UNIVERSIDAD CATOLICA DEL MAULE

OPTIMIZACION

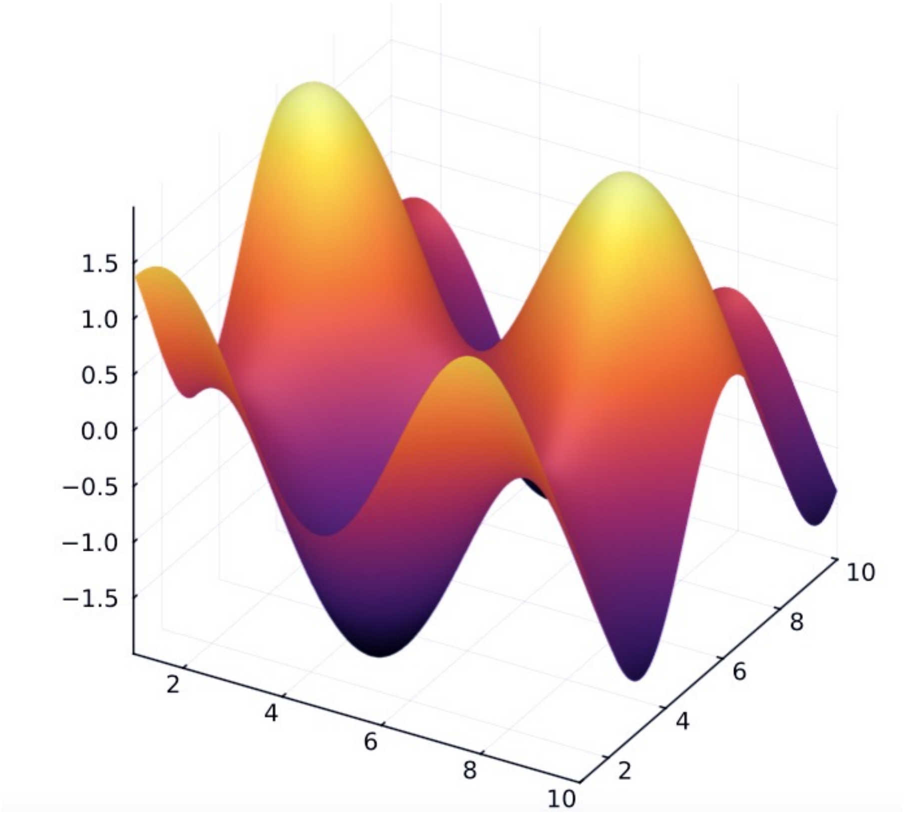
Repaso: ejercicios

Fiorella R. Roco Parra

Talca, 29 abril 2024

Contenido

- Repaso
    - Pseudo-código
    - Fuerza Bruta: una variable
    - Matriz Hessiana: ejercicio 1 y 2
        - Máximos y mínimos por método de Hessiana
        - Criterio de Sylverster
    - Newton Raphson
    - Ejemplos
- Cuaderno Nº 4
- Ejercicios propuestos (Guía II)



Pseudo-código

UNIVERSIDAD CATOLICA DEL MAULE

```python
import pandas as pd
import numpy as np
import time as time
```

✓ 1.7s

```python
start_time =  time.perf_counter()

def function(x):
    return 20*x-0.5*x**2

x = np.linspace(0,30,100)
#print(x)-
y = function(x)

value = -np.inf

for a1 in x:
    val_fun = function(a1)
    if val_fun > value:
        value = val_fun
        parameters = [round(a1), round(value)]

total_time =  time.perf_counter() - start_time

print("Solution =", parameters, end="\n\n")
```

