ミクロ経済学1

第４回
限界代替率

合理的な選好の仮定のもとで，効用関数を仮定した．

代表的な効用関数：コブ･ダグラス効用関数

- 完備性，強単調性，推移性，強凹性をみたすことを確認できる
- かつ無差別曲線がSmooth である

$$U = x_1^{\ a} x_2^{\ b}$$

Smooth でない効用関数の例
レオンチェフ型効用関数

- スムーズではない.（折れ曲がっている）
- レオンチェフ型効用関数は，少ないほうに効用の大きさが規定される

$$U\{x_1, x_2\} = \min\{x_1, x_2\}$$

- 例：靴の右左，
  手袋の右左

消費者理論の目的(ここからの流れ)

消費者理論の目的:

予算の範囲内で(予算を使い切って)最も好　ましい(＝効用を最大にする)消費点の特徴

Step1

予算集合(実行可能集合, 機会集合)の定義

Step2

予算集合を満たし効用を最大にする点を求める

限界概念

- 経済学において限界とは，「追加的な」という意味
- 限界効用は，財を1単位増やしたときの効用の増加．
- 限界概念は，消費者理論でも，生産者理論でも経済学において重要な役割を果たす．
- 効用関数を観察することはできないが，限界効用が増えたか減ったかを観察することができる

1財のときの限界効用
限界効用(Marginal Utility)逓減の法則

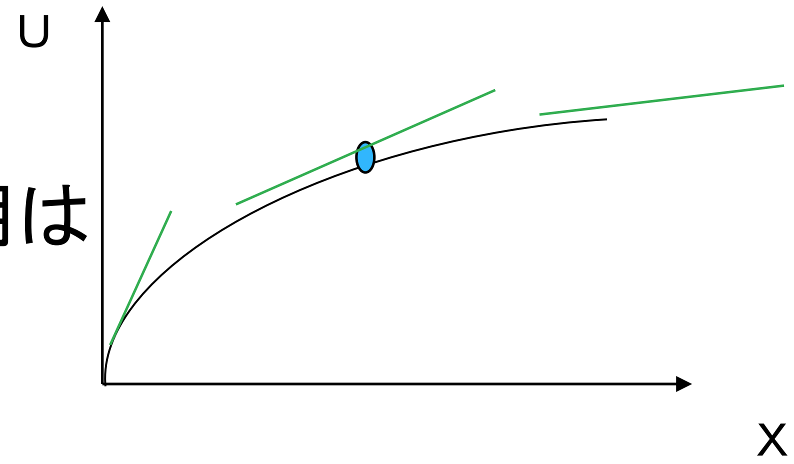
- コーヒーからの効用が，連続的に

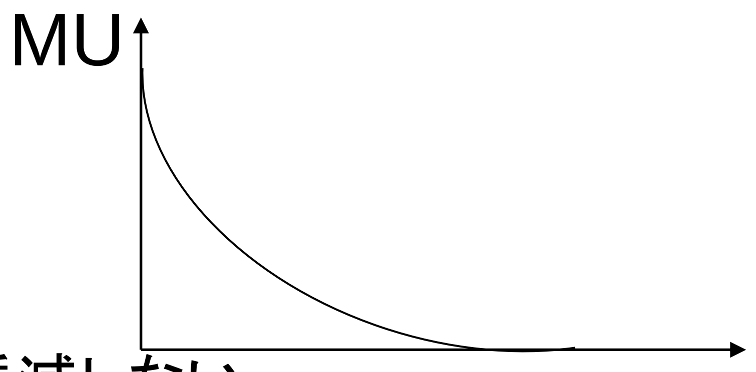
$$U = \sqrt{x}$$

- であらわされると限界効用は

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

となる(接線の傾き)





- コーヒーをあと1ml
多く飲むときの効用は
下がっていく

＊効用関数が $U = x$ だと，逓減しない．

２財：コブダグラス型効用関数と，ある消費点における限界効用

- 消費点 $x=\{x_1, x_2\}$

  コブダグラス型効用関数による効用の一般形は

  $$U(x_1, x_2) = x_1{}^a x_2{}^b$$

- 第1（2）財の消費を増やしたときの限界効用は，
- 第1（2）財について，偏微分することで得られる

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = a x_1{}^{a-1} x_2{}^b \qquad \frac{\partial U}{\partial x_2} = b x_1{}^a x_2{}^{b-1}$$

おまけ:偏微分のやり方

- 全微分は，すべての変数について微分を展開するが，偏微分は，2つ（以上）の変数について，微分したいもの以外を一定とみなして，微分したいものだけを微分する． $U(x_1, x_2) = x_1{}^a x_2{}^b$ の例で
- $\dfrac{\partial U}{\partial x_1}$ を計算するとき，x_2 は（ここではx_1の関数にはなっていないので）無視して，微分のようにして解いてやり，x_2に関するところはそのまま残す

