图论

kradcigam

江苏省常州高级中学

2025.8.2

Contents

概述

图论非常困难，深不可测，本次讲课准备了一些，但仍然有很多没有涉及到。

课件内容比较多，顶部的进度条都溢出了，课后会根据上午、下午的讲课进度拆成两个课件最后发给大家。并根据上午讲课内容（可能）再做一些扩充。

希望大家能积极思考，能有所收获☺！

Contents

菜肴制作

题目描述

给定 n 菜肴和 m 个限制条件，对于每个限制条件 x 和 y，表示 x 号菜肴必须先于 y 号菜肴。让你求出在满足最小号的菜肴尽量靠前的前提下次小号的菜肴也尽量靠前、次小号的菜肴尽量靠前的前提下次次小号的菜肴也尽量靠前，以此类推，最优的菜肴制作顺序。如若无解，则输出 Impossible!。

数据范围

$1 \le n, m \le 5 \times 10^5$。

分析

结论

最优解就是符合条件的排列中，反转序列的字典序最大的排列。

证明

首先，当 $|V| = 1$ 时结论显然。
其次，假设结论对于 $|V| < n$ 均成立。设图 $G = (V, E)$ 中最小点编号为 x，其中 $|V| = n$，则整个点集分为两部分：

1. $S = \{z \mid$ 存在一条路径 $z \to x\}$；
2. $T = V - S$。

特别地，有 $x \in S$。

分析

引理

令 $m := |S|$。则最小序最小的拓扑序 a 一定满足 $\{a_x | 1 \le x \le m\} = S$ 且 $a_m = x$。

证明

由于 x 在拓扑序上的位置越小，最小序就越小，所以 x 尽可能靠前更优。由拓扑序的定义，$S - \{x\}$ 中的所有点在拓扑序上一定排在 x 之前。
所以 $a_p = x$ 是 $p \ge m$ 的充分条件。于是最小的最小序满足 $p = m$。

分析

现将整个图可以分成三个子图，其点集分别为 $S-\{x\}$、$\{x\}$ 和 T。
由于 $|S|+|T|=n$，所以 $|S-\{x\}|,|T|<n$，由假设得其结论成立。
因为 x 是编号最小的，将 x 向后移不能获得更大的反向字典序。
而 $S-\{x\},T$ 的结论已证。于是对于图 G 结论成立。
所以对于任意的 DAG，由数学归纳法得结论均成立。
证毕。

做法

所以，做法就非常简单了。我们建出反图，然后跑拓扑排序，这里我们用优先队列维护堆内最大值即可。
时间复杂度 $O(n \log n + m)$。

Contents

算法

- 单源最短路：Bellman-Ford，Dijkstra，SPFA（判负环）；
- 全源最短路：Johnson，Floyd；
- 扩展：同余最短路，差分约束；
- 核心：三角不等式。

我们通过两道很像的题目来感受一下，大家像先听哪道题☺。

Flights for Regular Customers

题目描述

给定一张 n 个点 m 条边的有向图。
一开始你在 1 号节点，你要走到 n 号节点去。
只有当你已经走过了至少 d_i 条边时，你才能走第 i 条边。
问最少要走多少条边，或判断无法到达。

数据范围

$1 \le n, m \le 150$，$0 \le d_i \le 10^9$。

解法

注意到 n, m 很小，我们按照边出现的时间段划分，先通过矩阵乘法来维护每段时间内哪些点可到，然后再 BFS，求出最短路。
直接做时间复杂度为 $O(n^3 m \log d)$，不能通过。
注意到维护每段时间内哪些点可到可以将矩阵转置，并用 bitset 优化。
时间复杂度 $O(\frac{n^3 m \log d}{\omega})$。

Dirty Arkady's Kitchen

题目描述

给定一张 n 个点 m 条边的无向图。
一开始你在 1 号节点，你要走到 n 号节点去。
只有当你已经走过了至少 l_i 条边，少于 r_i 条边时，你才能走第 i 条边。
问最少要走多少条边，或判断无法到达。

数据范围

$1 \leq n, m \leq 5 \times 10^5$，$0 \leq l_i < r_i \leq 10^9$。

闲话

初三时候模拟赛“场切”了。

闲话

初三时候模拟赛“场切”了。
但是当时我的代码在 $n = 1, m = 0$ 时会输出 -1；

闲话

初三时候模拟赛“场切”了。
但是当时我的代码在 $n=1, m=0$ 时会输出 -1；
结果出题人不仅捆包，还在每个 subtask 里面都放了一个 $n=1, m=0$ 的数据；

闲话

初三时候模拟赛“场切”了。
但是当时我的代码在 $n=1, m=0$ 时会输出 -1；
结果出题人不仅捆包，还在每个 subtask 里面都放了一个 $n=1, m=0$ 的数据；
但教练评测的时候把包拆了☺。

解法

由于是无向图，所以我们可以在一条边上来回移动，浪费时间，所以到达一条边的一个端点肯定是越早越好，于是分在哪条边上，哪个端点，以及长度的奇偶性来设状态 $f_{i,0/1,0/1}$。
然后跑 dij 即可。
时间复杂度 $O(m \log m)$。

Contents

算法

- Kruskal， Prim， Boruvka；

感觉最小生成树的用途显著比最短路局限 (?)

