

---

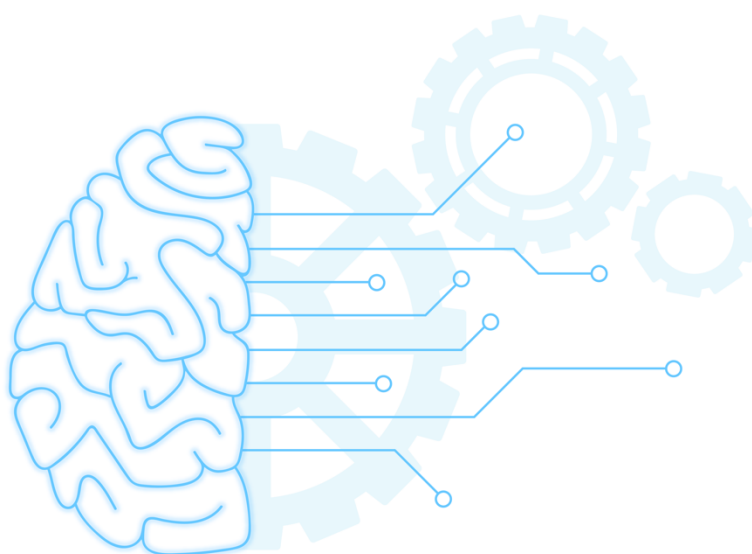
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧ. ΚΑΙ ΜΗΧ. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

---

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΠΡΟΤΥΠΩΝ

ΤΗΛ 311



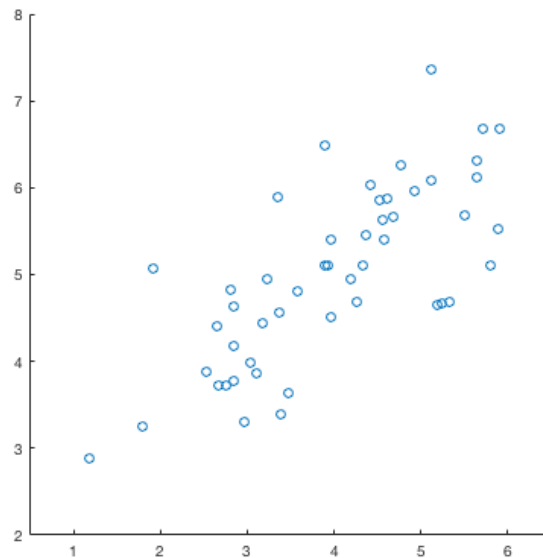
1η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ  
ΑΝΑΦΟΡΑ

ΚΥΡΙΑΖΑΚΗΣ ΚΛΕΑΝΘΗΣ – 2015030086

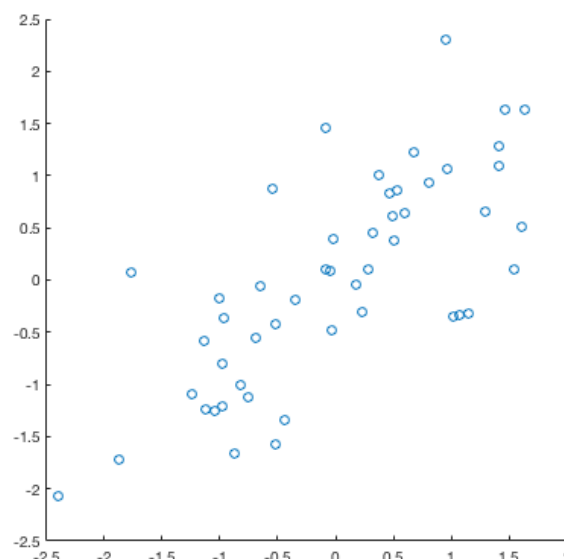
## ΘΕΜΑ 1: Principal Component Analysis

### Μέρος 1

**a)** Στο πρώτο μέρος καλούμαστε να υλοποιήσουμε την μέθοδο PCA έτσι ώστε να μειώσουμε τις διαστάσεις των δεδομένων μας. Αρχικά ξεκινάμε φορτώνοντας το αρχείο 'ex1\_1\_data1.mat' το οποίο περιέχει 50 δείγματα με 2 feature το καθένα. Έπειτα εμφανίστηκαν στον δισδιάστατο χώρο με την εντολή scatter:



