图论

kradcigam

江苏省常州高级中学

2025.8.2

Contents

Contents

Turysta

题目描述

给出一个 n 个点的有向图，任意两个点之间有且仅一条有向边。对于每个点 v，求出从 v 出发的一条经过点数最多，且没有重复经过同一个点两次及两次以上的简单路径。

数据范围

$2 \leq n \leq 2000$。

解法

Redei 定理

竞赛图一定有汉密尔顿路径。

Camion-Moon 定理

强连通竞赛图一定有汉密尔顿回路。

首先对竞赛图缩点，最终拓扑序一定是一条链。考虑如何在一个强连通竞赛图中构造汉密尔顿回路。

解法

首先，我们尝试构造汉密尔顿路径。考虑增量构造。我们逐个加点，设当前加入的点为 x，当前构造好的路径为 s 到 t，那么我们分类讨论：

1. 若 $x \to s$，我们直接让 x 连接 s，$s := x$;
2. 若 $t \to x$，我们直接让 t 连接 x，$t := x$;
3. 现在我们只剩下 $s \to x$，$x \to t$ 的情况，于是考虑链上一定存在一个点 y 以及 y 连接的点 z，满足 $y \to x$，$x \to z$。于是直接在 $y \to z$ 中插入 x 即可。

解法

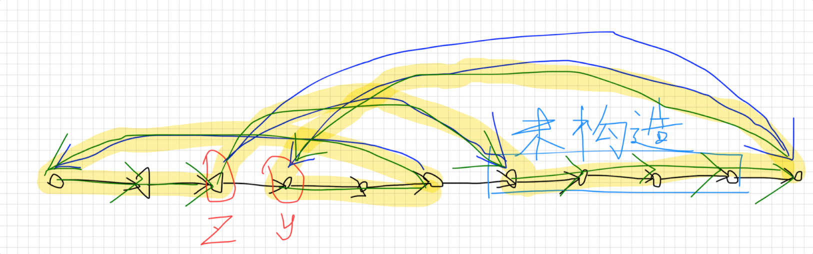
接着我们考虑构造汉密尔顿回路。我们依旧考虑增量构造（但不是纯增量构造）。设当前加入的点为 x，当前构造好的哈密顿路径起点为 s，我们依旧分类讨论：

1. 若 $x \to s$，那么我们直接按照汉密尔顿通路并加入 $x \to s$ 的边即可；
2. 若存在点 $x \to y$，y 在已经构造好的环中，我们找到从 s 开始往后第一个这样的点，设环中 $z \to y$。由于我们找的是第一个，并且 $s \to x$，所以，一定有 $z \to x$。于是就可以构造了。
3. 若不存在情况 2，则我们把这个点留下，并在之后一起构造。

解法

情况 2、3 的构造：

Example



时间复杂度 $O(n^2)$。

Invertation in Tournament

题目描述

每次操作，你可以选择任意一个顶点 v，并将所有与 v 相连的边的方向全部反转（即所有 $u \to v$ 的边变为 $v \to u$，所有 $v \to u$ 的边变为 $u \to v$）。
你需要用最少的操作次数使得该锦标赛图变为强连通图（如果可能的话）。
如果可以做到，还需要计算有多少种不同的方式可以用最少的操作次数使图变为强连通图（如果对于某一次操作，选择的顶点不同，则认为两种方式不同），对 998244353 取模。

数据范围

$3 \le n \le 2000$。

竞赛图与出度序列

竞赛图合法出度序列（Landau 定理）

给定一个非负整数序列 p，满足：

- $\forall i \in [1, n-1], p_i \le p_{i+1}$；
- $\sum_{i=1}^{n} p_i = \binom{n}{2}$。

存在一个竞赛图使得节点的出度分别为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的充要条件是 $\forall i \in [1, n], \sum_{j=1}^{i} p_j \ge \binom{i}{2}$。

