

Politechnika Śląska
Wydział Matematyki Stosowanej
Kierunek Informatyka
Studia stacjonarne I stopnia

Projekt inżynierski

Porównanie wybranych algorytmów heurystycznych w rozwiązywaniu zagadnień odwrotnych

Kierujący projektem:
dr inż. Adam Zielonka

Autor:
Kamil Kryus

Gliwice 2018

Projekt inżynierski:

Porównanie wybranych algorytmów heurystycznych w rozwiązywaniu zagadnień odwrotnych

kierujący projektem: dr inż. Adam Zielonka

autor: Kamil Kryus

Podpis autora projektu

.....

Podpis kierującego projektem

.....

Oświadczenie kierującego projektem inżynierskim

Potwierdzam, że niniejszy projekt został przygotowany pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia go w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego: inżynier.

Data

Podpis kierującego projektem

Oświadczenie autora

Świadomy/a odpowiedzialności karnej oświadczam, że przedkładany projekt inżynierski na temat:

Porównanie wybranych algorytmów heurystycznych w rozwiązywaniu zagadnień odwrotnych

został napisany przeze mnie samodzielnie.

Jednocześnie oświadczam, że ww. projekt:

- nie narusza praw autorskich w rozumieniu ustawy z dnia 4 lutego 1994 roku o prawie autorskim i prawach pokrewnych (Dz.U. z 2000 r. Nr 80, poz. 904, z późn. zm.) oraz dóbr osobistych chronionych prawem cywilnym, a także nie zawiera danych i informacji, które uzyskałem/am w sposób niedozwolony,
- nie była wcześniej podstawą żadnej innej urzędowej procedury związanej z nadawaniem dyplomów wyższej uczelni lub tytułów zawodowych.
- nie zawiera fragmentów dokumentów kopiowanych z innych źródeł bez wyraźnego zaznaczenia i podania źródła.

Podpis autora projektu

Kamil Kryus, nr albumu:246591,(podpis:).....

Gliwice, dnia

Spis treści

Wstęp	7
1. Opis problemu	9
1.1. Tytuł podrozdziału	9
1.2. Cel	9
2. Opis algorytmów	11
2.1. Algorytm symulowanego wyżarzania	11
2.1.1. Parametry	11
2.1.2. Kroki algorytmu	13
3. Funkcje testowe	15
3.1. Funkcja kwadratowa dwóch parametrów	15
3.2. Funkcja Rastrigina	16
3.3. Funkcja Rosenbrocka	18
4. Dobór parametrów	21
4.1. Dobieranie parametrów dla funkcji 5 wymiarowej funkcji Rastrigina . .	21
4.2. Dobieranie parametrów dla funkcji 3 wymiarowej funkcji Rastrigina . .	27
4.3. Parametry dobrane dla funkcji kwadratowej dwóch parametrów	28
4.4. Parametry dobrane dla funkcji Rosenbrocka	28
5. Implementacja	29
6. Dostosowanie algorytmów do funkcji testowej zadań odwrotnych	31
7. Narzędzia i technologie	33
7.1. Metodyka pracy	33
7.1.1. System kontroli wersji	33
7.1.2. Github Project Management	33
7.1.3. Środowisko programistyczne	33
7.1.4. Mathematica	33

7.2. Użyte technologie	34
7.2.1. C#	34
7.2.2. Wolfram Language	34
8. Podsumowanie	35
8.1. Dalsze kierunki rozwoju	35
8.2. Źródła	35
9. Tytuł drugiego rozdziału. Bardzo długi tytuł. Jego formatowanie jest trudniejsze	37
Dodatek: Mój specjalny dodatek	39
Rysunki	41
Programy	43
Literatura	45

Wstęp

Na problem znalezienia optymalnego rozwiązania możemy trafić w wielu dziedzinach życia i nauki, np. w matematyce szukając globalnego minimum/maximum lub szukając najkrótszego połączenia pomiędzy kilkoma miastami (problem komiwojaza). Szukając rozwiązań, zawsze chcemy by było ono jak najlepsze (lub dokładnie najlepsze) i zostało znalezione w rozsądnym czasie. W tym celu właśnie jest używana heurystyka.

