图论

kradcigam

江苏省常州高级中学

2025.8.2

Contents

概述

图论非常困难，深不可测，本次讲课准备了一些，但仍然有很多没有涉及到。
课件内容比较多，顶部的进度条都溢出了，课后会根据上午、下午的讲课进度拆成两个课件最后发给大家。并根据上午讲课内容（可能）再做一些扩充。
希望大家能积极思考，能有所收获☺！

Contents

菜肴制作

题目描述

给定 n 菜肴和 m 个限制条件，对于每个限制条件 x 和 y，表示 x 号菜肴必须先于 y 号菜肴。让你求出在满足最小号的菜肴尽量靠前的前提下次小号的菜肴也尽量靠前、次小号的菜肴尽量靠前的前提下次次小号的菜肴也尽量靠前，以此类推，最优的菜肴制作顺序。如若无解，则输出 Impossible!。

数据范围

$1 \leq n, m \leq 5 \times 10^5$。

分析

结论

最优解就是符合条件的排列中，反转序列的字典序最大的排列。

证明

首先，当 $|V| = 1$ 时结论显然。
其次，假设结论对于 $|V| < n$ 均成立。设图 $G = (V, E)$ 中最小点编号为 x，其中 $|V| = n$，则整个点集分为两部分：

1. $S = \{z \mid$ 存在一条路径 $z \to x\}$；
2. $T = V - S$。

特别地，有 $x \in S$。

分析

引理

令 $m := |S|$。则最小序最小的拓扑序 a 一定满足 $\{a_x | 1 \le x \le m\} = S$ 且 $a_m = x$。

证明

由于 x 在拓扑序上的位置越小，最小序就越小，所以 x 尽可能靠前更优。由拓扑序的定义，$S - \{x\}$ 中的所有点在拓扑序上一定排在 x 之前。
所以 $a_p = x$ 是 $p \ge m$ 的充分条件。于是最小的最小序满足 $p = m$。

分析

现将整个图可以分成三个子图，其点集分别为 $S-\{x\}$、$\{x\}$ 和 T。
由于 $|S|+|T|=n$，所以 $|S-\{x\}|,|T|<n$，由假设得其结论成立。
因为 x 是编号最小的，将 x 向后移不能获得更大的反向字典序。
而 $S-\{x\},T$ 的结论已证。于是对于图 G 结论成立。
所以对于任意的 DAG，由数学归纳法得结论均成立。
证毕。

做法

所以，做法就非常简单了。我们建出反图，然后跑拓扑排序，这里我们用优先队列维护堆内最大值即可。
时间复杂度 $O(n\log n+m)$。

Contents

算法

- 单源最短路：Bellman-Ford，Dijkstra，SPFA（判负环）;
- 全源最短路：Johnson，Floyd;
- 扩展：同余最短路，差分约束;
- 核心：三角不等式。

我们通过两道很像的题目来感受一下，大家像先听哪道题☺。

Flights for Regular Customers

题目描述

给定一张 n 个点 m 条边的有向图。
一开始你在 1 号节点，你要走到 n 号节点去。
只有当你已经走过了至少 d_i 条边时，你才能走第 i 条边。
问最少要走多少条边，或判断无法到达。

数据范围

$1 \le n, m \le 150$，$0 \le d_i \le 10^9$。

解法

注意到 n, m 很小，我们按照边出现的时间段划分，先通过矩阵乘法来维护每段时间内哪些点可到，然后再 BFS，求出最短路。
直接做时间复杂度为 $O(n^3 m \log d)$，不能通过。
注意到维护每段时间内哪些点可到可以将矩阵转置，并用 bitset 优化。
时间复杂度 $O(\frac{n^3 m \log d}{\omega})$。

Dirty Arkady's Kitchen

题目描述

给定一张 n 个点 m 条边的无向图。
一开始你在 1 号节点，你要走到 n 号节点去。
只有当你已经走过了至少 l_i 条边，少于 r_i 条边时，你才能走第 i 条边。
问最少要走多少条边，或判断无法到达。

