(T1) $\begin{cases} \dot{x} = x - y - xy^2 \\ \dot{y} = 2x - y - y^3 \end{cases}$

1) по первому приближению

$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 0 & -\frac{(\lambda^2+1)}{1-\lambda} \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$

Корни характеристического многочлена мнимые $\Rightarrow$ ничего нельзя сказать про устойчивость, нужно доп. исследование.

2) с помощью метода ф-ий Ляпунова

$V(x,y) = x^2 + axy + by^2 > 0$ — квадратичная форма $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & b \end{pmatrix}$

Чтобы $V(x,y)$ была положит. опред. по критерию Сильвестра нужно, чтобы угловые миноры были положительными $\Rightarrow$

$1 > 0, \quad b - \frac{a^2}{4} > 0$

$\dot{V} = \dot{x}(2x + ay) + \dot{y}(ax + 2by)$ Подставим $\dot{x}$ и $\dot{y}$ из системы.

$\dot{V} = (2x + ay)(x - y - xy^2) + (ax + 2by)(2x - y - y^3) =$

$= \underline{2x^2} - \underline{\underline{2xy}} - 2x^2y^2 + \cancel{axy} - ay^2 - axy^3 + \underline{2ax^2} - \cancel{axy} - axy^3 +$

$+ \underline{\underline{4bxy}} - 2by^2 - 2by^4 = 2x^2(1 + a) - y^2(a + 2b) - 2xy(1 - 2b) -$

$- (2x^2y^2 - 2axy^3 - 2by^4)$

$\dot{V} \leq 0$ при обнулении коэффициентов при x^2, y^2 и xy.:

$\begin{cases} (1+a) = 0 \\ a + 2b = 0 \\ 1 - 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = +\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow b - \frac{a^2}{4} = +\frac{1}{2} - \frac{1}{4} > 0$

$\Rightarrow V = x^2 - xy + \frac{y^2}{2} = (x - \frac{1}{2}y)^2 + \frac{1}{4}y^2 > 0$

$\Rightarrow \dot{V} = -2x^2y^2 + 2xy^3 + y^4 = -y^2(+2x^2 - 2xy - y^2) =$

$= -2y^2 \cdot V(x,y) \leq 0 \Rightarrow$ п.р. устойчиво по т. Ляпунова //

T2

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y^3 - x^5 \\ \dot{y} = -x - y^3 + y^5 \end{cases}$$

найдем ф-ю Ляпунова виде $V(x,y) = x^2 + ay^4 > 0$

$$\dot{V} = 2x\dot{x} + 4ay^3\dot{y} = 2x(2y^3 - x^5) + 4ay^3(-x - y^3 + y^5) =$$

$$= \underline{4xy^3} - 2x^6 - \underline{4axy^3} - 4ay^6 + 4ay^8 = 4xy^3(1-a) - 2(x^6 + 2ay^6 - 2ay^8) \le 0$$

при $a = 1$ $\quad \dot{V} = -2(x^6 + 2y^6 - 2y^8) \le 0$

$\Rightarrow$ $V(x,y) > 0$ и $\dot{V} \le 0$ $\Rightarrow$ н.р. устойчиво по т. Ляпунова

T3

$$\begin{cases} \dot{x} = xy - x^3 + y^3 \\ \dot{y} = x^2 - y^3 \end{cases}$$

Пусть $V = xy$

$$\dot{V} = \dot{x}y + \dot{y}x = y(xy - x^3 + y^3) + x(x^2 - y^3) = xy^2 - \underline{x^3y} + y^4 + \underline{x^3} - xy^3 =$$

$$= y^4 + x(x^2 - x^2y + y^2 - y^3) = y^4 + x(x^2 + y^2 - y(x^2 + y^2)) =$$

$$= y^4 + x(x^2 + y^2)(1 - y)$$

В некоторых окр. точки $(0;0)$ $\dot{V} > 0$ $\Rightarrow$ по т. Ляпунова

$\dot{V}$ знакоопределена, а V не знакопостоянна $\Rightarrow$ нулевое решение неустойчиво (по т. Четаева)

T4

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 2x \\ \dot{y} = 2x - y - x^3 \end{cases}$$

Выберем ф-ю Ляпунова в виде: $V = (x+y)^2 + \frac{x^4}{2} > 0$

$$\Rightarrow \dot{V} = 2x^3\dot{x} + 2(x+y)(\dot{x} + \dot{y}) = 2x^3(y - 2x) + 2(x+y)(y - \cancel{2x} + \cancel{2x} - \cancel{y} - x^3) = \cancel{2x^3y} - 4x^4 - 2x^4 - \cancel{2yx^3} = -6x^4 < 0$$

$\Rightarrow$ решение асимптотически устойчиво (по т. Ляпунова)