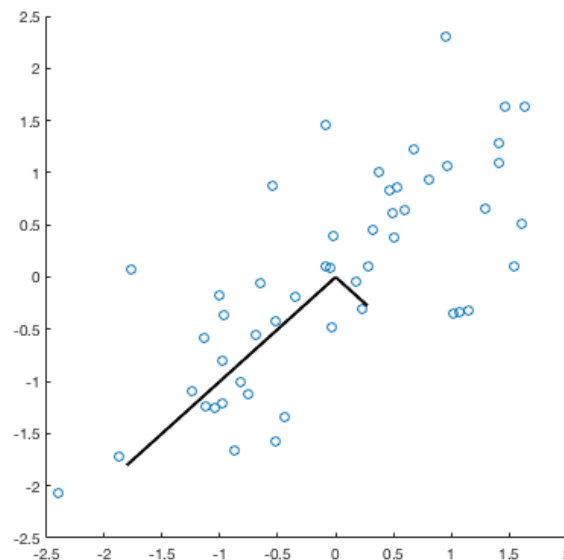
**b)** Πριν γίνει κάποια επεξεργασία στα δεδομένα, πρέπει να γίνει κανονικοποίηση με μέση τιμή μηδέν και διασπορά ένα έτσι ώστε να υπάρχει μία κοινή κλίμακα για όλα τα δεδομένα. Αυτό γίνεται στην συνάρτηση 'featureNormalize' μέσα στην οποία υπολογίζεται η μέση τιμή και τυπική απόκλιση των δεδομένων, έπειτα γίνεται η πράξη  $X_{norm} = \frac{X - \bar{X}}{\sigma}$  η οποία φέρνει τις τιμές στο επιθυμητό εύρος τιμών χωρίς να χάσουμε πληροφορία.



Στην παραπάνω εικόνα φαίνονται τα κανονικοποιημένα δείγματα. Παρατηρείται πως είναι ακριβώς ίδιο 'pattern' με τα αρχικά δείγματα, μόνο που πλέον οι τιμές βρίσκονται γύρω από το μηδέν και στους δύο άξονες.

**c)** Στη συνέχεια, περνάμε τα κανονικοποιημένα δεδομένα στην συνάρτηση 'mgPCA' η οποία θα υπολογίσει τις ιδιοτιμές τα ιδιοδιανύσματα. Με την έτοιμη συνάρτηση του MATLAB 'eig' επιστρέφονται οι ιδιοτιμές στην διαγώνιο της μεταβλητής D και τα ιδιοδιανύσματα στην μεταβλητή V. Παρατηρείται πως στην συγκεκριμένη περίπτωση όπου έχουμε δυο features, οι μεταβλητές V και D είναι πίνακες διαστάσεων 2x2. Έπειτα, γίνεται ταξινόμηση των ιδιοτιμών κρατώντας τα index έτσι ώστε να γίνει αντίστοιχη ταξινόμηση και στα ιδιοδιανύσματα. Τέλος, η συνάρτηση επιστρέφει τις μεταβλητές που υπολόγισε (Τις ιδιοτιμές στον πίνακα S διάστασης 2x1 διότι δεν είναι πλέον στην διαγώνιο, και τα ιδιοδιανύσματα στον πίνακα U διάστασης 2x2).

Έπειτα, συνεχίζοντας την ροή του προγράμματος, εκτυπώνονται στο διάγραμμα με τις κανονικοποιημένες τιμές και τα ιδιοδιανύσματα PC1 και PC2 όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



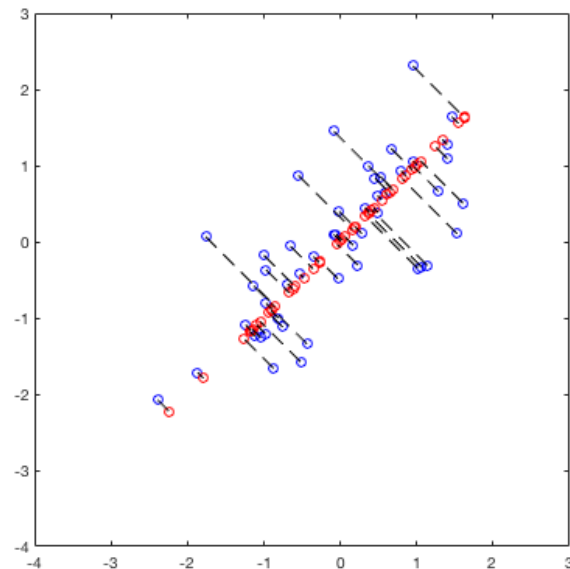
**d)** Συνεχίζοντας με τον υπολογισμό της συνεισφοράς της κάθε κυρίας συνιστώσας στην συνολική διακύμανση παίρνουμε τα εξής αναμενόμενα αποτελέσματα:

