Неделя 9

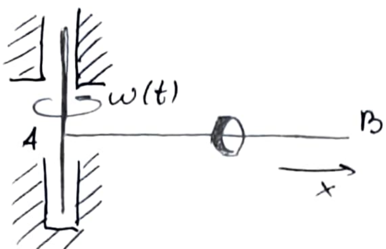
№21.2

$$\tilde{L} = L + \frac{df(q,t)}{dt}$$

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} \tilde{L}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt + f \Big|_{t_1}^{t_2}$$

$\delta S' = \delta S$ т.к. $\delta f' = 0$, т.к. t_1, t_2 - фикс. и q - фикс. знач. вариация даст 0.

№21.7



$m\ddot{x} - \omega^2 x m = 0$ - любая кривая удовл. этому уравн.

$x(t) = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$ - прямой путь

Поставим граничные условия для $t_1 \neq t_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1 = C_1 e^{\omega t_1} + C_2 e^{-\omega t_1} \\ q_2 = C_1 e^{\omega t_2} + C_2 e^{-\omega t_2} \end{cases} \Rightarrow t_1 \neq t_2$$

По теории лин. ал. положим единственность нахождения C_1 и C_2

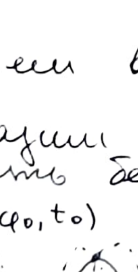
$$\begin{vmatrix} e^{\omega t_1} & e^{-\omega t_1} \\ e^{\omega t_2} & e^{-\omega t_2} \end{vmatrix} = e^{\omega(t_1 - t_2)} - e^{-\omega(t_1 - t_2)} = 2\operatorname{sh}\omega(t_1 - t_2) \neq 0$$

при $t_1 \neq t_2$

$\Rightarrow C_1$ и C_2 нахор. единств. обр.

Показали прямой путь и доказали, что при $t_1 \neq t_2$ (не леж. на $t = const$), он единственный $\Rightarrow$ ч.т.д.

№21.9



$$L = T - \Pi = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{mgl}{2}\varphi^2$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

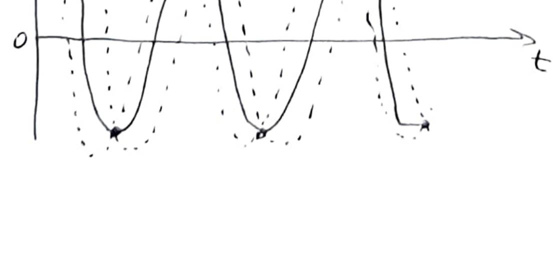
$$\varphi(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0) = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\begin{cases} \varphi(t_0) = \varphi_0 \\ \varphi(t_1) = \varphi_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = C_1 \sin\omega t_0 + C_2 \cos\omega t_0 \\ \varphi_1 = C_1 \sin\omega t_1 + C_2 \cos\omega t_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ можем выразить C_1 при C_0

Изобразим прямой путь: через (φ_0, t_0) будет проходить бесконечно много прямых путей.

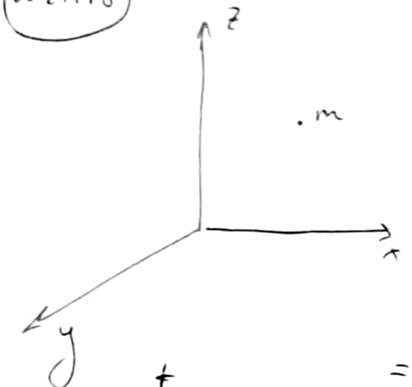


Сопряженные кинетические фокусы расположены в точках (φ_k, t_k):

$\varphi_k = (-1)^k \varphi_0$; $t_k = t_0 + \frac{T}{2}k$

$t_k = t_0 + \pi k\sqrt{\frac{l}{g}}$ $\quad k \in \mathbb{N}$

№21.18



Запишем Лагранжиан:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

$$t_1 \neq t_2: \ S_{пр} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{m}{2}\dot{z}^2 - mgz\right) dt$$

$$S_{ок} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{m}{2}\dot{z}^2 - mgz\right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\right) dt =$$

$$= S_{пр} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\right) dt$$

По принципу Гамильтона для окольного пути:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\right) dt > 0 \Rightarrow S_{ок} > S_{пр} \Rightarrow$$ На прямом пути S имеет глобальный минимум ч.т.д.

№21.22 $$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}\dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_i b_i \dot{q}_i + T_0$$

$\sum_{i,j} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$ представим как $\dot{q}^T A \dot{q}$ $\Rightarrow$ A - матр. Гесса по условию

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2}\dot{q}^T A \dot{q} + \dot{q}^T b + c\right] dt$$ На окольном пути: $\dot{q} = \dot{q}_0 + \delta\dot{q}$

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2}(\dot{q}_0 + \delta\dot{q})^T A (\dot{q}_0 + \delta\dot{q}) + (\dot{q}_0 + \delta\dot{q})^T b + c\right] dt -$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2}\dot{q}_0^T A \dot{q}_0 + \dot{q}_0^T b + c\right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}\delta\dot{q}^T A \delta\dot{q}\, dt > 0 \Rightarrow S_{ок} > S_{пр}$$

ч.т.д.