Boruvka

我们定义一个连通块的**向外最小边**为它连向其它连通块的边中权值最小的那一条。

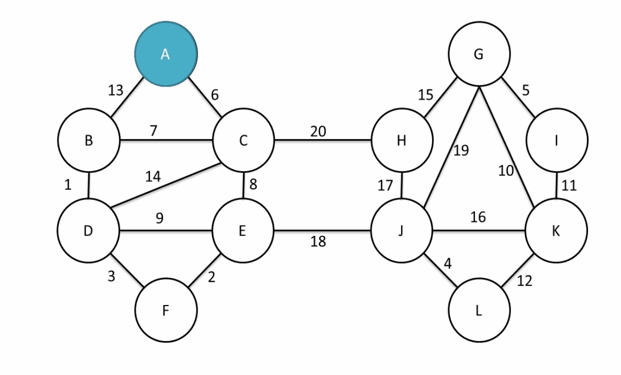
初始时，$E' = \varnothing$，每个点各自是一个连通块：

1. 计算每个点分别属于哪个连通块。将每个连通块都设为“没有最小边”；
2. 遍历每条边 (u, v)，如果 u 和 v 不在同一个连通块，就用这条边的边权分别更新 u 和 v 所在连通块的最小边；
3. 如果所有连通块都没有最小边，退出程序，此时的 E' 就是原图最小生成森林的边集。否则，将每个有最小边的连通块的最小边加入 E'，返回第一步。

由于每轮连通块数量至少会除 2，所以不会超过 $O(\log n)$ 轮。

时间复杂度 $O(m \log n)$。

Boruvka



Kuroni and Antihype

题目描述

有 n 个点，每个点有点权 a_i。i, j 之间有边当且仅当 a_i AND $a_j = 0$。执行以下过程 n 次：

1. 选择一个点 u 染色；
2. 选择一个与 u 相连的且已经染色的点 v，将 a_v 计入权值。如果没有合法的 v，跳过该步。

求最大的权值。

数据范围

$1 \le n \le 2 \times 10^5$，$0 \le a_i \le 2 \times 10^5$。

转化

我们考虑加入一个点权为 0 的点，对于 i,j 满足 a_i AND $a_j = 0$，将其边权设为 $a_i + a_j$。这样每个点的点权会被多算一次贡献，我们最后再减掉所有点的点权总和即可。

于是，我们的问题转化成：求出这张新图的最大生成树。

解法 1

我们考虑 Kruskal。注意到总边数很少，所以从小到大枚举边权，然后枚举子集即可。
时间复杂度 $O(3^{\log_2 a})$。

解法 2

令 $k=\lfloor\log_2 a_i\rfloor$。
我们考虑 Boruvka，那么对于一个点权为 x 的点，相当于要找和它不在同一个连通块的，点权最小的满足点权和 x AND 为 0 的，于是相当于找 $2^{k+1}-1-x$ 的子集中不和该点在一个连通块的点权最小值。
于是，每次我们跑高维前缀和，并维护来自不同连通块的最大值、次大值。
时间复杂度 $O((n+a\log a)\log n)$。

Contents

算法

欧拉路径是经过图中每条边恰好一次的路径，欧拉回路是经过图中每条边恰好一次的回路。

- 结论：（半）欧拉图判定：
  - **（弱）连通**；
  - 度数奇偶性。
- 算法：Hierholzer 算法，每次找到一个环，并倒序插入来实现一边 DFS 找环一边插环；

走亲访友

题目描述

n 个点 m 条边的简单无向连通图，构造满足下面要求的路径：

- 起点为 s，终点不限。
- 对于走过的每条边 (u_i, v_i)，你要额外决定 $p_i \in \{0, 1\}$，满足：
  1. $p_i = 0$ 表示删除这条边，**且之后不能再次经过该边**；
     $p_i = 1$ 表示不删除这条边。
  2. 如果 $i > 1$，那么 $u_i = v_{i-1}$。
- 路径的长度不能超过 k。
- 最后未删除的边组成一棵 n 个结点的树。

数据范围

$1 \le n \le 10^3$，$1 \le m \le \frac{n(n-1)}{2}$，$k \ge n + m$。

Hint

可以证明在本题的限制条件下，一定存在合法的方案。

算法 1：$k = 2m$

考虑 DFS 出一棵生成树，对于反向边，我们先往后走一次，再走回来，并在走回来的时候把这条边删掉。
这样一条边只会至多经过两次，路径长度至多为 $2m$。
~~不过这个做法似乎并没有前途。~~

算法 2：$k = n + m$

路径是陌生的，但是回路是熟悉的。
我们尝试将限制**变紧**：把路径改成回路，即要求起点终点相同。
考虑欧拉回路要求每个点的度数是偶数，于是我们可以先 DFS 出一棵生成树。然后自底向上，确定每个子树内的所有点度数都为偶数。
如果当前子树根的度数为奇数，那么就将这个点和它父亲的边复制一遍，即要求这条边走两遍。
对于该非生成树上的边，我们只会恰好经过一次，经过之后删去即可。
这样生成树的边只会至多经过两次，非生成树的变只会至多经过一次，路径长度至多为 $n + m - 1$。

Mike and Fish

题目描述

给定 n 个整点，你要给每个点染成红色或蓝色。
要求同一水平线或垂直线上两种颜色的数量最多相差 1。

数据范围

$1 \le n \le 2^5$，$1 \le x_i, y_i \le 2 \times 10^5$。

解法

对于网格图一个常见的想法是，在横纵坐标之间连一条边。
我们再将给每个点染色看成是给边定向，于是限制转化为对每个点的入度和出度最多相差 1。
由于奇点一定有偶数个，所以我们新建一个虚点 0，并和所有奇度点连边，最后跑一遍欧拉回路即可。
时间复杂度 $O(n)$。