证明

必要性：对于前 i 个点，相互之间有 $\binom{i}{2}$ 条边，因此 $\sum_{j=1}^{i} p_j \ge \binom{i}{2}$。

竞赛图与出度序列

证明

充分性：考虑构造一张 n 阶竞赛图。
初始我们在所有 $i<j$ 之间连 $i\to j$ 的边，得到度数序列 q 满足 $q_i=i-1$。
此时我们有 $\forall i\in[1,n],\sum_{j=1}^{i}q_j\le\sum_{j=1}^{i}p_j$，之后我们的目标是在该性质保持的情况下调整 q 直到 $p=q$。
我们找到最小的 $p_x\ne q_x$ 的位置 x 此时有 $q_x<p_x$。我们再找到最小的下标 y 满足 $q_y>p_y$，由于 $\sum_{i=1}^{n}p_i=\sum_{i=1}^{n}q_i$，所以 y 存在，且 $y>x$，于是有 $q_y>p_y\ge p_x>q_x$，所以 $q_y\ge q_x+2$。
由于差至少是 2，所以一定有 $\exists i$，有 $y\to i$ 的边和 $i\to x$ 的边。
我们进行调整，变成 $x\to i$ 的边和 $i\to y$ 的边，此时我们使 q_x 增加了 1，q_y 减小了 1。

竞赛图与出度序列

证明

并且不难发现此时仍然满足 $\forall i \in [1, n], \sum_{j=1}^{i} q_j \leq \sum_{j=1}^{i} p_j$ 的条件。
不难发现有限次调整后可以得到 $p = q$。

不过其实有更加简单的证明方法，我们会在后面提到。

竞赛图缩点

我们只需要找到所有点的度数序列并将其排序得到 $p_1, p_2, \cdots, p_n$。
找到所有满足 $\sum_{j=1}^{i} p_j = \binom{i}{2}$ 的 i，形如 $s_1, s_2, \cdots, s_k$。
则这张图有 k 个强连通分量，第 i 个强连通分量对应度数序列排名在 $[s_{i-1}+1, s_i]$ 的点（不妨令 $s_0 = 0$）。

解法

首先若原题强连通，答案为 0。
若形成 >2 个强连通分量，则我们可以对一个不在头、尾强连通分量的点操作，不难发现此时整个图强连通。
现在只需要考虑只有 2 个强连通分量的情况。

结论

$n \geq 4$ 阶强连通竞赛图，存在 $n-1$ 阶强连通竞赛子图。

证明

先找到这个强连通 n 阶竞赛图的哈密顿回路，不妨假设是 $p_1, p_2, \cdots, p_k$，我们考虑将 p_1 删除。

解法

证明

- 若剩下的图强连通，则必然存在哈密顿回路，于是我们找到了 $n-1$ 阶连通竞赛子图；
- 若存在一个强连通分量大小 ≥ 3，我们可以跳过首结点或尾结点；
- 否则，所有强连通分量大小为 1，这时我们可以跳过一个结点。

于是，我们可以构造出一个大小为 $n-1$ 的环。

因此，这两个强连通分量中，若存在一个大小 ≥ 4 的，那么答案必然为 1。
现在还剩下的情况都满足 $n \leq 6$，暴力枚举即可。
使用兰道定理求解强连通分量，时间复杂度 $O(n^2 \log n)$。

Contents

算法

我们先严格定义一下网络流。给定一个有源汇网络，对于任意流函数 f，满足如下限制：

- 容量限制：$f(u,v) \le c(u,v)$；
- 流量平衡：除去 s,t 以外 $f(u) = \sum_v f(u,v) = 0$；
- 反对称性：$f(u,v) = -f(v,u)$

称这个流的流量为 $|f|$，显然有 $f(s) = -f(t) = |f|$。
割 $\{S,T\}$ 的权值记为 $||S,T||$。
残量网络是一个新的网络 G_f，满足 $c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$。

最小割

最小割为在一张有向带正权图上，删除最小权值总和的边，使得 S 无法到达 T。
于是这就等价于将点集分成两部分，一部分属于 S，其它部分属于 T，而 S 和 T 之间的边就是一组合法的割。

定理

最小割等于最大流。

最小割

证明

- 充分性：对于一组最大流的解，我们将加入所有未流满的边，那么此时 S 和 T 不连通，而令包含 S 的极大连通块为 S 集合，此时就是一组合法割的划分，于是我们可以说明最小割**小于等于**最大流。
- 必要性：我们令割边集合为 C。

$$
\begin{aligned}
cut = \sum_{(u,v)\in C} c(u,v) &\geq \sum_{(u,v)\in C} f(u,v) \\
\geq \sum_{(u,v)\in C} f(u,v) - \sum_{(u,v)\in E\wedge u\in T\wedge v\in S} f(u,v) &= |f|
\end{aligned}
$$

