

Politechnika Śląska
Wydział Matematyki Stosowanej
Kierunek Informatyka
Studia stacjonarne I stopnia

Projekt inżynierski

Algorytm symulowanego wyżarzania - zastosowanie w rozwiązywaniu zagadnień odwrotnych

Kierujący projektem:
dr inż. Adam Zielonka

Autor:
Kamil Kryus

Gliwice 2019

Projekt inżynierski:

Algorytm symulowanego wyżarzania - zastosowanie w rozwiązywaniu zagadnień odwrotnych

kierujący projektem: dr inż. Adam Zielonka

autor: Kamil Kryus

Podpis autora projektu

.....

Podpis kierującego projektem

.....

Oświadczenie kierującego projektem inżynierskim

Potwierdzam, że niniejszy projekt został przygotowany pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia go w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego: inżynier.

Data

Podpis kierującego projektem

Oświadczenie autora

Świadomy/a odpowiedzialności karnej oświadczam, że przedkładany projekt inżynierski na temat:

Algorytm symulowanego wyżarzania - zastosowanie w rozwiązywaniu zagadnień odwrotnych

został napisany przeze mnie samodzielnie.

Jednocześnie oświadczam, że ww. projekt:

- nie narusza praw autorskich w rozumieniu ustawy z dnia 4 lutego 1994 roku o prawie autorskim i prawach pokrewnych (Dz.U. z 2000 r. Nr 80, poz. 904, z późn. zm.) oraz dóbr osobistych chronionych prawem cywilnym, a także nie zawiera danych i informacji, które uzyskałem/am w sposób niedozwolony,
- nie była wcześniej podstawą żadnej innej urzędowej procedury związanej z nadawaniem dyplomów wyższej uczelni lub tytułów zawodowych.
- nie zawiera fragmentów dokumentów kopiowanych z innych źródeł bez wyraźnego zaznaczenia i podania źródła.

Podpis autora projektu

Kamil Kryus, nr albumu:246591,(podpis:).....

Gliwice, dnia

Spis treści

Wstęp	7
1. Opis	9
1.1. Cel	9
2. Opis algorytmu symulowanego wyżarzania	11
2.1. Zadania optymalizacyjne	11
2.2. Opis algorytmu	12
2.3. Schemat blokowy	14
2.4. Kroki algorytmu	16
3. Narzędzia i technologie	17
3.1. Metodyka pracy	17
3.1.1. System kontroli wersji	17
3.1.2. Github Project Management	17
3.1.3. Środowisko programistyczne	17
3.1.4. Mathematica	18
3.2. Użyte technologie	18
3.2.1. C#	18
3.2.2. Wolfram Language	18
4. Funkcje testowe	19
4.1. Funkcja kwadratowa dwóch zmiennych	19
4.1.1. Parametry dobrane dla funkcji kwadratowej dwóch parametrów	20
4.2. Funkcja Rastrigina	21
4.2.1. Dobieranie parametrów dla funkcji Rastrigina o 3 wymiarach	22
4.2.2. Dobieranie parametrów dla funkcji Rastrigina o 5 wymiarach	23
4.3. Funkcja Rosenbrocka	28
4.3.1. Parametry dobrane dla funkcji Rosenbrocka o 3 wymiarach	29

5. Implementacja	31
5.1. Używane parametry i zmienne	31
5.2. Implementacja metod i algorytmu	33
6. Zastosowanie algorytmu w rozwiązywaniu odwrotnego zagadnienia przewodnictwa ciepła	37
6.1. Zadanie bezpośrednie	37
6.2. Implementacja metody różnic skończonych	38
6.3. Sformułowanie zadania odwrotnego	40
6.4. Problem odwrotny	41
6.5. Wykorzystanie algorytmu heurystycznego	42
6.5.1. Implementacja rozwiązania problemu odwrotnego	43
6.5.2. Parametry algorytmu	44
6.6. Rezultaty	44
6.6.1. Dokładne pomiary temperatur	44
6.6.2. 1% błąd pomiarowy temperatur	46
6.6.3. 2% błąd pomiarowy temperatur	48
6.6.4. 5% błąd pomiarowy temperatur	50
7. Podsumowanie	53
Literatura	55

Wstęp

Z problematyką wyznaczania optymalnego rozwiązania mamy do czynienia w wielu dziedzinach życia i nauki, np. minimalizując koszty inwestycji, maksymalizując zyski, szukając najkrótszego połączenia pomiędzy miastami itd. Szukając rozwiązania (zazwyczaj przybliżonego), zawsze dążymy do tego, żeby było ono jak „najlepsze” (jak najbliższe dokładnemu) i zostało znalezione w rozsądnym czasie. W tym celu można skorzystać z algorytmów heurystycznych.

Metody heurystyczne są przybliżonymi metodami optymalizacyjnymi, ale otrzymane dzięki nim rezultaty są satysfakcjonujące. Otrzymując w ten sposób rozwiązanie możemy:

1. zaakceptować je, np. gdy dokładne rozwiązanie nie jest konieczne np. w kompresji obrazu,
2. zawęzić (istotnie) zakres i prowadzić dalsze poszukiwania w oparciu o inny algorytm.

Metody heurystyczne uznaje się za akceptowalne, jeśli spełniają następujące wymagania:

- rozwiązanie jest możliwe do znalezienia przy „rozsądnej” liczbie obliczeń,
- otrzymane rozwiązanie powinno być bliskie optymalnemu,
- prawdopodobieństwo uzyskania złego rozwiązania powinno być „niskie”.

1. Opis

Często w naukach technicznych możemy natrafić na zadania, które polegają na odtworzeniu niektórych parametrów modelu na podstawie danych będących wynikiem pewnych obserwacji. W odróżnieniu od bezpośrednich problemów, gdzie zaczynając od modelu i danych dochodzimy do rezultatów, w tego typu problemach dzieje się to odwrotnie. Tego typu zadania nazywa się problemami odwrotnymi.

Problemy odwrotne niestety są często źle postawione. Problemy, aby być zagadnieniami poprawnie postawionymi, muszą spełniać następujące wymagania:

1. rozwiązanie problemu musi istnieć,
2. każde rozwiązanie jest unikalne,
3. rozwiązanie zależy od danych oraz parametrów (np. małe zmiany w funkcjach wejścia powodują małe zmiany w rozwiązaniu).

Jednym z tego typów problemów (problemów odwrotnych) są odwrotne zagadnienia przewodnictwa ciepła. Przy posiadaniu niekompletnego opisu modelu matematycznego oraz funkcji opisującej rozkład temperatury w wybranych punktach (zazwyczaj pomiarowych), zadanie polega na rekonstrukcji brakujących parametrów modelu.

1.1. Cel

W pracy opisany i zaimplementowany zostanie algorytm symulowanego wyznaczania. Dla wybranych funkcji testowych zostały dobrane jego parametry, a finalnie zostanie on wykorzystany do rozwiązania odwrotnego zadania przewodnictwa ciepła.

W tym celu została stworzona w miarę możliwości uniwersalna aplikacja, która pozwala na znalezienie minimum globalnego funkcjonału, sprawdzona najpierw dla wybranych funkcji testowych, a następnie wykorzystana do odtworzenia brakujących parametrów modelu matematycznego przykładowego odwrotnego zadania

przewodnictwa ciepła, przy podanym rozkładzie temperatur w wybranym punkcie pomiarowym.

2. Opis algorytmu symulowanego wyżarzania

Algorytm ten został stworzony wzorując się na zjawisku wyżarzania metali, które polega na nagrzanii elementu stalowego do ustalonej temperatury początkowej, przetrzymaniu go w tej temperaturze przez „pewien” czas, a następnie „powolnym” jego schłodzeniu. Sam algorytm natomiast bazuje na metodach Monte-Carlo i w pewnym sensie może być rozważany jako algorytm iteracyjny.

Główną istotą i zarazem zaletą tego algorytmu jest wykonywanie pewnych „losowych przeskoków” do sąsiednich rozwiązań, dzięki czemu jest w stanie uniknąć wpadania w lokalne minimum. Algorytm ten najczęściej jest używany do rozwiązywania problemów kombinatorycznych, takich jak np. problem komiwojażera.

Zanim jednak przejdziemy do opisu samego algorytmu, powinniśmy najpierw sformułować rozważane zadanie optymalizacyjne.

2.1. Zadania optymalizacyjne

Zadania optymalizacyjne polegają na znalezieniu rozwiązania (dokładnego lub zbliżonego) pewnego problemu, zazwyczaj jednak nie jest to możliwe w jednym kroku. Rozwiązanie takiego zadania często wiąże się z pewnym procesem, którego rozwiązanie może być utrudnione np. przez limitowane zasoby mocy obliczeniowej lub inne zdefiniowane warunki. Jednym z typów zadań optymalizacyjnych jest znalezienie minimum globalnego funkcjonału, które można zaprezentować następująco:

$$f(\bar{x}), \quad x \in D \in R$$
$$f \rightarrow \min$$

2.2. Opis algorytmu

Początkowa konfiguracja

W tym kroku powinniśmy zainicjalizować temperaturę początkową pewną zadaną wartością oraz znaleźć początkowe, w tym wypadku losowe, rozwiązanie problemu.