Balance

题目描述

有 N 台评测机，T 个题目（编号为 $1, 2, \cdots, T$）。组委会已经确定，每台评测机要评测哪些提交（数目相同，都是 S 个提交，保证 S 是 2 的整数次幂）。在接下来的 S 分钟内，每分钟每台评测机会评测一个提交。
每个提交都会提交至某个题目。由于存数据的机器太脆弱了，所以要求，对于所有题目和任意两个时刻，在这两个时刻，这个题的被评测的提交的数量之差不超过 1。
请构造一组方案，使得满足上面的条件。

数据范围

$1 \le N, S, T \le 10^5$，$NS \le 5 \times 10^5$，保证 S 是 2 的幂。

$S = 2$

我们考虑 $S = 2$ 怎么做，我们将 $a_{i,1}$ 和 $a_{i,2}$ 连一条无向边，于是我们的操作相当于对边定向。

- 如果 $a_{i,1} \to a_{i,2}$ 那么相当于 $a_{i,1}$ 放第一列，$a_{i,2}$ 放第二列；
- 如果 $a_{i,2} \to a_{i,1}$ 那么相当于 $a_{i,2}$ 放第一列，$a_{i,1}$ 放第二列。

那么我们相当于要求对于所有点满足出度和入度的差不超过 1。

我们考虑取出所有度数为奇数的点，注意到这样的点总共只有偶数个。我们建一个超级源点的 S，对其中一半的点，S 连出；对另一半的点，S 连入，这样把限制变紧，就变成要求所有点的入度和出度相等。

于是，我们跑欧拉回路即可。

解法

那么，对于一般情况，我们可以对于一行，任选一半的点和另一半的点连无向边，然后再进行定向操作，表示哪个点放在前一半的列上，哪个点放在后一半的列上。
之后的做法和 $S = 2$ 一样，这样我们可以每次把 S 的规模减半。
时间复杂度 $O(ns(\log n + \log s))$。

Contents

DAG 可达性

一般有两种做法：

- 记 $f_{i,j}$ 表示点 i 能否到达点 j。将所有点拓扑排序，每次将所有出边用 bitset 维护或即可。
  时间复杂度 $O(\frac{nm}{w})$。
- ~~线段树合并，并维护哈希值，如果哈希值相同则直接返回。~~
  ~~时间复杂度 $O(nm\log n)$。~~
  有的时候会有奇效☺。

Example

- Miny；
- UNR 2025 Day1T3 歪解。

Dynamic Reachability

题目描述

给定一张 n 个点 m 条边的有向图，每条边有一个黑或白的颜色，初始颜色为全黑，有 q 次操作，操作有如下两种类型：

- $1\ k$，表示将第 k 条边的颜色取反；
- $2\ u\ v$，表示查询点 u 能否仅通过黑边到达点 v。

数据范围

$n \le 50000$，$m, q \le 10^5$，$12\text{s}/512\text{MB}$。

题解

首先考虑对于一张 DAG 怎么做，我们用 bitset ，第一维记录当前点，第二维记录询问，表示当前点能否走到这个询问。
那么每次颜色取反操作表示的是对一个区间的询问一条边不能走，我们按照逆拓扑序遍历，每次将儿子的 bitset 先与上能走的询问再继承上来即可。

题解

而对于有向图就可能出现环，我们进行操作分块，每 B 次一块。块内先忽略被取反的边，将所有黑边构成的图缩点，然后用有向无环图的做法可以做出不考虑被操作的 $O(B)$ 条边的答案。
加入这 B 条边也很容易，我们取出所有 $O(B)$ 个边的端点和询问的点，对于每个询问我们只在乎这些关键点之间的连通性，bfs 求解即可，bitset 优化之后总复杂度 $O(\frac{q(n+m)}{w} + \frac{nq}{B} + \frac{qB^2}{w})$。

Phoenix and Odometers

题目描述

给定一张 n 个点 m 条边的图，有边权，进行 q 次查询，每次查询给定三个参数 v, s, t，你需要判断是否存在一条起点终点均为 v 的路径，满足路径长度 x，有 $x + s \equiv 0 \pmod{t}$。

数据范围

$1 \le n, m, q \le 2 \times 10^5$。

解法

经过转化可以发现只需要求解结点 v 所在强连通分量内，所有简单环环长的 $\gcd$ 令其为 d。

结论

对于数 p，$p|d$ 当且仅当能够构造一组 $\{dis_n\}$，满足对于所有有向边 (u,v,w)，满足 $dis_v \equiv dis_u + w$。

解法

证明

充分性：我们的目标是说明符合条件的一定是 d 的约数。
我们发现对于任意一个环经过了点 $p_1, p_2, \cdots, p_k$，设点 p_i 到点 $p_{i \bmod k+1}$ 的边权为 v_i，则有 $dis_{p_i} + v_i \equiv dis_{p_{i \bmod k+1}}$，即 $v_i \equiv dis_{p_{i \bmod k+1}} - dis_{p_i}$，那么得到 $\sum_{i=1}^{k} v_i \equiv \sum_{i=1}^{k} dis_{p_{i \bmod k+1}} - dis_{p_i} \equiv 0 \pmod p$。
所以环长是 p 的倍数，即能说明 p 是 d 的约数。

解法

证明

必要性：我们的目标是说明 d 的约数一定符合条件。
我们只需要对 d 进行一组 dis 构造，我们随便取一个点 rt 做根，并令 $dis_{rt}=0$，再找到一棵 rt 为根的外向生成树，对于外向树上的每条边 (u,v,w)，我们令 $dis_v \equiv dis_u + w \pmod d$。
由于强连通，每个点 i 必然存在一条到 rt 的路径，而这条路径在 $\pmod d$ 意义下权值为 $-dis_i$。
我们再考察一条非树边 (u,v,w)，由于 v 到 rt 有 $\pmod d$ 意义下权值为 $-disv$ 的路径，因此 $-dis_v + dis_u + w \equiv 0 \pmod d$，即 $dis_v \equiv dis_u + w \pmod d$。

