Sprawozdanie - zadanie 4

Krzysztof Kulewski, 238149, grupa 2, 14.01.2018

Opis badania

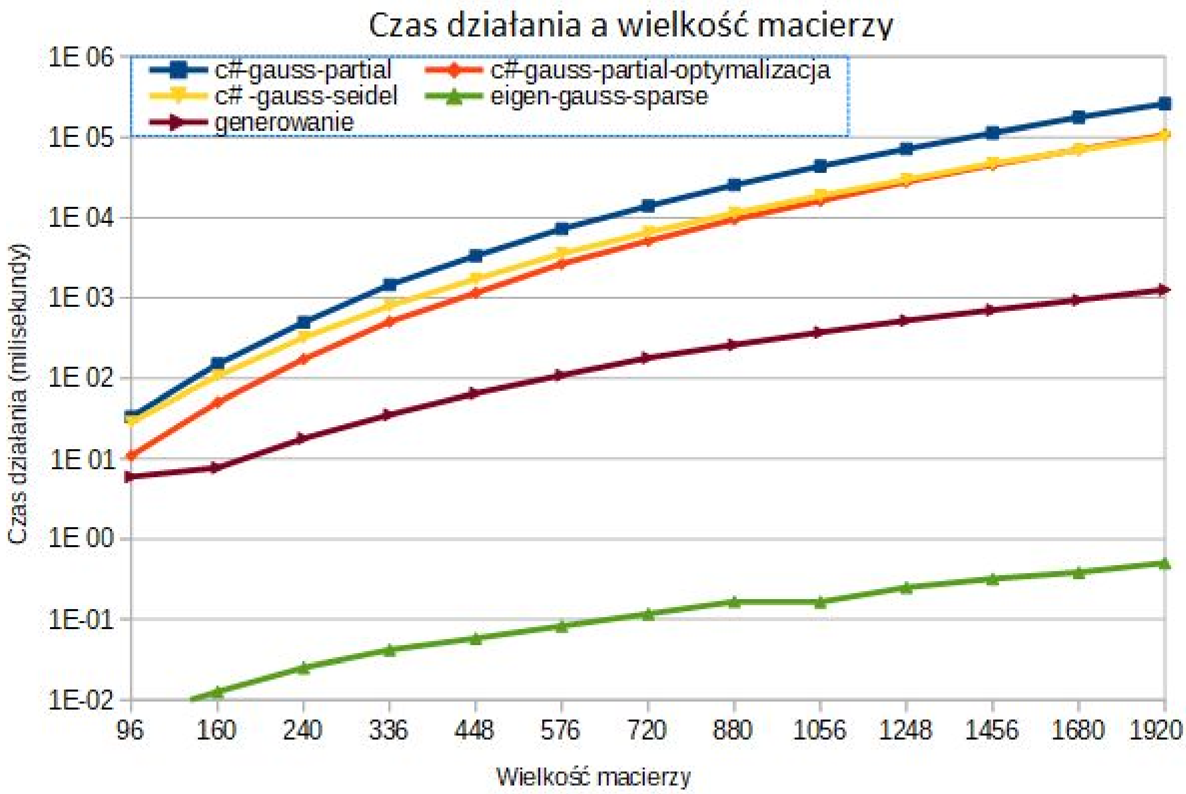
Badanie polegało sukcesywnym zwiększaniu rozmiaru macierzy i pomiarze czasu rozwiązywania danego układu równań za pomocą zaimplementowanych metod (C#):

- Gaussa z częściowym wyborem,
- Gaussa z częściowym wyborem z optymalizacją dla macierzy rzadkich,
- Gaussa-Seidela (iteracyjna),
- Gaussa SparseLU z biblioteki Eigen3,
- czasu generowania samej macierzy.

Następnie, na podstawie uzyskanych danych i znajomości charakteru macierzy opisującej układ, wyznaczono funkcje aproksymujące dla każdej z metod, stosując aproksymację dyskretną średniokwadratową.
Funkcje te zestawiono na wykresach, by zwizualizować ich dokładność.

Ostatnim etapem badania było określenie oczekiwanego czasu rozwiązywania układu o wielkości 100 000 równań (ekstrapolacja) za pomocą otrzymanych funkcji aproksymujących, obliczenie powyższego układu najszybszą z metod i analiza uzyskanych wyników.

Pomiar czasu działania metod



Metoda iteracyjna Gaussa-Seidela liczyła aż do osiągnięcia dokładności 1E-10.
Jak widać na wykresie, najszybszą metodą jest Gauss SparseLU z biblioteki Eigen3.