$$PCvariance(1,1) = 0.8678$$

$$PCvariance(2,1) = 0.1322$$

Ο στόχος μας πλέον είναι να μειώσουμε τις δύο διαστάσεις σε μία, και αυτό θα το πετύχουμε καλώντας την συνάρτηση 'projectData'. Οπότε θέτουμε την μεταβλητή K = 1 (που συμβολίζει την επιθυμητή διάσταση) και την περνάμε σαν όρισμα στην συνάρτηση μαζί με τα κανονικοποιημένα δεδομένα καθώς και την μεταβλητή που περιέχει τα ιδιοδιανύσματα. Έτσι, επιστρέφονται οι καινούριες τιμές στην μεταβλητή Z η οποία έχει διάσταση 50x1 σε αντίθεση με την X\_norm η οποία είχε 50x2.

**e)** Τώρα που έχουμε τα δεδομένα σε χώρο μίας διάστασης, μπορούμε αν θέλουμε να προσεγγίσουμε ξανά τα δεδομένα δύο διαστάσεων που είχαμε πριν. Αυτό υλοποιείται στην συνάρτηση 'recoverData' στην οποία ουσιαστικά προβάλλουμε τα δεδομένα στην Z σε όλα τα ιδιοδιανύσματα (Στην περίπτωση μας PC1, PC2). Στην συνέχεια εκτυπώνονται σε κοινό διάγραμμα τα αρχικά δείγματα, τα δείγματα που προβάλλαμε στην κύρια συνιστώσα καθώς και γραμμές που τα ενώνουν.



Παρατηρώντας την εικόνα συμπεραίνουμε πως η διαδικασία PCA για μείωση διαστάσεων ήταν επιτυχής αφού όλα τα δείγματά μας προβλήθηκαν στην ευθεία κατά την οποία τα δεδομένα μας είχαν την μέγιστη διασπορά.

## Μέρος 2

Στο δεύτερο μέρος του θέματος πρέπει να επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία του πρώτου μέρους χρησιμοποιώντας αυτή την φορά τα δεδομένα 5000 εικόνων στο αρχείο 'ex1faces.mat'. Σκοπός είναι να παραμετροποιηθεί ο κώδικας του προηγούμενου μέρους για να μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε όλες τις περιπτώσεις.

Στην συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε 5000 εικόνες μεγέθους 32x32 που σημαίνει ότι έχουμε 1024 features. Προφανώς δεν θα μας είναι όλα χρήσιμα και θα χρειαστεί να γίνει μείωση της διάστασης έτσι ώστε να παραμείνουν μόνο τα πιο σημαντικά principal components. Αυτό σημαίνει ότι ο αλγόριθμος που αναπτύξαμε προηγουμένως θα δέχεται πληροφορία 1024 διαστάσεων και θα επιστρέφει πληροφορία μειωμένης διάστασης ανάλογα με την τιμή που θα αναθέσουμε στην μεταβλητή K.

**f)** Αφού φορτωθεί το dataset, γίνεται εμφάνιση των 100 πρώτων εικόνων. Η διαδικασία αυτή γίνεται με την εντολή 'load('ex1\_1\_faces.mat')' και έπειτα 'displayData(X(1:100, :))' και παράγεται το παρακάτω αποτέλεσμα:



**g)** Στην συνέχεια, όπως και πριν, περνάμε τα δεδομένα από την 'featureNormalize' για την κανονικοποίηση και μετά με την συνάρτηση 'mgPCA' παίρνουμε τα ιδιοδιανύσματα και τις ιδιοτιμές. Στο κοινό διάγραμμα παρακάτω εμφανίστηκαν οι πρώτες 36 κύριες συνιστώσες που βρέθηκαν.