使用 tarjan 求解强连通分量，时间复杂度 $O(n)$。

Doctor's Brown Hypothesis

题目描述

给你一张 n 个点 m 条边的有向图，你需要找出有多少个点对 $(u, v), 1 \leq u \leq v \leq n$，满足存在一条从 u 到 v 的长度为 k 的途径，和一条从 v 到 u 的长度为 k 的途径。

数据范围

$1 \leq n \leq 10^5$，$0 \leq m \leq 2 \times 10^5$，$n^3 \leq k \leq 10^{18}$。

解法

首先 u, v 显然需要在一个强连通分量内，并像上一题一样求出强连通分量内所有环长的 $\gcd$ 为 d。
我们考虑如何判断 u 到 v 是否有长度为 k 的路径。
我们先找到一条 u 到 v 途径所有点的路径，其长度不超过 $(n-1)^2$，再找出途径的所有简单环，假设总共有 m 个长度从小到大排序为 $len_1, len_2, \cdots, len_m$，那么对于 $d|x \land d \geq (\frac{len_1}{d} - 1)len_m$ 的数都一定能被表示。

证明

这是因为我们考虑同余最短路，以 len_1 为底，每次至少拓展一个点，拓展长度不超过 len_m，因此上界为 $(\frac{len_1}{d} - 1)len_m$。

于是我们得到了界 $(n-1)^2 + (n-1)n \leq (n-1)(2n-1) \leq n^3$。

解法

于是在 $k \geq n^3$ 的前提下，两个点之间存在长度为 k 的路径当且仅当 $dis_v - dis_u \equiv k \pmod d$ 且 $dis_u - dis_v \equiv k \pmod d$。
发现要么有 $k \equiv 0 \pmod d$，要么有 d 是偶数且 $k \equiv \frac{d}{2} \pmod d$。
时间复杂度 $O(n)$。

Tours

题目描述

给定一张 n 个点 m 条边的无向图，你需要选择一个颜色种类数 k，然后用这 k 种颜色给每条边染色，要求对于图中任意一个简单环，每种颜色的边的数量都相同。求所有可行的 k。

数据范围

$1 \leq n, m \leq 5 \times 10^5$。

题解

我们跑出原图的 DFS 树，我们记 T_i 表示覆盖边 i 的非树边集合。
那么我们可以说明，包含非树边集合为 S 的环（可能是若干个边不交的环的并），包含的边为满足 $|T_i \bigcap S| \equiv 1 \pmod 2$ 的所有 i。

题解

这有一个比较简洁的证明，就是考虑当前这条树边和跨过这条边的在环上的非树边，我们从一个起点开始遍历环，每经过一次非树边，当前点的位置就会从这条树边的子树到子树外或子树外到子树，而由于成环，因此最后起点和终点的位置必须同时在子树或同时在子树外。

同时可以发现两个环的边集 S_1 和 S_2 的对称差还是环，因此可以说明，无向图的环空间为一个 $\mathbb{F}_2$ 上的线性空间，一组基为仅包含第 i 条非树边的环。

题解

接着我们给出切边等价的定义，即对于两条边 $e1, e2$，他们切边等价当且仅当对于任意一个环，要么同时经过他们，要么同时不经过他们。
由于一个环可以表示为若干个仅包含第 i 条非树边的环的组合，因此这等价于 $T_{e1} = T_{e2}$。
那么切边等价的关系将原图划分为了若干个集合 $E_1 \dots E_t$，我们有结论可行的 k 一定满足 $k | \gcd(|E_1| \dots |E_t|)$。

题解

我们取出所有环，每个环一定能够被拆分成若干个 E_i ，我们只用说明每个 E_i 都能够被若干个环表示即可，设对应非树边集合为 S 的环的向量为 F_S。

对于一个 E_i，如果非树边集合为 U，那么我们可以通过构造 $\sum\limits_{S\subseteq U}(-1)^{|S|}F_S$ 来得到所有非树边集合是 U 的超集的 E_i 的和的倍数，因此结论得证。

那么我们就只需要求出每个 E_i 的大小了，这里如果对集合 T_i 进行哈希，很容易做到 $O(n\log n)$ 的复杂度。

Contents

Turysta

题目描述

给出一个 n 个点的有向图，任意两个点之间有且仅一条有向边。对于每个点 v，求出从 v 出发的一条经过点数最多，且没有重复经过同一个点两次及两次以上的简单路径。

数据范围

$2 \le n \le 2000$。

解法

Redei 定理

竞赛图一定有汉密尔顿路径。

Camion-Moon 定理

强连通竞赛图一定有汉密尔顿回路。

首先对竞赛图缩点，最终拓扑序一定是一条链。考虑如何在一个强连通竞赛图中构造汉密尔顿回路。

解法

首先，我们尝试构造汉密尔顿路径。考虑增量构造。我们逐个加点，设当前加入的点为 x，当前构造好的路径为 s 到 t，那么我们分类讨论：

1. 若 $x \to s$，我们直接让 x 连接 s，$s := x$；
2. 若 $t \to x$，我们直接让 t 连接 x，$t := x$；
3. 现在我们只剩下 $s \to x$，$x \to t$ 的情况，于是考虑链上一定存在一个点 y 以及 y 连接的点 z，满足 $y \to x$，$x \to z$。于是直接在 $y \to z$ 中插入 x 即可。