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = a x_1{}^{a-1}(x_2{}^b)$$

具体例

- コブダグラス型効用関数　$U(x_1, x_2) = x_1{}^a x_2{}^b$
  のうち，第1財と第2財からの効用が対称的である例　，$a = b = \frac{1}{2}$　これを代入して

$$U(x_1, x_2) = x_1{}^{\frac{1}{2}} x_2{}^{\frac{1}{2}}$$

- 第1(2)財の消費を増やしたときの限界効用は，
- 第1(2)財について偏微分することで得られる

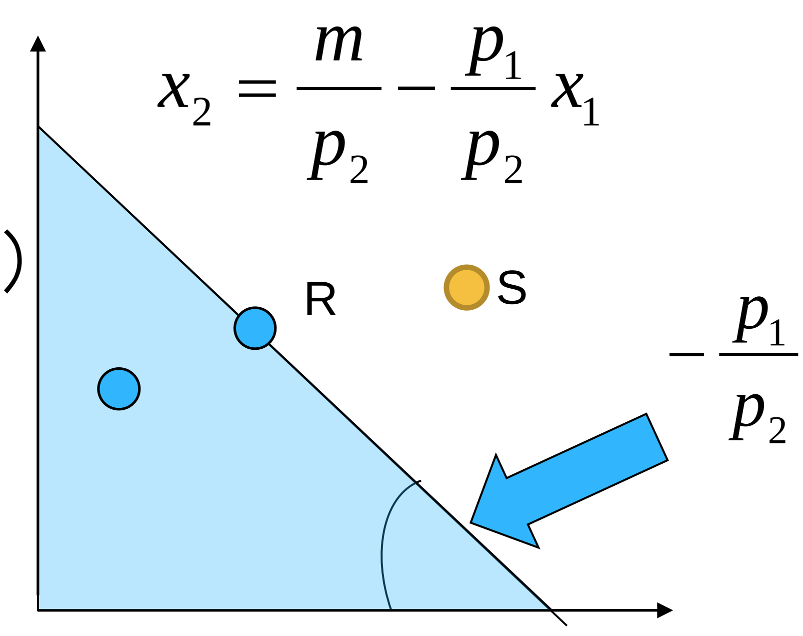
$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{1}{2} x_1{}^{-\frac{1}{2}} x_2{}^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{1}{2} x_1{}^{\frac{1}{2}} x_2{}^{-\frac{1}{2}}$$

予算集合と予算制約線

- 予算制約式は，所得と価格に基づいて，

$$m \geq p_1 x_1 + p_2 x_2$$

- 予算集合，（機会集合，
実行可能集合　feasible set）
が決まる



予算集合と予算制約線

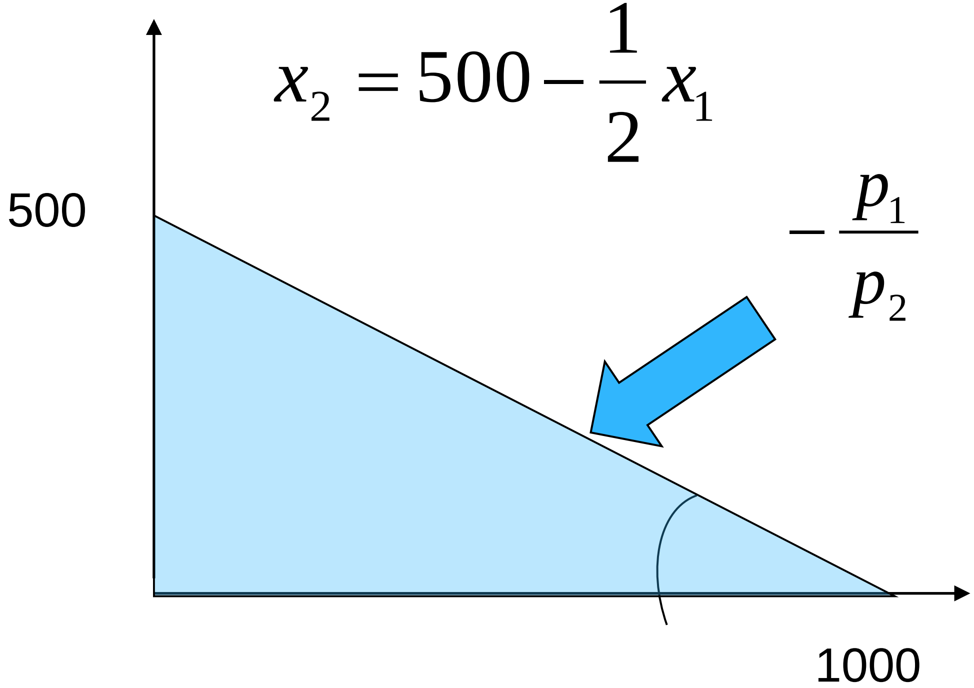
財1を豚肉，財2を牛肉とする.