Παρατηρούμε πως όλες οι συνιστώσες μοιάζουν με πρόσωπα και μας δείχνουν τα πιο σημαντικά 'χαρακτηριστικά' στις εικόνες

h) Σε αυτό το ερώτημα, γίνεται μείωση διαστάσεων με προβολή των σημείων στις  $K$  κύριες συνιστώσες. Χρησιμοποιήθηκε  $K=20$ ,  $K=100$  και  $K=200$  για να δούμε τυχόν διαφορές. Άρα, σε αντίθεση με τα αρχικά δεδομένα που ήταν σε πίνακα διαστάσεων  $5000 \times 1024$  τώρα θα έχουμε πίνακα διαστάσεων  $5000 \times K$  (όπου  $K=20$  ή  $100$  ή  $200$ ).

i) Πλέον, αφού έχουμε ελαττώσει τις διαστάσεις των feature μας, μπορούμε με την χρήση της 'recoverData' να κάνουμε ανάκτηση των αρχικών δειγμάτων (με 1024 διαστάσεις) και να συγκρίνουμε τυχόν αποκλίσεις.

$K = 20$



$K = 100$



$K = 200$



Παρατηρούμε πως όσο το  $K$  αυξάνεται τόσο περισσότερη πληροφορία κρατάμε για το κάθε πρόσωπο το οποίο είναι αναμενόμενο. Όσο μικραίνει ο αριθμός των διαστάσεων που κρατάμε τόσο λιγότερο χώρο και επεξεργαστική ισχύ απαιτεί η επεξεργασία των δεδομένων.

## ΘΕΜΑ 2: Linear Discriminant Analysis

**Δεδομένα:**

$$\mu_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mu_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix}$$
$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 11 & 9 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

**Λύση:**

$$\Sigma_w = \frac{1}{2} (\Sigma_1 + \Sigma_2) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 11+2 & 9+0 \\ 9+0 & 11+2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 13 & 9 \\ 9 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_w^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 13 & 9 \\ 9 & 13 \end{bmatrix}^{-1} = 2 \cdot \frac{1}{13^2 - 9^2} \begin{bmatrix} 13 & -9 \\ -9 & 13 \end{bmatrix} = \frac{2}{88} \begin{bmatrix} 13 & -9 \\ -9 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_w^{-1} = \frac{1}{44} \begin{bmatrix} 13 & -9 \\ -9 & 13 \end{bmatrix}$$

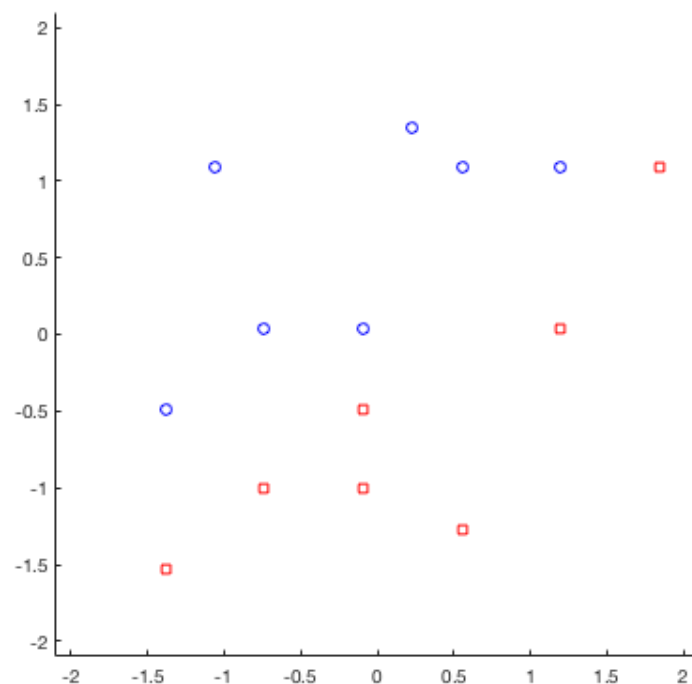
$$w = \Sigma_w^{-1} \cdot (\mu_1 - \mu_2) = \frac{1}{44} \begin{bmatrix} 13 & -9 \\ -9 & 13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -15 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$w = \frac{1}{44} \begin{bmatrix} -105 \\ 5 \end{bmatrix}$$