数据范围

$1 \leq n, m \leq 5 \times 10^5$，$0 \leq l_i < r_i \leq 10^9$。

闲话

初三时候模拟赛“场切”了。

闲话

初三时候模拟赛“场切”了。
但是当时我的代码在 $n=1,m=0$ 时会输出 -1；

闲话

初三时候模拟赛“场切”了。
但是当时我的代码在 $n=1,m=0$ 时会输出 -1；
结果出题人不仅捆包，还在每个 subtask 里面都放了一个 $n=1,m=0$ 的数据；

闲话

初三时候模拟赛“场切”了。
但是当时我的代码在 $n=1,m=0$ 时会输出 -1；
结果出题人不仅捆包，还在每个 subtask 里面都放了一个 $n=1,m=0$ 的数据；
但教练评测的时候把包拆了☺。

解法

由于是无向图，所以我们可以在一条边上来回移动，浪费时间，所以到达一条边的一个端点肯定是越早越好，于是分在哪条边上，哪个端点，以及长度的奇偶性来设状态 $f_{i,0/1,0/1}$。
然后跑 dij 即可。
时间复杂度 $O(m \log m)$。

Contents

算法

- Kruskal，Prim，Boruvka；

感觉最小生成树的用途显著比最短路局限（?）

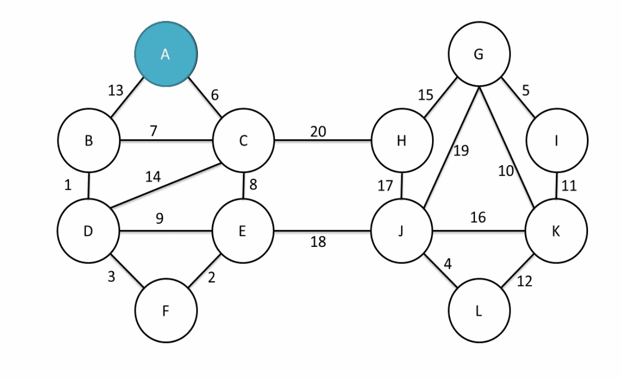
Boruvka

我们定义一个连通块的**向外最小边**为它连向其它连通块的边中权值最小的那一条。
初始时，$E' = \varnothing$，每个点各自是一个连通块：

1. 计算每个点分别属于哪个连通块。将每个连通块都设为“没有最小边”；
2. 遍历每条边 (u, v)，如果 u 和 v 不在同一个连通块，就用这条边的边权分别更新 u 和 v 所在连通块的最小边；
3. 如果所有连通块都没有最小边，退出程序，此时的 E' 就是原图最小生成森林的边集。否则，将每个有最小边的连通块的最小边加入 E'，返回第一步。

由于每轮连通块数量至少会除 2，所以不会超过 $O(\log n)$ 轮。
时间复杂度 $O(m \log n)$。

Boruvka



Kuroni and Antihype

题目描述

有 n 个点，每个点有点权 a_i。i, j 之间有边当且仅当 a_i AND $a_j = 0$。执行以下过程 n 次：

1. 选择一个点 u 染色；
2. 选择一个与 u 相连的且已经染色的点 v，将 a_v 计入权值。如果没有合法的 v，跳过该步。

求最大的权值。

数据范围

$1 \le n \le 2 \times 10^5$，$0 \le a_i \le 2 \times 10^5$。

转化

我们考虑加入一个点权为 0 的点，对于 i,j 满足 a_i AND $a_j = 0$，将其边权设为 $a_i + a_j$。这样每个点的点权会被多算一次贡献，我们最后再减掉所有点的点权总和即可。
于是，我们的问题转化成：求出这张新图的最大生成树。

解法 1

我们考虑 Kruskal。注意到总边数很少，所以从小到大枚举边权，然后枚举子集即可。
时间复杂度 $O(3^{\log_2 a})$。

解法 2

令 $k=\lfloor\log_2 a_i\rfloor$。
我们考虑 Boruvka，那么对于一个点权为 x 的点，相当于要找和它不在同一个连通块的，点权最小的满足点权和 x AND 为 0 的，于是相当于找 $2^{k+1}-1-x$ 的子集中不和该点在一个连通块的点权最小值。
于是，每次我们跑高维前缀和，并维护来自不同连通块的最大值、次大值。
时间复杂度 $O((n+a\log a)\log n)$。