解法

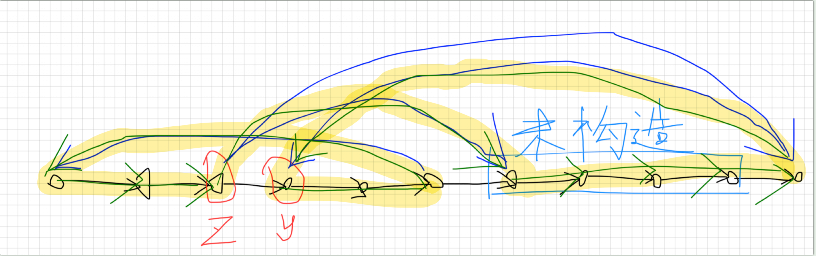
接着我们考虑构造汉密尔顿回路。我们依旧考虑增量构造（但不是纯增量构造）。设当前加入的点为 x，当前构造好的哈密顿路径起点为 s，我们依旧分类讨论：

1. 若 $x \to s$，那么我们直接按照汉密尔顿通路并加入 $x \to s$ 的边即可；
2. 若存在点 $x \to y$，y 在已经构造好的环中，我们找到从 s 开始往后第一个这样的点，设环中 $z \to y$。由于我们找的是第一个，并且 $s \to x$，所以，一定有 $z \to x$。于是就可以构造了。
3. 若不存在情况 2，则我们把这个点留下，并在之后一起构造。

解法

情况 2、3 的构造：

Example



时间复杂度 $O(n^2)$。

Invertation in Tournament

题目描述

每次操作，你可以选择任意一个顶点 v，并将所有与 v 相连的边的方向全部反转（即所有 $u \to v$ 的边变为 $v \to u$，所有 $v \to u$ 的边变为 $u \to v$）。

你需要用最少的操作次数使得该锦标赛图变为强连通图（如果可能的话）。

如果可以做到，还需要计算有多少种不同的方式可以用最少的操作次数使图变为强连通图（如果对于某一次操作，选择的顶点不同，则认为两种方式不同），对 998244353 取模。

数据范围

$3 \leq n \leq 2000$。

竞赛图与出度序列

竞赛图合法出度序列（Landau 定理）

给定一个非负整数序列 p，满足：

- $\forall i \in [1, n-1], p_i \le p_{i+1}$；
- $\sum_{i=1}^{n} p_i = \binom{n}{2}$。

存在一个竞赛图使得节点的出度分别为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的充要条件是 $\forall i \in [1, n], \sum_{j=1}^{i} p_j \ge \binom{i}{2}$。

证明

必要性：对于前 i 个点，相互之间有 $\binom{i}{2}$ 条边，因此 $\sum_{j=1}^{i} p_j \ge \binom{i}{2}$。

竞赛图与出度序列

证明

充分性：考虑构造一张 n 阶竞赛图。
初始我们在所有 $i<j$ 之间连 $i \to j$ 的边，得到度数序列 q 满足 $q_i = i-1$。
此时我们有 $\forall i \in [1,n], \sum_{j=1}^{i} q_j \le \sum_{j=1}^{i} p_j$，之后我们的目标是在该性质保持的情况下调整 q 直到 $p=q$。
我们找到最小的 $p_x \ne q_x$ 的位置 x 此时有 $q_x < p_x$。我们再找到最小的下标 y 满足 $q_y > p_y$，由于 $\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} q_i$，所以 y 存在，且 $y > x$，于是有 $q_y > p_y \ge p_x > q_x$，所以 $q_y \ge q_x + 2$。
由于差至少是 2，所以一定有 $\exists i$，有 $y \to i$ 的边和 $i \to x$ 的边。
我们进行调整，变成 $x \to i$ 的边和 $i \to y$ 的边，此时我们使 q_x 增加了 1，q_y 减小了 1。

竞赛图与出度序列

证明

并且不难发现此时仍然满足 $\forall i \in [1, n], \sum_{j=1}^{i} q_j \leq \sum_{j=1}^{i} p_j$ 的条件。
不难发现有限次调整后可以得到 $p = q$。

不过其实有更加简单的证明方法，我们会在后面提到。

竞赛图缩点

我们只需要找到所有点的度数序列并将其排序得到 $p_1, p_2, \cdots, p_n$。
找到所有满足 $\sum_{j=1}^{i} p_j = \binom{i}{2}$ 的 i，形如 $s_1, s_2, \cdots, s_k$。
则这张图有 k 个强连通分量，第 i 个强连通分量对应度数序列排名在 $[s_{i-1}+1, s_i]$ 的点（不妨令 $s_0 = 0$）。

解法

首先若原题强连通，答案为 0。
若形成 > 2 个强连通分量，则我们可以对一个不在头、尾强连通分量的点操作，不难发现此时整个图强连通。
现在只需要考虑只有 2 个强连通分量的情况。

结论

$n \geq 4$ 阶强连通竞赛图，存在 $n-1$ 阶强连通竞赛子图。

证明

先找到这个强连通 n 阶竞赛图的哈密顿回路，不妨假设是 $p_1, p_2, \cdots, p_k$，我们考虑将 p_1 删除。

解法

证明

- 若剩下的图强连通，则必然存在哈密顿回路，于是我们找到了 $n-1$ 阶连通竞赛子图；
- 若存在一个强连通分量大小 ≥ 3，我们可以跳过首结点或尾结点；
- 否则，所有强连通分量大小为 1，这时我们可以跳过一个结点。