✓ 0.0s

```
Definir libreria numpy como np para generar arreglo numerico
Definir libreria time como time para contar el tiempo de computo

Inicio del temporizador de rendimiento

Definir una función llamada <<function>> que toma un parámetro x y devuelve el valor de 20*x - 0.5*x**2

Crear un arreglo de valores de x, utilizando la función linspace de numpy,
    que va desde 0 hasta 30 con 100 puntos uniformemente espaciados

Inicializar una variable llamada <<value>> con menos infinito para comparar parametros.

Para cada valor <<a1>> en el arreglo de x, hacer lo siguiente:
    Calcular el valor de la función <<function>> para el valor <<a1>>
     Si el valor calculado es mayor que <<value>>, entonces:
        Actualizar <<value>> con el valor calculado
        Guardar los parámetros [redondear(a1), redondear(value)] en la variable <<parameters>>

Calcular el tiempo total como la diferencia entre el tiempo actual y el tiempo de inicio

Imprimir la solución encontrada, es decir, los parámetros

Fin
```

Nota: Por temas de formato, se utilizo << >>. Pero se debe utilizar “ ” o ‘ ’.

Fuerza Bruta: Una Variable

Un agricultor desea maximizar el rendimiento de su cultivo utilizando diferentes tipos de fertilizantes. La función que representa el rendimiento del cultivo en función del tipo de fertilizante aplicado (en kilogramos por hectárea) es:

$$f(x) = 50x - 2.3x^2$$

donde x es el tipo de fertilizante aplicado. Encuentra la cantidad optima de fertilizante que maximiza el rendimiento del cultivo.

Fuerza Bruta: Una Variable

Paso 1: Determinar puntos críticos.

$$f(x) = 50x - 2.3x^2 \rightarrow f'(x) = 50 - 4.6x$$

$$50 - 4.6x = 0 \rightarrow x \approx 10.869 \approx \mathbf{11}$$

Paso 2: Determinar la existencia de mínimos o máximos locales.

$$f'(x) = 50 - 4.6x \rightarrow f''(x) = -4.6$$

Paso 3: Evaluar punto crítico.

$$f''(x) = -4.6 < 0 \;\therefore\; \exists\; Máximo\ local$$

Paso 4: Evaluar el punto crítico en la función.

$$f(10.869) = 50 \cdot 11 - 2.3 \cdot (11)^2 \approx 272$$

R//La cantidad óptima de fertilizante es de 10.869 kg por hectárea con un rendimiento máximo de 275.739 kg por hectárea.

Fuerza Bruta: Varias Variable

- Un hospital está buscando optimizar la distribución de sus equipos médicos para maximizar la eficiencia total de atención médica en una unidad específica. La eficiencia total de la unidad, medida en términos de pacientes atendidos por hora por metro cuadrado, está dada por la función:

$$f(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 - 0.5xz + z$$

- Donde:
  - x representa la densidad de camas de hospital por metro cuadrado (unidades/m²).
  - y representa la densidad de equipos de diagnóstico por metro cuadrado (unidades/m²).
  - z representa la distancia promedio en metros entre las camas y el área de enfermería.
- El hospital desea maximizar la eficiencia total de la unidad encontrando los valores óptimos de x, y, z que maximizan la función $f(x, y, z)$

Ejercicio propuesto

Matriz Hessiana

UNIVERSIDAD CATOLICA DEL MAULE

Es **una generalización de la segunda derivada de una función**, que **proporciona información sobre la curvatura y la concavidad** de la función en un punto dado.

$$\operatorname{Hess} f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}$$

Otto Hesse
(1811-1874)

Criterio de Sylverster

UNIVERSIDAD CATOLICA DEL MAULE

SI los determinantes (Hi) son:

- $+\ +\ +\ +\ +\cdots$ => Mínimo
- $-+-+-+-+\cdots$ => Máximo
- Algún Hi = 0 => No se puede saber.
- Otro caso con Hi != 0 => Punto de silla

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} H1 & H2 & H3 & H4 & & Hn \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriz Hessiana

Resolver analíticamente la siguiente función y comentar si existe un punto máximo, mínimo o de silla.

$$F(x, y) = 16x^2 + y^2$$

$$\operatorname{Hess} f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}$$

Criterio de Sylverster	
$+ + + + + \cdots$	Mínimo
$- + - + - + - + \cdots$	Máximo
Algún $\lvert H_i \rvert = 0$	Indeterminado (no se puede saber)
$\lvert H_i \rvert \neq 0$	Punto de silla

