



Politechnika Wrocławska

Wydział Matematyki

Kierunek: matematyka stosowana

Specjalność: *nie dotyczy*

Praca dyplomowa — inżynierska

**TESTOWANIE HIPOTEZ I ESTYMACJA
W SYTUACJI POPULACJI SKOŃCZONEGO
ROZMIARU**

Kinga Kurowska

Słowa kluczowe:
testowanie hipotez
przedziały niepewności
zastosowanie w medycynie

Krótkie streszczenie:

Tu znajdzie się krótki streszczenie mojej pracy... Tu znajdzie się krótki streszczenie mojej pracy... Tu znajdzie się krótki streszczenie mojej pracy... Tu znajdzie się krótki streszczenie mojej pracy... Tu znajdzie się krótki streszczenie mojej pracy... Tu znajdzie się krótki streszczenie mojej pracy... Tu znajdzie się krótki streszczenie mojej pracy...

Opiekun pracy	dr inż. Andrzej Giniewicz		
dyplomowej	<i>Stopień naukowy, imię i nazwisko</i>	<i>Ocena</i>	<i>Podpis</i>

Do celów archiwalnych pracę dyplomową zakwalifikowano do: *

- a) kategorii A (akta wieczyste),
- b) kategorii BE 50 (po 50 latach podlegające ekspertyzie).

* *niepotrzebne skreślić*

pieczęć wydziałowa

Wrocław, rok 2017



Politechnika Wrocławska

Faculty of Pure and Applied Mathematics

Field of study: Applied Mathematics

Specialty: *not applicable*

Engineering Thesis

**HYPOTHESIS TESTING AND ESTIMATION
IN THE CASE OF FINITE POPULATION SIZE**

Kinga Kurowska

keywords:

hypothesis testing

tolerance and confidence regions

applications to biology and medical sciences

Short summary:

Here will be short summuary of my bachelor thesis... Here will be short summuary of my bachelor thesis... Here will be short summuary of my bachelor thesis... Here will be short summuary of my bachelor thesis... Here will be short summuary of my bachelor thesis...

Supervisor	dr inż. Andrzej Giniewicz		
	<i>Title, degree, name and surname</i>	<i>Grade</i>	<i>Signature</i>

*For the purposes of archival thesis qualified to: **

a) Category A (perpetual files)

b) Category BE 50 (subject to expertise after 50 years)

** Delete as appropriate*

stamp of the faculty

Wrocław, 2017

Spis treści

Wstęp	5
Rozdział 1. Schemat pobierania obserwacji	7
1.1. Nieskończona populacja	7
1.2. Skończona populacja	7
1.3. Porównanie rozkładów	8
Rozdział 2. Przedstawienie testów	11
2.1. Sformułowanie problemu	11
2.2. Testy ze skończoną poprawką	11
2.2.1. Test Z	12
2.2.2. Test E	12
2.2.3. Moc testu	13
2.3. Test bez skończonej poprawki	13
Rozdział 3. Analiza testów	15
3.1. Porównanie testów ze skończoną poprawką	15
3.2. Porównanie testu bez skończonej poprawki z testem Z	16
Spis rysunków	19
Bibliografia	21

Wstęp

Początki teorii rachunku prawdopodobieństwa i statystyki sięgają XVI wieku. Na początku były to analizy rzutu kostką, czy prawdopodobieństwa błędów pomiarowych. Już w XVII Blaise Pascal sformułował i dowiódł własności trójkąta arytmetycznego oraz użył pojęcia kombinacji. Na początku XVIII wieku opublikowane zostały prace Jacoba Bernoulliego, w których zawarł wiele swoich tez na temat prawdopodobieństwa. Przez te kilka wieków teoria rachunku prawdopodobieństwa i statystyki znacząco się wzbogaciła i rozwinęła. Rozpoczęto rozważania na temat estymacji i testowania hipotez, które w naszych czasach, są zasadniczą domeną statystyki.

W przypadku dyskretnym najczęściej testowane są proporcje populacji. Chcemy się przekonać czy dana próbka ma jakąś konkretną proporcję, albo czy dwie próbki mają tę samą proporcję. Znana jest powszechnie teoria dotycząca testowania hipotez, gdy populacja jest nieskończona, a raczej na tyle duża, że możemy ją w przybliżeniu uznać za nieskończoną. Wtedy schemat próbkowania jest opisany przez rozkład Bernoulliego. Jednak przypadek nieskończonej populacji nie wyczerpuje tematu testowania proporcji. Gdy populacja jest bardzo mała albo, gdy próbka jest niewiele mniejsza od całej populacji, schemat próbkowania opiera się o rozkład hipergeometryczny.

Myślę, że warto zająć się teorią testowania hipotez dla skończonej populacji. W określonych przypadkach rozkład hipergeometryczny daje dużo dokładniejszą informację o badanym przypadku niż przybliżenie rozkładem dwumianowym. Ponadto zastosowanie tego typu testów ma duże znaczenie w medycynie, gdzie często rozważane populacje mają na tyle wyspecjalizowane cechy, że są uważane za małe. W kolejnym rozdziale znajduje się opis schematu pobierania danych w przypadku nieskończonej i skończonej populacji. Następnie są przedstawione testy, bez skończonej poprawki oraz z jej uwzględnieniem. Rozdział 3 zawiera porównanie testów w oparciu o prawdopodobieństwo błędu I rodzaju oraz moc testu. *Uzupełnić opis jak coś jeszcze dopiszę!*

Rozdział 1

Schemat pobierania obserwacji

W mojej pracy zajmuję się testami, które sprawdzają czy dwie populacje mają te same proporcje jakiejś badanej cechy. Zatem, aby wykonać taki test potrzebne są próbki z obu populacji. Wartość obserwacji to ilość osobników z badaną cechą w próbce, toteż proporcja jest liczona jako stosunek wartości do wielkości próbki. Zakładamy również, że populacje są od siebie niezależne, tym samym próbki pochodzące z tych populacji są także nie zależą od siebie.