于是，我们可以构造出一个大小为 $n-1$ 的环。

因此，这两个强连通分量中，若存在一个大小 ≥ 4 的，那么答案必然为 1。
现在还剩下的情况都满足 $n \leq 6$，暴力枚举即可。
使用兰道定理求解强连通分量，时间复杂度 $O(n^2 \log n)$。

Contents

算法

我们先严格定义一下网络流。给定一个有源汇网络，对于任意流函数 f，满足如下限制：

- 容量限制：$f(u,v) \le c(u,v)$；
- 流量平衡：除去 s,t 以外 $f(u) = \sum_v f(u,v) = 0$；
- 反对称性：$f(u,v) = -f(v,u)$

称这个流的流量为 $|f|$，显然有 $f(s) = -f(t) = |f|$。
割 $\{S,T\}$ 的权值记为 $||S,T||$。
残量网络是一个新的网络 G_f，满足 $c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$。

最小割

最小割为在一张有向带正权图上，删除最小权值总和的边，使得 S 无法到达 T。
于是这就等价于将点集分成两部分，一部分属于 S，其它部分属于 T，而 S 和 T 之间的边就是一组合法的割。

定理

最小割等于最大流。

最小割

证明

- 充分性：对于一组最大流的解，我们将加入所有未流满的边，那么此时 S 和 T 不连通，而令包含 S 的极大连通块为 S 集合，此时就是一组合法割的划分，于是我们可以说明最小割**小于等于**最大流。
- 必要性：我们令割边集合为 C。

$$cut = \sum_{(u,v)\in C} c(u,v) \geq \sum_{(u,v)\in C} f(u,v)$$
$$\geq \sum_{(u,v)\in C} f(u,v) - \sum_{(u,v)\in E \wedge u\in T \wedge v\in S} f(u,v) = |f|$$

最后一步利用了 $\sum_{i\in S} f(i) = f(s) = f$。

最小割

我们研究全体最小割方案的形态，根据上面对于最小割大于等于最大流的证明，我们可以总结出割的 3 条性质。

1. S 集合和 T 集合之间的边满流（第一个大于等号）；
2. 不存在 T 集合到 S 集合的流量。

于是，我们考虑建一张新图。将一组最大流的方案中，对于所有 $f(u, v) > 0$ 的边，我们在新图中连一条 $u \in v$ 的有向边，为了方便理解，我们暂时认为边权为 $f(u, v)$。

由于不存在 T 到 S 的流量，因此这是一张 S 到 T 的 DAG，而其中的任意一组割在数值意义上都是最小割。

最小割

但是因为存在 $f(u,v) \neq c(u,v)$，而最小割上的所有边都满流，所以我们再对所有 $f(u,v) \neq c(u,v)$，加入 $v \to u$ 的边表示限制，即割不能同有：

- $u \in S$;
- $v \in T$。

这一点的思想有点类似于 2-SAT。于是，我们再将新图缩强连通分量，因为显然一个强连通分量内必然属于同一个集合。
于是最小割即为缩完强连通分量的新图上的一组割。并且由于跑完最大流不存在 S 到 T 的流量，所以 S 和 T 不在一个强连通分量，所以最小割存在。
其表现实际上就是将残量网络上所有流量不为 0 的边建出的图的反图，在后面的讨论中我们都以残量网络上所有流量不为 0 的边建出的图来讨论，此时是一张 T 到 S 图。

祭祀

题目描述

给定一个 n 个点，m 条边的简单有向无环图（DAG），求出它的最长反链，并构造方案。
最长反链：一张有向无环图的最长反链为一个集合 $S \subseteq V$，满足对于 S 中的任意两个不同的点 $u, v \in S$ （$u \neq v$），u 不能到达 v，v 也不能到达 u，且 S 的大小尽量大。

数据范围

$1 \leq n, m \leq 5 \times 10^4 (?)$。

最大权闭合子图

定义

一张有向图，点有点权可正可负，选出一张子图，满足子图中的所有点出度指向的点依旧在这个子图内，则此子图是闭合子图。

而最大权闭合子图则是最大化点权和。
做法是我们见两个虚点 S, T，先取所有正权点，并将 S 连向所有正权点，再将所有负权点都连向 T，边权均为其权值。

- 对于正权点，我们将这条边割了代表放弃不选这个点；
- 对于负权点，我们将这条边割了代表委曲求全选这个点。

对于原图的边 (u, v)，我们连 $(u, v, +\infty)$ 表示限制，跑最小割即可。

解法

这里我们不会讲传统的 $O(n^{3.5})$ 的做法，并且也没有什么关系，大家可以自行学习。
首先我们对本题采用最大权闭合子图的转化：对每个点拆成 (u_0, u_1)，其点权分别为 -1 和 1，入边全部改到 u_0，出边改到 u_1，然后求最大权闭合子图。
此时所有 u_1 被选且 u_0 未被选的点就是一组最长反链。

解法

所以，要求解该点是否可以被选，则等价于求最大权闭合子图上，是否存在一组最小割，满足 $u_0 \in T, u_1 \in S$。
将其转化到残量网络上大小为 0 的割，则相当于问残量网络上 u_1 能否走 $c_f(u,v) > 0$ 的边到 u_0，若能则这个点不能被选。
由于 u_0 显然总是能到 u_1，这等价于这两个点在 G_f 上属于一个强连通分量。可以在求出残量网络后 $O(n+m)$ 解决。
需要注意的是，需要先考虑 u_0 是否和 S 在同一个强连通分量，若是的话显然没有割使得 $u_0 \in T$，u_1 同理。

