

模拟赛讲解

kradcigam

江苏省常州高级中学

2025.8.7

Contents

1 望远镜

2 追逐

3 套娃

4 谢谢大家

闲话



cxl的题太难了



你降降难度。。。

于是把本来的 T3 换成了套娃，预计难度 1 3 2。

Contents

1 望远镜

2 追逐

3 套娃

4 谢谢大家

算法 1

我们先枚举 $\prod_{i=1}^n a_i = x$ ，我们发现每个质因子在序列 a 里的方案数是独立的，而且我们只关心其次数。

令 $x = \prod_{i=1}^k p_i^{c_i}$ ，那么对于质因子 p_i ，其方案数就是长度为 n 的非负整数序列且和为 c_i 的方案数，即 $\binom{c_i+n-1}{n-1}$ 。

于是总方案数就是：

$$\prod_{i=1}^k \binom{c_i + n - 1}{n - 1}$$

我们考虑线性筛，并在过程中记录每个数的最小质因子 mn_i 。我们进行一个递推的过程，将 i 的答案从 $\frac{i}{mn_i}$ 继承过来，且此时只有 mn_i 这个质因子的次数发生改变。

时间复杂度 $O(n)$ 。

Contents

1 望远镜

2 追逐

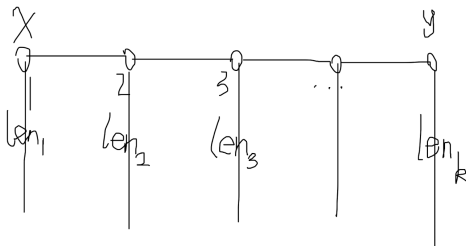
3 套娃

4 谢谢大家

算法 1

我们考虑如何判断，在 Alice 选择了点 x 、Bob 选择了点 y 的情况下，最后谁会获胜。

此时我们发现这棵树可以等效成下图的形式：



算法 1

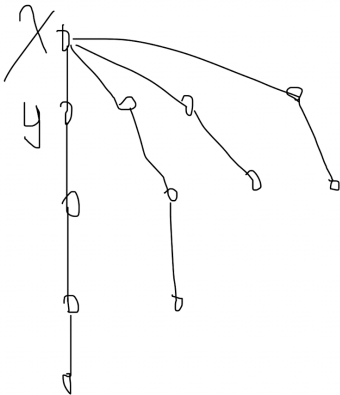
第 i 个点连着长度为 len_i ($len_i \geq 0$) 的链，于是此时就变成了一个链上问题。我们发现 Alice 和 Bob 的策略是：

- 若他们此时拐到长度为 len_i 的链上足以获胜，则他们此时直接拐下，否则他们此时拐下就输了；
- 因此在当前拐下不能赢时，则会沿着链继续走。

枚举点 x 和点 y ，并求出 len_i ，模拟这个过程，时间复杂度 $O(n^3)$ 。

算法 2

我们发现如果先手选择的点 x 中，儿子中的最长链和次长链长度不同，则先手必败。因为此时后手可以选择最长链的儿子。



算法 2

发现此时 Alice 必输。因此若 Alice 能赢，必须满足儿子中的最长链和次长链长度相同。

Alice 获胜的必要条件

直径长度为偶数，此时 Alice 必然选直径中心。

于是现在 x 固定了，我们可以对每个 y 进行算法 1 的过程判断，时间复杂度 $O(n^2)$ 。

算法 3

我们考虑优化算法 2 的过程。

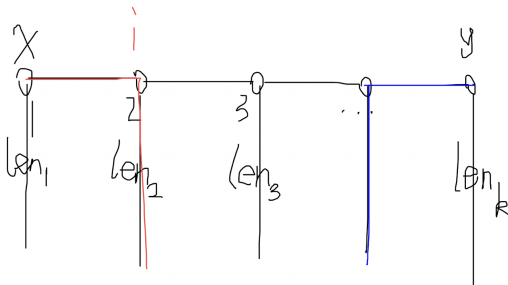
首先，我们可以将上面的过程进行等效：

- 对于 Alice，我们找到最小的 a 满足 Alice、Bob 都移动了 a 轮游戏后，Alice 拐下此时能获胜；
- 对于 Bob，我们找到最小的 b 满足 Alice 移动了 $b+1$ 轮，Bob 移动了 b 轮游戏后，Bob 拐下此时能获胜。