1.1. Nieskończona populacja

Gdy populacja jest bardzo duża, możemy traktować ją jako nieskończoną. Wobec tego losowanie kolejnych elementów próbki jest niezależne, czyli jest to losowanie ze zwracaniem. Zakładamy, że pobierane obserwacje pochodzą z rozkładu Bernoullego $\mathcal{B}(n, p)$, gdzie n to rozmiar próby z nieskończonej populacji, a p to proporcja zdarzeń sprzyjających w populacji. Funkcja prawdopodobieństwa zmiennej losowej X z rozkładu dwumianowego jest równa

$$b(k; n, p) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n. \quad (1.1)$$

1.2. Skończona populacja

Kiedy populację rozważamy jako skończoną kolejne elementy próbki są losowane bez zwracania. Oznacza to, że prawdopodobieństwo sukcesu zmienia się w trakcie pobierania elementów obserwacji w zależności od poprzednich. W takiej sytuacji próbka pochodzi z rozkładu hipergeometrycznego $\mathcal{H}(n, M, N)$. Przy czym n jest rozmiarem próbki, M ilością osobników w populacji z daną cechą, a N rozmiarem populacji. Zmienna losowa X z rozkładu hipergeometrycznego określa ma funkcja prawdopodobieństwa określona wzorem

$$h(k; n, M, N) = P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad L \leq k \leq U, \quad (1.2)$$

gdzie $L = \max\{0, M - N + n\}$ i $U = \min\{n, M\}$.

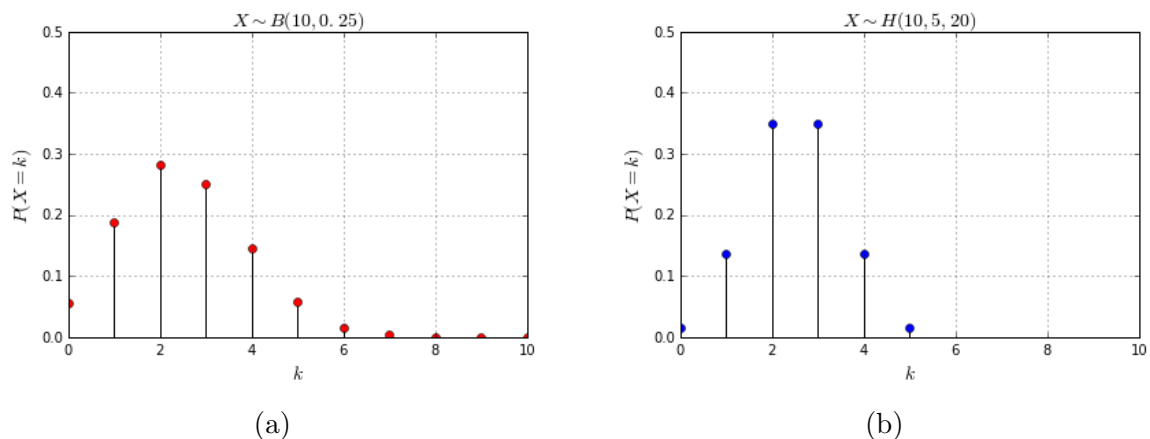
Zauważmy, że wzór funkcji h jest dość intuicyjny. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa określa szansę zajścia zdarzenia A jako iloraz liczby zdarzeń elementarnych w A przez liczbę zdarzeń elementarnych w Ω , czyli $P(A) = |A|/|\Omega|$. W tym przypadku zdarzeniem A jest to, że w próbce będzie k osobników z daną cechą. Zatem ilość zdarzeń elementarnych w A to kombinacje. Na jak wiele różnych sposobów możemy wybrać k osobników z M wszystkich posiadających daną cechę $\binom{M}{k}$ razy możliwość wyborów

pozostałych osobników z reszty populacji $\binom{N-M}{n-k}$. Natomiast zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych w Ω to po prostu wybór losowej próbki n osobników z N -elementowej populacji $\binom{N}{n}$. Również ograniczenia nałożone na k są naturalne. Dolne ograniczenie L jest równe maksimum z 0 i $M - N + n$. Zatem będzie ono niezerowe, gdy $M - N + n > 0$. Przekształcając nierówność, otrzymujemy $n > N - M$. Taka postać jasno pokazuje, że jest to przypadek, w którym wielkość próbki przekracza ilość osobników w populacji bez badanej cechy. W konsekwencji czego mamy pewność, że w próbce będzie przynajmniej tyle osobników z daną cechą, ile wynosi różnica $n - (N - M)$. Ograniczenie górne jest mniej skomplikowane. Jest ono równe minimum z n i M , co jest oczywiste, ponieważ nie może być więcej osób w próbce z daną cechą niż w całej populacji. Cała ta analiza pokazuje, że rozkład hipergeometryczny jest ściśle związany z rozmiarem populacji.