Temperatura

Wraz z upływem czasu (kolejne iteracje) ulega zmianie i jest czynnikiem wpływającym na prawdopodobieństwo zamiany „gorszego” rozwiązania na „lepszego”. Zatem zakres temperatury powinien być taki, aby na początku działania algorytmu dawał dużą możliwość zamian, a wraz z postępem procesu iteracyjnego te prawdopodobieństwo zamiany było bliskie zeru.

Końcowa temperatura

Temperatura osiągając taki poziom stanowi, iż proces wyżarzania się zakończył i rozwiązanie zostało znalezione. Wartość ta powinna być na tyle mała, żeby jej „niewielka” zmiana nie miała praktycznego wpływu na zmianę rozwiązania (prawdopodobieństwo zmiany bliskie zeru), a jednocześnie jej za mała wartość nie prowadziła do zbyt dużej liczby iteracji.

Powtarzanie zadanej ilości iteracji dla stałej temperatury

Proces iteracyjny bez zmiany temperatury wykonuje się określoną (ustaloną jako parametr algorytmu) ilość razy.

Znajdowanie losowego sąsiada poprzedniego rozwiązania

Funkcja ta powinna nam pozwalać przejrzeć jak najszerszy zakres rozwiązań, a jednocześnie pozwolić na przeszukiwanie coraz to bliższych sąsiadów obecnie „najlepszego” rozwiązania, zatem funkcję tę należy uzależnić od stopnia zaawansowania procesu iteracyjnego, tak że wraz ze wzrostem iteracji zawężeniu ulegnie obszar przeszukiwania.

Funkcja kosztu

Poprzez funkcję kosztu rozumiemy różnicę pomiędzy obecnie najlepszym rozwiązaniem, a nowym. Funkcja ta ma dodatkowe zastosowanie przy decydowaniu o zamianie „gorszego” rozwiązania na „lepsze”. Przy poszukiwaniu globalnego minimum wartość większa jest gorszym rozwiązaniem, dzięki czemu wynikiem tej funkcji jest zawsze liczba ujemna (przy decydowaniu o zamianie).

Prawdopodobieństwo zamiany P

Prawdopodobieństwo jest wykorzystywane przy decyzji zamiany nowego i „gorszego” rozwiązania, z wcześniejszym „lepszym”.

Prawdopodobieństwo tej zamiany zależy od funkcji kosztu oraz obecnej temperatury. Prawdopodobieństwo zamiany określone jest wzorem:

$$P = \exp\left(\frac{\Delta E}{T}\right),$$

gdzie:

ΔE - funkcja kosztu,

T - obecna wartość temperatury.

Prawdopodobieństwo to wraz ze spadkiem wartości funkcji kosztu maleje (gdyż jest zawsze ujemna), natomiast wyższa wartość temperatury zwiększa to prawdopodobieństwo. Decydując o tym, czy powinniśmy zamienić nasze „gorsze” rozwiązanie z „lepszym”, powinniśmy porównać obliczone prawdopodobieństwo z wartością losową o rozkładzie równomiernym.

Chłodzenie temperatury

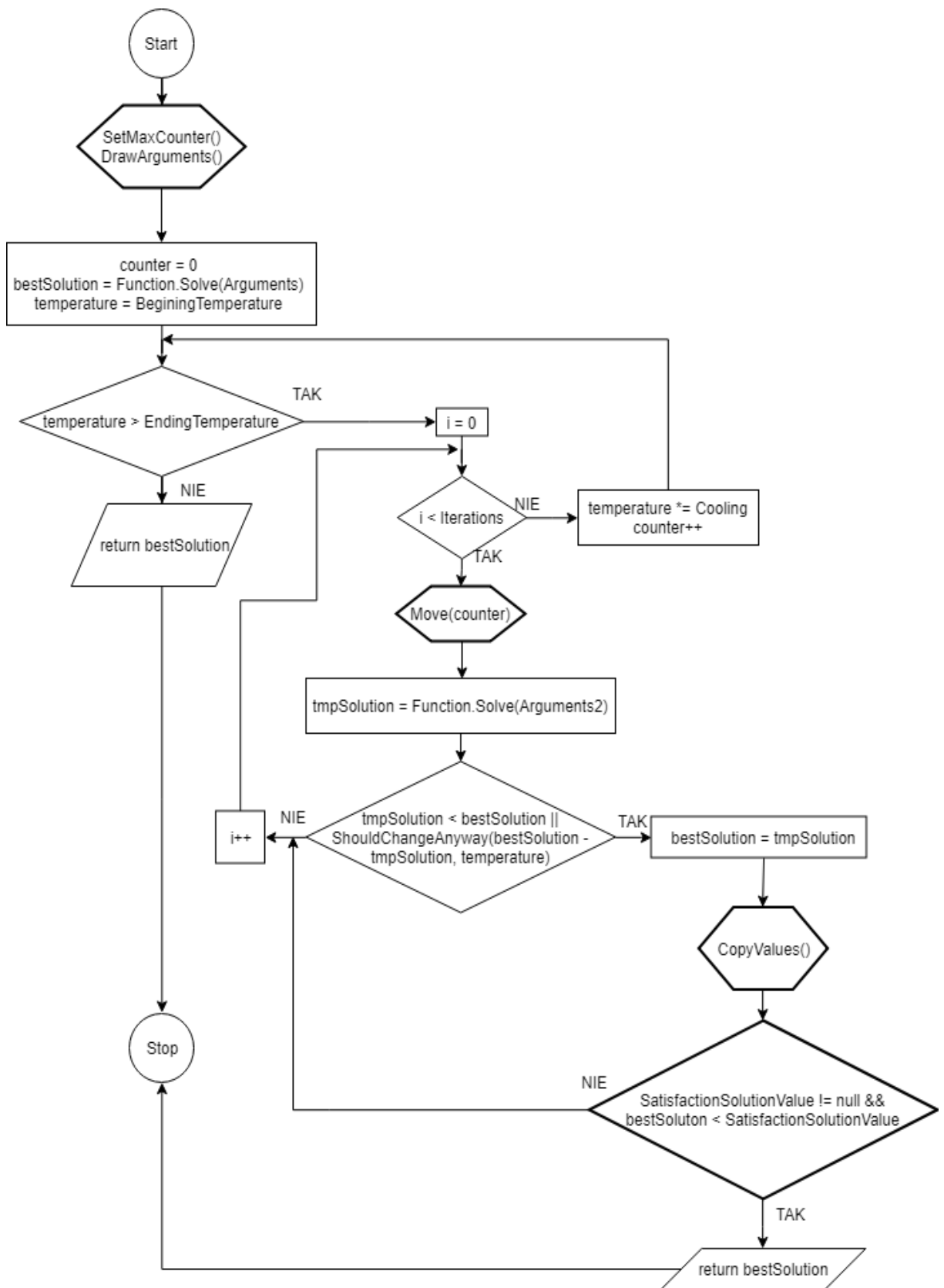
Szybkość chłodzenia temperatury nie powinna być „zbyt duża”, aby pozwolić algorytmowi na sprawdzenie szerokiego zakresu możliwych rozwiązań, a jednocześnie niezbyt wolna, gdyż może to spowodować zbyt wolny spadek prawdopodobieństwa i zbyt częste akceptowanie „gorszych” (lub „dużo gorszych”) rozwiązań. W większości opracowań można spotkać, że ten proces określa mnożnik tempa spadku temperatury ustalony w zakresie $[0.8; 0.99]$.

Z powyższego opisu wynika, że algorytm ten zależy od czterech parametrów:

- temperatury początkowej (T_0),
- temperatury końcowej (T_{end}),
- wewnętrznych iteracji (It),
- chłodzenia (k).

2.3. Schemat blokowy

Przygotowaliśmy również schemat blokowy reprezentujący poszczególne kroki i scenariusze w procesie poszukiwania rozwiązania zadanego problemu, co można zobaczyć na poniższym rysunku.



Rysunek 1: Schemat blokowy algorytmu symulowanego wyżarzania

2.4. Kroki algorytmu

Algorytm ten można przedstawić schematycznie:

1. Inicjalizacja T_0, T_{end}, It, k
2. $T = T_0$
3. x_{best} = losowe współrzędne z dziedziny zadania
4. Dopóki $T > T_{end}$:
 - (a) Wyznacz „sąsiada” współrzędnych x_{best} (wraz z liczbą iteracji szerokość zakresu wyznaczania „sąsiada” maleje, zmienna x_{tmp})
 - I. Jeśli $f(x_{best}) > f(x_{tmp})$:
 - A. $x_{best} = x_{tmp}$
 - II. w przeciwnym wypadku:
 - A. $\Delta E = f(x_{best}) - f(x_{tmp})$
 - B. $P = \exp\left(\frac{\Delta E}{T}\right)$
 - C. q = losowa liczba z przedziału $[0, 1]$
 - D. Jeśli $P > q$, to:
 - i. $x_{best} = x_{tmp}$
 - i. Wróć do (a) It razy
 - (b) $T = kT$
 - (c) Wróć do 4.

3. Narzędzia i technologie

W procesie tworzenia aplikacji zdecydowaliśmy się na użycie kilku rozwiązań, które pozwoliły na bezpieczną i przejrzystą pracę w kolejnych jego etapach.

