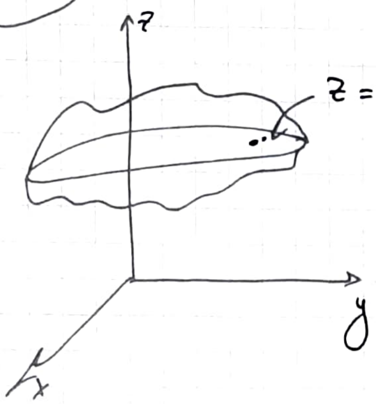
Неделя III

№15.4 г)



$z = 4x^2 - 2xy + 2y^2$

$\Pi = \Pi(x,y) = mgz = mg(4x^2 - 2xy + 2y^2)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi}{\partial x} = mg(8x - 2y) = 0 \Rightarrow 4x = y \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial y} = mg(4y - 2x) = 0 \Rightarrow x = 2y \end{cases}$$

$d\Pi = mg(8x\,dx - 2x\,dy - 2y\,dx + 4y\,dy) = mg[(8x - 2y)dx +$

$+ (4y - 2x)dy]$

$d^2\Pi = mg(8dx^2 - 4dx\,dy + 4dy^2) = mg(7dx^2 + dx^2 - 4dx\,dy + 4d^2y) =$

$= mg(7dx^2 + (dx - 2dy)^2) > 0$

$x = 0$, $y = 0$ – устойчиво, т.к. потенц. эн-я имеет строгий минимум в этой точке.

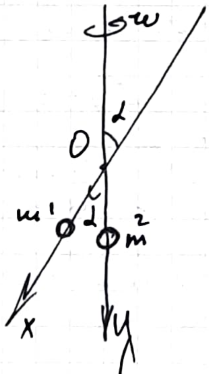
№15.14

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

ω

m

λ



Запишем потенц. эн-ю шара 1:

$\Pi_1 = -mg\cos\alpha + \frac{m\omega^2}{2}x^2\sin^2\alpha$

Потенц. эн-ю шара 2:

$\Pi_2 = -mgy + \frac{\lambda r^2}{2} = -mgy + \frac{\lambda}{2}(x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha)$

$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = -mg\cos\alpha x - mgy + \frac{m\omega^2}{2}x^2\sin^2\alpha +$

$+ \frac{\lambda}{2}(x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha)$

$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -mg\cos\alpha + m\omega^2 x\sin^2\alpha + \frac{\lambda}{2}(2x - 2y\cos\alpha) =$

$= -mg\cos\alpha + m\omega^2 x\sin^2\alpha + \lambda x - \lambda y\cos\alpha$

$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0 \Rightarrow \lambda(x - y\cos\alpha) = m(g\cos\alpha - \omega^2 x\sin^2\alpha)$

$\Rightarrow x - y\cos\alpha = \frac{m(g\cos\alpha - \omega^2 x\sin^2\alpha)}{\lambda}$

$$\frac{\partial П}{\partial y} = \frac{\lambda}{2}(2y - 2x\cos\alpha) - mg = 0 \Rightarrow gm = \lambda(y - x\cos\alpha)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{mg}{\lambda} + x\cos\alpha \\ x = y\cos\alpha + \frac{m(g\cos\alpha - \omega^2 x\sin^2\alpha)}{\lambda} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2mg\cos\alpha}{(\lambda - m\omega^2)\sin^2\alpha} \\ y = \frac{mg}{\lambda} + \frac{2mg}{\lambda - m\omega^2}ctg^2\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 П}{\partial x^2} = \lambda - m\omega^2\sin^2\alpha \\ \frac{\partial^2 П}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 П}{\partial y\partial x} = -\lambda\cos\alpha \\ \frac{\partial^2 П}{\partial y^2} = \lambda \end{cases} \Rightarrow C(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \lambda - m\omega^2\sin^2\alpha & -\lambda\cos\alpha \\ -\lambda\cos\alpha & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \lambda - m\omega^2\sin^2\alpha$$

$$\Delta_2 = \lambda^2 - m\omega^2\lambda\sin^2\alpha - \lambda^2\cos^2\alpha = (\lambda - m\omega^2)\lambda\sin^2\alpha$$

При $\lambda > m\omega^2$, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$

По т. Лагранжа-Дирихле П.Р. - устойчиво

При $\lambda < m\omega^2$. В этом случае $\Delta_2 < 0 \Rightarrow$ в (x^*, y^*) нет строгого минимума $П(x, y)$. $\Rightarrow$ По т. Ляпунова о неустойчивости равное положение неустойчиво.

При $\lambda = m\omega^2$ П.Р. нет $\Rightarrow$ дальнейшего рассм. не стоит проводить.