1.3. Porównanie rozkładów

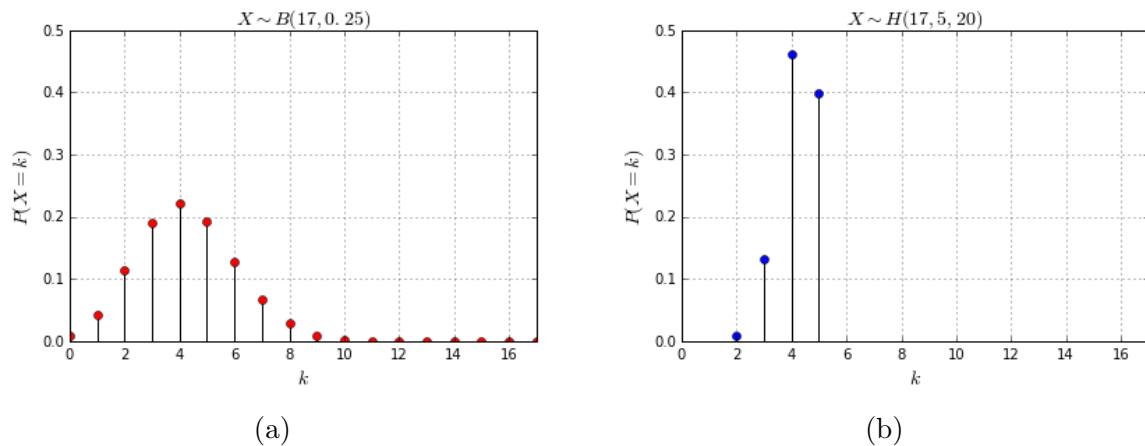
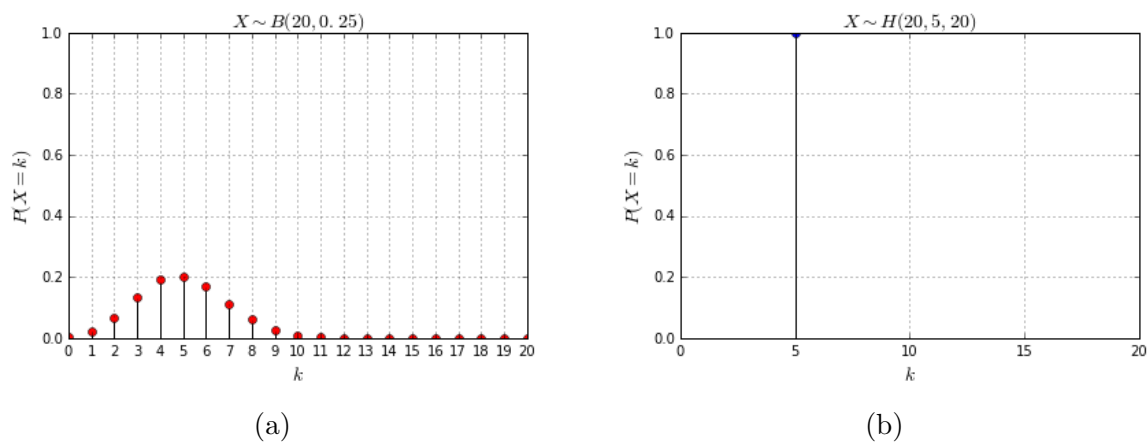
Rozkład hipergeometryczny daje bardzo podobne wyniki do rozkładu Bernoullego, gdy populacja jest duża, a próbka stosunkowo mała. Jednakże w przeciwnym wypadku widać znaczne różnice między tymi rozkładami. W szczególności obserwujemy, że zmienna losowa z rozkładu dwumianowego może osiągać wartości od 0 do n , ponieważ podczas brania próbki zakładamy losowanie ze zwracaniem. Natomiast w rozkładzie hipergeometrycznym kolejne losowania są od siebie zależne, prawdopodobieństwo wylosowania zmienia się w zależności od tego, co już wcześniej znalazło się w próbce.

Rozważmy to na medycznym przykładzie. Załóżmy, że jest na świecie 20 osób, które są chore na jakąś bardzo rzadką chorobę oraz że 25% z nich ma szansę na wyzdrowienie. Chcemy dowiedzieć się, ile osób spośród przebadanych może wyzdrowieć. Weźmy 3 różne próbki o wielkościach n równych odpowiednio 10, 17, 20. Możemy tę sytuację opisać za pomocą rozkładem Bernoullego, wtedy badana zmienna losowa będzie z rozkładu $\mathcal{B}(n, 0.25)$. Drugim sposobem jest rozkład hipergeometryczny, wtedy zmienna losowa jest z rozkładu $\mathcal{H}(n, 4, 20)$. Na rysunkach 1.1 – 1.3 jest zobrazowana funkcja prawdopodobieństwa dla wymienionych przypadków.



Rysunek 1.1: Funkcja prawdopodobieństwa dla $n = 10$

Im większa próbka tym widać większą różnicę między funkcjami obu rozkładów. Funkcja dla rozkładu hipergeometrycznego nie ma innych argumentów niż te, które są możliwe,

Rysunek 1.2: Funkcja prawdopodobieństwa dla $n = 17$ Rysunek 1.3: Funkcja prawdopodobieństwa dla $n = 20$

natomiast funkcja dla rozkładu dwumianowego jest liczona również dla nieprawdopodobnych argumentów, ponadto wtedy jej wartość jest niezerowa. Bardzo skrajny przypadek przedstawia rysunek 1.3, próbka równa się populacji, czyli tak naprawdę wiemy już wszystko. Wykres ?? idealnie obrazuje nam ten przypadek. Pewne jest to, że w 20 osobach będzie dokładnie 5, które mogą wyzdrowieć. Natomiast wykres ?? kompletnie nie pokazuje tego. Głównie ze względu na już wspomniane uwzględnianie nieprawdopodobnych argumentów, przez co prawdopodobieństwo rozkłada się na pozostałe przypadki. Warto również zaznaczyć, że im większa próbka, tym prawdopodobieństwo, że $X = 5$ dla rozkładu Bernoullego jest coraz mniejsze, ponieważ mamy więcej elementów w obserwacji. Tymczasem dla rozkładu hipergeometrycznego jest wręcz odwrotnie, to prawdopodobieństwo rośnie, aż w końcu osiąga wartość 1. Co jest dużo bardziej logiczne, bo im więcej przebadaliśmy osobników, tym więcej wiemy o próbce i jest bardziej prawdopodobne, że znajdzie się w niej aż 5 szczęśliwych pacjentów.

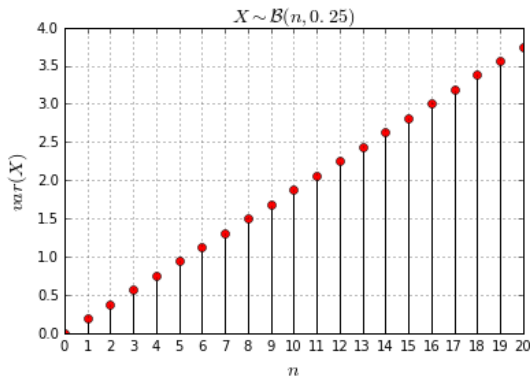
Spójrzmy jeszcze, jak wyglądają średnia i wariancja dla rozważanych rozkładów. Gdy $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

$$E(X) = np, \quad \text{Var}(X) = np(1 - p). \quad (1.3)$$

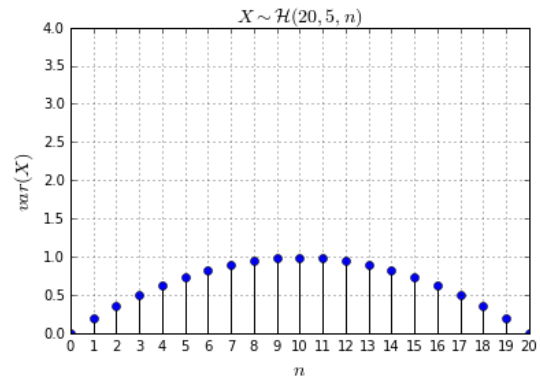
Podczas gdy $X \sim \mathcal{H}(n, M, N)$

$$E(X) = n \frac{M}{N}, \quad \text{Var}(X) = n \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}. \quad (1.4)$$