3.1. Metodyka pracy

3.1.1. System kontroli wersji

System kontroli wersji posiada wiele zalet, m.in.: bezpieczeństwo, możliwość pracy w kilku miejscach/urzędzeniach nad tym samym problemem, łatwą możliwość przywrócenia poprzedniej wersji, czy wreszcie, inspekcję jakości i poprawności kodu.

W moim projekcie skorzystałem z systemu kontroli Git, a repozytorium można znaleźć na portalu github.com.

3.1.2. Github Project Management

Pomimo, iż praca w pojedynkę nie wymagała ode mnie zaawansowanego zarządzania projektem i konieczności organizacji pracy, zdecydowałem się na użycie narzędzia pozwalającego na taką pracę. Podzielenie projektu na mniejsze zadania pozwoliło mi wydzielić poszczególne i odrębne sektory pracy, widzieć postępujący progres i łatwo odnaleźć się w aktualnie wykonywanym zadaniu. W tym celu skorzystałem z Github Project Management, który pozwala na proste zarządzanie zadaniami.

3.1.3. Środowisko programistyczne

Do implementacji projektu użyłem środowiska Microsoft Visual Studio Community 2017, które to zostało stworzone przez firmę Microsoft i pozwala na programowanie konsolowe oraz z graficznym interfejsem użytkownika (zarówno aplikacje desktopowe, jak i strony internetowe).

Dobra znajomość i przejrzystość tego środowiska programistycznego pozwoliła mi

skupić się na rozwiązywaniu problemu, omijając problem zapoznawania się z nowym narzędziem.

3.1.4. Mathematica

Mathematica jest programem opartym na systemie obliczeń symbolicznych oraz numerycznych. Program ten jest dość popularny wśród naukowców ze względu na wiele zalet, jak np. wydajność czy rozpięte możliwości wizualizacji danych. Mathematica jest programem komercyjnym, dlatego stworzenie wykresów do tego projektu oparłem na licencji wydziału Matematyki Stosowanej.

3.2. Użyte technologie

3.2.1. C#

Język programowania C# należy do obiektowych języków programowania, którego koncepcja opiera się na tworzeniu klas, które poprzez swoją zawartość (m.in. właściwości czy metody) mogą być reprezentowane poprzez obiekty i każde operacje są wykonywane poprzez nie. W projekcie korzystam z języka C# w wersji 7.0, która w momencie rozpoczęcia pracy była aktualna. Dobra znajomość tego języka pozwoliła mi nie zważać na problemy w znajomości składni czy funkcji i skupić się bezpośrednio na implementacji algorytmów, dobraniu odpowiednich parametrów dla poszczególnych funkcji testowych oraz lepszym przetestowaniu całej funkcjonalności.

3.2.2. Wolfram Language

Język ten służy głównie do programowania obliczeń matematycznych i programowania funkcjonalnego w programie Mathematica. Język ten, wraz z oprogramowaniem Mathematica, pozwalają m.in. na: operacje na macierzach, rozwiązywanie równań różniczkowych czy prezentowanie danych za pomocą wykresów. Z tej ostatniej funkcjonalności skorzystałem tworząc wykresy funkcji testowych.

4. Funkcje testowe

Pomimo, iż algorytmy heurystyczne są dobrym wyborem wszędzie tam, gdzie brak jest informacji o funkcji, a jedynie znane są jej wartości, to przed użyciem danego algorytmu musimy dobrać parametry algorytmu w taki sposób, by wynik był dostatecznie dokładny, a algorytm nie wykonywał niepotrzebnie obliczeń, zwłaszcza gdy większa dokładność nie jest nam potrzebna lub nie będzie stanowić większej różnicy w stosunku do już znalezionej wartości. Dodatkową trudność stanowi ilość parametrów oraz to, iż każdy z nich może wpływać w inny sposób na złożoność obliczeniową oraz wynik. W opracowaniach naukowych trudno znaleźć wytyczne co do sposobu wyznaczania odpowiednich parametrów, związane to jest z ich zależnością od rozwiązywanego problemu.

W pierwszej kolejności został przeprowadzony test dla szerokiego zakresu każdego z parametrów i ze względu na dużą ilość prób, wykonano po 10 powtórzeń algorytmu dla tych samych parametrów algorytmu. W ten sposób uzyskaliśmy „obiecujące” zestawy parametrów wyjściowych algorytmu i następnie dla nich zostały przeprowadzone próby, gdzie wykonano po 100 powtórzeń algorytmu dla tych samych, wyselekcjonowanych parametrów. W przypadku funkcji testowej Rastrigina w R^5 proces wyznaczania parametrów zostanie opisany dokładnie, a w pozostałych przypadkach zostały zamieszczone wyselekcjonowane parametry algorytmu.

4.1. Funkcja kwadratowa dwóch zmiennych

Jako pierwszą funkcję do testów przyjęliśmy funkcję kwadratową dwóch zmiennych postaci:

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad (x, y) \in R^2$$

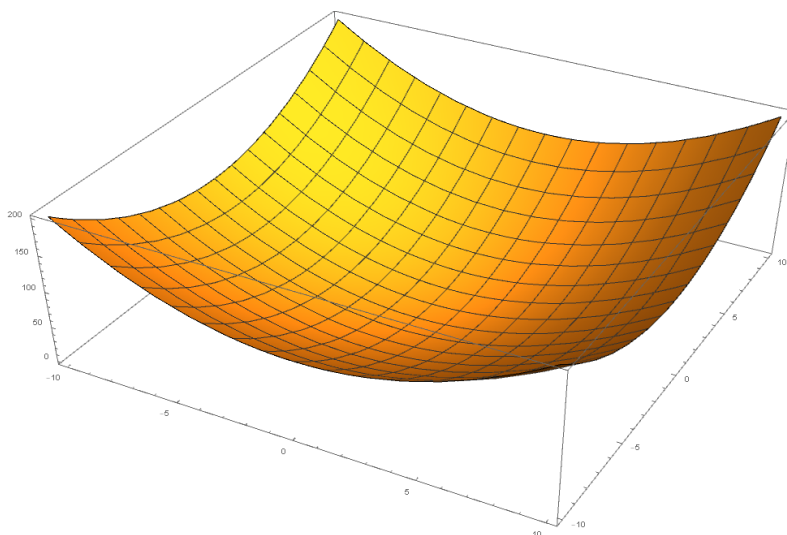
Wybór tak „łatwej” funkcji testowej padł ze względu na to, żeby upewnić się, że algorytm został poprawnie zaimplementowany, gdyż proces wyznaczania ekstremum

tej funkcji jest „bardzo prosty” i nie wymaga dużego nakładu obliczeń.

Funkcja ta przyjmuje tylko wartości nieujemne i posiada minimum globalne w punkcie $(0, 0)$. Na potrzeby testów dziedzina tej funkcji została zawężona następująco:

$$(x, y) \in [0, 1]^2$$

Funkcję prezentuje poniższy wykres:



Rysunek 2: Funkcja kwadratowa dwóch parametrów

4.1.1. Parametry dobrane dla funkcji kwadratowej dwóch parametrów

Poniższa tabela przedstawia parametry pozwalające na znalezienie rozwiązania z satysfakcjonującą jakością:

Parametr	Wartość
T_0	1
T_{end}	0.01
It	1
k	0.99
Skuteczność	100%

4.2. Funkcja Rastrigina

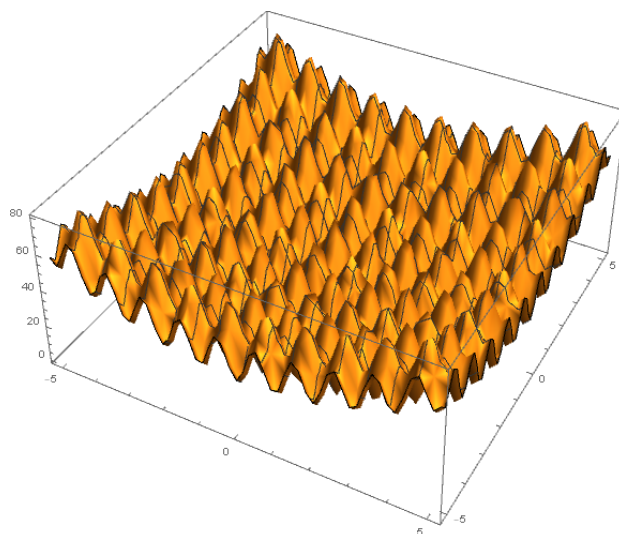
Funkcja Rastrigina jest funkcją ciągłą, skalowalną i multimodalną (dla $n=2$, została przedstawiona na rysunku 2). Dzięki posiadaniu wielu minimum lokalnych, funkcja ta jest często stosowana w testowaniu algorytmów optymalizacyjnych. Przyjmuje ona następującą postać:

$$f(x) = An + \sum_{i=1}^n [x_i^2 - A \cos(2\pi x_i)]$$

gdzie:

$A = 10$,

n = ilość wymiarów.