- 予算制約式は，予算M＝2000,
- p_1 =2円/g, p_2 =4 円/g

$$2000 \geq 2x_1 + 4x_2$$

$$2000 = 2x_1 + 4x_2$$

- 予算集合，（機会集合，実行可能集合）が決まる



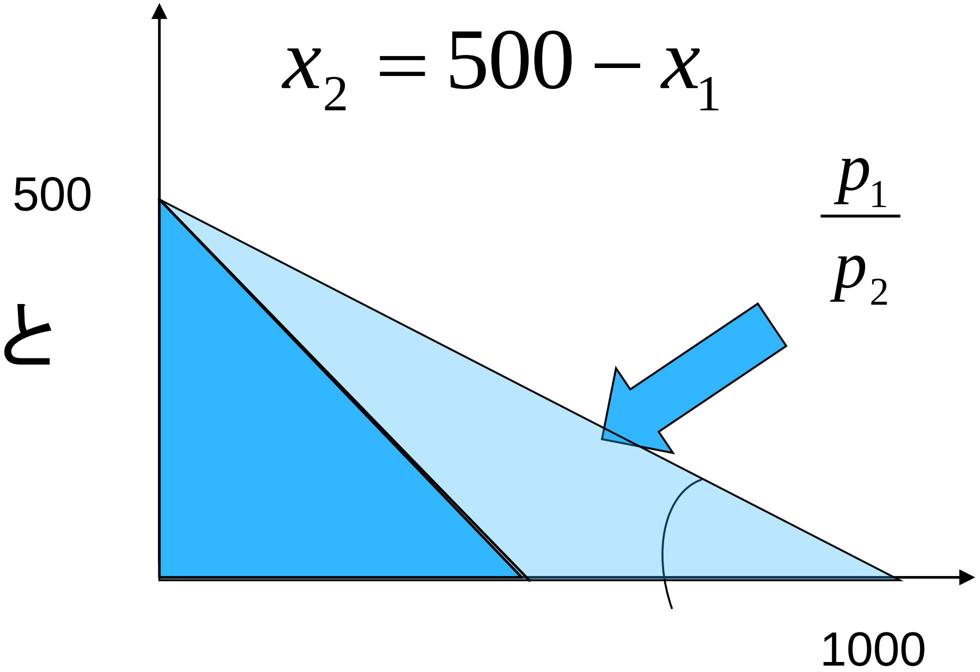
財2の価格が上昇するケース

財1を豚肉，財2を牛肉とする.

- 予算制約式は，予算M＝2000,
- p_1 =4円/g, p_2 =4 円/g

$$2000 \geq 4x_1 + 4x_2$$

$$2000 = 4x_1 + 4x_2$$

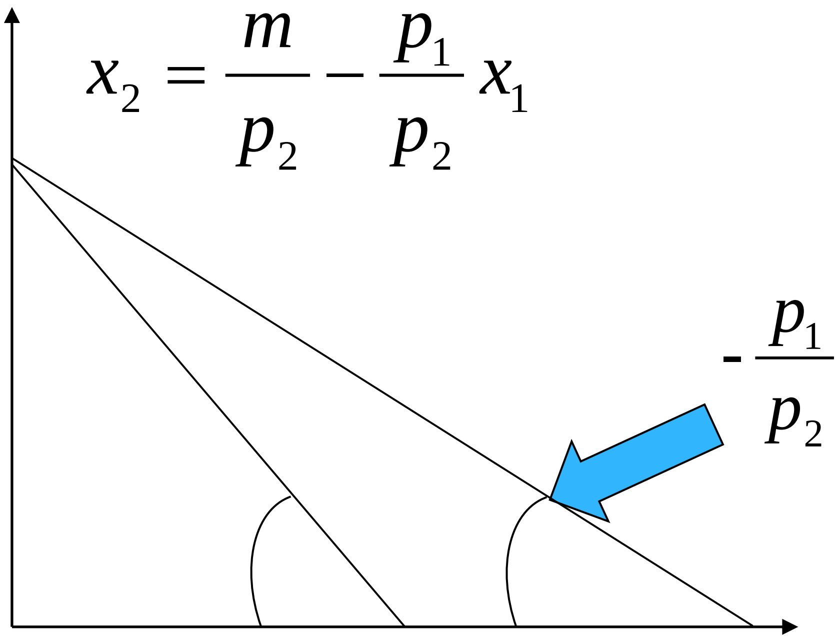


- 財2の価格が2倍になると

予算集合は半分になる

予算制約線と相対価格

- 予算制約集合は，予算の大きさmと，財1と財2の
- 相対価格 $\dfrac{p_1}{p_2}$ によりきまる．



予算制約を満たし，効用を最大にする点をRとする

- 選好の単調性より，効用を最大化する点Rは<u>予算制約線上の点</u>であるはずである．
- 予算制約をみたし予算制約線の上にない点Sであれば，<u>もっとお金を使うことで効用を高めることができる</u>
- R点は $m = p_1 x_1 + p_2 x_2$ をみたす