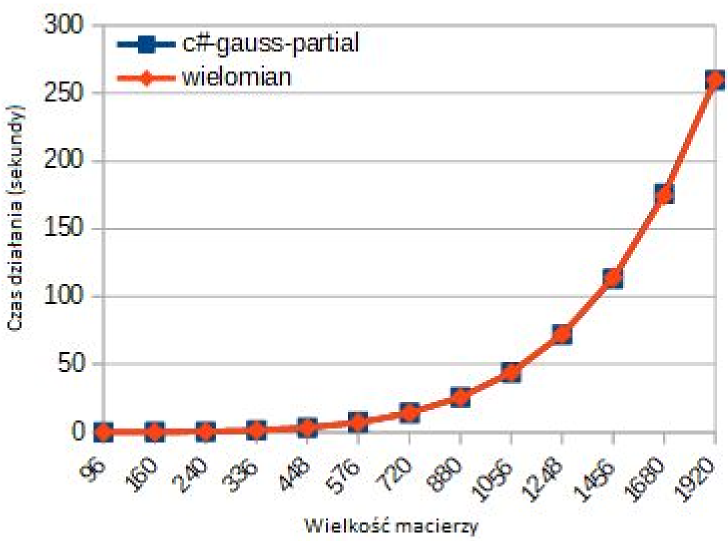
Wielomiany aproksymacyjne

Dla każdej z metod, wyznaczona została funkcja aproksymująca w formie wielomianu aproksymacyjnego, o stopniu określonym w treści zadania. Tabela prezentuje otrzymane wyniki.

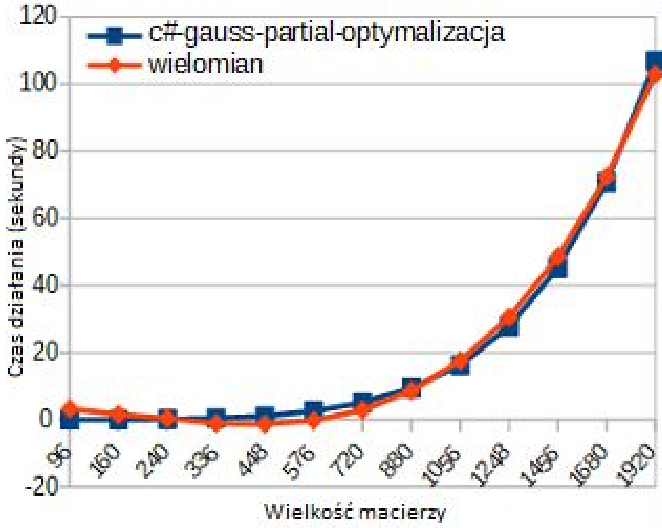
Metoda	**Wielomian aproksymujący**
Gauss z częściowym wyborem	$115.20370083 - 0.93438773\, \boldsymbol{x} + 0.00219429\, \boldsymbol{x}^2 + 0.00003584\, \boldsymbol{x}^3$
Gauss z częściowym wyborem (z optymalizacją)	$6561.12932116 - 38.21266881\, \boldsymbol{x} + 0.0460578\, \boldsymbol{x}^2$
Gauss-Seidel	$4636.79198954 - 28.30792686\, \boldsymbol{x} + 0.04032764\, \boldsymbol{x}^2$
Gauss SparseLU (Eigen)	$-0.05092337 + 0.00025837\, \boldsymbol{x}$

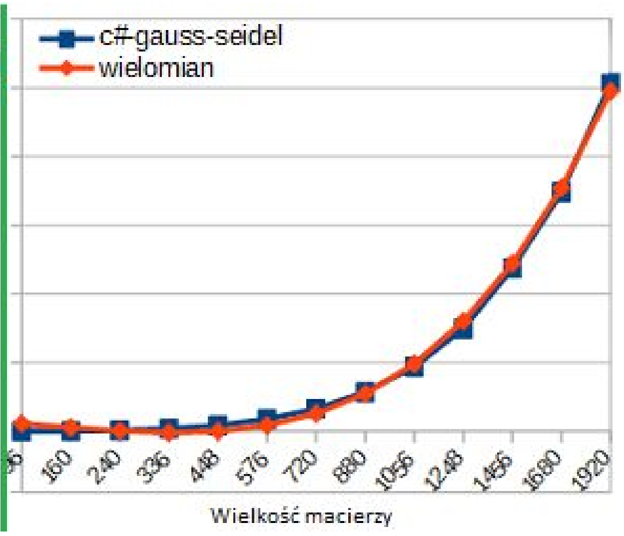
** By poprawić czytelność, zawarto 8 cyfr znaczących po przecinku.*

