

1. Bevezetés

Granuláris anyagoknak a nagy számú ($10^4 - 10^6$ db) makroszkópikus részecskékből ($10\mu m - 10m$ átmérőjű) álló rendszereket nevezzük. A granuláris részecskékre ható erőhatások közül a gravitációs erő, két részecske összenyomódásakor fellépő taszítóerő és az érintkezési pontokon fellépő surlódási erő tartozik a legjelentősebbek. A granuláris anyag részecskéinek az átlagos helyzeti energiájához képest az egy szabadsági fokra jutó $k_B T$ ter mikus energia elhanyagolható. Emiatt a hőmérsékletnek az átlagoló befolyása elvész ezeknél a komplex rendszereknél. Ennek következtében nem alakul a rendszeren belül termikus egyensúly. Ez azt jelenti, hogy külső megzavarás nélkül a rendszer bármely metastabil állapota végtelen sok ideig fennmaradhat. Keveredés, homogén eloszlások kialakulása helyett rendeződés, szegregáció, komplex struktúrák alakulnak ki.

2. A mérés célja

A mérés célja a granuláris anyagokban fellépő nyomás mélységfüggésének a vizsgálata a **Janssen modellel**, majd a rendszeren belüli inhomogén erőeloszlásoknak erőláncoknak a vizsgálata a **q-modell** alkalmazásával.

3. A mérés elve

A nyomás mélységfüggésének a leírása granuláris oszlopokban különbözik a folyadékoszlopokban létrejövő nyomás leírásától. Granuláris anyagok esetében a folyadékoknál használt $P(z) = \rho g z$ összefüggés nem áll fent. Azért, hogy meghatározzuk a granuláris oszlopok által keletkeztetett nyomást a Janssen-modell legfőbb feltevéseit tekintjük. Tekintsünk egy R sugarú, ρ átlagos sűrűségű hengeres edényt, amelyet granuláris anyaggal megtöltünk. A Janssen-modell értelmében:

A függőleges nyomás nagysága csak a mélységtől függ

$$P(x, y, z) = P(z)$$

A vízszintes irányban mérhető nyomás arányos a függőleges nyomással

$$P_{hor} = K P(z)$$

Az üveghenger falainál fellépő tapadási surlódási erők felfelé mutatnak és mind a maximális értékeiket veszik fel

$$dF_{frict} = \mu K P(z) 2\pi R dz$$

ahol μ a henger üvegfala és a granuláris anyag közti statikus súrlódási együttható. Továbbá a Janssen-modell szerint az anyag minden dz vastagságú és $S = \pi R^2$ felületű vízszintes szeletének egyensúlyban kell lennie. Tehát, mivel ezekre a szeletekre hat a gravitációs erő, a fölötte és alatta mérhető nyomás különbségéből adódó és az üvegalaknál fellépő súrlódási erő, ezért a Newton-egyenlet

$$\rho g S dz - \frac{dP(z)}{dz} S dz - dF_{frict} = 0$$

A Janssen-modell egyik feltevéséből kapott dF_{frict} -et behelyettesítjük a Newton-egyenletbe, majd átrendezve azt kapjuk, hogy

$$dP(z) + \frac{1}{\lambda P} = \rho g$$

ahol

$$\lambda = \frac{R}{2\mu K}$$

A $P(0) = 0$ kezdeti feltétellel a differenciálegyenlet megoldása

$$P(z) = \lambda \rho g (1 - e^{-\frac{z}{\lambda}})$$

Tehát tetszőlegesen nagy z -re a nyomás nem divergál, hanem λ karakterisztikus távolságon exponenciálisan meggyelítésbe. A konkrét feladatra a differenciálegyenlet megoldása

$$P(z) = m_\infty \left(1 - e^{-\frac{z}{m_\infty}}\right)$$

4. A mérés során felhasznált mérési eszközök

- Különböző granuláris anyagok: köles, műanyag- és üveggolyók
- Műanyagpoharak
- Mérőkanál
- Üveghenger
- Elektronikus táramérleg
- Talpas fémhenger dugattyúval
- Kartonpapír
- Fénymásoló A4 formátumú papír
- Indigó

5. Számolási feladat

$P(0) = 0$ kezdeti feltétellel a

$$\frac{dP(z)}{dz} + \frac{1}{\lambda}P = \rho g$$

differenciálegyenlet megoldása

$$P(z) = \lambda \rho g \left[1 - e^{z/\lambda} \right]$$

Ezt az egyenletet szorozzuk A -val, és osztjuk g -vel, az oszlop keresztmetszetével, illetve az exponenciális tag kitevőjét bővítjük $A\rho/A\rho$ -val:

$$\frac{A \cdot P(z)}{g} = A\lambda\rho \left[1 - e^{A\rho z/A\lambda\rho} \right]$$

Bevezetve $\rho Az = m_\infty$ állandót, illetve $\rho Az = m(z)$ -t, két tömeg dimenziójú mennyiséget kapunk. $P(z)$ -t A -val szorozva súlyerőt, g -vel osztva tömeget kapunk, melyet itt m_l -el jelölünk.

