

Ekonometria Finansowa

Nieliniowe modele szeregów czasowych

mgr Paweł Jamer¹

24 stycznia 2016

¹pawel.jamer@gmail.com

Problem

Problem

Poszukiwany jest model opisujący szereg czasowy r_t równaniem postaci

$$r_t = f(\epsilon_t, \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots),$$

gdzie

- f — dowolna funkcja nieliniowa,
- ϵ_t — WN(0, 1)

Uproszczenie problemu

Uprośćmy przedstawiony problem rozwijając funkcję f w szereg Taylora:

$$r_t = g(\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots) + \epsilon_t h(\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots).$$

Wówczas funkcje g oraz h możemy interpretować następująco:

- $g(\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots) = \mathbb{E}(r_t \mid \mathcal{R}_{t-1})$,
- $h^2(\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots) = \text{Var}(r_t \mid \mathcal{R}_{t-1})$.

Definicja

Model nieliniowy

Model opisujący proces r_t nazwiemy nieliniowym, jeżeli warunkowa wartość oczekiwana $\mathbb{E}(r_t | \mathcal{R}_{t-1})$ lub warunkowa wariancja $\text{Var}(r_t | \mathcal{R}_{t-1})$ jest w nim opisana za pomocą funkcji nieliniowej.

Model NLAR

Definicja

Model nieliniowej autoregresji

Modelem nieliniowej autoregresji rzędu p szeregu czasowego r_t nazwiemy model opisany równaniem

$$y_t = f(y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-p}) + \epsilon_t.$$

Oznaczenie. Model nieliniowej autoregresji rzędu p oznacza się symbolem NLAR(p).

Model NLAR

Przykład

Model wykładniczej autoregresji

Modelem wykładniczej autoregresji rzędu p szeregu czasowego r_t nazwiemy model opisany równaniem

$$y_t = \sum_{j=1}^p \alpha_j y_{t-j} + \epsilon_t,$$

gdzie

- $\alpha_j = \theta_j + \pi_j e^{-\alpha y_{t-j}^2}.$

Oznaczenie. Model wykładniczej autoregresji rzędu p oznacza się symbolem $\text{EAR}(p)$.

Model NLMA

Definicja

Model nieliniowej średniej ruchomej

Modelem nieliniowej średniej ruchomej rzędu q szeregu czasowego r_t nazwiemy model opisany równaniem

$$y_t = f(\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots, \epsilon_{t-q}) + \epsilon_t.$$

Oznaczenie. Model nieliniowej średniej ruchomej rzędu q oznacza się symbolem NLMA(q).

Model NLMA

Przykład

Model Rocke'a

Modelem Rocke'a szeregu czasowego r_t nazwiemy model opisany równaniem

$$y_t = \epsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \psi(\epsilon_{t-j}),$$

gdzie

- $\psi(x) \leq 0$ dla $x > 0$,
- $\psi(-x) = \psi(x)$,
- $\psi(0) = 1$.

Model dwuliniowy

Definicja

Model dwuliniowy

Modelem dwuliniowym szeregu czasowego r_t nazwiemy model opisany równaniem

$$y_t = \mu + \sum_{i=1}^p \alpha_i y_{t-i} + \sum_{j=0}^q \theta_j \epsilon_{t-j} + \sum_{k=1}^P \sum_{l=1}^Q c_{k,l} y_{t-k} \epsilon_{t-l},$$

gdzie

- $\theta_0 = 1$.

Model dwuliniowy

Właściwości

Uwaga. Model dwuliniowy uwzględnia skupianie się danych.

Uwaga. $r_t \sim \text{ARCH} \Rightarrow r_t^2$ - proces dwuliniowy.

Wśród modeli dwuliniowych wyróżnia się:

- modele dwuliniowe naddiagonalne ($c_{k,l} = 0$ dla $k > l$).
- modele dwuliniowe poddiagonalne ($c_{k,l} = 0$ dla $k < l$).
- modele dwuliniowe diagonalne ($c_{k,l} = 0$ dla $k \neq l$).

Model TAR

Model progowy autoregresyjny

Modelem progowym autoregresyjnym (TAR) szeregu czasowego r_t nazwiemy model opisany równaniem

$$r_t + \theta_0 + \sum_{i=1}^p \theta_i r_{t-i} + I(z_{t-d} \leq r) \left(\psi_0 + \sum_{j=1}^q \psi_j r_{t-j} \right) = \epsilon_t.$$

Model SETAR. Model TAR w którym $z_{t-d} = r_{t-d}$ nazwiemy modelem SETAR.