我们发现 Alice 获胜**当且仅当** $a \leq b$ 。而 a, b 是独立的，我们可以分开求解。

算法 3

我们考虑根号分治，令阈值为 B 。 a, b 两部分是类似的，这里我们用 a 来举例。假设 Alice 在位置 i 能 win，那么有：



算法 3

红色部分长度 > 蓝色部分，即

$$\text{len}_i + i - 1 \geq \max_{j=i+1}^{k-i+1} \{k - j + \text{len}_j\}$$

我们将后面部分放缩成 $k - (i + 1)$ ，得到 $\text{len}_i + i \geq k - i$ 。

算法 3

若 $len_i < B$, 则 $i \geq k - i - B$, 我们发现符合这样条件的位置只有 $O(B)$ 个。

另一方面, 由于 $\sum_{i=1}^k len_i = O(n)$, 所以 $len_i > B$ 的个数不超过 $O(\frac{n}{B})$, 因此我们只需要单独暴力 check 即可。

于是我们每次求解时只需要对这 $O(B + \frac{n}{B})$ 个位置进行单点 check。而单点 check 时, 我们要求解区间最小值, 这里我们可以用 ST 表维护:

- $O(\log n)$ push_back/pop_back;
- $O(1)$ 区间查询最小值。

取 $B = O(\sqrt{n})$, 时间复杂度 $O(n\sqrt{n})$ 。

Contents

1 望远镜

2 追逐

3 套娃

4 谢谢大家

闲话

这道题目是我在出集训队互测题时想到的 idea，不过后来有了更好的 idea，因此这道题也并没有在集训队互测中出现。不过这道题还是挺有意思的！

这道题我出到了去年的 NFLSPC 中，应该大家都没有打过 NFLSPC (?)，当时比赛这个题也被过穿了。

算法 1

考虑如何求出一个序列的答案，我们先将所有 a_i 的值都增加 1，然后令 cnt_i 表示 $a_j \leq i$ 的 j 的数量。

结论

答案为 $\max_{i=1}^n \{\lceil \frac{cnt_i}{i} \rceil\}$ 。

算法 1

证明

考虑对于一个答案 k 判断是否合法。我们构建一个二分图，左边 n 个点，流量为 cnt_i ，右边 n 个点，流量为 k 。 $\forall i \geq j$ ，左边第 i 个点和右边第 j 个点之间都有 $+\infty$ 的流量。那么如果此时最大流 $= n$ 。

由于最大流 = 最小割，所以我们考虑假设右侧割掉 i 个点。注意到由于编号小的点入边集合是编号大的点的超集，所以我们肯定会删右侧的前 i 个点，那么左侧 $> i$ 的点需要割掉，于是需要满足 $n - cnt_i + ik \geq n$ ，即 $cnt_i \leq ik$ ，所以 $k \geq \frac{cnt_i}{i}$ 。

于是，我们每次暴力求即可，时间复杂度 $O(n^2)$ 。

算法 2

我们考虑离线，按照值域扫描线。

我们根据最后取 i 时，对答案的贡献。

注意到由于只有 $\frac{n}{i}$ 个断点，所以我们枚举第 j 个端点，相当于要维护：

- $O(n)$ 次插入；
- $O(n \log n)$ 次求第 ij 小。

使用树状数组倍增或线段树维护，时间复杂度 $O(n \log^2 n)$ 。

算法 3

我们还是考虑离线，按照值域扫描线。

我们还是根据最后取 i 时，对答案的贡献。

假设值为 i 的有 x_i 个数，那么，若 i 比 $i-1$ 优，一定需要满足

$$\frac{a}{i-1} < \frac{a+x_i}{i}。$$

可以得到 $a < x_i i - x_i$ ，那么就说明 $\frac{a+x_i}{i} < x_i$ 。

所以对于 i ，说明只有 x_i 个位置需要被更新，相当于要维护：

- $O(n)$ 次插入；
- $O(n)$ 次求第 ij 小。

使用树状数组倍增或线段树维护，时间复杂度 $O(n \log n)$ 。

算法 4

这是出题人没有想到的做法，是验题人以及几乎全部赛时通过选手的做法)

注意到答案是单调不降的，并且每次最多增加 1，所以我们可以动态维护答案的变化。

我们令 d_i 表示 $\leq i$ 的数再增加多少会使得答案增加 1。那么答案增加 1 当且仅当 $\exists d_i = 0$ 。

注意到假设当前答案为 ans ，那么只有 $\frac{n}{ans}$ 的位置需要被维护，于是对于答案变化的情况，我们直接重构线段树即可。

时间复杂度 $O(n \log n)$ 。

Contents

1 望远镜

2 追逐

3 套娃

4 谢谢大家

谢谢大家

Thanks!