Metody heurystyczne znacznie skracają czas wyszukiwania rozwiązania problemu, aczkolwiek często ich wynikiem jest jedynie wynik bardzo zbliżony do najlepszego. Pozwala jednak nam to na jedną z dwóch rzeczy:

1. zaakceptowanie takiego wyniku, gdy dokładne rozwiązanie nie jest konieczne (np. kompresja obrazu),
2. zawężenia zakresu i dalszych poszukiwań najlepszego rozwiązania.

Jednak aby metodę heurystyczną uznać za dobrą, musi ona spełniać 3 wymagania:

- rozwiązanie jest możliwe do znalezienia z rozsądnym wysiłkiem obliczeniowym,
- rozwiązanie powinno być bliskie optymalnemu,
- prawdopodobieństwo uzyskania złego rozwiązania powinno być niskie.

1. Opis problemu

Tu jest wewnątrz rozdziału.

Twierdzenie 1. *Twierdzenie Twierdzenie Twierdzenie Twierdzenie Twierdzenie*

Definicja 1. *Twierdzenie Twierdzenie Twierdzenie Twierdzenie Twierdzenie*

1,1.0,1.0.0,

1.1. Tytuł podrozdziału

Francuzów sto wozów sieci purpurowe kwiaty każdy mimowolnie porządku pilnował

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{1}$$

Twierdzenie 1. *Twierdzenie Twierdzenie Twierdzenie Twierdzenie Twierdzenie*

Definicja 2. *Twierdzenie Twierdzenie Twierdzenie Twierdzenie Twierdzenie*

$$E = mc^2. \tag{2}$$

1.2. Cel

Przetestowanie algorytmu wyżarzania, bla bla pomimo, ze najlepiej sprawdza sie w zadaniach kombinatorycznych, to jak bedzie dzialac przy szukaniu minimum globalnym i zadaniach odwrotnych

2. Opis algorytmów

2.1. Algorytm symulowanego wyżarzania

Algorytm ten został stworzony wzorując się na zjawisku wyżarzania w metalurgii, które polega na nagrzeniu elementu stalowego do odpowiedniej temperatury, przetrzymaniu go w tej temperaturze przez pewien czas, a następnie powolnym jego schłodzeniu. Sam algorytm natomiast bazuje na metodach Monte-Carlo i w pewnym sensie może być rozważany jako algorytm iteracyjny.

Główną istotą i zarazem zaletą tego algorytmu jest wykonywanie pewnych losowych przeskoków do sąsiednich rozwiązań, dzięki czemu jest w stanie uniknąć wpadania w lokalne minimum. Algorytm ten najczęściej jest używany do rozwiązywania problemów kombinatorycznych, jak np. problemu komiwojażera.

2.1.1. Parametry

Początkowa konfiguracja

W tym kroku powinniśmy zainicjalizować naszą temperaturę wysoką wartością oraz znaleźć początkowe losowe rozwiązanie naszego problemu.

Temperatura

Temperatura jest zarówno czynnikiem iteracyjnym, jak i jest związana z funkcją prawdopodobieństwa zamiany gorszego rozwiązania na lepsze. Zatem zakres temperatury powinien być taki, aby na początku działania naszego algorytmu dawał wysoką możliwość zamian, a wraz z postępem iteracji te prawdopodobieństwo się zmniejszało i pod koniec było bliskie zeru.

Końcowa temperatura

Jest to bardzo mała wartość. Temperatura osiągając taki poziom informuje nas iż proces wyżarzania się zakończył i rozwiązanie zostało znalezione. Wartość ta powinna być na tyle mała, by temperatura będąc niewiele większa prowadziła do bardzo niskiego prawdopodobieństwa, a jednocześnie nie wymagało to zbyt dużej ilości iteracji.

Powtarzanie pewną ilość razy dla zadanej temperatury

Wartość ta powinna być z góry ustalona i powinna dać nam możliwość sprawdzenia wielu sąsiadów obecnego rozwiązania, równocześnie nie powodując zbyt dużego obciążenia dla algorytmu.