### Θέμα 3: Linear Discriminant Analysis LDA vs PCA

**a)** Στο τρίτο ερώτημα καλούμαστε να υλοποιήσουμε την μέθοδο LDA έτσι ώστε να μειώσουμε τις διαστάσεις των δεδομένων μας. Έπειτα θα τρέξουμε τον αλγόριθμο PCA που φτιάξαμε στο πρώτο ερώτημα και θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα. Σε αυτήν την περίπτωση διαβάζοντας το αρχείο 'ex1\_3\_data1.mat' παίρνουμε δύο πίνακες. Τον  $X(14 \times 2)$  ο οποίος περιέχει 14 δείγματα με 2 feature το καθένα, και τον  $C(1 \times 14)$  ο οποίος περιέχει τα label του κάθε δείγματος. Οπότε πριν ξεκινήσουμε το training ξέρουμε σε ποια κλάση ανήκει το δείγμα.

**b)** Όπως πάντα, θα πρέπει να γίνει normalization στα δείγματα πριν ξεκινήσουμε οποιαδήποτε επεξεργασία. Αυτό γίνεται με την συνάρτηση που δημιουργήθηκε στο πρώτο θέμα. Πλέον αφού έχουμε τα κανονικοποιημένα δείγματα καθώς και τα label τους, μπορούμε να τα εμφανίσουμε με διαφορετικό χρώμα έτσι ώστε να παρατηρήσουμε οπτικά πως διαφοροποιείται η μία κλάση με την άλλη. Στην παρακάτω plot φαίνονται τα σημεία της κλάσης 1 με μπλε χρώμα και της κλάσης 2 με κόκκινο.

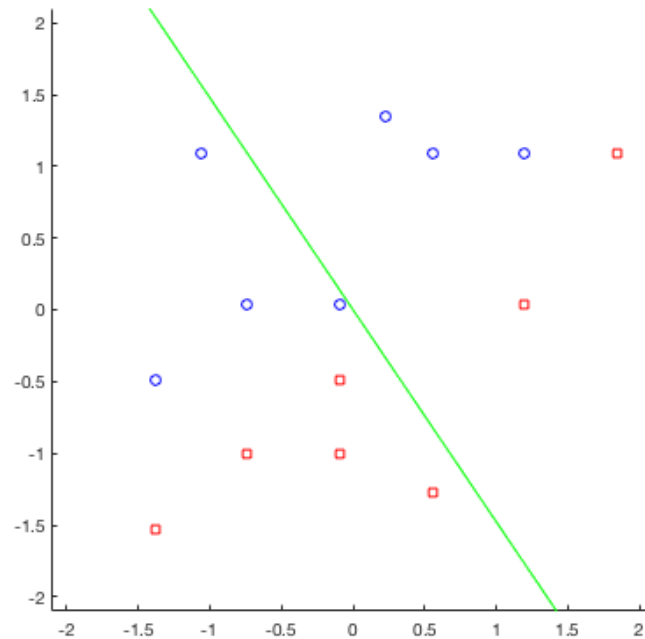


**c)** Στην συνέχεια το πρόγραμμα θα καλέσει την συνάρτηση 'fisherLinearDiscriminant' την οποία κληθήκαμε να υλοποιήσουμε. Μέσα στην συνάρτηση υπολογίστηκαν οι μέσες τιμές της κάθε κλάσης, έπειτα η διακυμάνσεις με την χρήση της συνάρτησης του MATLAB 'cov'.

Επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός του πίνακα σκέδασης  $S_w = (S_1 + S_2)/2$  όπου χρησιμοποιήσαμε για τον υπολογισμό του κατάλληλου διανύσματος  $v$  κατά το οποίο υπάρχει μέγιστος διαχωρισμός. Τέλος, κανονικοποιούμε το  $v$  με την νόρμα του και το επιστρέψαμε.