Parametr p rozkładu dwumianowego odpowiada ilorazowi parametrów M/N w rozkładzie hipergeometrycznym. Wobec tego średnie obu rozkładów są sobie równe, a wariancje różni dodatkowy składnik w rozkładzie hipergeometrycznym $(N-n)/(N-1)$. Przeanalizujemy jak ten czynnik wpływa na zróżnicowanie rozkładów. Rysunek 1.4 przedstawia wykresy wariancji dla rozważanego przykładu w zależności od wielkości obserwacji. W przypadku rozkładu dwumianowego wariancja stale rośnie wraz ze wzrostem próbki. Ostatecznie, gdy już przebadamy wszystkich chorych pacjentów, ma ona największą wartość. Myśląc zdroworozsądkowo, nie jest to poprawny wynik. Oczekujemy raczej, że gdy przebadamy już wszystkich, wariancja osiągnie wartość 0, ponieważ nie ma wtedy losowości. Taki rezultat daje nam wykres ???. Funkcja na początku rośnie, ale gdy wielkość próbki przekroczy połowę rozmiaru populacji, wariancja zaczyna maleć aż do zera. Odzwierciedla to fakt, że gdy coraz więcej wiemy o populacji, losowość uzyskanych wyników maleje.



(a)



(b)

Rysunek 1.4: Wariancja w zależności od rozmiaru próbki

Rozdział 2

Przedstawienie testów

W niniejszym rozdziale są przedstawione trzy testy, jeden oparty na rozkładzie dwumianowym i dwa wykorzystujące rozkład hipergeometryczny. Jest także omówiony sposób liczenia dla nich mocy testu.

2.1. Sformułowanie problemu

Założmy, że X_1 i X_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi. Zaobserwowane wartości X_1 i X_2 oznaczmy odpowiednio k_1 i k_2 oraz proporcje w obserwacjach p_1 i p_2 . Będę zajmować się testowaniem hipotez

$$H_0: p_1 = p_2 \quad \text{przeciwko} \quad H_1: p_1 \neq p_2, \quad (2.1)$$

w oparciu o wartości obserwacji i znane parametry populacji. Rozważmy unormowaną statystykę

$$Z_{X_1, X_2} = \frac{X_1/n_1 - X_2/n_2}{\sqrt{V_{X_1, X_2}}}, \quad (2.2)$$

gdzie V_{X_1, X_2} to estymator wariancji rozkładu łącznego zmiennej losowej $X_1/n_1 - X_2/n_2$ pod warunkiem prawdziwości H_0 . Jego wzór zależy od rozkładu, z którego pochodzą zmienne losowe X_1 i X_2 . Wartość statystyki Z_{X_1, X_2} oznaczmy jako Z_{k_1, k_2} . Jest ona wyliczana według powyższych wzorów, poprzez zamienienie X_1 i X_2 odpowiednio wartościami obserwacji k_1 i k_2 .

2.2. Testy ze skończoną poprawką

Jak już było wspomniane w sekcji 1.2, próbki w przypadku skończonej populacji pochodzą z rozkładu hipergeometrycznego. Zatem $X_1 \sim \mathcal{H}(n_1, M_1, N_1)$, $X_2 \sim \mathcal{H}(n_2, M_2, N_2)$ oraz proporcje są równe $p_1 = M_1/N_1$, $p_2 = M_2/N_2$. Znane parametry to rozmiary próbek n_1 i n_2 oraz wielkości populacji N_1 i N_2 .

W celu wyprowadzenia wariancji rozkładu łącznego $X_1/n_1 - X_2/n_2$ pod warunkiem $p_1 = p_2$, zapiszmy łączną wariancję rozważanej zmiennej losowej, korzystając z własności wariancji oraz tego, że $Cov(X_1, X_2) = 0$ z niezależności X_1 i X_2

$$Var(X_1/n_1 - X_2/n_2) = Var(X_1/n_1) + Var(X_2/n_2) = Var(X_1)/n_1^2 + Var(X_2)/n_2^2. \quad (2.3)$$

Wiemy, że wariancje X_1 i X_2 są równe

$$Var(X_1) = n_1 p_1 (1 - p_1) (N_1 - n_1) / (N_1 - 1), \quad (2.4)$$

$$Var(X_2) = n_2 p_2 (1 - p_2) (N_2 - n_2) / (N_2 - 1). \quad (2.5)$$

Pamiętając, że zakładamy równość $p_1 = p_2$ zastąpmy oba parametry jednym równym p . Po podstawieniu otrzymujemy

$$\begin{aligned} V_{X_1, X_2} &= \frac{1}{n_1} p(1-p) \frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} + \frac{1}{n_2} p(1-p) \frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} = \\ &= p(1-p) \left(\frac{N_1 - n_1}{n_1(N_1 - 1)} + \frac{N_2 - n_2}{n_2(N_2 - 1)} \right), \end{aligned} \quad (2.6)$$

przy czym p to proporcja liczby osobników z daną cechą do całości populacji w rozkładzie łącznym. Zatem jest ona równa $p = (X_1 + X_2)/(n_1 + n_2)$. Ostatecznie otrzymujemy

$$V_{X_1, X_2} = \left(\frac{N_1 - n_1}{n_1(N_1 - 1)} + \frac{N_2 - n_2}{n_2(N_2 - 1)} \right) \left(\frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2} \right) \left(1 - \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2} \right). \quad (2.7)$$

2.2.1. Test Z

Test Z jest oparty na centralnym twierdzeniu granicznym, które mówi, że pod warunkiem prawdziwości H_0 rozważana statystyka Z_{X_1, X_2} jest w przybliżeniu z rozkładu standardowego normalnego $\mathcal{N}(0, 1)$. Wtedy p -wartość wyraża się wzorem

$$P(|Z_{X_1, X_2}| \geq |Z_{k_1, k_2}| | H_0) = 2(1 - \Phi(|Z_{k_1, k_2}|)), \quad (2.8)$$

gdzie Φ oznacza dystrybuantę rozkładu $N(0, 1)$. Test Z odrzuca hipotezę zerową, gdy p -wartość jest mniejsza od poziomu istotności α .

