Ekonometria Finansowa

Dekompozycja szeregów czasowych

mgr Paweł Jamer[1]

Doktorant, Katedra Ekonometrii i Statystyki SGGW
Ekspert ds. Modelowania Danych, Polskie Technologie
Konsultant Zewnętrzny, Polkomtel

22 października 2016

[1] pawel.jamer@gmail.com

Klasyczny model dekompozycji szeregu czasowego

Niestacjonarny szereg czasowy X_t zapisać możemy w postaci

$$X_t = m_t + s_t + Y_t,$$

gdzie

- m_t — składowa trendu,
- s_t — składowa sezonowa spełniająca warunek

$$(\exists d > 0)\, s_{t+d} = s_d,$$

- Y_t — proces SSS taki, że $\mathbb{E}\,(Y_t) = 0$.

Ekonomiczny model dekompozycji szeregu czasowego

Ekonomiści dokonują czasami dekompozycji niestacjonarnego szeregu czasowego X_t w sposób następujący

$$X_t = m_t + s_t + c_t + Y_t,$$

gdzie

- m_t — składowa trendu,
- s_t — składowa sezonowa,
- c_t — składowa wahań cyklicznych (koniunkturalnych),
- Y_t — proces SSS taki, że $\mathbb{E}\,(Y_t) = 0$.

Uwaga. Składowa wahań cyklicznych jest rozpatrywana albo łącznie z trendem albo łącznie ze składową przypadkową.

Przegląd metod

W celu wyodrębnienia składowej trendu można:

- wykorzystać model trendu,
- wykorzystać średnie kroczące,
- dokonać różnicowania szeregu czasowego,
- ...

Model trendu
Definicja

Model trendu

Modelem trendu szeregu czasowego X_t nazwiemy model postaci

$$X_t = f(t) + \epsilon_t,$$

gdzie

- $f(t)$ — funkcja trendu,
- ϵ_t — składnik losowy.

Uwaga. Nie czyni się żadnych założeń co do postaci składnika losowego w modelu trendu.

Model trendu

Dobór funkcji trendu

Funkcję trendu wybiera się bazując na:

- przesłankach teoretycznych,
- analizie danych empirycznych,
- badaniu przyrostów szeregów,
- porównaniu kilku możliwych funkcji.

Uwaga. W praktyce jako funkcję trendu przyjmuje się najczęściej funkcję wielomianową. W szczególności funkcję liniową, będącą szczególnym przypadkiem funkcji wielomianowej.

Średnia ruchoma
Definicja

Średnia ruchoma

Średnią ruchomą rzędu q szeregu czasowego X_t nazwiemy statystykę postaci

$$\overline{X}_t = \frac{1}{2q+1} \sum_{|\tau| \leqslant q} X_{t-\tau}, \text{ gdy } q \text{ nieparzyste}$$

lub

$$\overline{X}_t = \frac{1}{2q} \left(\frac{1}{2} X_{t-q} + \sum_{|\tau| < q} X_{t-\tau} + \frac{1}{2} X_{t+q} \right), \text{ gdy } q \text{ parzyste.}$$

Uwaga. Przy odpowiednio dobranej wartości parametru q zachodzi

$$m_t \approx \overline{X}_t.$$

Średnia ruchoma

Dobór rzędu średniej ruchomej

Przyjmijmy $s_t = 0$. Zauważmy, że

$$\overline{X}_t = \frac{1}{2q+1} \sum_{|\tau| \leqslant q} (m_{t-\tau} + Y_{t-\tau})$$

$$\overline{X}_t = \frac{1}{2q+1} \sum_{|\tau| \leqslant q} m_{t-\tau} + \frac{1}{2q+1} \sum_{|\tau| \leqslant q} Y_{t-\tau}$$

Wówczas:

- dla małych q : $\frac{1}{2q+1} \sum_{|\tau| \leqslant q} m_{t-\tau} \approx m_t$,
- dla dużych q : $\frac{1}{2q+1} \sum_{|\tau| \leqslant q} Y_{t-\tau} \approx 0$.

Wniosek. Rząd średniej ruchomej powinien być na tyle duży, by zmarginalizować znaczenie składowej Y_t oraz na tyle mały, by nie zaburzyć zależności $\overline{X}_t \approx m_t$.

Różnicowanie

Przyjmijmy $s_t = 0$. Niech trend ma postać

$$m_t = \sum_{j=0}^{k} \beta_j t^j.$$

Wówczas operacja k-krotnego różnicowania

$$\Delta^k X_t$$

pozwala wyeliminować trend z szeregu czasowego X_t.

Wniosek. W celu wyeliminowania trendu o postaci wielomianowej można zastosować operację różnicowania szeregu.

Przegląd metod

W celu wyodrębnienia składowej sezonowej można:

- wykorzystać metodę wskaźników,
- zastosować modele z sezonowymi zmiennymi binarnymi,
- dokonać analizy harmonicznej szeregu czasowego,
- ...

Uwaga. Zastsowanie metody wskaźników oraz modeli ze zmiennymi binarnymi wymaga uprzedniego ustalenia okresu s szeregu czasowego. Zastsowanie analiy harmonicznej nie wiąże się z koniecznością uprzedniego określenia okresu s.

Model wskaźników

Wskaźnik sezonowości

Wskaźnik sezonowości

Wskaźnikiem sezonowości szeregu czasowego X_t nazwiemy statystykę postaci

$$S_t = \frac{\sum_{\tau=0}^{\frac{T}{s}-1} X_{t+s\tau}}{\sum_{\tau=0}^{\frac{T}{s}-1} \hat{X}_{t+s\tau}},$$

gdzie

- $\hat{X}_t$ — estymator X_t.

