УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
12 января 2022 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Аналитическая механика**
по направлению подготовки:
03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ФРКТ**

кафедра: **теоретической механики**
курс: 2
семестр: 4

лекции – 30 часов
практические (семинарские) занятия – 30 часов
лабораторные занятия – нет

Экзамен – 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа – 45 часов

Программу и задания составили:

к.ф.-м.н., доцент А. В. Фомичев
ассистент Ш. Н. Биктимиров

Программа принята на заседании
кафедры теоретической механики
8 ноября 2021 года

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н. С. В. Соколов

1. **Равновесие, устойчивость, движение вблизи устойчивого положения равновесия**

   Определение положения равновесия. Условия равновесия системы с идеальными связями (принцип виртуальных перемещений) и доказательство для стационарной системы. Условия равновесия голономных стационарных систем (в терминах обобщенных сил).

   Определение устойчивости по Ляпунову, асимптотической устойчивости и неустойчивости положения равновесия и траектории. Общие теоремы об устойчивости линейных систем. Устойчивость систем с постоянной матрицей. Критерий Рауса–Гурвица (без доказательства). Первый метод Ляпунова исследования устойчивости. Теорема Ляпунова об устойчивости и неустойчивости по линейному приближению.

   Теоремы прямого метода Ляпунова для автономных систем: теоремы Ляпунова об устойчивости, неустойчивости и асимптотической устойчивости, теорема Четаева о неустойчивости, теорема Барбашина–Красовского об условиях асимптотической устойчивости и неустойчивости.

   Теорема Лагранжа–Дирихле об устойчивости равновесия консервативных механических систем. Условия неустойчивости консервативных систем по квадратичной части потенциальной энергии. Влияние гироскопических и диссипативных сил на устойчивость равновесия. Теорема об асимптотической устойчивости строго диссипативных систем.

   Понятие о бифуркации. Случаи потери устойчивости для систем с потенциалом, зависящим от параметра. Два сценария потери устойчивости: дивергенция и флаттер.

   Малые колебания консервативных систем вблизи устойчивого положения равновесия. Уравнение частот. Главные (нормальные) координаты. Общее решение. Случай кратных корней. Случай нулевого корня в уравнении частот.

   Вынужденные колебания линейной стационарной системы под действием гармонических сил. Частотные характеристики. Явления резонанса и антирезонанса (динамическое гашение колебаний). Реакция линейной стационарной системы на негармоническое воздействие.

2. **Уравнения Гамильтона, вариационные принципы, интегральные инварианты**

   Преобразование Лежандра. Переменные Гамильтона. Функция Гамильтона. Вывод канонических уравнений Гамильтона. Функция Гамильтона для консервативной системы.

   Первые интегралы гамильтоновых систем. Скобки Пуассона. Теорема Якоби–Пуассона. Понижение порядка уравнений Гамильтона в случае циклических координат и для обобщенно консервативных систем. Уравнения Уиттекера.

   Действие по Гамильтону. Вариация действия по Гамильтону в задаче с подвижными концами. Вариационный принцип Гамильтона.

   Преобразование лагранжиана при замене координат и времени. Основные понятия теории групп Ли: ядро, оператор и инвариант группы. Теорема Нётер.

   Интегральные инварианты Пуанкаре–Картана и Пуанкаре. Обратные теоремы теории интегральных инвариантов. Теорема Лиувилля об инвариантности фазового объема системы с нулевой дивергенцией. Сохранение фазового объема гамильтоновой системы. Теорема Ли Хуачжуна об интегральных инвариантах первого порядка гамильтоновых систем.

3. **Канонические преобразования. Уравнение Гамильтона–Якоби**

   Определение канонических преобразований. Критерий каноничности в терминах производящих функций. Виды производящих функций: (q, p), $(q, \tilde{q})$, $(q, \tilde{p})$ и $(p, \tilde{p})$-описания. Правила преобразования гамильтонианов при канонических преобразованиях. Фазовые потоки гамильтоновых систем как однопараметрические семейства канонических преобразований.