如何求解字典序最小的反链

我们按照直接讲解最小割的方法，建出新图（T 到 S 图）并对此图缩点。现在把 S 能到达的点以及能到达 T 的点在最小割中的归属已经确定，标记它们。

从小到大枚举每个点，如果可以令 $u_0 \in S, u_1 \in T$ 并且不违反已有的标记，并且两个点不在一个强连通分量，则把这个点加入答案，然后把 u_0 可达的点标记为 S，把可达 u_1 的点标记为 T；否则我们直接跳过这个点，显然此时不关心这两个点最终在最小割中的位置。

复杂度也是 $O(n+m)$，瓶颈在于前面的跑网络流。

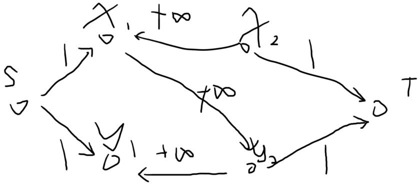
Dinic 的几种时间复杂度

来源在标题，我不是很理解其中的道理☹。

- 一般情况：时间复杂度为 $O(n^2m)$；
- $O(\sqrt{\sum_p \min\{d_p^{in}, d_p^{out}\}})$；
- 各边容量均为 1 的网络：时间复杂度 $O(m\min\{m^{\frac{1}{2}}, n^{\frac{2}{3}}\})$；
- 单位网络（除源汇外各点入度不超过 1 或出度不超过 1。）：时间复杂度为 $O(m\sqrt{n})$。

解法

很遗憾，这个图并不能用上面的任何方式分析到更低的时间复杂度。



但实际跑起来很快。

Everywhere is Sparser than Whole (Judge)

题目描述

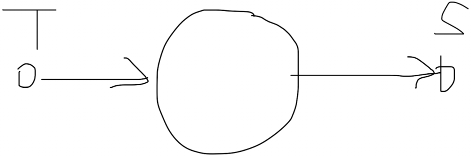
我们将非空顶点集合的简单无向图的密度定义为 $\dfrac{(\text{边数})}{(\text{顶点数})}$。
给定正整数 N，D，以及一个有 N 个顶点、DN 条边的简单无向图 G。G 的顶点编号为 1 到 N，第 i 条边连接顶点 A_i 和顶点 B_i。请判断 G 是否满足以下条件。
条件：设 G 的顶点集合为 V。对于 V 的任意**非空真子集** X，X 的导出 G 的子图的密度严格小于 D。

数据范围

$ND \leq 5 \times 10^4$。

解法

我们看成选边有 1 的权值，同时必须要选择对应的两个端点，选点有 $-D$ 的代价，判断是否存在一个非空真子图，其权值 ≥ 0。
于是我们先建出最大权闭合子图的建图，如果求出来最大权闭合子图 > 0，那么显然合法。
否则，根据上面的最小割理论，我们只需要判断新图上强连通分量数是否为 3 即可，此时：



这是因为 S 集合仅有 S 构成、T 集合仅由 T 的割构成是一定成立的，而条件要求仅由这两组割成立。

Contents

Hall 定理

定理

对于一张二分图，若存在完美匹配，当且仅当对于所有集合 S 满足 $|N(S)| \geq |S|$。

证明

考虑最小割。

Landau 定理的证明

考虑构建一张二分图，其中左边有 n 个点，表示 n 个点，右边有 $\binom{n}{2}$ 个点，第 $(i,j)(i<j)$ 个点表示第 i 个点和第 j 个点的边。从源点 S 向每个左部点 i 连 p_i 的流量，从每个右部点向汇点 T 连 1 的流量，并有 i 和 j 向 (i,j) 连边，流量为 $+\infty$。

Landau 定理的证明

于是就变成了二分图匹配模型，我们考虑 Hall 定理。于是二分图有完全匹配的充要条件为：对于左侧选择了点集 S，有 $|N(S)| \geq |S|$ 即为：

$$|S|(n-|S|)+\binom{|S|}{2} \geq \sum_{i \in S} p_i$$

考虑 S 的补集 T

$$\binom{|T|}{2} \leq \sum_{i \in T} p_i$$

旧事重提

题目描述

许多年前，有 n 只球队，两两之间有一场比赛，结果分为两种：

1. 平局：双方各得 1 分；
2. 决出胜负：胜者得 2 分，负者得 0 分。

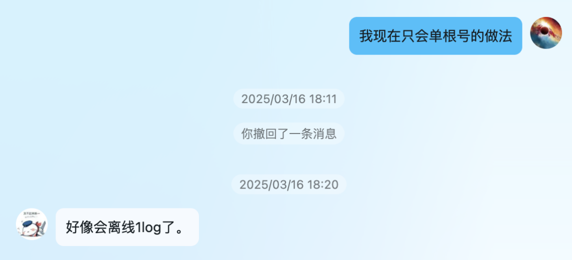
小 O 只知道第 i 只球队最终的得分在 $[l_i, r_i]$ 之间。他还会有 m 次修改记忆，第 j 次将第 x_j 只球队的得分区间改为 $[p_j, q_j]$。
小 O 想知道至少需要修复多少次，才能使得存在可能的比赛结果，使第 i 只球队的总得分在 $[l_i, r_i]$ 之间，其中每次修复如下：

1. 选择一个 i，将 l_i 减小 1；
2. 选择一个 i，将 r_i 增加 1。

数据范围

闲话

很遗憾，本题无人通过。
最高分：ecnerwala（55 分，03:40:47），并有多位选手获得 30 分。



大家觉得这是谁在出题？

刻画充要条件

令第 i 个人的得分为 a_i，我们考虑如何判断序列 a 是否可能为一组合法的得分方案。

结论

a 序列合法的充要条件为：

- $\sum_{i=1}^{n} a_i = n(n-1)$；
- 其次将 a_i 按照从小到大排序得到序列 a'，需要满足 $\forall p \in [1,n], \sum_{i=1}^{p} a'_i \geq p(p-1)$。