$$m_l(m) = m_\infty \left[1 - e^{m/m_\infty} \right]$$

6. A nyomás mélységfüggése granuláris oszlopban

A mérést a laborban lévő anyagok közül kölessel végeztük. A mérőhengerbe egyszerre mindig egy mérőkanálnyt szórtunk. Ennek tömegét 3 mérés (16g, 15g, 15g) átlagából határoztuk meg 15,33g-ra. A henger átmérőjét 5cm-nek mértük. A mérésenként ~ 20 mérőkanál anyag került a hengerbe, néhány mérésnél az utolsó betöltést 5 mérőpohárnyi anyaggal végeztük. Az eredményeket az 1. táblázatban foglaltam össze.

A mérés további adatai:

- egy mérőkanálnyi köles tömege: 15,33g
- egy mérőkanálnyi műanyag-granulátum tömege: 18,33g
- a mérőhenger átmérője: 5cm

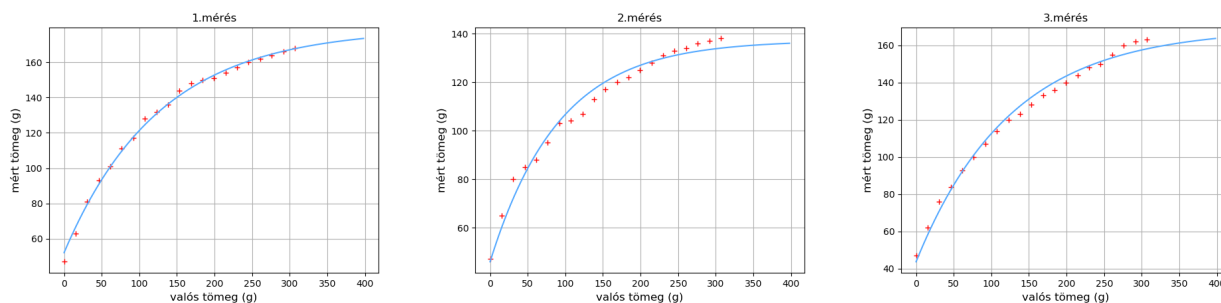
p	m	feltöltés pohárral - m_l			feltöltés tölcserrel - m_l			feltöltés csillapítva - m_l		
		1.mérés	2.mérés	3.mérés	1.mérés	2.mérés	3.mérés	1.mérés	2.mérés	3.mérés
0	0.00	47	47	47	47	47	47	47	47	47
1	15.33	63	65	62	60	60	58	61	48	62
2	30.67	81	80	76	77	75	73	74	54	77
3	46.00	93	85	84	92	90	89	85	65	87
4	61.33	101	88	93	105	105	100	96	75	98
5	76.67	111	95	100	113	113	108	106	81	106
6	92.00	117	103	107	121	118	114	113	88	114
7	107.33	128	104	114	128	122	124	122	97	122
8	122.66	132	107	120	136	130	130	128	102	129
9	138.00	136	113	123	141	134	138	135	108	136
10	153.33	144	117	128	149	139	142	141	113	141
11	168.66	148	120	133	153	145	146	147	119	150
12	184.00	150	122	136	160	150	151	150	127	156
13	199.33	151	125	140	164	153	157	157	129	158
14	214.66	154	128	144	168	157	160	159	136	163
15	230.00	157	131	148	171	160	164	162	140	165
16	245.33	160	133	150	174	163	167	166	144	170
17	260.66	162	134	155	178	166	169	173	146	179
18	275.99	164	136	160	182	168	172	-	150	181
19	291.33	166	137	162	186	171	173	-	153	184
20	306.66	168	138	163	-	173	178	-	155	186
24	367.99	-	-	-	190	-	-	-	-	-
25	383.33	-	-	-	-	180	185	-	-	195

1. táblázat. Az első oszlopban a betöltött mérőpoharak száma, a másodikban az ennek megfelelő (valódi) tömeg, a többiben a mérleg által jelzett (látszólagos) tömeg szerepel. A csillapított betöltés 1. illetve 2. mérésénél a henger megrezdült, így ott abbahagytuk a mérést.

7. Kiértékelés

7.1. Feltöltés pohárral

Először egy műanyag pohárba egy mérőkanálnyi kölest tettünk, és azzal öntöttük a hengerbe az anyagot (így kevesebb szóródott mellé). Az illesztett görbék az 1. ábrán, az illesztés paraméterei a 2. táblázatban láthatóak. Az 1. és 3. mérés illesztési paraméterei hasonlóak, a 2. mérés viszont jelentősen eltér. Ennek oka, hogy mérés során, valószínűleg a hengert ért kis ütés miatt átrendeződött az anyag. A diagramon látható, hogy ez a 2. mérés során többször is megtörtént.