   Уравнение Гамильтона–Якоби. Полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби и его использование в задаче интегрирования уравнений движения гамильтоновой системы. Случаи разделения переменных.

Литература

1. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. — 3-е изд. — Москва : Физматлит, 2001.

2. *Журавлёв В.Ф.* Основы теоретической механики. — 2-е изд. — Москва : Физматлит, 2001; 3-е изд. — Москва : Физматлит, 2008.

3. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика: учебник для университетов. — Изд. 3-е, испр. — Москва : Изд-во «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.

4. *Амелькин Н.И.* Динамика твердого тела: учеб. пособие. — 2-е изд. — Москва : МФТИ, 2010.

5. *Амелькин Н.И.* Лагранжева и гамильтонова механика: учеб. пособие. — Москва : МФТИ, 2014.

6. *Яковенко Г.Н.* Краткий курс теоретической механики. — Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.

7. *Яковенко Г.Н.* Краткий курс аналитической динамики. — Москва : БИНОМ, 2004.

8. *Трухан Н.М.* Теоретическая механика. Методика решения задач: учеб. пособие. — Москва : МФТИ, 2010.

ЗАДАНИЯ

Первое задание

(срок сдачи с 21 по 26 марта 2022 г.)

Контрольная работа с 14 по 19 марта 2022 г.

1. **Равновесие. Принцип виртуальных перемещений**
   14.9, 14.21, 14.28, 14.37

2. **Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости движения**
   Т1. Исследуйте на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - xy^2, \\ \dot{y} = 2x - y - y^3, \end{cases}$$

   1) по первому приближению,
   2) с помощью метода функций Ляпунова.

Во втором случае используйте функцию Ляпунова вида $V(x,y) = x^2 + axy + by^2$.

T2. Исследуйте на устойчивость нулевое решение системы с помощью прямого метода Ляпунова:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y^3 - x^5, \\ \dot{y} = -x - y^3 + y^5. \end{cases}$$

T3. Исследуйте на устойчивость нулевое решение системы с помощью прямого метода Ляпунова:

$$\begin{cases} \dot{x} = xy - x^3 + y^3, \\ \dot{y} = x^2 - y^3. \end{cases}$$

T4. Исследуйте на устойчивость нулевое решение системы, используя метод функций Ляпунова:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 2x, \\ \dot{y} = 2x - y - x^3. \end{cases}$$

3. **Устойчивость равновесия консервативных систем**
   15.4 г), 15.14, 15.16, 15.22

4. **Малые колебания консервативных систем**
   16.4, 16.16, 16.34, 16.42, 16.112

5. **Асимптотическая устойчивость диссипативных систем**
   17.1, 17.4, 17.11 (в), 17.20

6. **Вынужденные колебания**
   18.5, 18.25, 18.29, 18.37

Второе задание

(срок сдачи с 16 по 21 мая 2022 г.)

Контрольная работа с 10 по 14 мая 2022 г.

7. **Функция Гамильтона и канонические уравнения**
   19.3, 19.6, 19.13, 19.31, 19.35

8. **Первые интегралы. Скобки Пуассона**
   20.1, 20.3, 20.17, 20.27, 20.30, 20.36

9. **Принцип Гамильтона**
   21.2, 21.7, 21.9, 21.18, 21.22

10. **Интегральные инварианты**
    22.5, 22.12, 22.18, 22.29, 22.51

11. **Канонические преобразования**
    23.2, 23.6, 23.18, 23.39, 23.86

12. **Уравнение Гамильтона–Якоби**
    24.1, 24.9, 24.16, 24.33, 24.42

Номера задач взяты из сборника Пятницкий Е.С., Трухан Н.М., Ханукаев Ю.И., Яковенко Г.Н. Сборник задач по аналитической механике. — 4-е изд. — Москва : МФТИ, 2018.