№15.16 ω, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $(a < b < c)$

$$П = -\frac{m\omega^2}{2}r^2 + mgz = -\frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + mgz$$

$$\frac{\partial П}{\partial x} = -\frac{m\omega^2}{2}(2x) + mg\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2z}{c^2}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{a^2}\frac{c^2}{z} \quad и$$

$$\frac{\partial П}{\partial x} = -m\omega^2 x - \frac{mgx}{z}\frac{c^2}{a^2}$$

$$\frac{2y}{b^2}+\frac{2z}{c^2}\frac{\partial z}{\partial y}=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}\frac{c^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial y}=-\frac{m\omega^2}{2}(2y)+mg\frac{\partial z}{\partial y}=-m\omega^2 y+mg\left(-\frac{y}{z}\frac{c^2}{b^2}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial x}=-mx\left(\omega^2+\frac{gc^2}{a^2}\cdot\frac{1}{z}\right)=0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial y}=-my\left(\omega^2+g\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{1}{z}\right)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

1) $x=y=0$
2) $x=0,\ y\neq0$
3) $x\neq0,\ y=0$
4) $x\neq0,\ y\neq0$

1: $x=y=0 \Rightarrow \boxed{z=\pm c}$

2: $x=0,\ y\neq0 \Rightarrow z=-\frac{g}{\omega^2}\frac{c^2}{b^2} \Rightarrow y=\pm b\sqrt{1-\frac{g^2c^2}{\omega^4 b^4}}$

3: $x\neq0,\ y=0 \Rightarrow z=-\frac{g}{\omega^2}\frac{c^2}{a^2} \Rightarrow y=\pm\sqrt{a^2-\frac{g^2c^2}{\omega^4a^2}}$

4: $x\neq0,\ y\neq0$: $\begin{cases} z=-\frac{gc^2}{b^2\omega^2} \\ z=-\frac{gc^2}{a^2\omega^2} \end{cases} \Rightarrow$ противоречие, т.к. $\underline{a<b}$

В итоге получили 6 П.Р. Исследуем на устойчивость

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2}=-m\omega^2-\frac{c^2}{a^2}mg\left(\frac{z-x\frac{\partial z}{\partial x}}{z^2}\right)=-m\omega^2-\frac{mgc^2}{za^2}+mg\frac{x}{z^2}\left(-\frac{x}{z}\frac{c^2}{a^2}\right)\frac{c^2}{a^2}=$$

$$=-m\omega^2-\frac{mgc^2}{a^4z^3}\cdot a^2c^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)=-mgc^4\frac{1-\frac{y^2}{b^2}}{a^2z^3}-m\omega^2$$

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial x\partial y}=mg\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{y}{z^2}\left(-\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z}\right)=-mg\frac{c^4}{a^2b^2}\frac{xy}{z^3}$$

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial y^2}=-m\omega^2-\frac{mg\,c^2}{z\,b^2}+mg\frac{y}{z}\left(-\frac{y}{z}\cdot\frac{c^2}{b^2}\right)\frac{c^2}{b^2}=$$

$$=-m\omega^2-\frac{mgc^2}{z^3b^4}\left(z^2b^2+y^2c^2\right)=-m\omega^2-\frac{mgc^4}{z^3b^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$\Rightarrow C(x,y,z)=\begin{pmatrix} -mgc^4\frac{1-\frac{y^2}{b^2}}{a^2z^3}-m\omega^2 & -\frac{mgc^4}{a^2b^2}\frac{xy}{z^3} \\ -\frac{mgc^4}{a^2b^2}\frac{xy}{z^3} & -\frac{mgc^4}{z^3b^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-m\omega^2 \end{pmatrix}$$

1) $C_1(0;0,c) = \begin{pmatrix} -\frac{mgc}{a^2} - m\omega^2 & 0 \\ 0 & -\frac{mgc}{b^2} - m\omega^2 \end{pmatrix}$

$\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$ C_1 - отриц. определена => по т. Ляпунова П.Р. неустойчиво

2) $C_2(0,0,-c) = \begin{pmatrix} \frac{mgc}{a^2} - m\omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{mgc}{b^2} - m\omega^2 \end{pmatrix}$

$\Delta_1 = \frac{mgc}{a^2} - m\omega^2$ $\Delta_2 = \left(\frac{mgc}{b^2} - m\omega^2\right)\left(\frac{mgc}{a^2} - m\omega^2\right)$

Если $\Delta_2 > 0$, т.е. $\omega^2 < \frac{gc}{b}$; Δ_1 и $\Delta_2 > 0$ => по т. Ляпунова-Дирихле П.Р. уст.