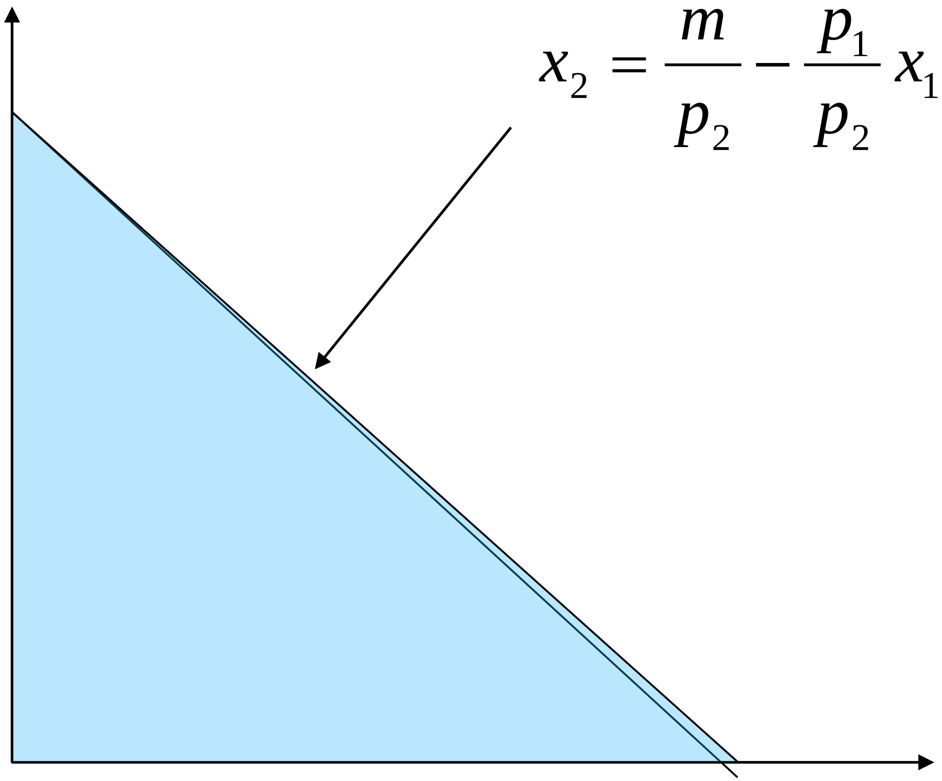
予算制約下の効用最大化

- 予算制約の下で最も効用を高くする点を選ぶ

$$\max_{x_1, x_2} \quad U(x_1, x_2)$$

Subject to

$$m = p_1 x_1 + p_2 x_2$$



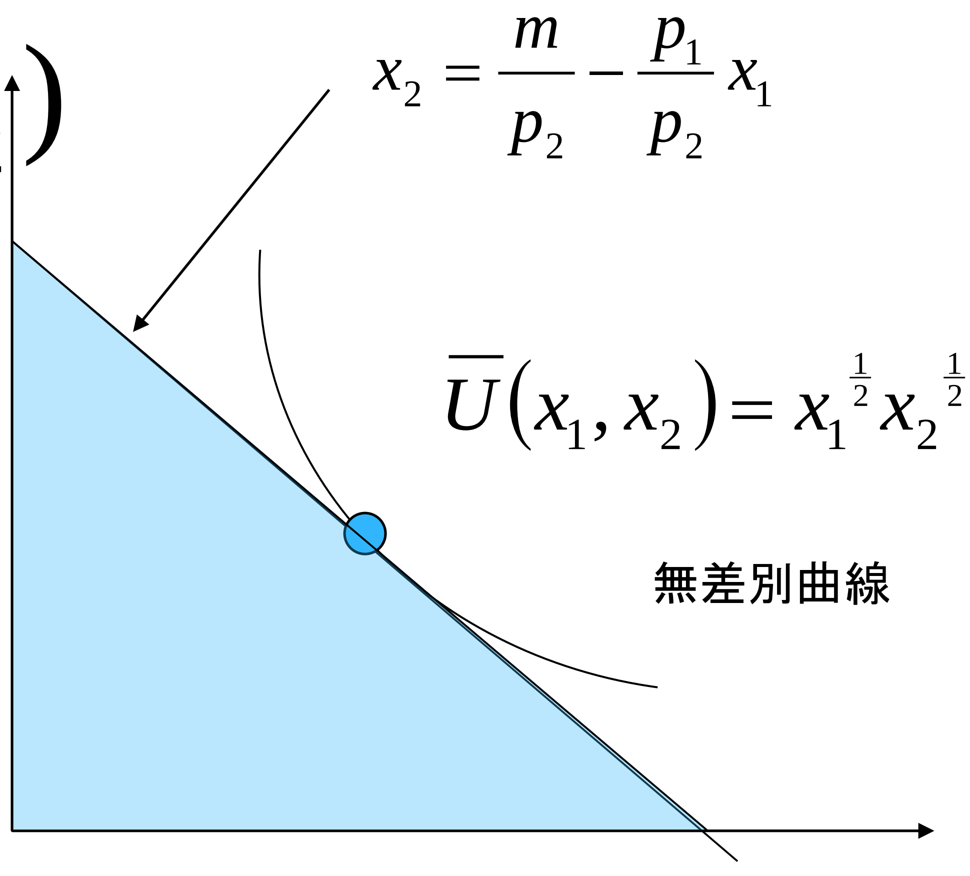
コブダグラス効用関数の場合：予算制約下で効用を最大にする点は唯1つ

- 予算制約の下で最も効用を高くする点を選ぶ

$$\max_{x_1, x_2} U(x_1, x_2)$$

Subject to

$$m \geq p_1 x_1 + p_2 x_2$$



最大元は一つに定まるとは限らない

- 選好が強凹性ならば，無差別曲線は原点に向かって凸となり，最大元はただ一つに決まる
- 弱凹性の場合は，最大元は無限にあるか，端点に決まる

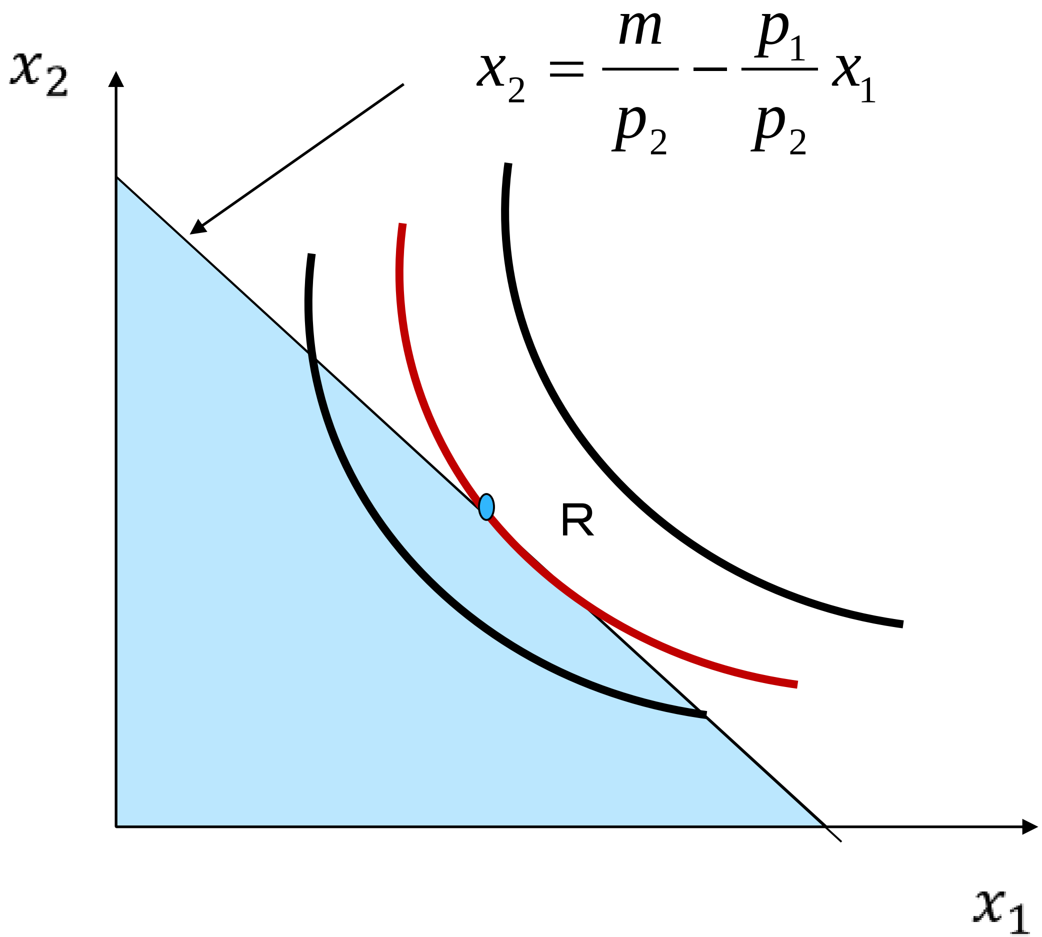