1. ábra. Pohárral való feltöltés diagramjai. A 2. mérésnél látszik, hogy az anyag többször is átrendeződött (50 ill. 100g-nál, és talán 150g körül is). A 3. mérésnél, 140g előtt sokkal jobban illeszkednek a pontok, itt történhetett egy kis rázkódás.

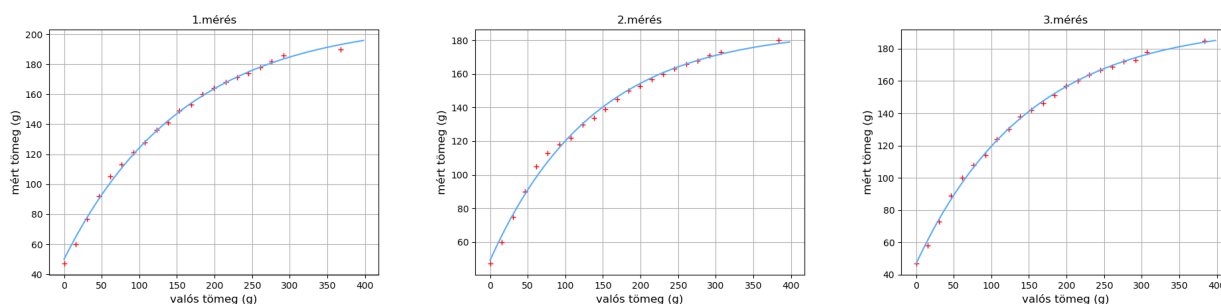
	1.mérés	2.mérés	3.mérés
m_0	52.2 ± 0.8	45.9 ± 1.6	43.8 ± 1.3
m_∞	126.8 ± 2.0	91.3 ± 2.9	125.2 ± 3.2

2. táblázat. Pohárral való feltöltés pontjaira illesztett paraméterei.

7.2. Feltöltés tölcsérrel

Ennél a mérésnél egy tölcséren keresztül öntöttük a mérőhenger szájába az anyagot. Az illesztett görbék az 2. ábrán, az illesztés paraméterei a 3. táblázatban láthatóak. A három mérés közül itt illeszkedtek a pontok a legjobban a modellben szereplő görbére. A tölcsér a henger száján ült, így az anyag mindig középre szóródott.

Bár az illesztés hibájára



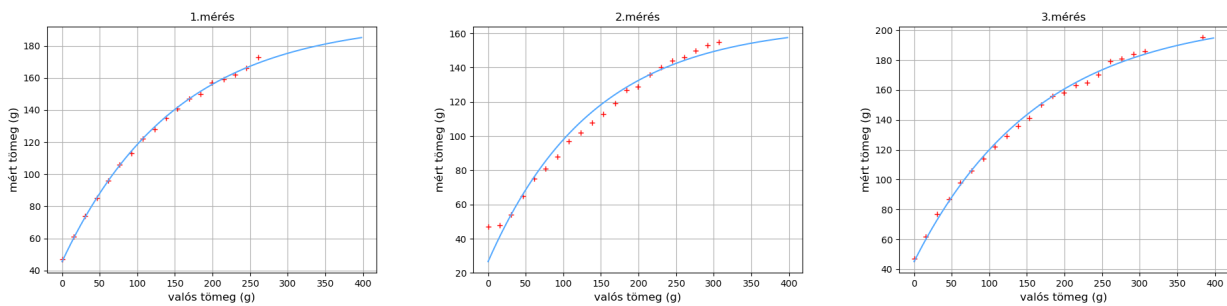
2. ábra. Tölcsérrel való feltöltés diagramjai. A pontok viszonylag jól illeszkednek az egynesekre, a 2.mérésnél 100g körül látható egy kis megcsúszás.

7.3. Csillapított ejtés

Az utolsó ejtésnél a hengerbe egy hosszú pálcára erősített kanalat dugtunk, így a beeső szemcsék csillapítva kerültek az oszlop tetejére. A finomabb ejtés érdekében a szemcséket nem közvetlenül a henger szájába, hanem egy papírtölcséren keresztül a falra irányítva öntöttük be.

	1.mérés	2.mérés	3.mérés
m_0	50.1 ± 0.8	49.1 ± 0.9	46.8 ± 0.6
m_∞	158.7 ± 2.3	137.6 ± 2.2	148.6 ± 1.5

3. táblázat. Tölcsérrel való feltöltés pontjaira illesztett görbe paraméterei.



3. ábra. A csillapított feltöltés diagramjai. A második mérés elején a henger megrezdült (mérés közben nem vettük észre), ezért a görbe egy kicsivel jobbra tolódott.

	1.mérés	2.mérés	3.mérés
m_0	45.5 ± 0.5	26.6 ± 2.4	45.1 ± 0.9
m_∞	150.2 ± 1.8	138.8 ± 6.4	164.1 ± 2.6

4. táblázat. Csillapított feltöltés pontjaira illesztett görbe paraméterei.