Если $\Delta_2 < 0$ => $\omega^2 > \frac{gc}{b^2}$ по т. Ляпунова о неустойчивости П.Р. неустойчиво.

Если $\frac{mgc}{b^2} = m\omega^2$:

$\Pi = -mgc\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2) = -mg\left[\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} + \frac{1}{2b^2}(x^2+y^2)\right]$

В итоге $(0;0,-c)$ у Π лок. мин. => положение устойчиво

3-4) $x=0$ $y = \pm\sqrt{b^2 - \frac{g^2c^2}{\omega^4 b^2}}$; $z = -\frac{g}{\omega^2}\frac{c^2}{b^2}$

$C\left(0; \pm\sqrt{b^2 - \frac{g^2c^2}{\omega^4 b^2}}; -\frac{g}{\omega^4}\frac{c^2}{b^2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{-mgc^4 \frac{g^2c^2}{b^4\omega^4}}{a^2\left(\frac{-g^4c^4}{\omega^4 b^2}\right)} & 0 \\ 0 & -\frac{mgc^4}{\left(-\frac{g}{\omega^2}\frac{c^2}{a^2}\right)^3 b^2} - m\omega^2 \end{pmatrix}$

$\Delta_1 = m\frac{b^2}{a^2}\omega^2 - m\omega^2 > 0$

$\Delta_2 = \Delta_1 \cdot \left(m\frac{b^4}{c^2}\frac{\omega^4}{g^2} - m\omega^2\right)$

При $\omega^2 > \frac{gc}{b^2}$ - п.р. устойчиво

$\omega^2 < \frac{gc}{b^2}$ - неустойчиво

$\omega = \frac{gc}{b^2}$: $\Pi(x,y) = -mgc\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)$

В итоге в этой точке при $\omega^2 = \frac{gc}{b^2}$ точка имеет вид: $(0;0;c)$ — вырождение в пред. рассм. случай.

5-6) ~~[illegible]~~

Аналогично с предыдущими точками (3-4):

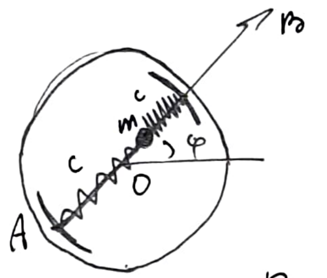
$$\left(\pm\sqrt{a^2 - \frac{g^2c^2}{a^2\omega^4}};\ 0;\ -\frac{gc^2}{a^2\omega^2}\right)$$

При $\omega^2 > \frac{gc}{a^2}$ явл. устойчивым.

$\omega^2 < \frac{gc}{a^2}$ — неуст.

$\omega^2 = \frac{gc}{a^2}$ — вырожд. в рассм. случае

№15.22



$n = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix}$

$П_1 = mgx\sin\varphi$

$П_2 = 2\cdot\frac{cx^2}{2}$

$П = П_1 + П_2 = mgx\sin\varphi + cx^2$

$\frac{\partial П}{\partial x} = mg\sin\varphi + 2cx = 0 \Rightarrow x = -\frac{mg\sin\varphi}{2c}$

$\frac{\partial П}{\partial \varphi} = mgx\cos\varphi = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Возможн. $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ $\varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$ $x = 0$.

$x_1 = -\frac{mg}{2c}$ $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$

$x_2 = \frac{mg}{2c}$ $\varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$

$x_3 = 0$ $\varphi_3 = 0$

$x_4 = 0$ $\varphi_4 = \pi$

Исследуем устойчивость этих п.р.

$\frac{\partial^2 П}{\partial x^2} = 2c$ $\frac{\partial^2 П}{\partial x \partial \varphi} = mg\cos\varphi$

$\frac{\partial^2 П}{\partial \varphi^2} = -mgx\sin\varphi$

$\Rightarrow C(x,\varphi) = \begin{pmatrix} 2c & mg\cos\varphi \\ mg\cos\varphi & -mgx\sin\varphi \end{pmatrix}$ — общий вид

$C_1\left(-\frac{mg}{2c}, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2c & 0 \\ 0 & \frac{m^2g^2}{2c} \end{pmatrix}$

$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0 \Rightarrow$ по т. Лагранжа-Дирихле устойчиво.

$C_2\left(\frac{mg}{2c}; -\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2c & 0 \\ 0 & \frac{m^2g^2}{2c} \end{pmatrix}$ аналогично устойчиво

$C_3(0;0) = \begin{pmatrix} 2c & mg \\ mg & 0 \end{pmatrix}$ $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 < 0$ => по т. Ляпунова о неуст. - П.Р. неустойчиво

$C_4(0;\pi) = \begin{pmatrix} 2c & -mg \\ -mg & 0 \end{pmatrix}$ аналогично неустойчиво.