予算制約下で効用を最大にする点が1つに決まる例

- 予算制約の下で最も効用を高くする点（元）を選ぶ

$$\max_{x_1, x_2} \quad U(x_1, x_2)$$

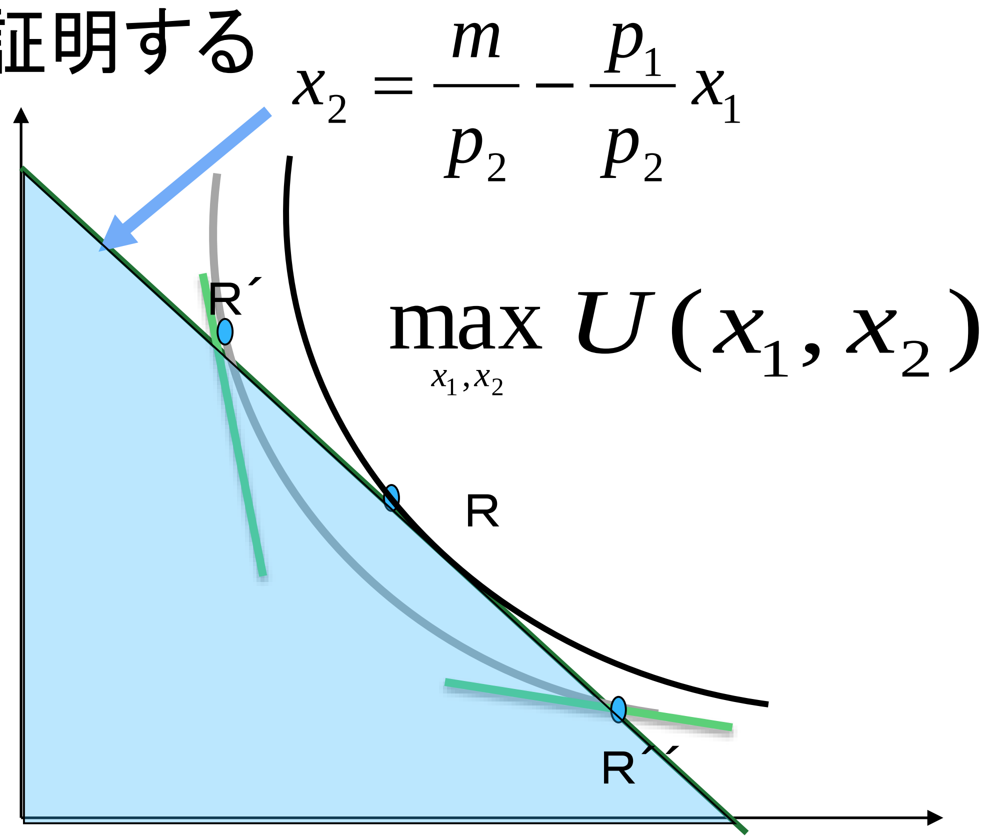
- Subject to

$$m \geq p_1 x_1 + p_2 x_2$$



予算制約下で
効用を最大にする点がRに決まる証明

- 予算制約の下で最も効用を高くする点（元）Rが一つに決まることを証明する



効用を最大にする点Rの特徴

- その点Rでは，
- 限界代替率（財1と財2の私的な交換比率）が，財の市場における相対価格（市場における交換比率）に等しくなっている
- R´点では，財1が少ないので，自分にとっては財1が希少だが，市場ではいつも，財1と2の相対価格で交換できる⇒財2を多くあきらめて財1を増やせる
- R´´点では，財1が十分にあるので，自分にとって財2が希少⇒財1を増やすために財2をあまりあきらめられない，むしろ財1を減らしたほうが効用が高まる