2.2.2. Test E

Test E opiera się o rzeczywistą p -wartość, która, według artykułu K. Krishnamoorthy i J. Thomson z 2002 roku, jest równa [1]

$$\begin{aligned} P(|Z_{X_1, X_2}| \geq |Z_{k_1, k_2}| | H_0) &= E_{X_1, X_2}(\mathbf{1}(|Z_{X_1, X_2}| \geq |Z_{k_1, k_2}|) | H_0) = \\ &= \sum_{x_1=L_1}^{U_1} \sum_{x_2=L_2}^{U_2} h(x_1; n_1, N_1 p, N_1) h(x_2; n_2, N_2 p, N_2) \mathbf{1}(|Z_{X_1, X_2}| \geq |Z_{k_1, k_2}|), \end{aligned} \quad (2.9)$$

gdzie E_{X_1, X_2} to wartość oczekiwana łącznego rozkładu (X_1, X_2) , a p jest nieznaną wspólną proporcją pod warunkiem H_0 . Nie jest możliwe policzenie p -wartości wprost ze wzoru (2.9), ponieważ nie znamy parametru proporcji p . Krishnamoorthy i Thomson (2002) zaproponowali estymator p -wartości [1]

$$\begin{aligned} P(|Z_{X_1, X_2}| \geq |Z_{k_1, k_2}| | H_0) &= \\ &= \sum_{x_1=L_{x_1}}^{U_{x_1}} \sum_{x_2=L_{x_2}}^{U_{x_2}} h(x_1; n_1, \hat{M}_1, N_1) h(x_2; n_2, \hat{M}_2, N_2) \mathbf{1}(|Z_{X_1, X_2}| \geq |Z_{k_1, k_2}|), \end{aligned} \quad (2.10)$$

przy czym $\hat{p} = (k_1 + k_2)/(n_1 + n_2)$, $\hat{M}_i = [N_i \hat{p}]$ oraz $L_{x_i} = \max\{0, \hat{M}_i - N_i + n_i\}$, $U_{x_i} = \min\{n_i, \hat{M}_i\}$, $i = 1, 2$. Test odrzuca H_0 wtedy, gdy p -wartość wyliczona wg wzoru (2.10) jest mniejsza od poziomu istotności α .

2.2.3. Moc testu

Moc testu to prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej, gdy jest ona nieprawdziwa. Toteż jest ona wyznacznikiem dobrego testu. Większa wartość mocy oznacza lepszy test.

Moc obu testów można wyliczyć, korzystając z funkcji prawdopodobieństwa rozkładu hipergeometrycznego. Dla testu Z pod warunkiem hipotezy alternatywnej H_1 moc, zgodnie z rozważaniami Krishnamoorthy i Thomson (2002), jest równa [1]

$$\sum_{k_1=L_1}^{U_1} \sum_{k_2=L_2}^{U_2} h(k_1; n_1, M_1, N_1) h(k_2; n_2, M_2, N_2) \mathbb{1}(|Z_{k_1, k_2}| > z_{1-\alpha/2}), \quad (2.11)$$

gdzie $L_i = \max\{0, M_i - N_i + n_i\}$ i $U_i = \min\{n_i, M_i\}$, a $z_{1-\alpha/2}$ oznacza kwantyl rozkładu normalnego standardowego rzędu $1 - \alpha/2$.

Tymczasem dla testu E, wg Krishnamoorthy i Thomson (2002), moc zdefiniowana jest następująco [1]

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1=L_1}^{U_1} \sum_{k_2=L_2}^{U_2} h(k_1; n_1, M_1, N_1) h(k_2; n_2, M_2, N_2) \times \\ & \times \mathbb{1} \left(\sum_{x_1=L_{x_1}}^{U_{x_1}} \sum_{x_2=L_{x_2}}^{U_{x_2}} h(x_1; n_1, \hat{M}_1, N_1) h(x_2; n_2, \hat{M}_2, N_2) \mathbb{1}(|Z_{x_1, x_2}| \geq |Z_{k_1, k_2}|) \leq \alpha \right), \end{aligned} \quad (2.12)$$

gdzie wszelkie parametry oznaczają się takie same jak we wzorach (2.10) i (2.11).

2.3. Test bez skończonej poprawki

Dla testu bez poprawki na skończony rozmiar populacji, zamiast rozkładu hipergeometrycznego używamy dwumianowego, a więc X_1 i X_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Bernoullego $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p_1)$, $X_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p_2)$. Znane parametry to rozmiary próbek n_1 i n_2 .

Wariancję rozkładu łącznego $X_1/n_1 - X_2/n_2$ pod warunkiem $p_1 = p_2$ możemy wyprowadzić analogicznie jak w sekcji 2.2, wychodząc od łącznej wariancji rozważanej zmiennej losowej

$$\text{Var}(X_1/n_1 - X_2/n_2) = \text{Var}(X_1)/n_1^2 + \text{Var}(X_2)/n_2^2. \quad (2.13)$$

Wariancje X_1 i X_2 są równe

$$\text{Var}(X_1) = n_1 p_1 (1 - p_1), \quad (2.14)$$

$$\text{Var}(X_2) = n_2 p_2 (1 - p_2). \quad (2.15)$$

Zastępując p_1 i p_2 jednym parametrem równym p , otrzymujemy

$$V_{X_1, X_2} = p(1 - p)/n_1 + p(1 - p)/n_2 = p(1 - p)(1/n_1 + 1/n_2) \quad (2.16)$$

przy czym $p = (X_1 + X_2)/(n_1 + n_2)$.

Ten test jest, podobnie jak omówiony wcześniej test E, oparty o estymator p -wartości, który, zgodnie z artykułem Storer i Kim z 1990 roku, jest równy [2]

$$P(|Z_{X_1, X_2}| \geq |Z_{k_1, k_2}| | H_0) = \sum_{x_1=0}^{n_1} \sum_{x_2=0}^{n_2} b(x_1; n_1, \hat{p}_1) b(x_2; n_2, \hat{p}_2) \mathbb{1}(|Z_{X_1, X_2}| \geq |Z_{k_1, k_2}|), \quad (2.17)$$

gdzie $\hat{p} = (k_1 + k_2)/(n_1 + n_2)$. Test odrzuca hipotezę zerową, gdy p -wartość jest mniejsza od poziomu istotności α .