Znajdowanie losowego sąsiada poprzedniego rozwiązania

Funkcja ta powinna nam pozwalać przejrzeć jak najszerszy zakres rozwiązań, a jednocześnie pozwolić na przeszukiwanie coraz to bliższych sąsiadów obecnie najlepszego rozwiązania, zatem warto uzależnić tą funkcję od stopnia ukończenia globalnych iteracji.

Funkcja kosztu

Poprzez funkcję kosztu rozumiemy różnicę pomiędzy obecnie najlepszym rozwiązaniem, a nowym. Przy poszukiwaniu globalnego minimum wartość większa jest gorszym rozwiązaniem, dzięki czemu wynikiem tej funkcji jest zawsze liczba ujemna. W tym wypadku nowe rozwiązanie zawsze jest gorsze (a tym samym przy poszukiwaniu minimum globalnego posiada wartość większą), to w tym wypadku wartość jest ujemna.

Prawdopodobieństwo zamiany P

Prawdopodobieństwo jest potrzebne do decyzji czy zamienić nasze nowe i gorsze rozwiązanie z wcześniejszym, lepszym.

Prawdopodobieństwo zależy od funkcji kosztu oraz obecnej temperatury. Prawdopodobieństwo zatem można przedstawić w następujący sposób:

$$P = e^{\frac{\Delta E}{T}}$$

gdzie:

$$\Delta E - \text{funkcja kosztu} \tag{3}$$

T - obecna wartość temperatury

Prawdopodobieństwo to wraz ze spadkiem wartości funkcji kosztu maleje (gdyż jest zawsze ujemne), natomiast wyższa wartość temperatury zwiększa to prawdopodobieństwo. Decydując o tym czy powinniśmy zamienić nasze gorsze rozwiązanie z lepszym powinniśmy porównać obliczone prawdopodobieństwo z wartością losową zawierającą się w zakresie $[0,1]$.

Zmniejszanie temperatury

Szybkość zmniejszania nie powinna być zbyt duża, aby pozwolić algorytmowi na sprawdzenie jak największego zakresu możliwych rozwiązań, a jednocześnie niezbyt wolna, gdyż może to spowodować zbyt wolny spadek prawdopodobieństwa, a tym samym finalnie pozwolić na pozostanie w gorszym rozwiązaniu. W większości opracowań można spotkać ten proces, jako mnożnik temperatury w zakresie $[0.8;0.99]$.

2.1.2. Kroki algorytmu

Algorytm ten można również przedstawić za pomocą listy kroków:

1. Zainicjalizuj początkową konfigurację
2. Dopóki temperatura \geq minimum, powtarzaj:
 - (a) Powtórz pewną ilość razy dla danej temperatury
 - i. Znajdź losowo sąsiada poprzedniego rozwiązania
 - ii. Sprawdź czy rozwiązanie jest lepsze od poprzedniego (funkcja kosztu)
 - A. Jeżeli jest, zamień rozwiązania
 - B. Jeżeli nie jest, zamień rozwiązania z pewnym prawdopodobieństwem P
 - (b) Zmniejsz temperaturę

3. Funkcje testowe

3.1. Funkcja kwadratowa dwóch parametrów

Jako pierwszą funkcję do testów przyjąłem funkcję kwadratową dwóch parametrów następującej postaci:

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

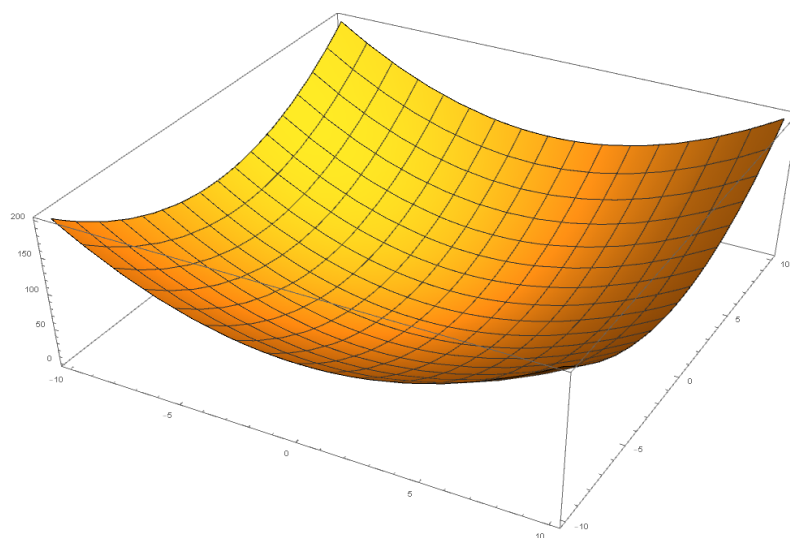
Funkcja ta jest funkcją parzystą i przyjmuje tylko wartości nieujemne. Na potrzeby projektu zakres dla tej funkcji został zawężony następująco:

$$x_i, y_i \in [-10, 10]$$

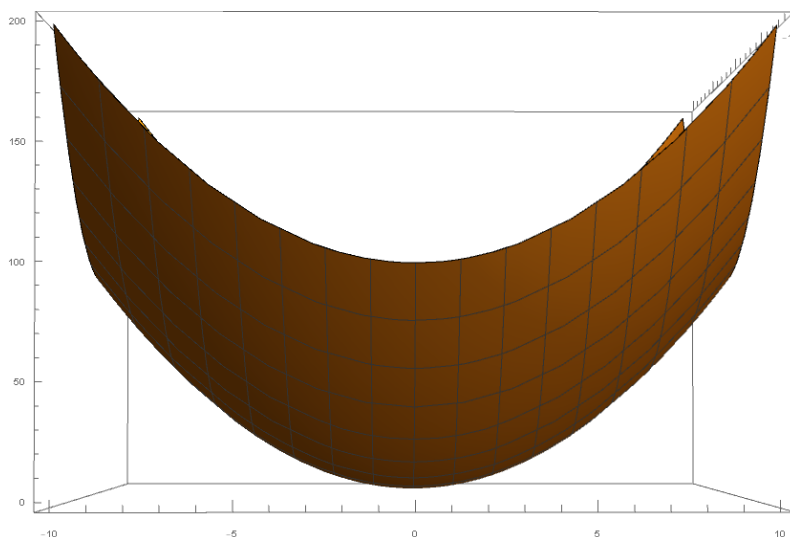
Posiada ona następujące globalne minimum:

$$f(0, 0) = 0$$

Funkcję tę można zaprezentować na wykresie 2 wymiarowym, co prezentują następujące obrazki:



Rysunek 1: Funkcja kwadratowa dwóch parametrów



Rysunek 2: Funkcja kwadratowa dwóch parametrów

3.2. Funkcja Rastrigina

Funkcja Rastrigina jest funkcją ciągłą, skalowalną i multimodalną. Dzięki posiadaniu wielu minimum lokalnych funkcja ta jest często stosowana w testowaniu algorytmów optymalizacyjnych. Przyjmuje ona następującą postać:

$$f(x) = An + \sum_{i=1}^n [x_i^2 - A \cos(2\pi x_i)]$$

gdzie:

$A = 10$,

n = ilość wymiarów

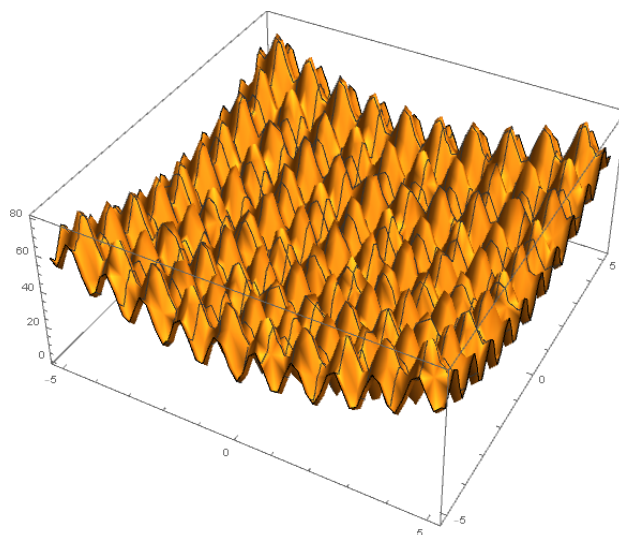
Zakres wartości dla tej funkcji znajdziemy w przedziale:

