m_1} x_1 = 0 \\ -\ddot{x}_1 - \frac{c_3+c_4}{m_3} x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{c_1+c_2}{m_1} = \frac{c_3+c_4}{m_3}}$$

~~отв~~

№ 17.4.в

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + x - \alpha y = 0 \\ \beta\ddot{y} + \dot{y} - x + y = 0 \end{cases} \qquad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - \alpha y = 0 \\ y - x = 0 \end{cases} \overset{\alpha \neq 1}{\Rightarrow} \begin{cases} y = 0 \\ x = 0. \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A\lambda^2 + B\lambda + C| = \begin{vmatrix} \lambda^2+\lambda+1 & -\alpha \\ -1 & \beta\lambda^2+\lambda+1 \end{vmatrix} = \beta\lambda^4 + \beta\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + \lambda^2 + \lambda + 1 - \alpha = 0$$

$$= \beta\lambda^4 + \lambda^3(\beta+1) + \lambda^2(\beta+2) + \lambda(2) + 1 - \alpha$$

Критерий Гурвица:

$$\begin{pmatrix} \beta+1 & 2 & 0 & 0 \\ \beta & \beta+2 & +1-\alpha & 0 \\ 0 & \beta+1 & 2 & 0 \\ 0 & \beta & \beta+2 & +1-\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1+\beta>0 \\ (\beta+2)(\beta+1)-2\beta>0 \\ 1-\alpha>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha<1 \\ \beta>0 \end{matrix}$$

по Шинару можем только 2 минора посчитать

$\Delta_1 = 1+\beta>0$

~~$\Delta_2 = (\beta+2)(\beta+1)-2\beta$~~

$\Delta_3 = (\beta+1)^2(1-\alpha)+2((\beta+2)(\beta+1)-2\beta)=$

$= 3+\beta^2+2+4\beta+2\beta^2 = 3+\beta^2+2(1+\beta)^2>0 \Rightarrow \Delta_3>0$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha<1 \\ \beta>0 \\ 3+\beta^2+2(1+\beta)^2>0 \end{cases}$ - необх. усл.

№17.20 $\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\ddot{q}^k+b_{ik}\dot{q}^k+c_{ik}q^k)=0 \quad i=\overline{1,n}$

где $A=(a_{ik})$ $B=(b_{ik})$ $C=(c_{ik})$ - симм. полож. опр.

$|A\lambda^2+B\lambda+C|=0$

Покажем, что все корни характ. многочлена имеют отриц. действ. часть.

Пусть λ_k - произвольный корень

$\Rightarrow \overline{u}^k e^{\lambda_k t}$ - решение.

$\Rightarrow |A\lambda_k^2+B\lambda_k+C|\overline{u}^k=0 \quad |\cdot \overline{u}^{kT}$

$\underbrace{\overline{u}^{kT}A\overline{u}^k}_{a>0}\lambda_k^2+\underbrace{\overline{u}^{kT}B\overline{u}^k}_{b>0}\lambda_k+\underbrace{\overline{u}^{kT}C\overline{u}^k}_{c>0}=0$ Следует из того, что A, B, C - полож. опр. и $\overline{u}^k$ - произв. вектора

$\Rightarrow \mathrm{Re}\,\lambda_k<0.$

Критерий Гурвица: $\Gamma=\begin{pmatrix} b & 0 \\ a & c \end{pmatrix}$ $\Delta_1=b>0$

$\Delta_2=cb>0.$

$\Rightarrow$ Устойчивость подтвердилась.

4