限界代替率を定義する理由

- これから限界代替率を定義する理由は，消費集合から，もっとも良い消費点を選ぶために必要であるから
- 次のスライド以降の説明でΔとあれば，追加的な増加または追加的な減少を示している

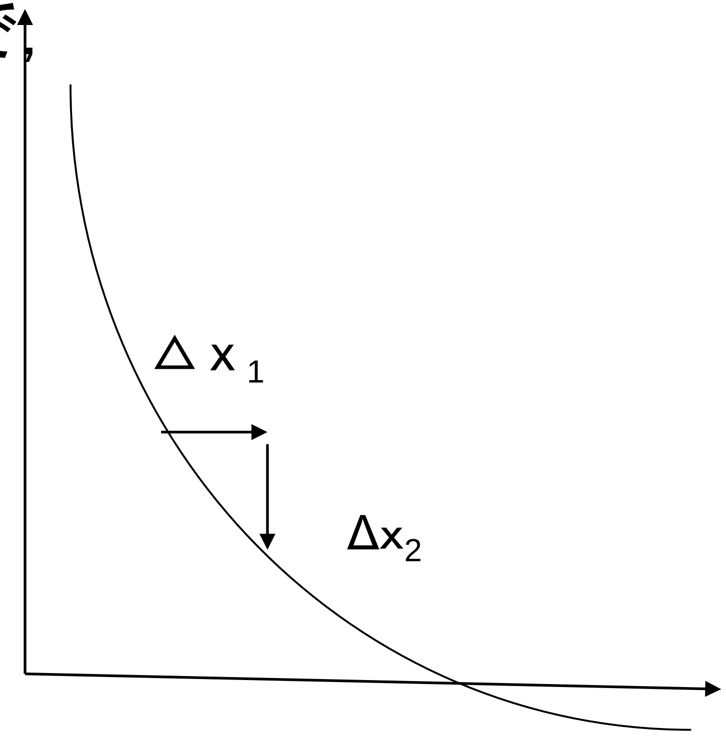
限界代替率

- 限界代替率とは，代替的な財の消費点（元）について，効用を一定に保ったまま，1財を1単位追加するために，あきらめることができる2財の量をいう.
- 効用を一定に保ったままなので，

$$\Delta u = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}\Delta x_2$$

- においてΔu=0 とおいて，
- 限界代替率は，

$$-\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{\dfrac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}}$$