Contents

算法

欧拉路径是经过图中每条边恰好一次的路径，欧拉回路是经过图中每条边恰好一次的回路。

- 结论：（半）欧拉图判定：
  - **（弱）连通**；
  - 度数奇偶性。
- 算法：Hierholzer 算法，每次找到一个环，并倒序插入来实现一边 DFS 找环一边插环；

走亲访友

题目描述

n 个点 m 条边的简单无向连通图，构造满足下面要求的路径：

- 起点为 s，终点不限。
- 对于走过的每条边 (u_i, v_i)，你要额外决定 $p_i \in \{0, 1\}$，满足：
  1. $p_i = 0$ 表示删除这条边，**且之后不能再次经过该边**；
     $p_i = 1$ 表示不删除这条边。
  2. 如果 $i > 1$，那么 $u_i = v_{i-1}$。
- 路径的长度不能超过 k。
- 最后未删除的边组成一棵 n 个结点的树。

数据范围

$1 \le n \le 10^3$，$1 \le m \le \frac{n(n-1)}{2}$，$k \ge n + m$。

Hint

可以证明在本题的限制条件下，一定存在合法的方案。

算法 1：$k = 2m$

考虑 DFS 出一棵生成树，对于反向边，我们先往后走一次，再走回来，并在走回来的时候把这条边删掉。
这样一条边只会至多经过两次，路径长度至多为 $2m$。
~~不过这个做法似乎并没有前途。~~

算法 2：$k = n + m$

路径是陌生的，但是回路是熟悉的。
我们尝试将限制**变紧**：把路径改成回路，即要求起点终点相同。
考虑欧拉回路要求每个点的度数是偶数，于是我们可以先 DFS 出一棵生成树。然后自底向上，确定每个子树内的所有点度数都为偶数。
如果当前子树根的度数为奇数，那么就将这个点和它父亲的边复制一遍，即要求这条边走两遍。
对于该非生成树上的边，我们只会恰好经过一次，经过之后删去即可。
这样生成树的边只会至多经过两次，非生成树的变只会至多经过一次，路径长度至多为 $n + m - 1$。

Mike and Fish

题目描述

给定 n 个整点，你要给每个点染成红色或蓝色。
要求同一水平线或垂直线上两种颜色的数量最多相差 1。

数据范围

$1 \leq n \leq 2 \times 10^5$，$1 \leq x_i, y_i \leq 2 \times 10^5$。

解法

对于网格图一个常见的想法是，在横纵坐标之间连一条边。
我们再将给每个点染色看成是给边定向，于是限制转化为对每个点的入度和出度最多相差 1。
由于奇点一定有偶数个，所以我们新建一个虚点 0，并和所有奇度点连边，最后跑一遍欧拉回路即可。
时间复杂度 $O(n)$。

Balance

题目描述

有 N 台评测机，T 个题目（编号为 $1, 2, \cdots, T$）。组委会已经确定，每台评测机要评测哪些提交（数目相同，都是 S 个提交，保证 S 是 2 的整数次幂）。在接下来的 S 分钟内，每分钟每台评测机会评测一个提交。
每个提交都会提交至某个题目。由于存数据的机器太脆弱了，所以要求，对于所有题目和任意两个时刻，在这两个时刻，这个题的被评测的提交的数量之差不超过 1。
请构造一组方案，使得满足上面的条件。

数据范围

$1 \le N, S, T \le 10^5$，$NS \le 5 \times 10^5$，保证 S 是 2 的幂。

$S = 2$

我们考虑 $S = 2$ 怎么做，我们将 $a_{i,1}$ 和 $a_{i,2}$ 连一条无向边，于是我们的操作相当于对边定向。

- 如果 $a_{i,1} \to a_{i,2}$ 那么相当于 $a_{i,1}$ 放第一列，$a_{i,2}$ 放第二列；
- 如果 $a_{i,2} \to a_{i,1}$ 那么相当于 $a_{i,2}$ 放第一列，$a_{i,1}$ 放第二列。

那么我们相当于要求对于所有点满足出度和入度的差不超过 1。
我们考虑取出所有度数为奇数的点，注意到这样的点总共只有偶数个。我们建一个超级源点的 S，对其中一半的点，S 连出；对另一半的点，S 连入，这样把限制变紧，就变成要求所有点的入度和出度相等。
于是，我们跑欧拉回路即可。