Uwaga. Wartość $\hat{X}_t$ uzyskać można poprzez zastosowanie modelu trendu lub wyznaczenie średniej ruchomej.

Model wskaźników

Normalizacja

Od wskaźników sezonowości oczekuje się, aby spełniały zależność

$$\sum_{j=1}^{s} S_j = s.$$

W związku z czym dokonuje się ich normalizacji

$$S_j^n = \frac{s}{\sum_{j=1}^{s} S_j} \cdot S_j.$$

Model wskaźników

Składowa sezonowa

Składową sezonową w oparciu o znormalizowane wskaźniki sezonowości oblicza się ostatecznie jako

$$s_t = S_{t \bmod s}\overline{X} - \overline{X},$$

gdzie

- $\overline{X} = \sum_{t=1}^{T} X_t$.

Model z sezonowymi zmiennymi binarnymi

Definicja

Model z sezonowymi zmiennymi binarnymi

Modelem z sezonowymi zmiennymi binarnymi szeregu czasowego X_t o sezonowości s nazwiemy model postaci

$$X_t = f(t) + \sum_{i=1}^{s} \delta_i z_{i,t} + \epsilon_t,$$

gdzie

- $f(t)$ — funkcja trendu,
- $z_{i,t}$ — zmienna przyjmująca wartość 1 dla i-tego momentu okresu oraz 0 w pozostałych przypadkach,
- δ_i — stały efekt sezonowy dla i-tego momentu okresu,
- ϵ_t — składnik losowy.

Model z sezonowymi zmiennymi binarnymi

Estymacja

Uwaga. Modelu z sezonowymi zmiennymi binarnymi nie da się estymować z wykorzystaniem klasycznej metody najmniejszych kwadratów z uwagi na występowanie nim binarnych zmiennych sezonowych.

W celu estymacji modelu z sezonowymi zmiennymi binarnymi za pomocą KMNK usuwa się z niego zmienną $z_{s,t}$. Stały efekt sezonowy dla s-tego momentu okresu wylicza się wówczas z wzoru

$$\hat{\delta}_s = -\sum_{j=1}^{s-1} \hat{\delta}_j.$$

Algorytm Holta-Wintersa

Algorytm

Algorytm Holta-Wintersa dla klasycznego modelu dekompozycji szeregu czasowego o znanym okresie d to układ rekurencyjnych równań postaci:

$$
\begin{aligned}
\hat{m}_{t+1} &= \alpha\left(X_{t+1} - \hat{s}_{t+1-d}\right) + (1-\alpha)\left(\hat{m}_t + \hat{m}'_t\right),\\
\hat{m}'_{t+1} &= \beta\left(\hat{m}_{t+1} - \hat{m}_t\right) + (1-\beta)\,\hat{m}'_t,\\
\hat{s}_{t+1} &= \gamma\left(X_{t+1} - \hat{m}_{t+1}\right) + (1-\gamma)\,\hat{s}_{t+1-d}.
\end{aligned}
$$

Intuicja. Algorytm Holta-Wintersa to iteracyjna metoda jednoczesnej estymacji składowej trendu oraz składowej sezonowej w klasycznym modelu dekompozycji szeregu czasowego.

Algorytm Holta-Wintersa
Wartości początkowe

Wartości inicjalne algorytmu Holta-Wintersa obliczane są na podstawie pierwszych $d+1$ obserwacji analizowanego szeregu czasowego X_t i przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \hat{m}_{d+1} &= X_{d+1}, \\ \hat{m}'_{d+1} &= \frac{X_{d+1} - X_1}{d}, \\ \hat{s}_\tau &= X_\tau - \left(X_1 - \hat{m}'_{d+1}(\tau - 1)\right), \tau = 1, 2, \ldots, d+1. \end{aligned}$$

Algorytm Holta-Wintersa

Uwagi

Uwaga. Algorytm Holta-Wintersa wykorzystuje w swoim działaniu zarówno wiedzę wynikającą z postaci klasycznego modelu dekompozycji, jak też wiedzę zawartą w analizowanej trajektorii szeregu czasowego X_t.

Uwaga. Doboru wartości parametrów α, β oraz γ dokonuje się poprzez minimalizację sumy

$$\sum_{t=d+2}^{T} \left(X_t - \hat{X}_t\right)^2,$$

której często dokonuje się w praktyce poprzez poszukiwanie po siatce.

Uwaga. Przyjęcie $\alpha \in (0, 1)$ oraz $\beta = 0$ i $\gamma = 0$ sprowadza algorytm Holta-Wintersa do algorytmu estymacji składowej trendu metodą wygładzania wykładniczego.

Algorytm pięciokrokowy

Algorytm

Rozważmy klasyczny model dekompozycji szeregu czasowego X_t o znanym okresie d oraz składowej sezonowej s_t takie, że

$$\sum_{t=1}^{d} s_t = 0.$$

Algorytm pięciokrokowy dekompozycji szeregu czsowego X_t polega na wykonaniu poniższych pięciu kroków

1. Wstępnej estymacji trendu m_t.
2. Estymacji składowej sezonowej s_t.
3. Desezonalizacji szeregu X_t.
4. Parametrycznej estymacji składowej trendu m_t.
5. Dopasowaniu modelu procesu stacjonarnego Y_t.

Pytania?

Dziękuję za uwagę!