Matriz Hessiana: ejemplo 1

UNIVERSIDAD CATOLICA DEL MAULE

$$\boldsymbol{F(x,y) = 16x^2 + y^2}$$

Paso 1: Derivadas

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 32x \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} = 32$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} = 2$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x} = 0$$

Nota: Siempre deben dar igual las cruzadas

Puntos crítico

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 32x = 0 \qquad x = 0$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 2y = 0 \qquad y = 0$$

Matriz Hessiana: ejemplo 1

UNIVERSIDAD CATOLICA DEL MAULE

$$\boldsymbol{F(x,y) = 16x^2 + y^2}$$

Paso 2: Definir nuestra matriz hessiana

$$|H| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x^2} & \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y^2} \end{vmatrix} |H| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 (16x^2 + y^2)}{\partial^2 x^2} & \dfrac{\partial^2 (16x^2 + y^2)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 (16x^2 + y^2)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 (16x^2 + y^2)}{\partial^2 y^2} \end{vmatrix}$$

Matriz Hessiana: ejemplo 1

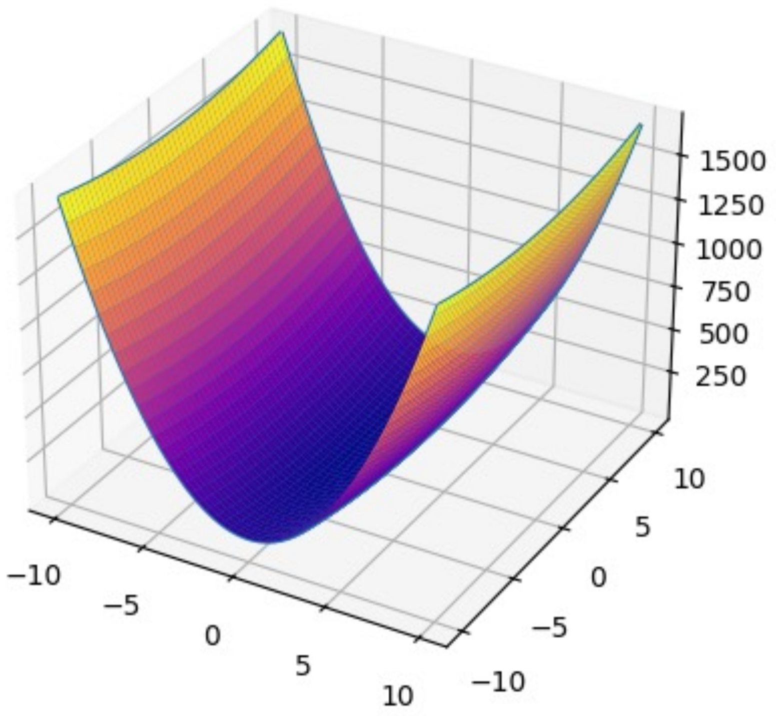
$$\boldsymbol{F(x,y) = 16x^2 + y^2}$$

Paso 3: Obtener las derivadas parciales

$$|H| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2(16x^2 + y^2)}{\partial^2 x^2} & \dfrac{\partial^2(16x^2+y^2)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2(16x^2+y^2)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2(16x^2+y^2)}{\partial^2 y^2} \end{vmatrix} \longrightarrow H = \begin{vmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Matriz Hessiana: ejemplo 1

Paso 4: Obtener el determinante y evaluar según criterio de Sylverster



$$|H| = \begin{vmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (32 \cdot 2 - 0 \cdot 0) = 64$$

$$\Rightarrow H > 0 \therefore \exists\, Minimo\ en\ (0,0)$$

Tarea: Resolver para la función $\mathbf{F}(x, y) = -37x^2 - y^2$

Matriz Hessiana: ejemplo 2

UNIVERSIDAD CATOLICA DEL MAULE

Resolver analíticamente la siguiente función para encontrar los puntos máximos, mínimos o de silla:

$$F(x, y) = 37x^2 - 6x^3 + 6y^2 + 15xy$$

a) Obtener derivadas parciales x,y
b) Obtener segundas derivadas x, y, xy
c) Buscar puntos críticos
d) Calcular el determinante evaluando los puntos criticos
e) Crear la matriz hessiana
f) Concluir