$$x_i \in [-5.12, 5.12]$$

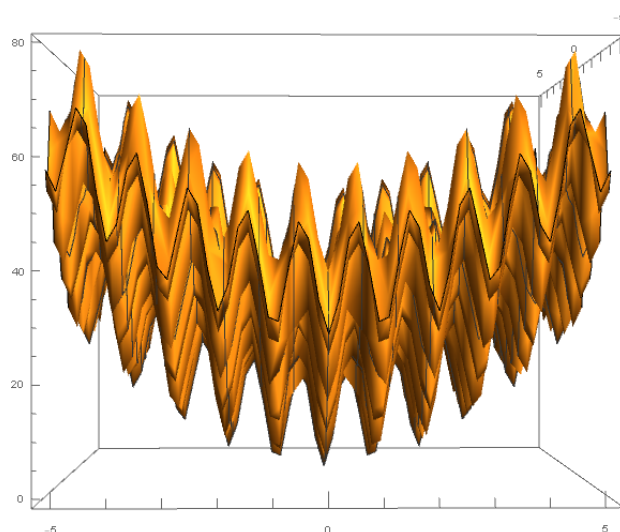
Posiada ona następujące globalne minimum:

$$f(0, \dots, 0) = 0$$

By ujrzyć jej niektóre właściwości zaprezentowałem jej wykres w 2 wymiarach na poniższych obrazkach:



Rysunek 3: Funkcja Rastrigina o 2 wymiarach



Rysunek 4: Funkcja Rastrigina o 2 wymiarach

3.3. Funkcja Rosenbrocka

Funkcja ta jest funkcją ciągłą, skalowalną i jednomodalną.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} [100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (1 - x_i)^2]$$

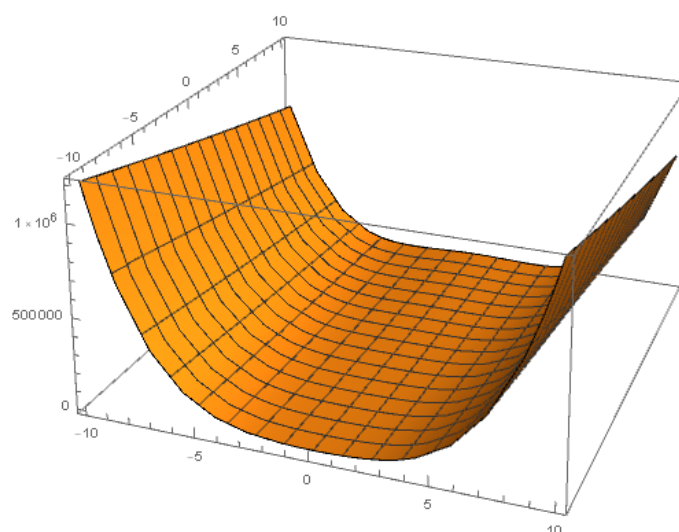
Funkcja ta przyjmuje wyłącznie wartości nieujemnie. Na potrzeby projektu wartości argumentów dla tej funkcji zostały zawężone do poniższego zakresu:

$$x_i \in [-10, 10]$$

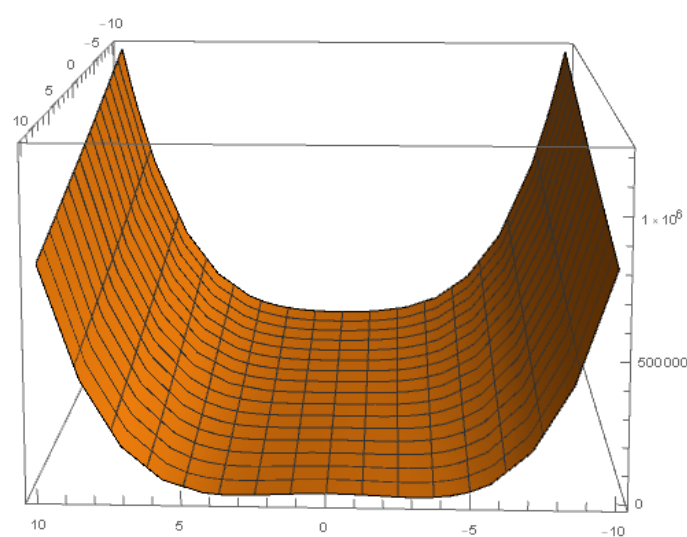
Posiada ona następujące globalne minimum:

$$f(1, \dots, 1) = 0$$

Poniższe wykresy prezentują jej wygląd w zadanym zakresie:



Rysunek 5: Funkcja Rosenbrocka o 2 wymiarach



Rysunek 6: Funkcja Rosenbrocka o 2 wymiarach

4. Dobór parametrów

Pomimo, iż algorytmy heurystyczne są dobrym wyborem wszędzie tam, gdzie ważny jest czas znalezienia rozwiązania, to przed skorzystaniem z danego algorytmu jesteśmy zmuszeni ustawić parametry algorytmu w taki sposób, by wynik był dostatecznie dokładny, a algorytm nie wykonywał niepotrzebnie obliczeń, zwłaszcza gdy większa dokładność nie jest nam potrzebna lub nie będzie stanowić większej różnicy w stosunku do już znalezionej wartości. Dodatkową trudność stanowi ilość parametrów oraz to, iż każdy z nich może wpływać w inny sposób na złożoność obliczeniową oraz wynik, oraz parametry mogą być od siebie zależne. W opracowaniach naukowych rzadko kiedy można znaleźć wytyczne co do sposobu znalezienia odpowiednich parametrów do konkretnych problemów.

Starając się trzymać zasad dotyczących tworzenia dobrego algorytmu heurystycznego, przyjąłem kilka założeń, a następnie sukcesywnie poszukiwałem odpowiednich wartości dla parametrów by (średni, 10-krotne powtórzenia) wynik był jak najlepszy, starając się zawęzić zakres z czasem. Kiedy (średnie) wyniki były już zadowalające, sprawdzałem jakość dobranych parametrów wykonując 100 razy algorytm z takimi samymi parametrami dla tego samego problemu, uzyskując w prosty sposób procentową jakość algorytmu. W podsekcji "Dobieranie parametrów dla funkcji 5 wymiarowej funkcji Rastrigina" tabele przedstawia stopniowe dojście do parametrów dających zadowalające wyniki, a następnie jakość tych parametrów dla danego problemu. Parametry dla innych problemów zostały zbadane w taki sam sposób i w tych sekcjach zostanie wspomniany jedynie wynik.

4.1. Dobieranie parametrów dla funkcji 5 wymiarowej funkcji Rastrigina

Przed rozpoczęciem testów przyjęto dwa założenia:

1. Końcowa temperatura została ustawiona na stałą wartość równą 0.001,
2. Stopień chłodzenia temperatury został ustawiony na 0.99.

Nr.	T0	Iteracje	Rozwiązanie
1.	500	300	1,09718505292704
2.	500	400	1,29513703551228
3.	100	500	1,29579688714116
4.	300	400	1,39516546905179
5.	100	400	1,59400704106305
6.	400	200	1,59460563439097
7.	400	400	1,59473245683331
8.	300	500	1,69368418646326
9.	100	200	1,69430049805511
10.	400	500	1,69488738622795
11.	200	500	1,79356181491557
12.	500	200	1,89311831496136
13.	300	100	1,89379034166828
14.	200	200	1,89405233085409
15.	400	300	1,99208845088035
16.	500	500	1,99250333315708
17.	300	300	1,99272286399703
18.	200	400	2,09157445324622
19.	100	300	2,19168206783873
20.	300	200	2,19179918169512
21.	500	100	2,19209302230291
22.	200	100	2,19237079270076
23.	400	100	2,19237108578013
24.	200	300	2,29096718181202
25.	100	100	2,98943206230488

Badanie zawarte w tabeli 1 pokazuje, iż parametry na takim poziomie nie mają aż tak dużego znaczenia, jednak można zauważyć, iż większa wartość parametrów prowadzi do nieco lepszych średnich wyników. Badanie skuteczności dla najwyższych parametrów (czyli 500 i 500) wyniosło 12%, co jest bardzo słabym wynikiem.