Rysunek 3: Funkcja Rastrigina o 2 wymiarach

Wartości tej funkcji są nieujemne. Zakres wartości dla tej funkcji znajdziemy w przedziale:

$$x_i \in [-5.12, 5.12]$$

Posiada ona następujące globalne minimum:

$$f(0, \dots, 0) = 0$$

4.2.1. Dobieranie parametrów dla funkcji Rastrigina o 3 wymiarach

Po przeprowadzeniu testów zostały dobrane następujące parametry:

Parametr	Wartość
T_0	10
T_{end}	0.01
It	600
k	0.99
Skuteczność	100%

4.2.2. Dobieranie parametrów dla funkcji Rastrigina o 5 wymiarach

Przed rozpoczęciem testów przyjęto dwa założenia:

1. Końcowa temperatura została ustawiona na stałą wartość równą 0.01,
2. Stopień chłodzenia temperatury został ustawiony na 0.99.

W pierwszym etapie została sprawdzona temperatura w zakresie (2, 4, ..., 10) oraz ilość iteracji w liczbie (100, 300, ..., 1100).

Powyższe wyniki nie dają zadowalających rezultatów. Można jednak zauważyć, iż w tym momencie badań temperatura nie ma aż takiego znaczenia, a większa ilość iteracji zdaje się dawać lepsze rezultaty. Zgodnie z założeniem, iż temperatura nie powinna być zbyt wysoka, postanowiliśmy dalej sprawdzać ten sam zakres temperatur i zwiększyć ilość iteracji około stukrotnie, co prezentuje następna tabela.

Tabela 1: Wyniki testów parametrów dla podanych zakresów, gdzie T_0 jest temperaturą początkową, It jest ilością iteracji, a \bar{f}_{min} średnią rozwiązań dla podanych parametrów

T_0	It	\bar{f}_{min}	T_0	It	\bar{f}_{min}
10	1100	1,6194	4	1100	1,8291
10	900	1,7176	4	900	1,5182
10	700	1,4182	4	700	2,3089
10	500	1,8106	4	500	2,2251
10	300	1,8099	4	300	2,5146
10	100	2,8057	4	100	3,2157
8	1100	1,4151	2	1100	1,8087
8	900	1,5191	2	900	2,2128
8	700	1,6145	2	700	1,9127
8	500	1,6169	2	500	1,5137
8	300	2,4199	2	300	2,3170
8	100	3,2014	2	100	3,0159
6	1100	1,3214			
6	900	1,3201			
6	700	1,8174			
6	500	1,5151			
6	300	2,0083			
6	100	3,0047			

T_0	It (*1000)	\bar{f}_{min}
10	11	0,7165
10	9	0,8208
10	7	1,3270
10	5	0,8244
10	3	1,5143
10	1	1,3252
8	11	0,8120
8	9	1,0224
8	7	1,0155
8	5	1,3222
8	3	1,2153
8	1	1,6182
6	11	0,9273
6	9	0,7189
6	7	0,7157
6	5	1,3202
6	3	1,3194
6	1	1,3147
4	11	1,1203
4	9	0,9278
4	7	1,3136
4	5	0,9184
4	3	1,0177
4	1	1,5184
2	11	0,5162
2	9	1,1158
2	7	1,3152
2	5	0,9171
2	3	1,3114
2	1	1,4161

Średnia rozwiązań najlepszego wyniku w tym teście wydawała się być obiecująca,

jednak sprawdzenie jakości takich parametrów zwróciło jakość równą 34%, co jest niskim wynikiem. Postanowiliśmy zwiększyć znowu zakres iteracji dziesięciokrotnie, co można zobaczyć w następnej tabeli.

Otrzymane wyniki sugerują, iż najlepsze wyniki dla podanych zakresów można otrzymać przy temperaturze równej 10 i bardzo wysokich ilościach iteracji. W następnym kroku sprawdziliśmy jakość rozwiązań dla temperatury równej 10 i iteracji w zakresie przedstawionej w tabeli.

T_0	Iteracje (*1000)	Jakość [%]
10	10	29
10	20	42
10	30	45
10	40	57
10	50	69
10	60	66
10	70	68
10	80	74
10	90	80
10	100	81

Jakość rzędu 75-80% wydaje się być zadowalająca, dlatego uznaliśmy, że proces poszukiwania parametrów dla algorytmu symulowanego wyżarzania dla tego problemu został zakończony. Kolejna tabela przedstawia ostatecznie wybrane parametry dla tego problemu.

Parametr	Wartość
T_0	10
T_{end}	0.01
It	90000
k	0.99
Skuteczność	80%

Tabela 2: Wyniki testów parametrów dla podanych zakresów, gdzie T_0 jest temperaturą początkową, It jest ilością iteracji, a \bar{f}_{min} średnią rozwiązań dla podanych parametrów

T_0	It (*1000)	\bar{f}_{min}	T_0	It (*1000)	\bar{f}_{min}
10	100	0,1215	4	100	0,2337
10	90	0,0252	4	90	0,3147
10	80	0,1216	4	80	0,2206
10	70	0,3249	4	70	0,2209
10	60	0,3199	4	60	0,2178
10	50	0,5257	4	50	0,3222
10	40	0,5223	4	40	0,5243
10	30	0,8243	4	30	0,5192
10	20	0,3277	4	20	0,3261
10	10	0,5312	4	10	0,7265
8	100	0,2279	2	100	0,3224
8	90	0,4161	2	90	0,6167
8	80	0,2257	2	80	0,2266
8	70	0,2200	2	70	0,3247
8	60	0,6255	2	60	0,5264
8	50	0,4257	2	50	0,3248
8	40	0,1310	2	40	0,4396
8	30	0,5167	2	30	0,6237
8	20	0,8323	2	20	0,4180
8	10	1,1295	2	10	0,8205
6	100	0,2208			
6	90	0,2242			
6	80	0,5203			
6	70	0,8194			
6	60	0,5308			
6	50	0,4199			
6	40	0,3182			
6	30	0,4311			
6	20	0,5213			
6	10	0,7173			

4.3. Funkcja Rosenbrocka

Funkcja ta jest funkcją ciągłą, skalowalną i jednomodalną (choć niektóre źródła podają, że w większej ilości wymiarów może być multimodalną¹).

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \left[100 \left(x_{i+1} - x_i^2 \right)^2 + (1 - x_i)^2 \right], \quad x_i \in R$$

Funkcja ta również przyjmuje wyłącznie wartości nieujemne. Na potrzeby projektu wartości argumentów dla tej funkcji zostały zawężone do poniższego zakresu:

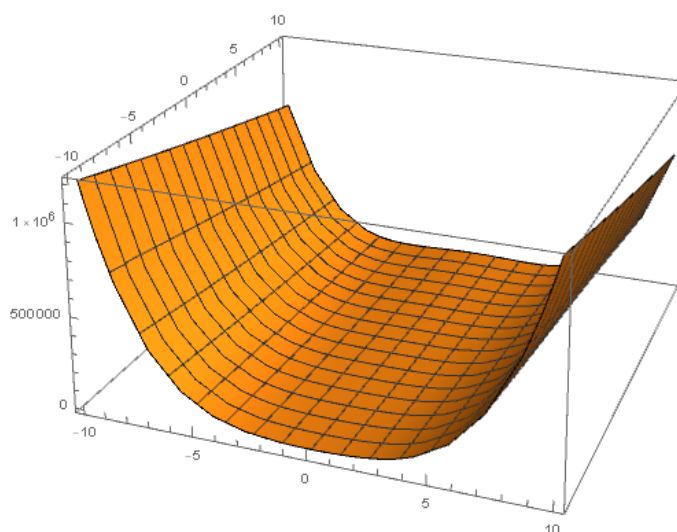
$$x_i \in [-10, 10]$$

Posiada ona następujące globalne minimum:

$$f(1, \dots, 1) = 0$$

Poniższy wykres prezentuje jej wygląd w zadanym zakresie:

¹Y. Shang, Y. Qiu, *A Note on the Extended Rosenbrock Function*
<https://www.mitpressjournals.org/doi/abs/10.1162/evco.2006.14.1.119> [Dostęp: 7 listopada 2018]



Rysunek 4: Funkcja Rosenbrocka o 2 wymiarach

4.3.1. Parametry dobrane dla funkcji Rosenbrocka o 3 wymiarach

Poniższa tabela przedstawia parametry, które pozwalały na uzyskanie satysfakcjonującego rozwiązania z dostatecznie „dużą” pewnością ich otrzymania:

Parametr	Wartość
T_0	10
T_{end}	0.01
k	0.99
It	500
Skuteczność	100%

5. Implementacja

Algorytm symulowanego wyżarzania składa się z kilku metod, które zostały przedstawione w rozdziale 2.1.2. W rozdziale tym skupimy się na omówieniu tych metod oraz przedstawimy ich implementację w języku C#.

5.1. Używane parametry i zmienne

Wraz z zainicjalizowaniem obiektu symulowanego wyżarzania, należy ustawić parametry (XXX) na wejście, a konkretniej problem do rozwiązania i parametry samego algorytmu. W programie zostały one nazwane: **Function**, **Arguments**, **Arguments2**, **Iterations**, **BeginingTemperature**, **EndingTemperature**, **Co-ling**, **SatisfactionSolutionValue**.

Function jest identyfikatorem referencji do obiektu reprezentującego problem. Każdy problem musi dziedziczyć po klasie abstrakcyjnej „TestingFunction”, co zapewnia uniwersalność stosowania algorytmu symulowanego wyżarzania oraz zapewnia nasz algorytm, iż implementacja samego problemu będzie posiadać pewne cechy (jak np. jawnie określoną ilość wymiarów).