Matriz Hessiana: ejemplo 2

UNIVERSIDAD CATOLICA DEL MAULE

$$F(x,y) = 37x^2 - 6x^3 + 6y^2 + 15xy$$

a) Obtener derivadas parciales x,y

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 74x - 18x^2 + 15y$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 12y + 15x$$

Matriz Hessiana: ejemplo 2

$$F(x, y) = 37x^2 - 6x^3 + 6y^2 + 15xy$$

b) Obtener segundas derivadas x, y, xy

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} = -36x + 74$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} = 12$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x} = 15$$

Matriz Hessiana: ejemplo 2

$$F(x,y) = 37x^2 - 6x^3 + 6y^2 + 15xy$$

c) Buscar puntos críticos

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 74x - 18x^2 + 15y = 0$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 12y + 15x = 0$$

Matriz Hessiana: ejemplo 2

UNIVERSIDAD CATOLICA DEL MAULE

$$F(x,y) = 37x^2 - 6x^3 + 6y^2 + 15xy$$

c) Buscar puntos críticos

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 74x - 18x^2 + 15y = 0$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 12y + 15x = 0$$

$$\begin{cases} 74x - 18x^2 + 15y = 0 \\ 12y + 15x = 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{y = -\frac{15x}{12}}$$

$$\underline{74x} - 18x^2 + \underline{15\left(-\frac{15x}{12}\right)} = 0$$

$$\frac{221x}{4} - 18x^2 = 0$$

$$x\left(\frac{221}{4} - 18x\right) = 0$$

$$x = 0 \lor \left(\frac{221}{4} - 18x\right) = 0 \quad x = \frac{221}{72}$$

$$\boldsymbol{y = -\frac{15(0)}{12} = 0} \quad \boldsymbol{y = -\frac{15\left(\frac{221}{72}\right)}{12} = \frac{-1105}{288}}$$

Matriz Hessiana: ejemplo 2

$$F(x,y) = 37x^2 - 6x^3 + 6y^2 + 15xy$$

c) Buscar puntos críticos

$$(0,0)$$

$$\left(\frac{221}{72}, -\frac{1105}{228}\right)$$

Tarea: $\boldsymbol{F(x,y) = 19x^3 - 2x^2 + 2y^3 + 27xy}$

Matriz Hessiana: ejemplo 2

UNIVERSIDAD CATOLICA DEL MAULE

$$F(x,y) = 37x^2 - 6x^3 + 6y^2 + 15xy$$

d) Calcular el determinante evaluando los puntos críticos

$$|H(x,y)| = \begin{vmatrix} -36x+74 & 15 \\ 15 & 12 \end{vmatrix} \quad |H(0,0)| = \begin{vmatrix} -36\cdot 0+74 & 15 \\ 15 & 12 \end{vmatrix}$$

$$|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})| = (\boldsymbol{74}\cdot\boldsymbol{12}-\boldsymbol{15}\cdot\boldsymbol{15}) = \boldsymbol{663}$$

$$\left|H\left(\frac{221}{72},\frac{-1105}{288}\right)\right| = \begin{vmatrix} -36\cdot\dfrac{221}{72} & 15 \\ 15 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\left|\boldsymbol{H}\left(\frac{\boldsymbol{221}}{\boldsymbol{72}},\frac{\boldsymbol{-1105}}{\boldsymbol{288}}\right)\right| = \left(-\frac{\boldsymbol{221}}{\boldsymbol{2}}\cdot\boldsymbol{12}-\boldsymbol{15}\cdot\boldsymbol{15}\right) = \boldsymbol{-1551}$$