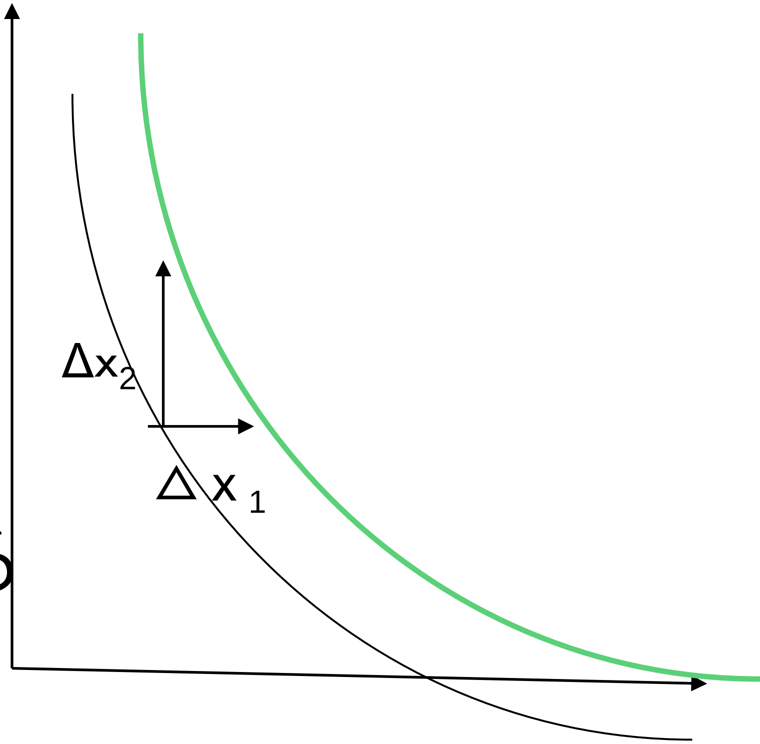


限界代替率の理解の準備：限界効用

- 限界代替率とは，代替的な財の消費点（元）について，効用を一定に保ったまま，1財を一単位追加するために，あきらめることができる2財の量をいう．
- 2財の場合の限界効用は，

$$\Delta u = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}\Delta x_2$$

- となり，1財か2財を追加的に増やすと，少し上の効用を示す無差別曲線にシフトする



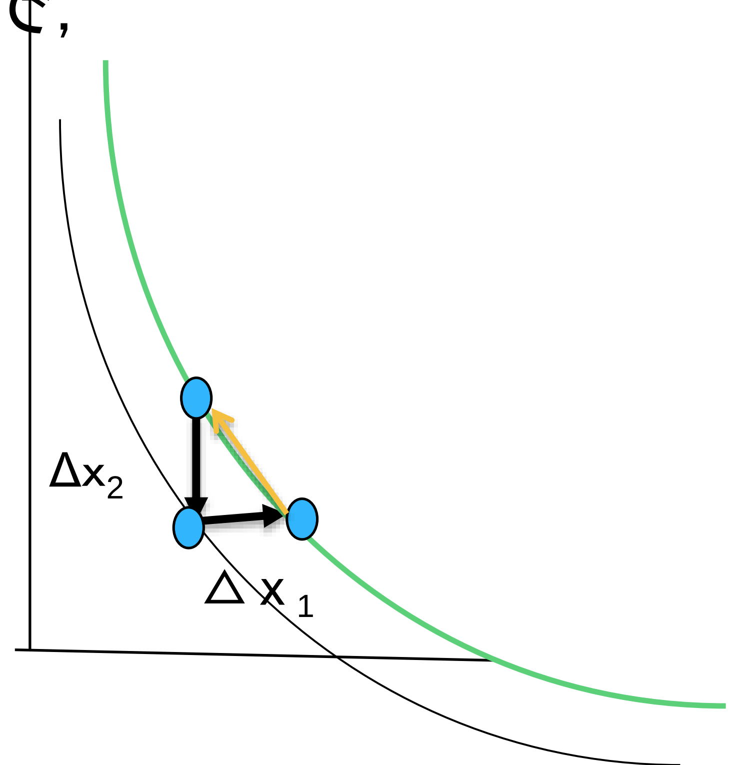
限界代替率

- 限界代替率とは，代替的な財の消費点（元）について，効用を一定に保ったまま，1財を1単位追加するために，あきらめることができる2財の量をいう．
- 効用を一定に保ったままなので，

$$\Delta u = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}\Delta x_2$$

- においてΔu=0 とおいて，
- 限界代替率は，

$$-\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{\dfrac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}}$$



予算制約下の効用最大化の手順

1. 市場の相対価格を求める
2. 効用関数から限界代替率の一般形を求める
3. 限界代替率＝相対価格として効用を最大にするときのx_1とx_2の比を求める.
4. 予算制約式に3で求めた関係式を代入する