最后一步利用了 $\sum_{i\in S} f(i) = f(s) = f$。

最小割

我们研究全体最小割方案的形态，根据上面对于最小割大于等于最大流的证明，我们可以总结出割的 3 条性质。

1. S 集合和 T 集合之间的边满流（第一个大于等号）；
2. 不存在 T 集合到 S 集合的流量。

于是，我们考虑建一张新图。将一组最大流的方案中，对于所有 $f(u,v)>0$ 的边，我们在新图中连一条 $u \in v$ 的有向边，为了方便理解，我们暂时认为边权为 $f(u,v)$。

由于不存在 T 到 S 的流量，因此这是一张 S 到 T 的 DAG，而其中的任意一组割在数值意义上都是最小割。

最小割

但是因为存在 $f(u,v) \neq c(u,v)$，而最小割上的所有边都满流，所以我们再对所有 $f(u,v) \neq c(u,v)$，加入 $v \to u$ 的边表示限制，即割不能同有：

- $u \in S$;
- $v \in T$。

这一点的思想有点类似于 2-SAT。于是，我们再将新图缩强连通分量，因为显然一个强连通分量内必然属于同一个集合。
于是最小割即为缩完强连通分量的新图上的一组割。并且由于跑完最大流不存在 S 到 T 的流量，所以 S 和 T 不在一个强连通分量，所以最小割存在。
其表现实际上就是将残量网络上所有流量不为 0 的边建出的图的反图，在后面的讨论中我们都以残量网络上所有流量不为 0 的边建出的图来讨论，此时是一张 T 到 S 图。

祭祀

题目描述

给定一个 n 个点，m 条边的简单有向无环图（DAG），求出它的最长反链，并构造方案。
最长反链：一张有向无环图的最长反链为一个集合 $S \subseteq V$，满足对于 S 中的任意两个不同的点 $u, v \in S$ $(u \neq v)$，u 不能到达 v，v 也不能到达 u，且 S 的大小尽量大。

数据范围

$1 \leq n, m \leq 5 \times 10^4 (?)$。

最大权闭合子图

定义

一张有向图，点有点权可正可负，选出一张子图，满足子图中的所有点出度指向的点依旧在这个子图内，则此子图是闭合子图。

而最大权闭合子图则是最大化点权和。
做法是我们见两个虚点 S, T，先取所有正权点，并将 S 连向所有正权点，再将所有负权点都连向 T，边权均为其权值。

- 对于正权点，我们将这条边割了代表放弃不选这个点；
- 对于负权点，我们将这条边割了代表委曲求全选这个点。

对于原图的边 (u, v)，我们连 $(u, v, +\infty)$ 表示限制，跑最小割即可。

解法

这里我们不会讲传统的 $O(n^{3.5})$ 的做法，并且也没有什么关系，大家可以自行学习。

首先我们对本题采用最大权闭合子图的转化：对每个点拆成 (u_0, u_1)，其点权分别为 -1 和 1，入边全部改到 u_0，出边改到 u_1，然后求最大权闭合子图。

此时所有 u_1 被选且 u_0 未被选的点就是一组最长反链。

解法

所以，要求解该点是否可以被选，则等价于求最大权闭合子图上，是否存在一组最小割，满足 $u_0 \in T, u_1 \in S$。
将其转化到残量网络上大小为 0 的割，则相当于问残量网络上 u_1 能否走 $c_f(u, v) > 0$ 的边到 u_0，若能则这个点不能被选。
由于 u_0 显然总是能到 u_1，这等价于这两个点在 G_f 上属于一个强连通分量。可以在求出残量网络后 $O(n + m)$ 解决。
需要注意的是，需要先考虑 u_0 是否和 S 在同一个强连通分量，若是的话显然没有割使得 $u_0 \in T$，u_1 同理。

如何求解字典序最小的反链

我们按照直接讲解最小割的方法，建出新图（T 到 S 图）并对此图缩点。现在把 S 能到达的点以及能到达 T 的点在最小割中的归属已经确定，标记它们。

从小到大枚举每个点，如果可以令 $u_0 \in S, u_1 \in T$ 并且不违反已有的标记，并且两个点不在一个强连通分量，则把这个点加入答案，然后把 u_0 可达的点标记为 S，把可达 u_1 的点标记为 T；否则我们直接跳过这个点，显然此时不关心这两个点最终在最小割中的位置。

