Problem podziału na 3 podzbiory

Krzysztof Król Szymon Dudycz

22 marca 2016

Opis problemu

Zbiór liczb należy podzielić na 3 podzbiory tak, aby:

- każda liczba należała do dokładnie jednego podzbioru
- sumy liczb elementów każdego podzbioru jak najmniej się różniły

Model matematyczny

Wejście problemu: Dane jest n liczb naturalnych $a_1, \ldots, a_n$

Wyjście problemu:
Dla każdej liczby a_i i zbioru j tworzymy zmienną $x_{i,j}$ oznaczającą czy a_i została przydzielona do zbioru j. Wtedy problem można wyrazić za pomocą następującego programu całkowitoliczbowego:

$$\min \left|\sum_{i=1}^{n} x_{i,1} a_i - \sum_{i=1}^{n} x_{i,2} a_i\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} x_{i,1} a_i - \sum_{i=1}^{n} x_{i,3} a_i\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} x_{i,2} a_i - \sum_{i=1}^{n} x_{i,3} a_i\right|$$

$$x_{i,1} + x_{i,2} + x_{i,3} = 1 \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

$$x_{i,j} \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}$$

Górne ograniczenie

Górne ograniczenie można wyznaczyć algorytmem Longest Processing Time. Można udowodnić, że ten algorytm osiąga górne ograniczenie nie gorsze od $11/9 * optimal$.

LPT:

$s_1 \leftarrow \emptyset$;
$s_2 \leftarrow \emptyset$;
$s_3 \leftarrow \emptyset$;
$m \leftarrow$ posortowany ciąg wejściowy w nierosnącej kolejności;
$iter \leftarrow 0$;
while $iter < n$ **do**
  $s \leftarrow min(s_1, s_2, s_3)$;
  $s \leftarrow s \cup \{m_{iter}\}$;
  $iter \leftarrow iter + 1$;
end

Dolne ograniczenie

Oczywistym dolnym ograniczeniem jest 0.

Dolne ograniczenie

Oczywistym dolnym ograniczeniem jest 0.
Problem stwierdzenia czy można liczby podzielić na 3 zzbiory, w taki sposób żeby ich suma jest równa jest $\mathcal{NP}$-trudne, więc można się spodziewać, że proste dolne ograniczenia często będą zwracać 0.

Dolne ograniczenie

Rozważmy 4 największe przedmioty a_1, a_2, a_3 i a_4. Wśród nich są 2 takie, które będą w tym samym zbiorze, więc jeden ze zbiorów będzie miał wagę co najmniej taką jak suma wag 2 najlżejszych przedmiotów, powiedzmy a_3 i a_4.
Różnica między $a_3 + a_4$ a sumą wszystkich liczb podzielonych przez 3 daje nam dolne ograniczenie.

Dolne ograniczenie

Rozważmy 4 największe przedmioty a_1, a_2, a_3 i a_4. Wśród nich są 2 takie, które będą w tym samym zbiorze, więc jeden ze zbiorów będzie miał wagę co najmniej taką jak suma wag 2 najlżejszych przedmiotów, powiedzmy a_3 i a_4.

Różnica między $a_3 + a_4$ a sumą wszystkich liczb podzielonych przez 3 daje nam dolne ograniczenie.

Zamiast rozważać 4 największe przedmioty możemy rozważać k największych przedmiotów i wybierać $\lceil \frac{k}{3} \rceil$ z nich. Największa różnica da nam najlepsze dolne ograniczenie.

Algorytm - metaheurystyka