Nr.	T0	Iteracje	Rozwiązanie
1.	8000	6000	0,400456362305732
2.	10000	4000	0,400942457997776
3.	4000	8000	0,499468816488703
4.	4000	10000	0,499496708877431
5.	6000	6000	0,499881155483216
6.	8000	8000	0,500190776858622
7.	8000	10000	0,500669723808464
8.	2000	6000	0,500802825547873
9.	2000	4000	0,59876018888673
10.	2000	8000	0,598944859155338
11.	10000	8000	0,69839967735632
12.	6000	8000	0,698671405088412
13.	10000	10000	0,698922421188404
14.	4000	6000	0,797834332682657
15.	6000	10000	0,798499451192562
16.	4000	4000	0,798596850008959
17.	2000	10000	0,798896772938739
18.	8000	4000	0,79899550599823
19.	10000	6000	0,898177793387154
20.	6000	4000	0,898733662378301
21.	4000	2000	0,996463628047726
22.	8000	2000	0,997870530143807
23.	6000	2000	1,09703634442711
24.	2000	2000	1,09731890136792
25.	10000	2000	1,39564290923108

10k i 10k 46% 5k - 10k -j 46% 5k i 20k -j 58% 5k i 30k -j 72%

Nr.	T0	Iteracje	Rozwiązanie
1.	aaaaaaa aaaaaaa	aaaaaaa aaaaaaa	oko
2.	aaaaaaa aaaaaaa	aaaaaaa	oko
3.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
4.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
5.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
6.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
7.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
8.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
9.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
10.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
11.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
12.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
13.	aaaaaaa aaaaaaa	aaaaaaa aaaaaaa	oko
14.	aaaaaaa aaaaaaa	aaaaaaa	oko
15.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
16.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
17.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
18.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
19.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
20.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
21.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
22.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
23.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
24.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
25.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
26.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
27.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
28.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
29.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
30.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
31.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
32.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
33.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko

Nr.	T0	Iteracje	Rozwiązanie
1.	aaaaaaaa aaaaaaa	aaaaaaaa aaaaaaa	oko
2.	aaaaaaaa aaaaaaa	aaaaaaaa	oko
3.	aaaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaaa	oko
4.	aaaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaaa	oko
5.	aaaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaaa	oko
6.	aaaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaaa	oko
7.	aaaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaaa	oko
8.	aaaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaaa	oko
9.	aaaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaaa	oko
10.	aaaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaaa	oko
11.	aaaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaaa	oko
12.	aaaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaaa	oko

Nr.	T0	Iteracje	Rozwiązanie
1.	aaaaaaa aaaaaaa	aaaaaaa aaaaaaa	oko
2.	aaaaaaa aaaaaaa	aaaaaaa	oko
3.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
4.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
5.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
6.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
7.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
8.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
9.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
10.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
11.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko
12.	aaaaaaa	aaaaaaaaaaaaaaa	oko

Ostatecznie wybrane parametry dla tego problemu:

pocz temp

konc temp

cooling

iteracje

Badanie skuteczności

skuteczność:

4.2. Dobieranie parametrów dla funkcji 3 wymiarowej funkcji Rastrigina

Ostatecznie wybrane parametry dla tego problemu:

pocz temp

konc temp

cooling

iteracje

skuteczność:

4.3. Parametry dobrane dla funkcji kwadratowej dwóch parametrów

Ostatecznie wybrane parametry dla tego problemu:

pocz temp

konc temp

cooling

iteracje

skuteczność:

4.4. Parametry dobrane dla funkcji Rosenbrocka

Ostatecznie wybrane parametry dla tego problemu:

pocz temp

konc temp

cooling

iteracje

skuteczność:

5. Implementacja

6. Dostosowanie algorytmów do funkcji testowej zadań odwrotnych

7. Narzędzia i technologie

7.1. Metodyka pracy

7.1.1. System kontroli wersji

System kontroli wersji posiada wiele zalet, jak m.in.: bezpieczeństwo, możliwość pracy w kilku miejscach/urządzeniach nad tym samym problemem, łatwą możliwość przywrócenia poprzedniej wersji, czy wreszcie, inspekcję jakości i poprawności kodu. W moim projekcie skorzystałem z systemu kontroli Git, a repozytorium można znaleźć na portalu github.com.