复杂度也是 $O(n+m)$，瓶颈在于前面的跑网络流。

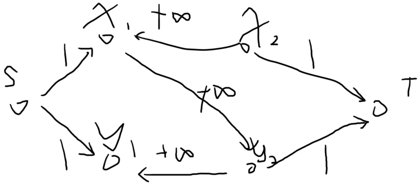
Dinic 的几种时间复杂度

来源在标题，我不是很理解其中的道理☹。

- 一般情况：时间复杂度为 $O(n^2m)$；
- $O(\sqrt{\sum_p \min\{d_p^{in}, d_p^{out}\}})$；
- 各边容量均为 1 的网络：时间复杂度 $O(m\min\{m^{\frac{1}{2}}, n^{\frac{2}{3}}\})$；
- 单位网络（除源汇外各点入度不超过 1 或出度不超过 1。）：时间复杂度为 $O(m\sqrt{n})$。

解法

很遗憾，这个图并不能用上面的任何方式分析到更低的时间复杂度。



但实际跑起来很快。

Everywhere is Sparser than Whole (Judge)

题目描述

我们将非空顶点集合的简单无向图的密度定义为 $\frac{\text{(边数)}}{\text{(顶点数)}}$。

给定正整数 N，D，以及一个有 N 个顶点、DN 条边的简单无向图 G。G 的顶点编号为 1 到 N，第 i 条边连接顶点 A_i 和顶点 B_i。请判断 G 是否满足以下条件。

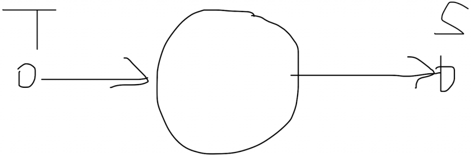
条件：设 G 的顶点集合为 V。对于 V 的任意**非空真**子集 X，X 的导出 G 的子图的密度严格小于 D。

数据范围

$ND \leq 5 \times 10^4$。

解法

我们看成选边有 1 的权值，同时必须要选择对应的两个端点，选点有 $-D$ 的代价，判断是否存在一个非空真子图，其权值 ≥ 0。
于是我们先建出最大权闭合子图的建图，如果求出来最大权闭合子图 > 0，那么显然合法。
否则，根据上面的最小割理论，我们只需要判断新图上强连通分量数是否为 3 即可，此时：



这是因为 S 集合仅有 S 构成、T 集合仅由 T 的割构成是一定成立的，而条件要求仅由这两组割成立。

Contents

Hall 定理

定理

对于一张二分图，若存在完美匹配，当且仅当对于所有集合 S 满足 $|N(S)| \geq |S|$。

证明

考虑最小割。

Landau 定理的证明

考虑构建一张二分图，其中左边有 n 个点，表示 n 个点，右边有 $\binom{n}{2}$ 个点，第 $(i,j)(i<j)$ 个点表示第 i 个点和第 j 个点的边。从源点 S 向每个左部点 i 连 p_i 的流量，从每个右部点向汇点 T 连 1 的流量，并有 i 和 j 向 (i,j) 连边，流量为 $+\infty$。

Landau 定理的证明

于是就变成了二分图匹配模型，我们考虑 Hall 定理。于是二分图有完全匹配的充要条件为：对于左侧选择了点集 S，有 $|N(S)| \geq |S|$ 即为：

$$|S|(n-|S|)+\binom{|S|}{2} \geq \sum_{i \in S} p_i$$

考虑 S 的补集 T

$$\binom{|T|}{2} \leq \sum_{i \in T} p_i$$

旧事重提

题目描述

许多年前，有 n 只球队，两两之间有一场比赛，结果分为两种：

1. 平局：双方各得 1 分；
2. 决出胜负：胜者得 2 分，负者得 0 分。

小 O 只知道第 i 只球队最终的得分在 $[l_i, r_i]$ 之间。他还会有 m 次修改记忆，第 j 次将第 x_j 只球队的得分区间改为 $[p_j, q_j]$。

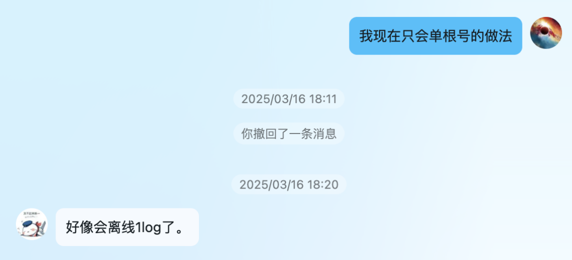
小 O 想知道至少需要修复多少次，才能使得存在可能的比赛结果，使第 i 只球队的总得分在 $[l_i, r_i]$ 之间，其中每次修复如下：