Arguments jest właściwością w postaci tablicy liczb zmiennoprzecinkowych, która reprezentuje współrzędne dla obecnie najlepszego rozwiązania problemu ($x_{best} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$).

Arguments2 jest również tablicą liczb zmiennoprzecinkowych, jednak przechowuje ona współrzędne dla tymczasowego rozwiązania. Jest tego samego rozmiaru, co właściwość **Arguments** ($x_{tmp} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$).

BeginingTemperature jest to początkowa wartość temperatury, od której rozpoczyna się proces poszukiwań rozwiązania.

EndingTemperature jest liczbą, którą obniżana temperatura (zmienna **temperature**) musi osiągnąć, by zakończyć działanie algorytmu.

Iterations jest liczbą wewnętrznych iteracji (ilość powtórzeń algorytmu bez obniżania temperatury).

Cooling to liczba zmiennoprzecinkowa, w każdym głównym kroku algorytmu zmienna **temperature** jest mnożona przez tę wartość. Jest ona z przedziału $(0, 1)$, więc temperatura powoli się obniża.

SatisfactionSolutionValue jest liczbą, jaką rozwiązanie musi osiągnąć, aby wynik poszukiwania rozwiązania był dla nas satysfakcjonujący. Jest to zmienna opcjonalna, algorytm nadal będzie działać, gdy nie poda się jej wartości. Dzięki niej, jeśli funkcjonal osiągnie wartość oczekiwaną, to przestaje działać algorytm.

W programie również używam kilku pomocniczych zmiennych:

temperature to zmienna, która reprezentuje temperaturę. Jest ona używana w warunkach głównej iteracji oraz do wyznaczania funkcji prawdopodobieństwa. Wraz z postępem iteracji maleje.

bestSolution to liczba zmiennoprzecinkowa, która reprezentuje wartość obecnie najlepszego rozwiązania. Finalnie będzie ona wartością funkcjonału dla najlepszego rozwiązania całego problemu.

tmpSolution jest tymczasowym wynikiem rozwiązania (wynikiem rozwiązania problemu dla parametrów ze zmiennej **Arguments2**).

counter jest liczbą oznaczającą miarę głównej iteracji.

5.2. Implementacja metod i algorytmu

Metoda SetMaxCounter()

Metoda ta symuluje proces obniżania temperatury w celu obliczenia maksymalnej ilości głównych iteracji.

```
private void SetMaxCounter()
{
    maxCounter = 0;
    double tmpTemperature = BeginingTemperature;
    while (tmpTemperature > EndingTemperature)
    {
        tmpTemperature *= Cooling;
        maxCounter++;
    }
}
```

Metoda DrawArguments()

W metodzie tej losuję początkowe argumenty (właściwość **Arguments**) z przedziału zadanego dla danego zagadnienia.

Metoda Move()

W tym miejscu najpierw obliczany jest pozostały procent iteracji do ukończenia procesu (znając parametry algorytmu można wyznaczyć ilość głównych iteracji). Następnie biorąc 80% szerokości zakresu wartości ze zmiennych (zmienna partOfTheDomain), mnożymy ją przez pozostały do końca procesu procent iteracji (i przypisujemy do zmiennej value). Dalej, w pętli, każdej składowej tymczasowego rozwiązania (właściwość **Arguments2**), przypisywana jest suma odpowiedniej składowej najlepszego rozwiązania oraz losowej liczby z przedziału [-value, value]. Wraz z postępem iteracji zakres ten jest coraz węższy.

```
private void Move(int counter)
{
    double leftTemperatureCoolingTimes = maxCounter - counter;
```

```
double leftPercent = leftTemperatureCoolingTimes / maxCounter;

double domainValue = (Function.RightBound - Function.LeftBound);
double partOfTheDomain = 0.8;
double value = (partOfTheDomain * domainValue) * (leftPercent);
for (int i = 0; i < AmountOfArguments; i++)
{
    double newValue = Arguments[i] +
RandomGenerator.Instance.GetRandomDoubleInDomain(-value, value);
    if (newValue < Function.LeftBound)
    {
        newValue = Function.LeftBound;
    }
    if (newValue > Function.RightBound)
    {
        newValue = Function.RightBound;
    }
    Arguments2[i] = newValue;
}
}
```

Metoda ShouldChangeAnyway()

Jest to prosta implementacja funkcji prawdopodobieństwa, o której mowa była w rozdziale 2.1.1.

Metoda CopyValues()

Ze względu, iż język C# traktuje tablicę jako obiekt, to tablica jest typem referencyjnym i konieczne jest skopiowanie wartości ze zmiennej **Arguments2** do zmiennej **Arguments**.

Implementacja algorytmu

Opisane metody są wykorzystywane w poszczególnych krokach samego algorytmu. Po obliczeniu maksymalnej ilości iteracji, algorytm losuje pierwsze rozwiązanie. Następnie w pętli i następnej zagnieżdżonej pętli, szuka sąsiada obecnego najlepszego

rozwiązania. Zamienia nowe rozwiązanie ze starym, jeżeli zostały spełnione odpowiednie warunki. Jeżeli nowe rozwiązanie spełnia kolejny warunek, to kończy program zwracając najlepsze rozwiązanie. Jeżeli nie, wychodzi z zagnieżdzonej pętli, zmniejsza zmienną odpowiedzialną za temperaturę i jest to koniec kroków w jednej pełnej, głównej iteracji. Jeżeli program nie osiągnie satysfakcjonującego rozwiązania, a proces obniżania temperatury zakończy się, zwróci rozwiązanie, które udało mu się znaleźć kończąc tym samym program.

```
public double Solve()
{
    SetMaxCounter();
    int counter = 0;

    DrawArguments();
    double bestSolution = Function.Solve(Arguments);

    double temperature = BeginingTemperature;
    while (temperature > EndingTemperature)
    {
        for (int i = 0; i < Iterations; i++)
        {
            Move(counter);
            double tmpSolution = Function.Solve(Arguments2);

            if (tmpSolution < bestSolution ||
ShouldChangeAnyway(bestSolution - tmpSolution, temperature))
            {
                bestSolution = tmpSolution;
                CopyValues();
                if(SatisfactionSolutionValue != null &&
bestSolution < SatisfactionSolutionValue)
                {
                    return bestSolution;
                }
            }
        }
    }
}
```

```
        }  
    }  
    temperature *= Cooling;  
    counter++;  
}  
return bestSolution;  
}
```

6. Zastosowanie algorytmu w rozwiązywaniu odwrotnego zagadnienia przewodnictwa ciepła

Posiadając gotowy model matematyczny tradycyjnego problemu przewodnictwa ciepła możliwe jest zasymulowanie tego procesu i otrzymanie serii pomiarów temperatur. Obliczone pomiary temperatur można użyć do rozwiązania problemu odwrotnego.

Zanim przejdziemy do określenia zadania odwrotnego przewodnictwa ciepła, w pierwszej kolejności zdefiniujemy zadanie bezpośrednie (proste).

6.1. Zadanie bezpośrednie

Niech dane będzie równanie Fouriera:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [0, a], t \in [0, T]$$

z zadany warunkiem początkowym:

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, a]$$

oraz z zadanymi warunkami brzegowymi I rodzaju:

$$u(0, t) = g(t), \quad u(a, t) = h(t), \quad t \in [0, T]$$

Do rozwiązywania zadania bezpośredniego użyjemy metody różnic skończonych (schemat różnicowy). Rozważając równanie przewodnictwa ciepła na siatce:

$$\Delta = \{x_i; x_i = a + ih, h = \frac{a}{n}, i = 0, \dots, n\}$$

oraz dla kolejnych chwil czasu:

$$tj = j\Delta\tau$$

mamy:

$$c_i \rho_i \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta\tau} = \lambda \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta h^2}$$

Przekształcając otrzymujemy:

$$u_i^{j+1} = \frac{\lambda \Delta\tau}{c_i \rho_i} \left(\frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta h^2} \right) + u_i^j$$

Jest to schemat różniczkowy dla rozważanego zadania.

6.2. Implementacja metody różnic skończonych

Do rozważanego zadania bezpośredniego służy metoda Solve, której kod został przedstawiony poniżej:

```
public double[][] Solve()
{
    double[][] temp = new double[this.nt + 1][];
    for (int i = 0; i < this.nt + 1; i++)
    {
        temp[i] = new double[this.nx + 1];
        for (int j = 0; j < this.nx + 1; j++)
```


6. ZASTOSOWANIE ALGORYTMU W ROZWIĄZYWANIU ODWROTNEGO ZAGADNIENIA

```
        {
            temp[i][j] = 0;
        }
    }
    double hx = a / nx;
    if (this.tau / (hx * hx) >= 0.5)
    {
        Console.WriteLine("Niestablina");
        return null;
    }
    var x = new double[this.nx + 1];
    for (int i = 0; i < this.nx + 1; i++)
    {
        x[i] = i * hx;
    }
    for (int i = 0; i < this.nx + 1; i++)
    {
        temp[0][i] = this.f(x[i]);
    }
    for (int i = 0; i < nt + 1; i++)
    {
        temp[i][0] = this.g((i) * this.tau);
        temp[i][this.nx] = this.h((i) * this.tau);
    }
    var wsp = this.lambda * this.tau / (hx * hx * this.c * this.rho);
    for (int j = 1; j < this.nt + 1; j++)
    {
        for (int i = 1; i < this.nx; i++)
        {
            temp[j][i] = wsp * (temp[j - 1][i - 1] - 2.0 * temp[j - 1][i] +
temp[j - 1][i + 1]) + temp[j - 1][i];
        }
    }
    return temp;
```

}

6.3. Sformułowanie zadania odwrotnego

Rozważane przez nas zadanie odwrotne polega na tym, że nie znamy funkcji $h(t)$ opisującej warunek brzegowy $u(a, t) = h(t)$. W zamian za to znamy wartości funkcjonału $uP(x_s)$ pobrane w punktach pomiarowych $x_s \in (0, a)$ oznaczone brakującym w „pobliżu” brzegu a . Wartości te mogą oznaczać np. pomiary temperatury. Zakładając że funkcja $h(t)$ jest postaci:

$$h(t) = pt^2 + qt + s$$

gdzie:

p, q, s są szukanymi parametrami.