解法

那么，对于一般情况，我们可以对于一行，任选一半的点和另一半的点连无向边，然后再进行定向操作，表示哪个点放在前一半的列上，哪个点放在后一半的列上。
之后的做法和 $S = 2$ 一样，这样我们可以每次把 S 的规模减半。
时间复杂度 $O(ns(\log n + \log s))$。

Contents

DAG 可达性

一般有两种做法：

- 记 $f_{i,j}$ 表示点 i 能否到达点 j。将所有点拓扑排序，每次将所有出边用 bitset 维护或即可。
  时间复杂度 $O(\frac{nm}{w})$。
- ~~线段树合并，并维护哈希值，如果哈希值相同则直接返回。~~
  ~~时间复杂度 $O(nm\log n)$。~~
  有的时候会有奇效☺。

Example

- Miny；
- UNR 2025 Day1T3 歪解。

Dynamic Reachability

题目描述

给定一张 n 个点 m 条边的有向图，每条边有一个黑或白的颜色，初始颜色为全黑，有 q 次操作，操作有如下两种类型：

- 1 k，表示将第 k 条边的颜色取反；
- 2 u v，表示查询点 u 能否仅通过黑边到达点 v。

数据范围

$n \leq 50000$，$m, q \leq 10^5$，12s/512MB。

题解

首先考虑对于一张 DAG 怎么做，我们用 bitset ，第一维记录当前点，第二维记录询问，表示当前点能否走到这个询问。
那么每次颜色取反操作表示的是对一个区间的询问一条边不能走，我们按照逆拓扑序遍历，每次将儿子的 bitset 先与上能走的询问再继承上来即可。

题解

而对于有向图就可能出现环，我们进行操作分块，每 B 次一块。块内先忽略被取反的边，将所有黑边构成的图缩点，然后用有向无环图的做法可以做出不考虑被操作的 $O(B)$ 条边的答案。
加入这 B 条边也很容易，我们取出所有 $O(B)$ 个边的端点和询问的点，对于每个询问我们只在乎这些关键点之间的连通性，bfs 求解即可，bitset 优化之后总复杂度 $O(\frac{q(n+m)}{w}+\frac{nq}{B}+\frac{qB^2}{w})$。

Phoenix and Odometers

题目描述

给定一张 n 个点 m 条边的图，有边权，进行 q 次查询，每次查询给定三个参数 v, s, t，你需要判断是否存在一条起点终点均为 v 的路径，满足路径长度 x，有 $x + s \equiv 0 \pmod t$。

数据范围

$1 \le n, m, q \le 2 \times 10^5$。

解法

经过转化可以发现只需要求解结点 v 所在强连通分量内，所有简单环环长的 $\gcd$ 令其为 d。

结论

对于数 p，$p|d$ 当且仅当能够构造一组 $\{dis_n\}$，满足对于所有有向边 (u, v, w)，满足 $dis_v \equiv dis_u + w$。

解法

证明

充分性：我们的目标是说明符合条件的一定是 d 的约数。
我们发现对于任意一个环经过了点 $p_1, p_2, \cdots, p_k$，设点 p_i 到点 $p_{i \bmod k+1}$ 的边权为 v_i，则有 $dis_{p_i} + v_i \equiv dis_{p_{i \bmod k+1}}$，即 $v_i \equiv dis_{p_{i \bmod k+1}} - dis_{p_i}$，那么得到 $\sum_{i=1}^{k} v_i \equiv \sum_{i=1}^{k} dis_{p_{i \bmod k+1}} - dis_{p_i} \equiv 0 \pmod p$。
所以环长是 p 的倍数，即能说明 p 是 d 的约数。

解法

证明

必要性：我们的目标是说明 d 的约数一定符合条件。
我们只需要对 d 进行一组 dis 构造，我们随便取一个点 rt 做根，并令 $dis_{rt}=0$，再找到一棵 rt 为根的外向生成树，对于外向树上的每条边 (u,v,w)，我们令 $dis_v \equiv dis_u + w \pmod d$。
由于强连通，每个点 i 必然存在一条到 rt 的路径，而这条路径在 $\pmod d$ 意义下权值为 $-dis_i$。
我们再考察一条非树边 (u,v,w)，由于 v 到 rt 有 $\pmod d$ 意义下权值为 $-disv$ 的路径，因此 $-dis_v + dis_u + w \equiv 0 \pmod d$，即 $dis_v \equiv dis_u + w \pmod d$。