1. 选择一个 i，将 l_i 减小 1；
2. 选择一个 i，将 r_i 增加 1。

数据范围

闲话

很遗憾，本题无人通过。
最高分：ecnerwala（55 分，03:40:47），并有多位选手获得 30 分。



大家觉得这是谁在出题？

刻画充要条件

令第 i 个人的得分为 a_i，我们考虑如何判断序列 a 是否可能为一组合法的得分方案。

结论

a 序列合法的充要条件为：

- $\sum_{i=1}^{n} a_i = n(n-1)$；
- 其次将 a_i 按照从小到大排序得到序列 a'，需要满足 $\forall p \in [1, n], \sum_{i=1}^{p} a'_i \geq p(p-1)$。

证明

这两个条件显然是必要的。

证明

证明

考虑构建一张二分图，其中左边有 n 个点，表示 n 只球队，右边有 $\binom{n}{2}$ 个点，第 $(i,j)(i<j)$ 个点表示第 i 只球队和第 j 只球队之间的比赛。
从源点 S 向每个左部点 i 连 a_i 的流量，从每个右部点向汇点 T 连 2 的流量，并有 i 和 j 向 (i,j) 连边，流量为 $+\infty$。
于是就变成了二分图匹配模型，我们考虑 Hall 定理。于是二分图有完全匹配的充要条件为：对于左侧选择了点集 S，有 $|N(S)| \geq |S|$ 即为：

$$2|S|(n-|S|)+|S|(|S|-1) \geq \sum_{i\in S} a_i$$

证明

证明

这个形式并不够好看，我们考虑其补集的形式。
我们考虑令 $T=\{1,2,\cdots,n\}\backslash S$，又由于两侧流量总和相同，则限制变为：

$$|T|(|T|-1)\leq\sum_{i\in T}a_i$$

我们考虑最紧的条件，那么 T 一定为前 $|T|$ 小值，于是就得到了结论中的形式。

于是，我们对于 r 序列有限制：将 r 序列从小到大排序，前 i 个数的和至少为 $i(i-1)$；对于 l 序列，令 $l_i'=2(n-1)-l_i$，则就变成了一样的形式。

发现关键性质

结论

对于限制序列 l 和限制序列 r，只需要满足限制序列 l、限制序列 r 分别合法，则限制序列 l 和限制序列 r 组合起来依旧合法。

证明

我们考虑序列 a，初始有 $a_i = l_i$，每次我们找到 $a_i \neq r_i$ 中的最小的 a_i，执行 $a_i \leftarrow a_i + 1$ 操作。我们会发现最终序列会形成：

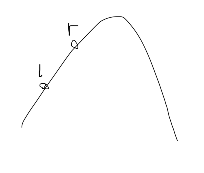
- 一段前缀为 r_i；
- 中间一段分为两部分，前一部分为 p，后一部分为 $p + 1$；
- 一段后缀为 l_i。

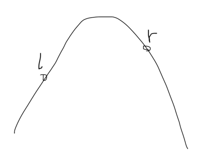
我们考虑令 $b_i = a_i - 2(i - 1)$，则首先对于 r_i 部分，由于这些 r_i 一定是 r 序列中从大到小排好序的一段前缀；对于 l_i 部分同理。

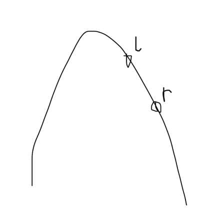
证明

证明

考虑 $p, p, \cdots, p, p+1, p+1, \cdots, p+1$ 这部分。我们考虑对 $2(i-1)$ 做差，注意到这部分一定是一段前缀满足 $\geq 2(i-1)$，一段后缀满足 $< 2(i-1)$，所以对应到前缀和一定是一段单峰函数。由于单峰函数任取两个点，一定有一个点是区间最小值，所以中间这部分是符合条件的。







算法 1

我们考虑根号重构，对于第 i 个块的一个数。假设在其前面有 a 个数，和为 b，且这个数在第 i 个块的第 c 个，前缀和为 d。那么权值为 $(a+c)(a+c-1)-(b+d)$，容易转化成一次函数的形式。每次重构块时，对每个块维护凸包。注意到每次修改后，对于第 i 个块 c 只会最多变化 1。于是，我们建凸包时，要求如果一个点无法在任何整数取值中取到最值，我们也把它弹出去。这样一次修改，对于凸包上的最优值，只会至多移动一步。
时间复杂度 $O(n\sqrt{n})$。