Dla wybranych wartości p, q, s rozwiązujemy zadanie bezpośrednie i w ten sposób odtworzymy wartości funkcji u w punktach pomiarowych $\bar{u}(x_s)$.

Rozważane zadanie odwrotne sprowadza się do rozwiązania zadania optymalizacyjnego, polegającego na minimalizacji funkcjonału:

$$F(p, q, s) = \sum_{i=1}^M \iota(u_i P(x_s) - \bar{u}_i(x_s))?$$

Minimalizując funkcjonal F wyznaczamy optymalne wartości p, q, s otrzymując warunek brzegowy, a tym samym rozwiązujemy zadanie odwrotne. Do minimalizacji funkcjonału $F(p, q, s)$ wykorzystamy algorytm wyżarzania.

Przykład numeryczny

Rozważmy zadanie dla $c = \rho = \lambda = 1, a = 1, T = 1$ z zadaniem warunkiem początkowym:

$$u(x, 0) = \frac{1}{2}x^2$$

oraz zadany warunek brzegowy

$$u(0, t) = t + 0.5$$

Brak informacji o funkcji opisującej warunek brzegowy na brzegu $x = a$ rekompensują dane pomiarowe temperatury w punkcie $x_s = 0.8$ z krokiem $\Delta t = 0.1$.

Stądże wiemy, że rozwiązaniem dokładnym tak postawionego zadania jest funkcja $h(t) = t + 1$ oraz $u(x, t) = \frac{1}{2}x^2 + t$.

6.4. Problem odwrotny

Posiadając rozkład temperatur, pobraliśmy 10 jej pomiarów w 80 % maksymalnej ilości węzłów w równych odstępach czasu. Następująca tabela przedstawia temperatury wykorzystywane w obliczeniach:

Nr.	t_i
1.	0,82
2.	0,92
3.	1,02
4.	1,12
5.	1,22
6.	1,32
7.	1,42
8.	1,52
9.	1,62
10.	1,72

Posiadając model problemu tradycyjnego oraz obliczone pomiary temperatur, zadanie polegało na odtworzeniu jednego z warunków granicznych (h) za pomocą równania kwadratowego:

$$\bar{h}(t) = p^2t + qt + s$$

w taki sposób, by obliczony na nowo rozkład temperatur przy pomocy nowej funkcji i pobrany zestaw danych jak najbardziej przypominał oryginalny. By odtworzona funkcja była równa pierwotnej, parametry powinny przyjąć następujące wartości:

$$p = 0$$

$$q = 1$$

$$s = 1$$

6.5. Wykorzystanie algorytmu heurystycznego

Do odnalezienia parametrów równania kwadratowego został użyty algorytm symulowanego wyżarzania. Algorytm w procesie iteracyjnym sprawdzał jakie wartości p , q i s pozwalały na uzyskanie jak najmniejszego błędu odtworzenia (liczonego jako sumę wartości bezwzględnej różnic odpowiednich pomiarów temperatur), co przedstawia poniższy wzór:

$$\sum_{i=1}^n |x_i - z_i|$$

gdzie:

x_i - oryginalny i -ty pomiar

z_i - odtworzony i -ty pomiar

n - liczba pomiarów.

Poszukiwania parametrów zostały ograniczone do następującego przedziału:

$$p, q, s \in [-10, 10]$$

6.5.1. Implementacja rozwiązania problemu odwrotnego

Klasa odpowiadająca za problem odwrotny posiada metodę `Solve()`, która zwraca błąd odtworzenia funkcji. Funkcja ta przyjmuje dowolną ilość parametrów (ze względu na uniwersalność metody `Solve()` w problemach), gdzie tutaj pierwsze trzy argumenty są parametrami funkcji kwadratowej. W implementacji tej metody jest używanych kilka zmiennych/metod, które oznaczają:

GetInverseProblemTemperatureMeasurements(), pomocnicza metoda, która zwraca odpowiednie pomiary temperatur dla odtworzonego problemu tradycyjnego (z funkcją \bar{h} jako odtworzona funkcja kwadratowa),
Measurements - oryginalny zestaw pomiarów.

Implementacja metody `Solve()` ma następującą postać:

```
public override double Solve(params double[] values)
{
    this.p = values[0];
    this.q = values[1];
    this.s = values[2];

    double sum = 0;

    double[] tmpMeasurements = GetInverseProblemTemperatureMeasurements();
    for (int i = 0; i < Measurements.Length; i++)
    {
        sum += Math.Abs(Measurements[i] - tmpMeasurements[i]);
    }
    return sum;
}
```

Metoda ta jest wykorzystywana przez algorytm symulowanego wyżarzania do obliczania jak „najniższej” wartości błędu odtworzenia i to właśnie algorytm przekazuje wartości parametrów metodzie `Solve()`.

6.5.2. Parametry algorytmu

Ze względu na czas oczekiwania znalezienia pojedynczego optymalnego rozwiązania problemu, ilość prób sprawdzających jakość dobranych parametrów została ograniczona do 5. Poniższa tabela przedstawia dobrane argumenty, które pozwalają na rozwiązanie problemu z satysfakcjonującym wynikiem błędu odtworzenia.

T_0	T_{end}	It	k
20	0.001	35000	0.99

6.6. Rezultaty

Oprócz prób odtworzenia funkcji granicznej dla dokładnych pomiarów, zostały również podjęte próby jej odtworzenia dla pomiarów, które posiadają kolejno 1, 2 i 5% zakres błędu. Każda wartość temperatury została obliczona w następujący sposób dla poszczególnych pomiarów:

$$t_{ip} = rand\left(t_i - \left(\frac{t_i p}{100}\right), t_i + \left(\frac{t_i p}{100}\right)\right)$$

gdzie:

p - wartość procentu zakresu błędu,

t_i - oryginalny i -ty pomiar,

t_{ip} - i -ty pomiar z p -procentowym zakresem błędu,

$rand$ - funkcja losująca liczbę z zakresu (od, do).

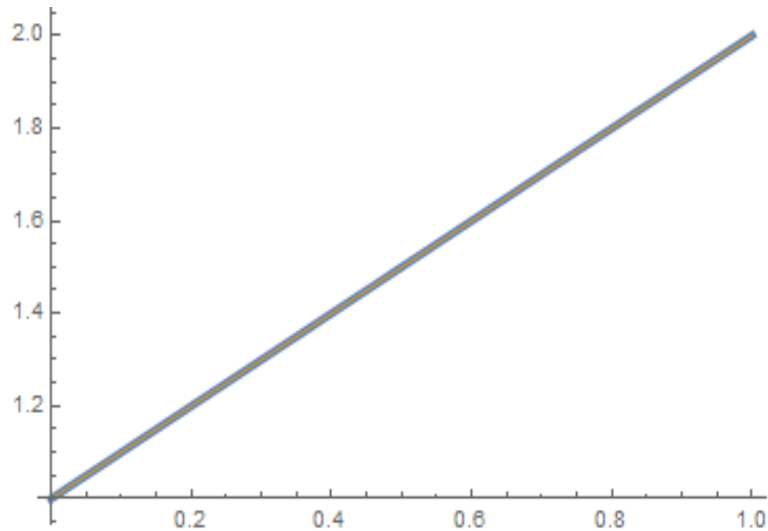
6.6.1. Dokładne pomiary temperatur

Następna tabela przedstawia wyniki osiągnięte przy pomocy podanych parametrów (liczby zaokrąglono do 4 miejsca po przecinku) przy niezmiennych pomiarach temperatur.