限界代替率の特徴

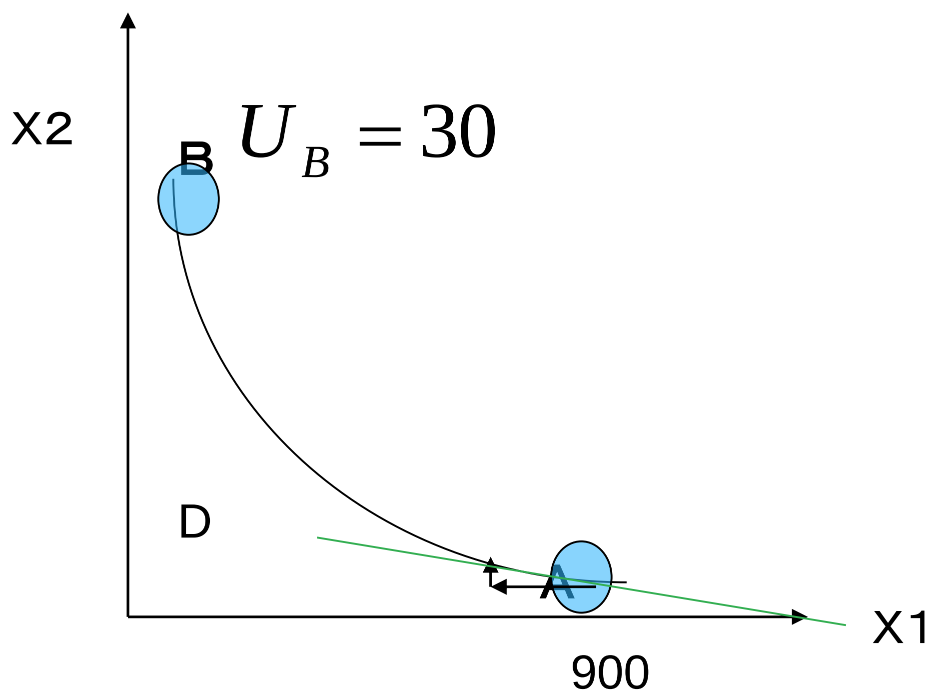
- 絶対値であらわされる
- 無差別曲線上のある点の傾きとなる
- 限界代替率の大きさは，消費点に依存する
- 財1が少ないときは大きい
- 財1が十分に大きいときは小さい
- 同じ選好を表す効用関数ならば，同じ限界代替率となる

点A(900, 1)の限界代替率(MRS)を求めよう

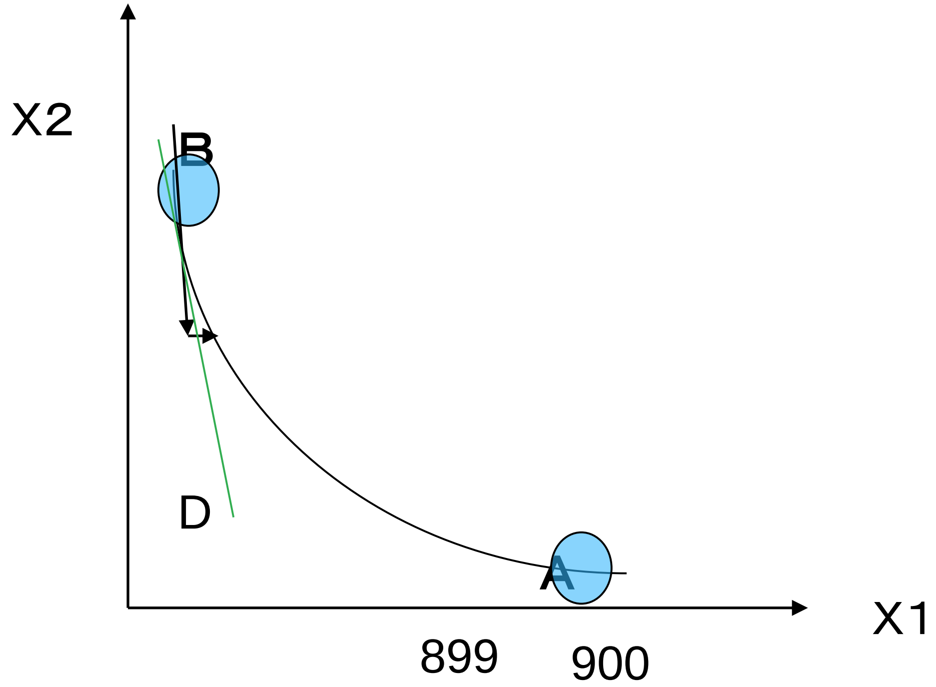
$$-\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{\dfrac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{1\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}} \qquad \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{1\sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_2}}$$

これより, $MRS_A = \frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{900}$



B(1, 900）における限界代替率を求めよ



問題4-1

- 効用関数 $U(x_1, x_2) = x_1^{0.5} x_2^{0.5}$ とする.
- 予算は，4000円，財1（ようかん）の価格は4円/g，財2（チョコ）の価格は4円/g

4－1．予算制約線を求め,効用を最大にする点を求めよ.

手順1．（財1の財2に対する）限界代替率を求めよ.

手順2　点Rでは，限界代替率が，相対価格に等しいことを用いよ.

問題4－2

- 効用関数 $U(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ とする.
- 予算は，m円，財1（ようかん）の価格はp_1円/g，財2（チョコ）の価格はp_2円/g

4－2．予算制約線を求め,効用を最大にする点を求めよ.

4-3. コブダグラス型効用関数において，財1への需要と財2への需要を，p1，p2，mの関数として，（効用最大化すればよい）その特徴を述べてください.

予算制約下で効用を最大にする点が1つに決まるが，端点となる例

- 予算制約の下で最も効用を高くする点（元）Rを選ぶ

$$\max_{x_1, x_2} \; U = x_1 + x_2$$

- Subject to

$$m = 2x_1 + x_2$$