证明

这两个条件显然是必要的。

证明

证明

考虑构建一张二分图，其中左边有 n 个点，表示 n 只球队，右边有 $\binom{n}{2}$ 个点，第 $(i,j)(i<j)$ 个点表示第 i 只球队和第 j 只球队之间的比赛。

从源点 S 向每个左部点 i 连 a_i 的流量，从每个右部点向汇点 T 连 2 的流量，并有 i 和 j 向 (i,j) 连边，流量为 $+\infty$。

于是就变成了二分图匹配模型，我们考虑 Hall 定理。于是二分图有完全匹配的充要条件为：对于左侧选择了点集 S，有 $|N(S)| \geq |S|$ 即为：

$$2|S|(n-|S|)+|S|(|S|-1) \geq \sum_{i\in S} a_i$$

证明

证明

这个形式并不够好看，我们考虑其补集的形式。
我们考虑令 $T=\{1,2,\cdots,n\}\backslash S$，又由于两侧流量总和相同，则限制变为：

$$|T|(|T|-1)\le\sum_{i\in T}a_i$$

我们考虑最紧的条件，那么 T 一定为前 $|T|$ 小值，于是就得到了结论中的形式。

于是，我们对于 r 序列有限制：将 r 序列从小到大排序，前 i 个数的和至少为 $i(i-1)$；对于 l 序列，令 $l_i'=2(n-1)-l_i$，则就变成了一样的形式。

发现关键性质

结论

对于限制序列 l 和限制序列 r，只需要满足限制序列 l、限制序列 r 分别合法，则限制序列 l 和限制序列 r 组合起来依旧合法。

证明

我们考虑序列 a，初始有 $a_i = l_i$，每次我们找到 $a_i \neq r_i$ 中的最小的 a_i，执行 $a_i \leftarrow a_i + 1$ 操作。我们会发现最终序列会形成：

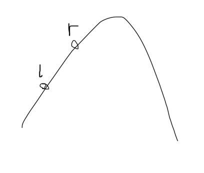
- 一段前缀为 r_i；
- 中间一段分为两部分，前一部分为 p，后一部分为 $p+1$；
- 一段后缀为 l_i。

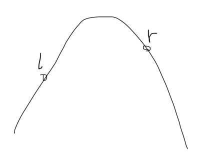
我们考虑令 $b_i = a_i - 2(i-1)$，则首先对于 r_i 部分，由于这些 r_i 一定是 r 序列中从大到小排好序的一段前缀；对于 l_i 部分同理。

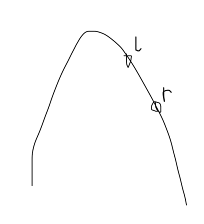
证明

证明

考虑 $p, p, \cdots, p, p+1, p+1, \cdots, p+1$ 这部分。我们考虑对 $2(i-1)$ 做差，注意到这部分一定是一段前缀满足 $\geq 2(i-1)$，一段后缀满足 $< 2(i-1)$，所以对应到前缀和一定是一段单峰函数。由于单峰函数任取两个点，一定有一个点是区间最小值，所以中间这部分是符合条件的。







算法 1

我们考虑根号重构，对于第 i 个块的一个数。假设在其前面有 a 个数，和为 b，且这个数在第 i 个块的第 c 个，前缀和为 d。那么权值为 $(a+c)(a+c-1)-(b+d)$，容易转化成一次函数的形式。
每次重构块时，对每个块维护凸包。注意到每次修改后，对于第 i 个块 c 只会最多变化 1。于是，我们建凸包时，要求如果一个点无法在任何整数取值中取到最值，我们也把它弹出去。这样一次修改，对于凸包上的最优值，只会至多移动一步。
时间复杂度 $O(n\sqrt{n})$。

算法 2

我们问题转化成了维护对序列 a 的单点修改，令 a 序列的前缀和序列为 $prea$，对固定序列 b，令序列 b 的前缀和为 $preb_i$，$\max_{i=1}^{n}\{preb_i - prea_i\}$。
尝试删除 a_j 并分析其影响，令剩下的序列为 a'，并令其前缀和为 $prea'$，则求 $\max_{i=1}^{n}\{preb_i - \min\{prea_i, prea_{i-1} + a_j\}\}$，也就是 $\max_{i=1}^{n-1}\{\max\{preb_i, preb_{i+1} - a_j\} - prea_i\}$。
于是等价于对于序列 $preb$，执行 $preb'_i = \max\{preb_i, preb_{i+1} - a_j\}$ 的操作。

算法 2

考虑对 $preb$ 的差分也就是序列 b，分析其影响。我们发现一定是一段后缀选择 $preb_{i+1} - b_i$，对应的前缀选择 $preb_i$，于是等价于在序列 b 中找到最后一个 $\le a_j$ 的数 l 和第一个 $> a_j$ 的数 r，并将 l, r 删除，加入 $l + r - a_j$。
同时，若不存在 l，则我们对答案增加 $r - a_j$，即将 a_j 操作成 r，不然就不满足条件。
我们考虑对修改进行线段树分治，同时在过程中维护序列，并使用双指针维护这个过程。
不难发现当前在线段树结点 x 后的序列长度，为修改区间经过这个线段树结点的次数。
时间复杂度 $O(n \log n)$。

Contents

谢谢大家

Thanks!