Nr.	Błąd	P	Q	S
1.	$6,9416 * 10^{-4}$	-0,0012	1,0015	0,9996
2.	$9,4350 * 10^{-4}$	0,0028	0,9971	1,0006
3.	$6,1092 * 10^{-4}$	-0,0013	1,0015	0,9996
4.	$5,3948 * 10^{-4}$	-0,0001	1,0005	0,9998
5.	$8,7191 * 10^{-4}$	-0,0026	1,0026	0,9995

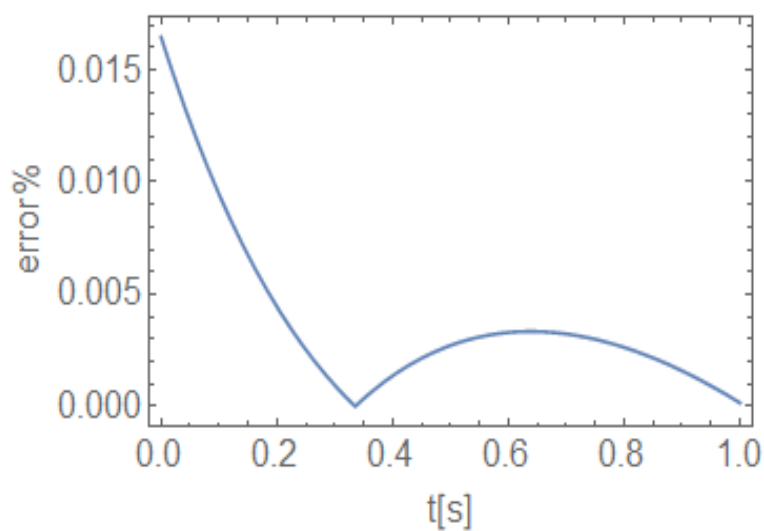
6. ZASTOSOWANIE ALGORYTMU W ROZWIĄZYWANIU ODWROTNEGO ZAGADNIENIA

Różnicę pomiędzy pierwotną funkcją graniczną, a odtworzoną (poprzez uśrednienie parametrów p , q i s) została również przedstawiona na wykresie (żółty kolor oznacza oryginał, niebieska odtworzoną, niebieska posiada większą grubość w celu zauważenia nachodzenia na siebie linii).



Rysunek 5: Porównanie początkowej funkcji granicznej z odtworzoną

Przygotowano również wykres pokazujący błąd bezwzględny obliczeń, co przedstawia poniższy rysunek:



Rysunek 6: Błąd bezwzględny obliczeń

6.6.2. 1% błąd pomiarowy temperatur

Pomiary wykorzystywane przy obliczeniach z 1% zakresem błędu pomiarowego wyglądają następująco:

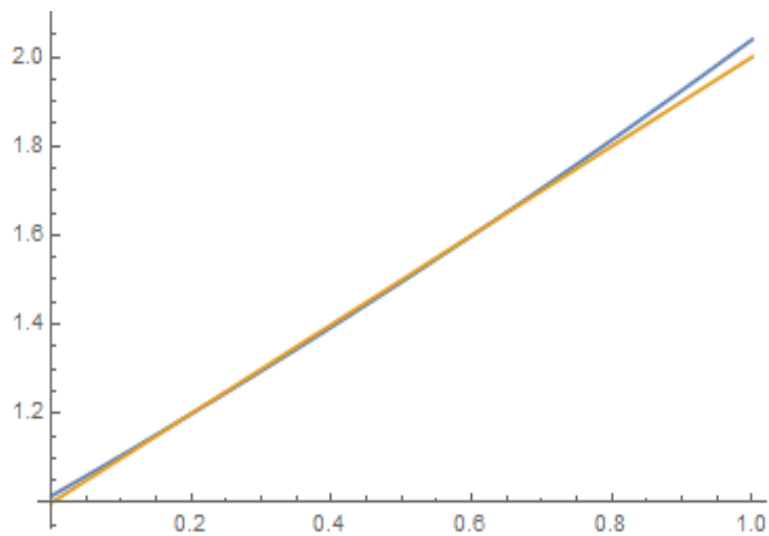
Nr.	t_i
1.	0,8254
2.	0,9273
3.	1,0230
4.	1,1173
5.	1,2246
6.	1,3169
7.	1,4207
8.	1,5227
9.	1,6239
10.	1,7363

Przeprowadzenie procesu odtwarzania funkcji granicznej dało następujące rezultaty (zaokrąglone do 4 miejsca po przecinku):

6. ZASTOSOWANIE ALGORYTMU W ROZWIĄZYWANIU ODWROTNEGO ZAGADNIENIA

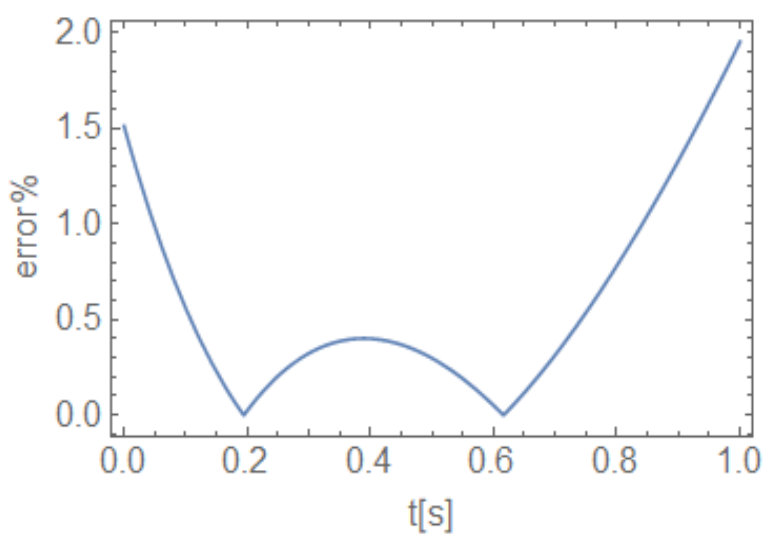
Nr.	Błąd	P	Q	S
1.	$2,7209 * 10^{-2}$	0,1190	0,8952	1,0189
2.	$2,3787 * 10^{-2}$	0,1152	0,9157	1,0140
3.	$2,7362 * 10^{-2}$	0,1500	0,8860	1,0063
4.	$2,3056 * 10^{-2}$	0,1173	0,8890	1,0178
5.	$2,3617 * 10^{-2}$	0,1304	0,9021	1,0187

Różnica pomiędzy oryginalną funkcją, a uzyskaną (poprzez uśrednienie parametrów) została przedstawiona na wykresie:



Rysunek 7: Porównanie początkowej funkcji granicznej z odtworzoną (z 1 % zakresem błędu pomiarów)

Następujący rysunek przedstawia błąd bezwzględny obliczeń:



Rysunek 8: Błąd bezwzględny obliczeń

6.6.3. 2% błąd pomiarowy temperatur

Przy obliczaniu parametrów odtwarzanej funkcji przy 2% zakresie błędu pomiarowego wykorzystano następujące pomiary temperatur:

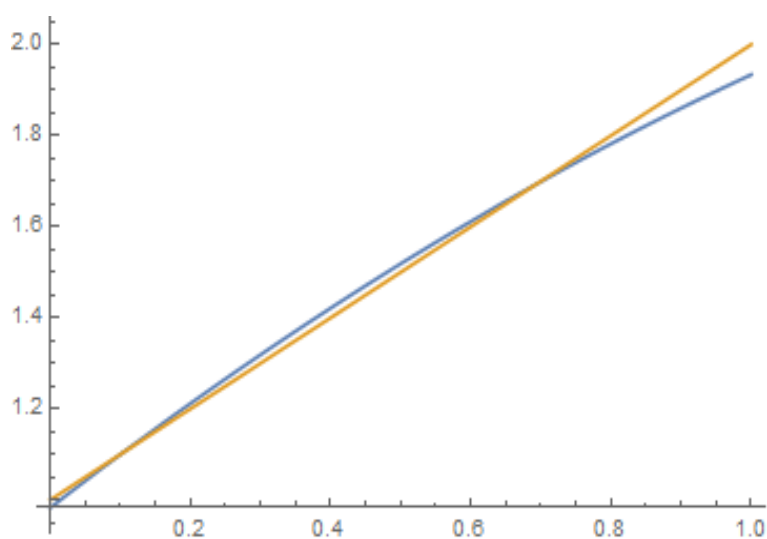
Nr.	t_i
1.	0,8327
2.	0,9225
3.	1,0161
4.	1,1337
5.	1,2405
6.	1,3304
7.	1,4376
8.	1,5097
9.	1,6126
10.	1,6993

Obliczone parametry wraz z błędem prezentują się następująco (przy zaokrągleniu do 4 miejsca po przecinku):

6. ZASTOSOWANIE ALGORYTMU W ROZWIĄZYWANIU ODWROTNEGO ZAGADNIENIA

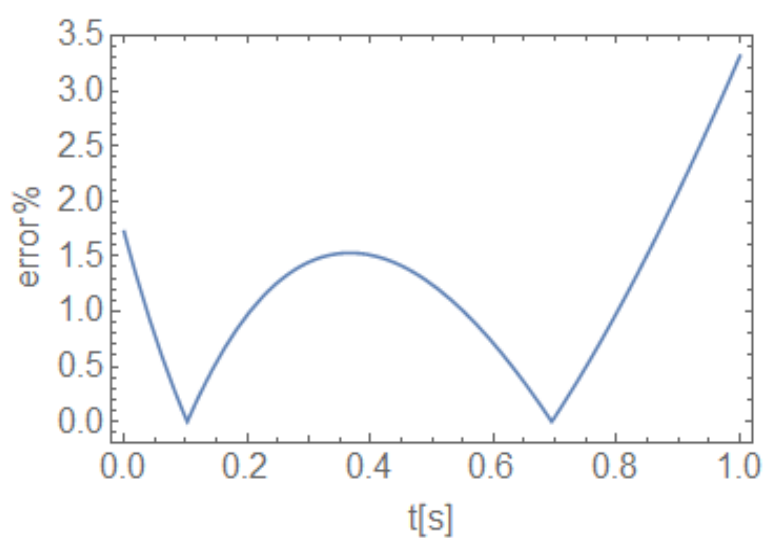
Nr.	Błąd	P	Q	S
1.	$6,8528 * 10^{-2}$	-0,3642	1,2993	0,9513
2.	$6,5422 * 10^{-2}$	-0,2570	1,1971	0,9992
3.	$5,8742 * 10^{-2}$	-0,2352	1,1853	0,9895
4.	$6,0410 * 10^{-2}$	-0,1531	1,1175	0,9937
5.	$6,0850 * 10^{-2}$	-0,1995	1,1643	0,9801