算法 2

我们问题转化成了维护对序列 a 的单点修改，令 a 序列的前缀和序列为 $prea$，对固定序列 b，令序列 b 的前缀和为 $preb_i$，$\max_{i=1}^{n}\{preb_i - prea_i\}$。
尝试删除 a_j 并分析其影响，令剩下的序列为 a'，并令其前缀和为 $prea'$，则求 $\max_{i=1}^{n}\{preb_i - \min\{prea_i, prea_{i-1} + a_j\}\}$，也就是 $\max_{i=1}^{n-1}\{\max\{preb_i, preb_{i+1} - a_j\} - prea_i\}$。
于是等价于对于序列 $preb$，执行
$preb'_i = \max\{preb_i, preb_{i+1} - a_j\}$ 的操作。

算法 2

考虑对 $preb$ 的差分也就是序列 b，分析其影响。我们发现一定是一段后缀选择 $preb_{i+1} - b_i$，对应的前缀选择 $preb_i$，于是等价于在序列 b 中找到最后一个 $\leq a_j$ 的数 l 和第一个 $> a_j$ 的数 r，并将 l, r 删除，加入 $l + r - a_j$。

同时，若不存在 l，则我们对答案增加 $r - a_j$，即将 a_j 操作成 r，不然就不满足条件。

我们考虑对修改进行线段树分治，同时在过程中维护序列，并使用双指针维护这个过程。

不难发现当前在线段树结点 x 后的序列长度，为修改区间经过这个线段树结点的次数。

时间复杂度 $O(n \log n)$。

Contents

Edge coloring of bipartite graph

题目描述

给你一个无向的二分图。现在将它的每条边染色，使得任意两条相邻（有公共顶点）的边颜色不同。请你计算一种染色方案，使得用到的颜色数量最少。

数据范围

$1 \leq a, b \leq 1000$，$1 \leq m \leq 10^5$。

解法

结论

二分图的色数是最大度数。

证明

必要性显然，充分性考虑构造。
我们每次加入一条边 (x, y)，找到 x 出边中最小未出现的颜色 a，y 出边中最小未出现的颜色 b，若 $a = b$ 则直接连颜色为 a 的边即可。
否则，我们找到增广路即可。因为是二分图所以增广路不可能出现环，所以增广路存在。

正则二分图

Definitions (正则二分图)

正则二分图的每个点度数相同，为 k。

结论

正则二分图一定有完美匹配。

证明

对于一个左部点集 S，度数总和为 $|S|k$，所以有 $|N(S)|k \geq |S|k$，得到 $|N(S)| \geq |S|$。

找出一组完美匹配

随机找增广路即可，时间复杂度 $O(n\log n)$。
证明不会，可以详见这里。

找出 k 组完美匹配

虽然上面的算法求解单次匹配的时间复杂度很优，但是我们的一个问题是难以进行删边的操作，于是我们可以：

- 在 k 是奇数时：找出一组完美匹配，并暴力将边删除，于是 k 减小了 1；
- 在 k 是偶数时：我们找到一组欧拉回路，将 k 的规模除 2。

时间复杂度 $O(nk\log n)$。
于是上面的二分图色数问题，我们可以加一些边补成正则二分图得到 $O(n\max_i\{deg_i\}\log n)$ 的时间复杂度。

拉丁方

题目描述

我们定义一个 $n \times n$ 的矩阵 A 为拉丁方，当且仅当，每行每列都是一个 $1 \sim n$ 的排列。
现在给你一个矩阵 A 左上角的一个 $R \times C$ 的子矩阵，也就是 $A_{i,j}$ $(1 \le i \le R，1 \le j \le C)$。问能不能将剩下的位置填上数使得它是一个拉丁方。

数据范围

$1 \le T \le 10$，$1 \le R, C \le n \le 500$。

解法

先考虑 $C = n$ 怎么做，此时必然有解。
相当于左部点向 k 个不同右部点有连边，要求 k 个完美匹配的方案，也就是二分图边染色。
再考虑 $C < n$ 的情况，假设颜色 x 已经出现的次数为 c_x，若 $c_x + 2n - R - C < n$，即 $c_x < R + C - n$ 则一定不合法，因为每次加一行或加一列最多会多一个 x。
我们考虑把 $R \times C$ 的矩形补成 $R \times n$ 的矩形，对于前 R 行，每行向这行没有出现过的颜色连边。这样会得到左边 R 个点，每个点出度 $n - C$，右边有 n 个点，每个点度数 $\leq n - C$。
我们通过添加 $n - R$ 个虚点和一些边，将其补成正则二分图即可。
时间复杂度 $O(n^2 \log n)$。

Contents

谢谢大家

Thanks!