7.1.2. Github Project Management

Pomimo, iż praca w pojedynkę nie wymagała ode mnie zarządzania projektem i konieczności organizacji pracy, zdecydowałem się na użycie narzędzia pozwalającego na taką pracę. Podzielenie projektu na mniejsze zadania pozwoliło mi wydzielić poszczególne i odrębne sektory pracy, widzieć postępujący progres i łatwo odnaleźć się w aktualnie wykonywanym zadaniu. W tym celu skorzystałem z Github Project Management, który pozwala na proste zarządzanie zadaniami.

7.1.3. Środowisko programistyczne

Do implementacji projektu użyłem środowiska Microsoft Visual Studio Community 2017, które to zostało stworzone przez firmę Microsoft i pozwala na programowanie konsolowe oraz z graficznym interfejsem użytkownika (zarówno aplikacje desktopowe, jak i strony internetowe).

Dobra znajomość i przejrzystość tego środowiska programistycznego pozwoliła mi skupić się na rozwiązywaniu problemu, omijając problem zapoznawania się z nowym narzędziem.

7.1.4. Mathematica

Mathematica jest programem opartym na systemie obliczeń symbolicznych oraz numerycznych. Program ten jest dość popularny wśród naukowców ze względu na

wiele zalet, jak np. wydajność czy rozpięte możliwości wizualizacji danych. Mathematica jest programem komercyjnym, dlatego stworzenie wykresów do tego projektu oparłem na licencji wydziału Matematyki Stosowanej.

7.2. Użyte technologie

7.2.1. C#

Język programowania C# należy do obiektowych języków programowania, którego koncepcja opiera się na tworzeniu klas, które poprzez swoją zawartość (m.in. właściwości czy metody) mogą być reprezentowane poprzez obiekty i każde operacje są wykonywane poprzez nie. W projekcie korzystam z języka C# w wersji 7.0, która w momencie rozpoczęcia pracy była aktualna. Dobra znajomość tego języka pozwoliła mi nie zważać na problemy w znajomości składni czy funkcji i skupić się bezpośrednio na implementacji algorytmów, dobraniu odpowiednich parametrów dla poszczególnych funkcji testowych oraz lepszym przetestowaniu całej funkcjonalności.

7.2.2. Wolfram Language

Język ten służy głównie do programowania obliczeń matematycznych i programowania funkcjonalnego w programie Mathematica. Język ten, wraz z oprogramowaniem Mathematica, pozwalają m.in. na: operacje na macierzach, rozwiązywanie równań różniczkowych czy prezentowanie danych za pomocą wykresów. Z tej ostatniej funkcjonalności skorzystałem tworząc wykresy funkcji testowych.

8. Podsumowanie

8.1. Dalsze kierunki rozwoju

8.2. Źródła

<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4538776/>

F. Rothlauf, Design of Modern Heuristics, Natural Computing Series, DOI 10.1007/978-3-540-72962-4 2, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011

R. Mart'ı and G. Reinelt, The Linear Ordering Problem, Exact and Heuristic Methods in Combinatorial Optimization 175, DOI: 10.1007/978-3-642-16729-4 2, c Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011

9. Tytuł drugiego rozdziału.

Bardzo długi tytuł.

Jego formatowanie jest trudniejsze

Dodatek

Mój specjalny dodatek

Tu treść dodatku. Zwróćmy uwagę na sposób numerowania dodatku, możliwa jest zmiana numerowania, patrz wyjaśnienia.

Rysunki

Tu rysunki

Programy

Tu programy

```
#include <stdio.h>

int main()
{
    printf("Hello world\n");
}
```

Oraz

```
<?php
    echo "test=$test";
?>
```

Twierdzenie 2. *Twierdzenie Twierdzenie Twierdzenie Twierdzenie Twierdzenie*

Literatura

[1] Jakaś pozycja literatury

[2] Jakaś pozycja literatury