Różnicę pomiędzy funkcjami pierwotną i obliczoną (poprzez uśrednienie parametrów) przedstawia poniższy wykres:



Rysunek 9: Porównanie początkowej funkcji granicznej z odtworzoną (z 2 % zakresem błędu pomiarów)

Błąd bezwzględny obliczeń został przedstawiony poniżej:



Rysunek 10: Błąd bezwzględny obliczeń

6.6.4. 5% błąd pomiarowy temperatur

Pomiary wykorzystywane przy obliczeniach z 5% zakresem błędu pomiarowego wyglądają następująco:

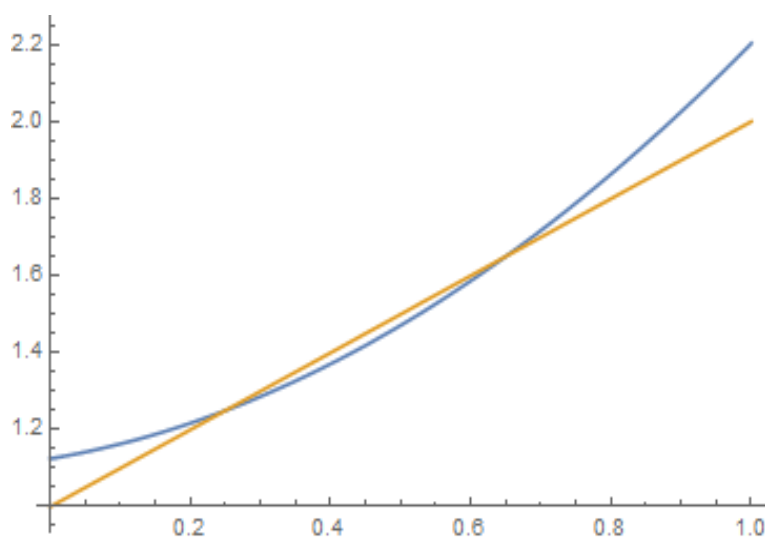
Nr.	t_i
1.	0,8051
2.	0,9300
3.	1,0515
4.	1,1398
5.	1,2139
6.	1,2906
7.	1,3880
8.	1,5877
9.	1,6267
10.	1,7959

Wykorzystanie algorytmu dało następujące rezultaty (przy zaokrągleniu liczb do 4 miejsca po przecinku):

6. ZASTOSOWANIE ALGORYTMU W ROZWIĄZYWANIU ODWROTNEGO ZAGADNIENIA

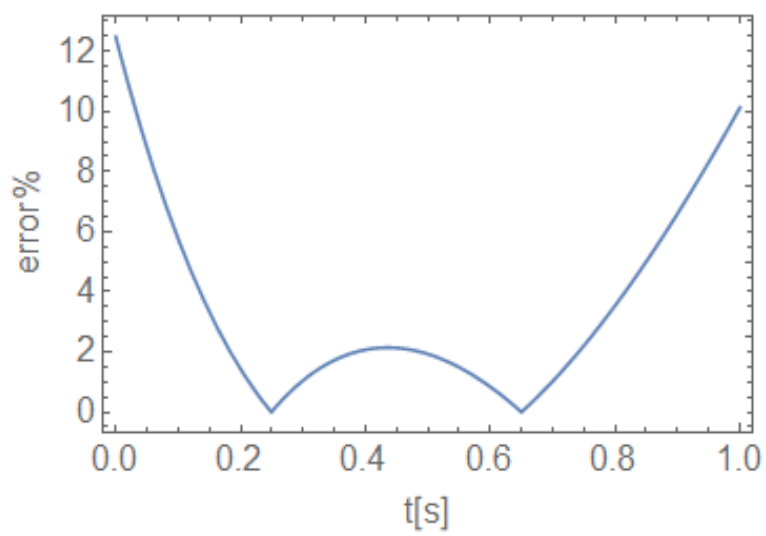
Nr.	Błąd	P	Q	S
1.	0,2031	0,8678	0,2034	1,1597
2.	0,2049	0,6563	0,4295	1,0985
3.	0,2030	0,7652	0,3167	1,1265
4.	0,2060	0,8133	0,2428	1,1277
5.	0,2041	0,7516	0,3426	1,1119

Wykresy obu funkcji zostały przedstawione poniżej:



Rysunek 11: Porównanie początkowej funkcji granicznej z odtworzoną (z 5 % zakresem błędów pomiarów)

Poniższy rysunek przedstawia błąd bezwzględny obliczeń:



Rysunek 12: Błąd bezwzględny obliczeń

7. Podsumowanie

Celem tej pracy inżynierskiej było stworzenie aplikacji, która pozwoliłaby rozwiązać zadany problem przewodnictwa ciepła poprzez zastosowanie algorytmu symulowanego wyżarzania. Stworzono więc program, który poprzez prosty interfejs graficzny pozwala na użycie tego algorytmu heurystycznego do wyznaczenia minimum w kilku funkcjach testowych oraz do rozwiązywania zadanego odwrotnego zadania przewodnictwa ciepła.

Realizacja założeń projektu wymagała przeprowadzenia badań w kwestii odpowiedniego doboru parametrów dla poszczególnych problemów i ich jakości oraz przetestowania i zoptymalizowania samego działania algorytmu symulowanego wyżarzania. Dobrane parametry dla poszczególnych problemów pozwalają na stosunkowo szybkie i poprawne znalezienie optymalnego rozwiązania danego problemu, a wyniki przeprowadzonych testów rozwiązania odwrotnego zadania przewodnictwa ciepła na zbliżone odtworzenie jednego z brakujących parametrów modelu matematycznego.

—

Tutaj będą jeszcze wnioski

—

Literatura

- [1] http://iswiki.if.uj.edu.pl/iswiki/images/2/20/AiSD_22._Symulowane_wy%C5%BCarzanie_%28problem_komiwoja%C5%BCera%29.pdf [dostęp: 20 sierpnia 2018]
- [2] M. Duque-Anth, *Constructing efficient simulated annealing algorithms*, [w:] „Discrete Applied Mathematics”, 1997 nr 77/2, s. 139-159 Dostępny w Internecie: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X96001321> [dostęp 20 sierpnia 2018]
- [3] <http://wikizmsi.zut.edu.pl/uploads/archive/5/5e/20140303092223!OzWSI.L.S1.W1.pdf> [dostęp: 25 sierpnia 2018]
- [4] http://www.wikizmsi.zut.edu.pl/uploads/e/eb/OzWSI.L.S1_c1.pdf [dostęp: 25 sierpnia 2018]
- [5] https://en.wikipedia.org/wiki/Test_functions_for_optimization#Test_functions_for_single-objective_optimization [dostęp: 30 października 2018]
- [6] H. Abiyev, M. Tunay, *Optimization of High-Dimensional Functions through Hypercube Evaluation*, Dostępny w Internecie: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4538776/> [dostęp: 13 listopada 2018]
- [7] F. Rothlauf, *Optimization Problems*, [w:] *Design of Modern Heuristics: Principles and Application*, wyd. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011, s. 7-44, ISBN 978-3-540-72961-7 Dostępny w Internecie: <https://pdfs.semanticscholar.org/b333/0f96d1a937fc2c63b3294729cfea30826134.pdf> [dostęp: 27 listopada 2018]
- [8] R. Martí, G. Reinelt, *Heuristic Methods*, [w:] *The Linear Ordering Problem, Exact and Heuristic Methods in Combinatorial Optimization*, wyd. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011, s. 17-40, ISBN 978-3-642-16728-7

- [9] <http://prac.im.pwr.edu.pl/~plociniczak/lib/exe/fetch.php?media=odwrotne.pdf>
[dostęp: 10 grudnia 2018]
- [10] <https://www.math.unl.edu/~scohn1/8423/wellposed.pdf> [dostęp: 10 grudnia 2018]
- [11] E. Hetmaniok, A. Zielonka, D. Słota, *Zastosowanie algorytmu selekcji klonalnej do odtworzenia warunku brzegowego trzeciego rodzaju*, [w:] „Zeszyty naukowe Politechniki Śląskiej”, 2012 nr 2/1874
- [12] E. Hetmaniok, D. Słota, A. Zielonka, *Application of the Ant Colony Optimization Algorithm for Reconstruction of the Thermal Conductivity Coefficient*, [w:] *Swarm and Evolutionary Computation*, wyd. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012, s. 240-248, ISBN 978-3-642-29352-8