Moc testu jest również podobna do mocy testu E. W tym przypadku wyraża się wzorem

$$\sum_{k_1=0}^n \sum_{k_2=0}^n b(k_1; n_1, p_1) b(k_2; n_2, p_2) \times \\ \times \mathbb{1} \left(\sum_{x_1=0}^{n_1} \sum_{x_2=0}^{n_2} b(x_1; n_1, \hat{p}_1) b(x_2; n_2, \hat{p}_2) \mathbb{1} (|Z_{x_1, x_2}| \geq |Z_{k_1, k_2}|) \leq \alpha \right). \quad (2.18)$$

Rozdział 3

Analiza testów

Aby porównać testy opisane w rozdziale 2, napisałam programy, które wyliczają prawdopodobieństwo błędu I rodzaju i moc testu oraz generują wykresy dla różnych parametrów.

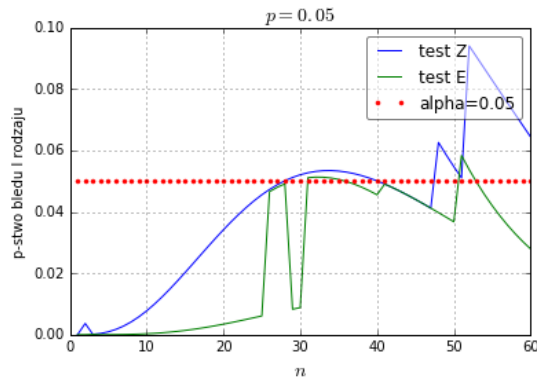
3.1. Porównanie testów ze skończoną poprawką

W pierwszej kolejności zajęłam się zestawieniem testów ze skończoną poprawką. Na rysunku 3.1 przedstawiona jest funkcja prawdopodobieństwa błędu I rodzaju w zależności od rozmiaru próbki dla różnych proporcji p . Po lewej stronie obserwacje z obu populacji są tej samej wielkości $n_1 = n_2 = n$, natomiast po prawej różnią się, rozmiar pierwszej próbki ma ustaloną wartość. Pierwszym spostrzeżeniem jest to, że funkcja dla testu E w większości przypadków jest mniejsza niż dla testu Z. Dodatkowo dla testu E prawdopodobieństwo błędu przekracza poziom istotności jedynie kilka razy i to bardzo nieznacznie. Tymczasem dla testu Z częściej przyjmuje wartości wyższe od α , czasem prawie dwukrotnie, jak na wykresie 3.1a. Warto wspomnieć także, że dla większych p (0.1, 0.3) oraz wraz ze wzrostem wielkości próbki funkcje są bliżej siebie i bardziej skupiają się przy poziomie istotności α .

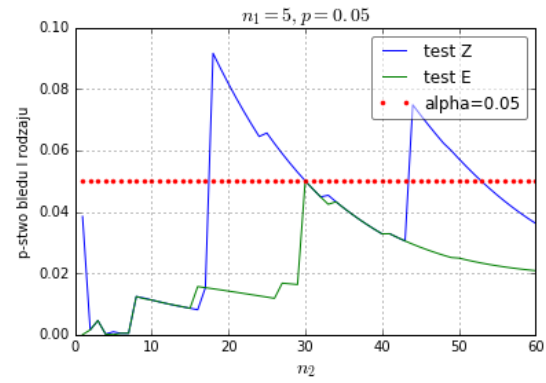
Rysunek 3.2 obrazuje również prawdopodobieństwo błędu I rodzaju, ale w zależności od proporcji p . Analizując wykresy funkcji, można dojść do podobnych wniosków, jak dla rysunku 3.1. W każdym przypadku funkcja dla testu Z jest większa od funkcji dla testu E. Oprócz tego prawdopodobieństwo błędu I rodzaju testu E przekracza poziom istotności jedynie na wykresie 3.2f, podczas gdy test Z tylko w jednym przypadku (3.2b) pozostaje całkowicie poniżej α .

Rysunek 3.3 zawiera wykresy mocy obu testów w zależności od rozmiaru próbki dla różnych rozmiarów populacji oraz proporcji p . Pierwszą populację modyfikowałam tak, żeby proporcje były większe lub mniejsze niż w drugiej populacji. W tym porównaniu lepiej wypada test Z, ponieważ jego moc jest większa od mocy testu E. Jednakże te różnice nie są duże. Zauważalny jest wzrost mocy testu wraz ze zwiększaniem się rozmiaru próbki. Ponadto moc testu wzrasta także dla proporcji bardziej oddalonych od siebie. W każdym przypadku, dla próby $n = 50$ i różnicy między proporcjami 0.3 moc jest już równa, albo prawie równa 1.

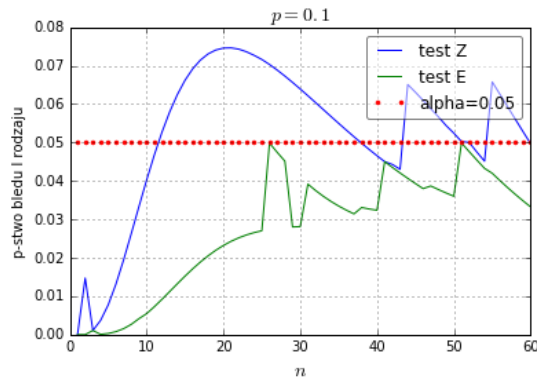
Podsumowując, nie można jasno stwierdzić, który test jest lepszy, ponieważ wyliczenia dla prawdopodobieństwa błędu I rodzaju wskazują na test E, natomiast moc testu jest większa dla testu Z. *czy któryś parametr jest ważniejszy? czy można powiedzieć, że test E jest lepszy, bo moc testu nie jest dużo mniejsza od mocy testu Z, a za to błąd I rodzaju jest znacząco mniejszy od Z?*



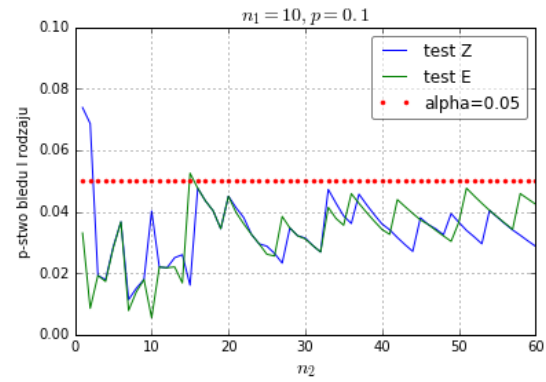
(a)