使用 tarjan 求解强连通分量，时间复杂度 $O(n)$。

Doctor's Brown Hypothesis

题目描述

给你一张 n 个点 m 条边的有向图，你需要找出有多少个点对 $(u, v), 1 \le u \le v \le n$，满足存在一条从 u 到 v 的长度为 k 的途径，和一条从 v 到 u 的长度为 k 的途径。

数据范围

$1 \le n \le 10^5$，$0 \le m \le 2 \times 10^5$，$n^3 \le k \le 10^{18}$。

解法

首先 u, v 显然需要在一个强连通分量内，并像上一题一样求出强连通分量内所有环长的 $\gcd$ 为 d。
我们考虑如何判断 u 到 v 是否有长度为 k 的路径。
我们先找到一条 u 到 v 途径所有点的路径，其长度不超过 $(n-1)^2$，再找出途径的所有简单环，假设总共有 m 个长度从小到大排序为 $len_1, len_2, \cdots, len_m$。

结论

对于 $d|x \wedge x \geq (\frac{len_1}{d} - 1)len_m$ 的数都一定能被表示。

证明

这是因为我们考虑同余最短路，以 len_1 为底，每次至少拓展一个点，拓展长度不超过 len_m，因此上界为 $(\frac{len_1}{d} - 1)len_m$。

于是我们得到了用 $(n-1)^2 + (n-1)n \leq (n-1)(2n-1) \leq n^3$

解法

于是在 $k \geq n^3$ 的前提下，两个点之间存在长度为 k 的路径当且仅当 $dis_v - dis_u \equiv k \pmod d$ 且 $dis_u - dis_v \equiv k \pmod d$。
发现要么有 $k \equiv 0 \pmod d$，要么有 d 是偶数且 $k \equiv \frac{d}{2} \pmod d$。
时间复杂度 $O(n)$。

Tours

题目描述

给定一张 n 个点 m 条边的无向图，你需要选择一个颜色种类数 k，然后用这 k 种颜色给每条边染色，要求对于图中任意一个简单环，每种颜色的边的数量都相同。求所有可行的 k。

数据范围

$1 \leq n, m \leq 5 \times 10^5$。

题解

我们跑出原图的 DFS 树，我们记 T_i 表示覆盖边 i 的非树边集合。
那么我们可以说明，包含非树边集合为 S 的环（可能是若干个边不交的环的并），包含的边为满足 $|T_i \bigcap S| \equiv 1 \pmod 2$ 的所有 i。

题解

这有一个比较简洁的证明，就是考虑当前这条树边和跨过这条边的在环上的非树边，我们从一个起点开始遍历环，每经过一次非树边，当前点的位置就会从这条树边的子树到子树外或子树外到子树，而由于成环，因此最后起点和终点的位置必须同时在子树或同时在子树外。

同时可以发现两个环的边集 S_1 和 S_2 的对称差还是环，因此可以说明，无向图的环空间为一个 $\mathbb{F}_2$ 上的线性空间，一组基为仅包含第 i 条非树边的环。

题解

接着我们给出切边等价的定义，即对于两条边 $e1, e2$，他们切边等价当且仅当对于任意一个环，要么同时经过他们，要么同时不经过他们。
由于一个环可以表示为若干个仅包含第 i 条非树边的环的组合，因此这等价于 $T_{e1} = T_{e2}$。
那么切边等价的关系将原图划分为了若干个集合 $E_1 \dots E_t$，我们有结论可行的 k 一定满足 $k | \gcd(|E_1| \dots |E_t|)$。

题解

我们取出所有环，每个环一定能够被拆分成若干个 E_i ，我们只用说明每个 E_i 都能够被若干个环表示即可，设对应非树边集合为 S 的环的向量为 F_S。
对于一个 E_i，如果非树边集合为 U，那么我们可以通过构造 $\sum\limits_{S\subseteq U}(-1)^{|S|}F_S$ 来得到所有非树边集合是 U 的超集的 E_i 的和的倍数，因此结论得证。
那么我们就只需要求出每个 E_i 的大小了，这里如果对集合 T_i 进行哈希，很容易做到 $O(n\log n)$ 的复杂度。

Contents

谢谢大家

Thanks!