Matriz Hessiana: ejemplo 2

$$F(x,y) = 37x^2 - 6x^3 + 6y^2 + 15xy$$

e) Crear la matriz hessiana

$$|H(0{,}0)| = (74 \cdot 12 - 15 \cdot 15) = 663$$

$$\left|H\left(\frac{221}{72}, \frac{-1105}{288}\right)\right| = \left(-\frac{221}{2} \cdot 12 - 15 \cdot 15\right) = -1551$$

f) Concluir

$$\therefore\ El\ punto\ (0{,}0)\ es\ un\ minimo\ y\ \left(\frac{221}{72}, \frac{-1105}{288}\right) es\ un\ máximo.$$

Newton Raphson

Algoritmo de búsqueda de raíces que produce sucesivamente mejores aproximaciones a las raíces (ceros) de una función de valor real.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \leftrightarrow f'(x_i) \neq 0$$

- $\boldsymbol{x_i}$ es la aproximación actual de la raíz.
- $\boldsymbol{f(x_i)}$ es el valor de la función en x_i.
- $\boldsymbol{f'(x_i)}$ es la derivada de la función evaluada en x_i.

Newton Raphson

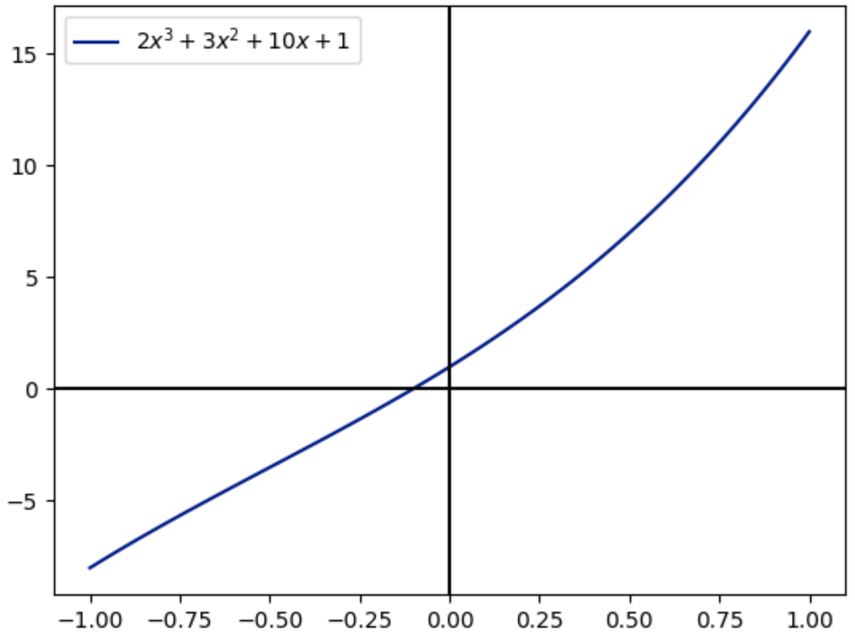
Encontrar raíces de la función: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 10x + 1$

Paso 1: Determinar derivadas

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 10x + 1 \rightarrow f(x) = 6x^2 + 6x + 10$$

Paso 2: Determinar posibles aproximaciones

$$f(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 + 10(-2) + 1 = -23$$
$$f(-1) = 2(-1)^3 + 3(-1)^2 + 10(-1) + 1 = -8$$
$$f(0) = 2(0)^3 + 3(0)^2 + 10(0) + 1 = 1$$
$$f(1) = 2(1)^3 + 3(1)^2 + 10(1) + 1 = 16$$
$$f(2) = 2(2)^3 + 3(2)^2 + 10(2) + 1 = 49$$



$\therefore \exists\, f(x) = 0$ *entre el intervalo* $(-1,0)$

$$\boldsymbol{x = -1} \quad \vee \quad \boldsymbol{x = 0}$$

Newton Raphson

UNIVERSIDAD CATOLICA DEL MAULE

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \leftrightarrow f'(x_i) \neq 0$$

Encontrar raíces de la función: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 10x + 1$