Metoda i jej funkcja aproksymująca - zestawienie

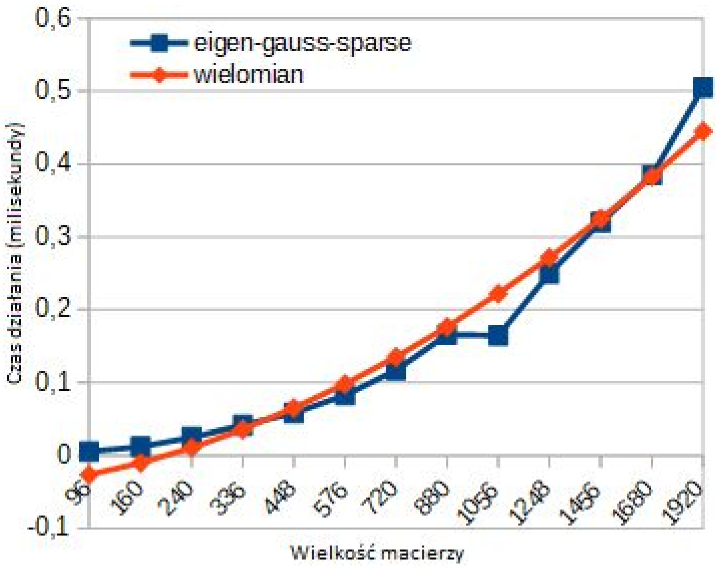


W przypadku metody Gaussa z wyborem częściowym, uzyskana funkcja aproksymacyjna świetnie odwzorowuje wynik metody w każdym węźle. Stopień wielomianu został więc dobrany prawidłowo.





Dla metody Gaussa z dodatkową optymalizacją i metody Gaussa-Seidela, funkcje aproksymujące odwzorowują metody relatywnie dobrze.
Wyniki uzyskane dla małych macierzy posiadają odchylenia względem metod, natomiast wraz ze wzrostem rozmiaru macierzy, odwzorowanie jest coraz lepsze.



W przypadku metody Gaussa SparseLU z biblioteki Eigen3, uzyskana funkcja aproksymująca nie odwzorowuje swojego pierwowzoru w zadowalającym stopniu.

Rozbieżność jest zapewne spowodowana tym, że metoda SparseLU osiąga podobny czas obliczeń w węźle 880 i 1056, przypominając na tym odcinku funkcję stałą.
Zachowanie to może wynikać z zastosowania dodatkowych optymalizacji, gdy rozmiar macierzy przekracza 1000, bądź być specyficzne dla samej konfiguracji sprzętowej, na której przeprowadzono badania, gdyż występowało w każdej z kilku serii pomiarów.

Przy stosunkowo małej ilości próbek, opisane zjawisko ma znaczący wpływ na uzyskaną funkcję, pogarszając uzyskane odwzorowanie.

Ekstrapolacja i obliczenie najszybszą metodą

Ostatnim etapem badania było oszacowanie czasu obliczeń dla układu równań, który jest znacznie większy od największej badanej próbki, tj. ekstrapolacja.

Poniższa tabelka obrazuje czas, który wyliczono za pomocą funkcji aproksymujących dla każdej z metod przy układzie o wielkości 101 248 równań.

Metoda	Czas
Gauss z częściowym wyborem	9960 godzin
Gauss z częściowym wyborem i optymalizacją dla macierzy rzadkich	127 godzin
Gauss-Seidel	111 godzin
Gauss SparseLU (Eigen)	26.1082 milisekund

Układ o takiej wielkości został więc obliczony za pomocą metody SparseLU i zestawiony z oszacowanym czasem poniżej.

Czas oszacowany funkcją aproksymującą	Rzeczywisty czas
26.1082 milisekund	110.825 milisekund

Uzyskany czas jest ponad czterokrotnie większy, niż oszacowany.

Pokazuje to, że uzyskany wielomian aproksymacyjny nie jest idealnym odwzorowaniem metody SparseLU i jednocześnie potwierdza przypuszczenia, iż zjawisko zaobserwowane na wykresie-zestawieniu miało znaczący wpływ na charakter uzyskanej funkcji.

Rozwiązaniem tego problemu mogłoby być zwiększenie ilości próbek, bądź zastosowanie funkcji wagowej podczas liczenia funkcji aproksymujących, a następnie przypisanie węzłowi niskiej wagi, by zniwelować jego efekt.

Źródła

- wykład “Aproksymacja” (dr inż. Łukasz Kuszner, dr inż. Piotr Borowiecki)
- https://eti.pg.edu.pl/documents/176593/26763380/Wykl_AlgorOblicz_3.pdf

Konfiguracja sprzętowa użyta do pomiarów:
Intel i7-6700K 4.00 GHz, 16 GB RAM DDR4 3000 MHz, Windows 10 64-bit