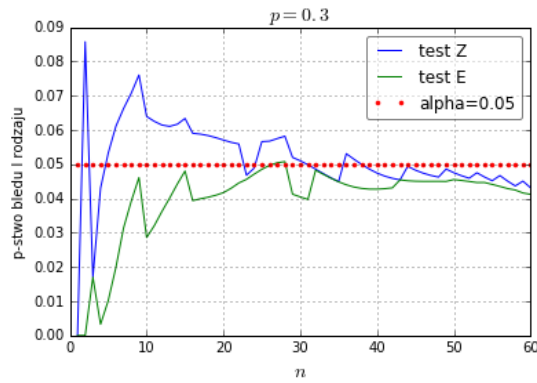
(b)



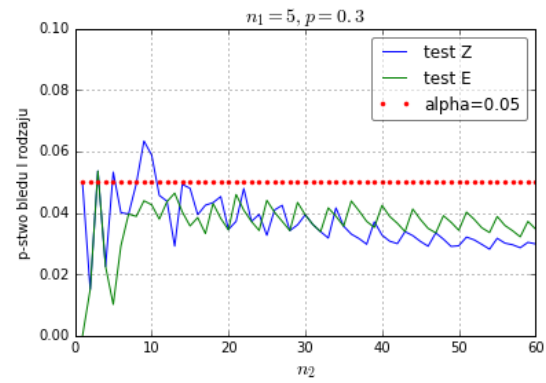
(c)



(d)



(e)

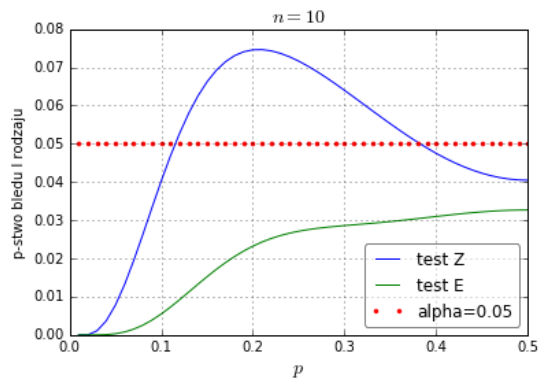


(f)

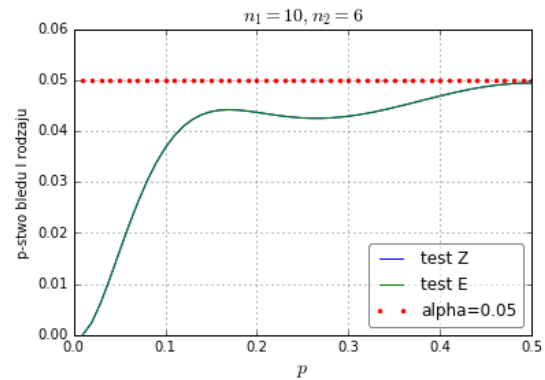
Rysunek 3.1: P-stwo błędu I rodzaju testów Z i E jako funkcja rozmiaru próbki n , przy zadanym poziomie istotności $\alpha = 0.05$; $N_1 = N_2 = 100$

3.2. Porównanie testu bez skończonej poprawki z testem Z

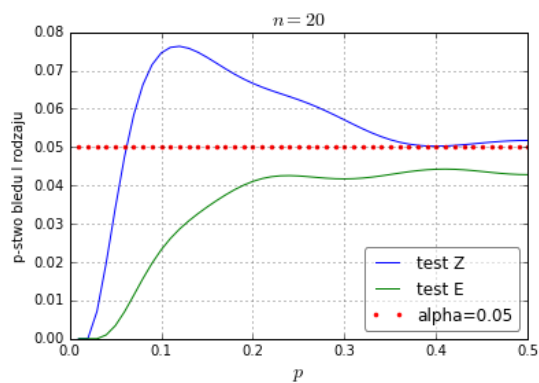
Rysunek 3.4 przedstawia wykresy mocy obu testów w zależności od rozmiaru próbki dla różnych rozmiarów populacji oraz proporcji p .



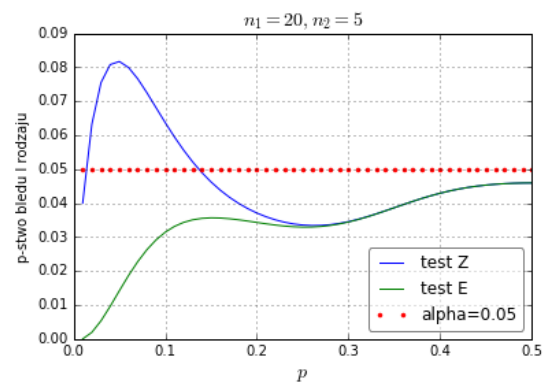
(a)



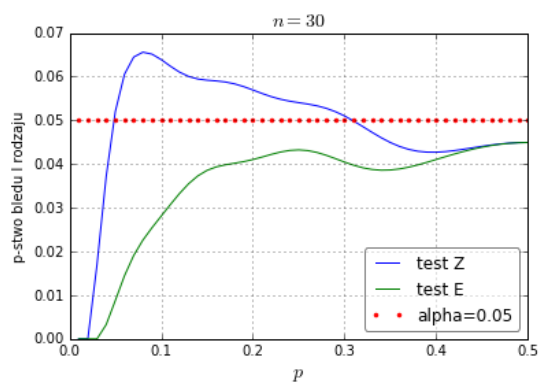
(b)



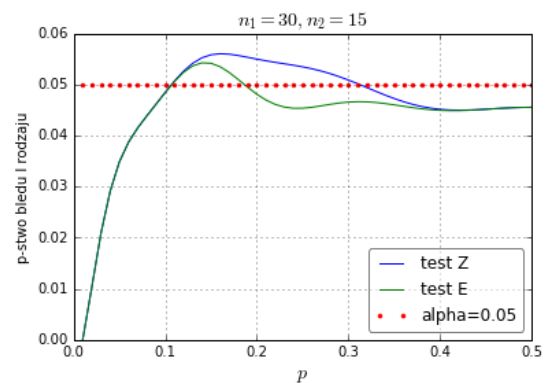
(c)



(d)