Model STR

Definicja

Model wygładzonego przejścia

Modelem wygładzonego przejścia szeregu czasowego r_t nazwiemy model opisany równaniem

$$r_t = \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\pi}_1 + \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\pi}_2 F(z_t) + \epsilon_t,$$

gdzie

- $\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} 1 & y_{t-1} & \cdots & y_{t-p} & x_{1,t} & \cdots & x_{q,t} \end{bmatrix}$ — wektor zmiennych,
- $\boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{\pi}_2$ — wektory parametrów,
- ϵ_t — WN,
- $F(z_t)$ — funkcja transformacji, parzysta lub nieparzysta funkcja ciągła.

Model STR

Postać funkcji transformacji

Funkcja logistyczna:

$$F(z_t) = F(t) = \frac{1}{1 + e^{-\gamma \left(t^k + \sum_{i=1}^k \alpha_i t^{k-i} \right)}}.$$

Funkcja wykładnicza:

$$F(z_t) = F(t) = 1 + e^{-\gamma(t-\alpha)^2}.$$

Model przełącznikowy

Model przełącznikowy

Modelem przełącznikowym szeregu czasowego r_t nazwiemy model opisany równaniem

$$r_t = \alpha_{z_t} + \sum_{i=1}^p \beta_{z_t,i} r_{t-i} + \epsilon_t,$$

gdzie

- z_t — łańcuch Markowa o zbiorze stanów

$$\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, k\}, k \geq 2.$$

Wybór funkcji nieliniowej

Podstawy teoretyczne

Odpowiednio dobrana funkcja nieliniowa powinna:

- zachowywać zgodność ze znanymi zależnościami ekonomicznymi,
- zachowywać zgodność ze znanymi faktami empirycznymi,
- posiadać dziedzinę zmienności zgodną z faktyczną zmiennością modelowanej wielkości,
- charakteryzować się elastycznością umożliwiającą aproksymację form zbliżonych do analizowanej formy.
- umożliwiać łatwe wyznaczenie jej parametrów.

Wybór funkcji nieliniowej

Funkcja korelacji

Współczynnik maksymalnej korelacji:

$$m_{\rho} = \max_{f,g} \text{Cor}(g(y), f(x)).$$

Maksymalna średnia korelacja:

$$m_m = \max_f \text{Cor}(y, f(x)).$$

Maksymalny współczynnik regresji

$$m_r = \max_f R^2,$$

gdzie

- R^2 — współczynnik determinacji w regresji $y = f(x) + \epsilon_t$.

Wybór liczby opóźnień

Uwaga. Wyboru liczby opóźnień w modelach NLAR, NLMA, dwuliniowych oraz progowych można dokonać wykorzystując kryteria informacyjne. Najczęściej stosowanymi kryteriami są kryteria AIC oraz BIC.

Test RESET

Algorytm

- 1 Stosujemy MNK w celu wyznaczenia parametrów modelu

$$y_t = \beta' \mathbf{z}_t + u_t,$$

gdzie $\mathbf{z}_t = \begin{bmatrix} 1 & y_{t-1} & \cdots & y_{t-p} & x_1 & \cdots & x_k \end{bmatrix}$.

- 2 Obliczamy

$$SSR_0 = \sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2.$$

- 3 Stosujemy MNK w celu wyznaczenia parametrów modelu

$$\hat{u}_t = \delta' \mathbf{z}_t + \sum_{j=2}^h \psi_j \hat{y}_t^j + v_t.$$

- 4 Obliczamy

$$SSR = \sum_{t=1}^T \hat{v}_t^2.$$

Test RESET

Metoda testowania

Testujemy hipotezę

$$\begin{cases} H_0 : & (\forall j) \psi_j = 0, \\ H_1 : & (\exists j) \psi_j \neq 0. \end{cases}$$

Statystyka testowa jest postaci:

$$F = \frac{(SSR_0 - SSR)/(h-1)}{(SSR)/(T-m-h)} \sim \mathbb{F}^{[h-1, T-m-h]},$$

gdzie $m = p + k$.

Pytania?

Dziękuję za uwagę!