Paso 3: Evaluar aproximaciones

$$\boldsymbol{x_1 = -1}$$

$$x_2 = -1 - \frac{f(-1)}{f'(-1)} = -1 - \frac{2(-1)^3 + 3(-1)^2 + 10(-1) + 1}{6(-1)^2 + 6(-1) + 10} = \boldsymbol{-1 - \frac{8}{10} = -1.8}$$

$$x_3 = -1.8 - \frac{f(-1.8)}{f'(-1.8)} = -1.8 - \frac{2(-1.8)^3 + 3(-1.8)^2 + 10(-1.8) + 1}{6(-1.8)^2 + 6(-1.8) + 10} = -0.78$$

$$x_4 = -0.78 - \frac{f(-0.78)}{f'(-0.78)} = -0.78 - \frac{2(-0.78)^3 + 3(-0.78)^2 + 10(-0.78) + 1}{6(-0.78)^2 + 6(-0.78) + 10} = -0.11$$

$$x_5 = -0.11 - \frac{f(-0.11)}{f'(-0.11)} = -0.11 - \frac{2(-0.11)^3 + 3(-0.11)^2 + 10(-0.11) + 1}{6(-0.11)^2 + 6(-0.11) + 10} = -0.10$$

Newton Raphson

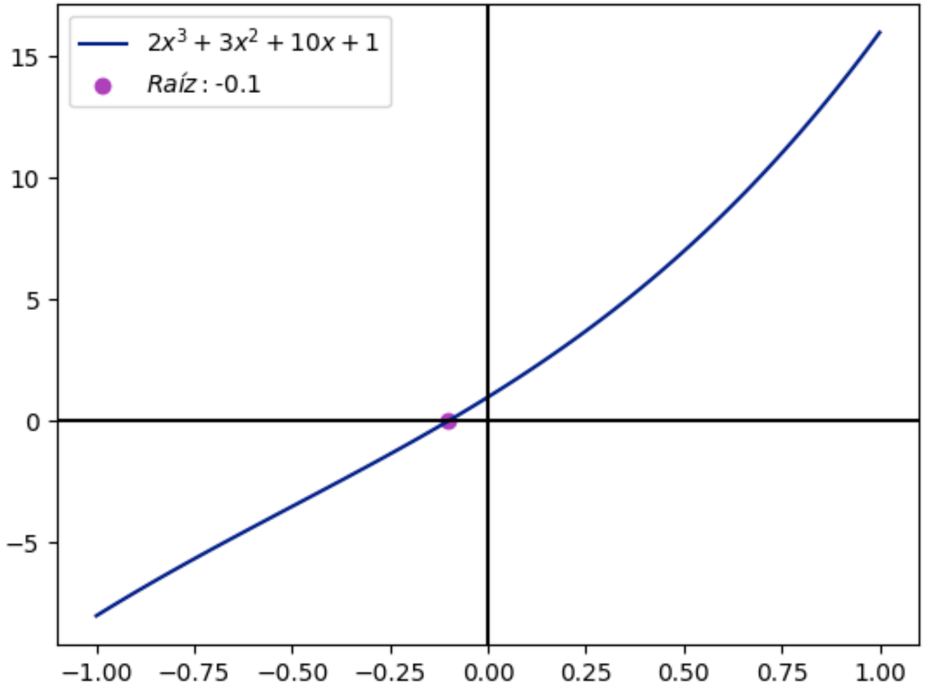
UNIVERSIDAD CATOLICA DEL MAULE

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \leftrightarrow f'(x_i) \neq 0$$

Encontrar raíces de la función: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 10x + 1$

$$\boldsymbol{Raíz = -0.10}$$

Paso 4: Graficar



Fiorella R. Roco Parra – froco@ucm.cl

Newton Raphson

UNIVERSIDAD CATOLICA DEL MAULE

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \leftrightarrow f'(x_i) \neq 0$$

Encontrar raíces de la función:

$$f(x) = x^5 - x - 1$$

Ejercicio Propuesto

Cuaderno Nº4

froco@ucm.cl

UNIVERSIDAD CATOLICA DEL MAULE

OPTIMIZACION

Fiorella R. Roco Parra

Talca, 29 abril 2024

Fiorella R. Roco Parra – froco@ucm.cl