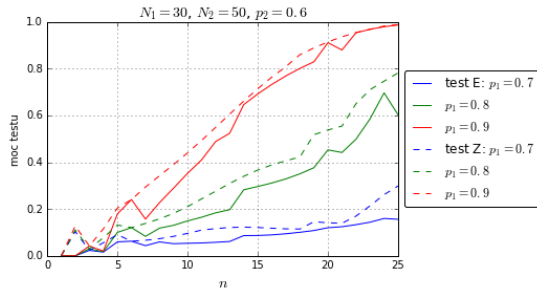


(e)

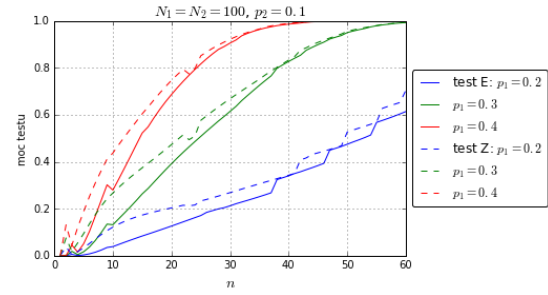


(f)

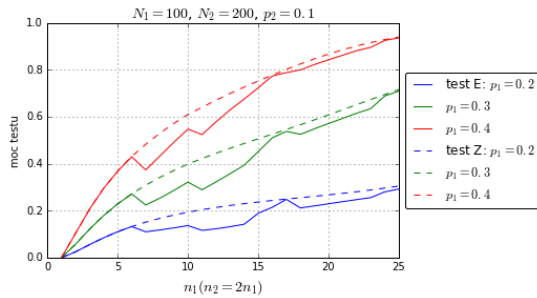
Rysunek 3.2: P-stwo błędu I rodzaju testów Z i E jako funkcja proporcji $p = M_1/N_1 = M_2/N_2$, przy zadanym poziomie istotności $\alpha = 0.05$; $N_1 = N_2 = 100$



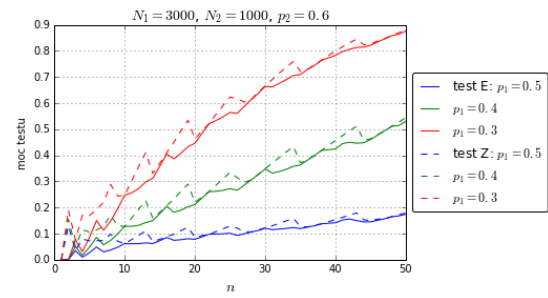
(a)



(b)

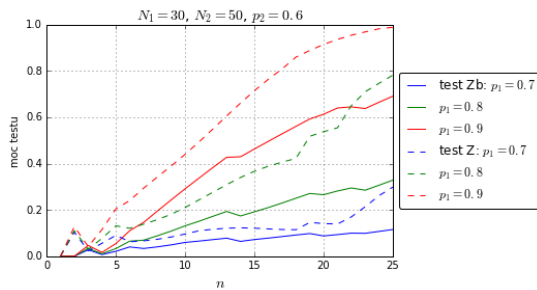


(c)

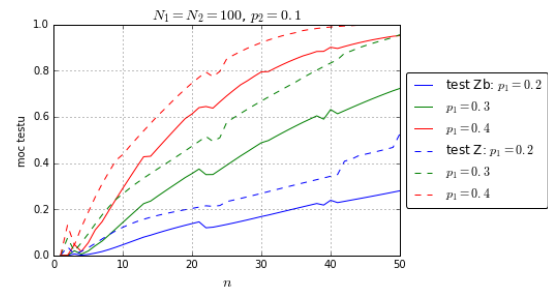


(d)

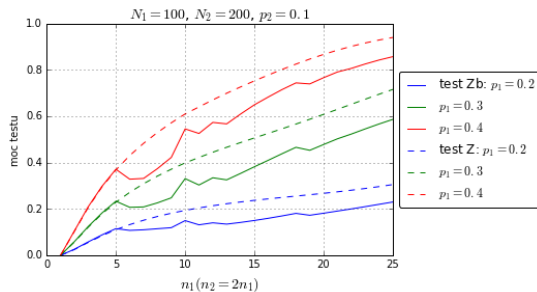
Rysunek 3.3: Moc testów Z i E jako funkcja rozmiaru próbki n , przy zadanym poziomie istotności $\alpha = 0.05$



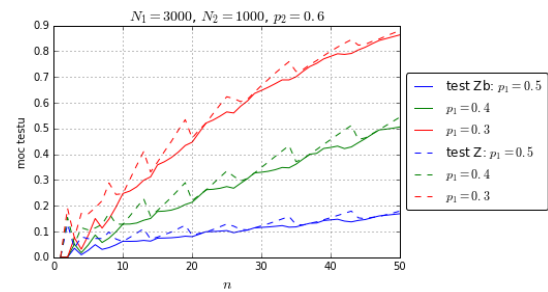
(a)



(b)



(c)



(d)

Rysunek 3.4: Moc testu Z i bez skończonej poprawki jako funkcja rozmiaru próbki n , przy zadanym poziomie istotności $\alpha = 0.05$

Spis rysunków

1.1	Funkcja prawdopodobieństwa dla $n = 10$	8
1.2	Funkcja prawdopodobieństwa dla $n = 17$	9
1.3	Funkcja prawdopodobieństwa dla $n = 20$	9
1.4	Wariancja w zależności od rozmiaru próbki	10
3.1	P-stwo błędu I rodzaju testów Z i E jako funkcja rozmiaru próbki n , przy zadanym poziomie istotności $\alpha = 0.05$; $N_1 = N_2 = 100$	16
3.2	P-stwo błędu I rodzaju testów Z i E jako funkcja proporcji $p = M_1/N_1 = M_2/N_2$, przy zadanym poziomie istotności $\alpha = 0.05$; $N_1 = N_2 = 100$	17
3.3	Moc testów Z i E jako funkcja rozmiaru próbki n , przy zadanym poziomie istotności $\alpha = 0.05$	18
3.4	Moc testu Z i bez skończonej poprawki jako funkcja rozmiaru próbki n , przy zadanym poziomie istotności $\alpha = 0.05$	18

Bibliografia

- [1] K. Krishnamoorthy and J. Thomson. Hypothesis testing about proportions in two finite populations. *The American Statistician*, 56(1):215–222, 2002.
- [2] B. E. Storer and C. Kim. Exact properties of some exact test statistics for comparing two binomial proportions. *Journal of the American Statistical Association*, 85:146–155, 1990.