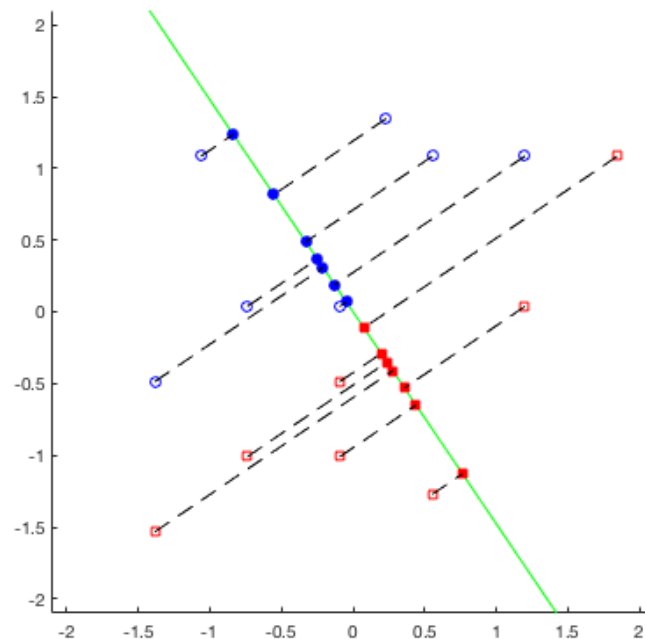


Πλέον, με την χρήση του  $v$  μπορούμε να παρουσιάσουμε το διάνυσμα πάνω στο οποίο αργότερα θα γίνει προβολή των δειγμάτων έτσι ώστε να γίνει το classification.



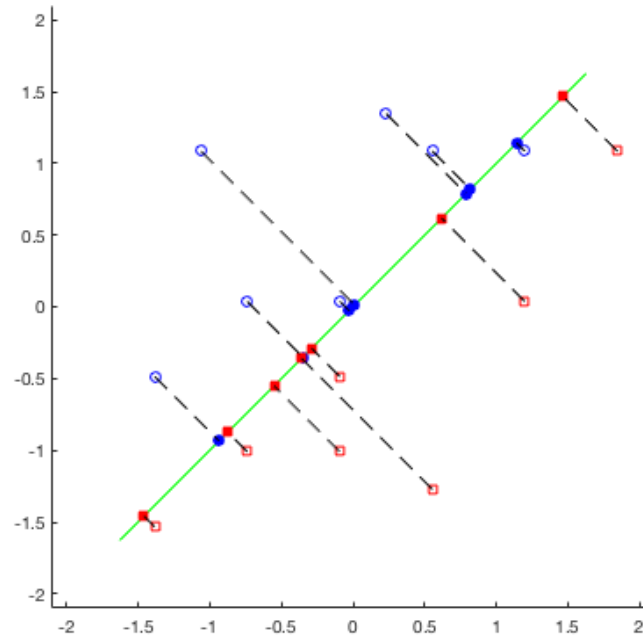
**d)** Το επόμενο βήμα είναι να γίνει η προβολή πάνω στο διάνυσμα που προϋπολογίστηκε. Αυτό επιτυγχάνεται στην συνάρτηση 'projectDataLDA' στην οποία περνάμε σαν ορίσματα τα δείγματα και το διάνυσμα πάνω στο οποίο θα γίνει η προβολή η οποία γίνεται με παρόμοιο τρόπο όπως στο πρώτο θέμα.

**e)** Έπειτα γίνεται η ανακατασκευή των δισδιάστατων δεδομένων πάλι με τρόπο παρόμοιο του θέματος 1, στην συνάρτηση 'recoverDataLDA'. Μπορούμε τώρα να εμφανίσουμε σε κοινό διάγραμμα τα ανακτημένα δεδομένα και την προβολή τους πάνω στην ευθεία που υπολογίσαμε στο ερώτημα **c**:



Παρατηρούμε πως υπάρχει καθαρός διαχωρισμός των κόκκινων και μπλε προβολών οπότε θα μπορούσαμε εύκολα να θέσουμε έναν κανόνα απόφασης για τον classifier μας.

f) Έπειτα τρέχουμε τον αλγόριθμο PCA πάνω στο ίδιο dataset έτσι ώστε να δούμε τα αποτελέσματα που βγάζει σε σχέση με τον LDA. Ο κώδικας της διαδικασίας PCA και όλων των συναρτήσεων που καλεί είναι πανομοιότυπος με αυτόν του πρώτου θέματος. Παρακάτω φαίνεται η προβολή που επέστρεψε ο αλγόριθμος PCA:



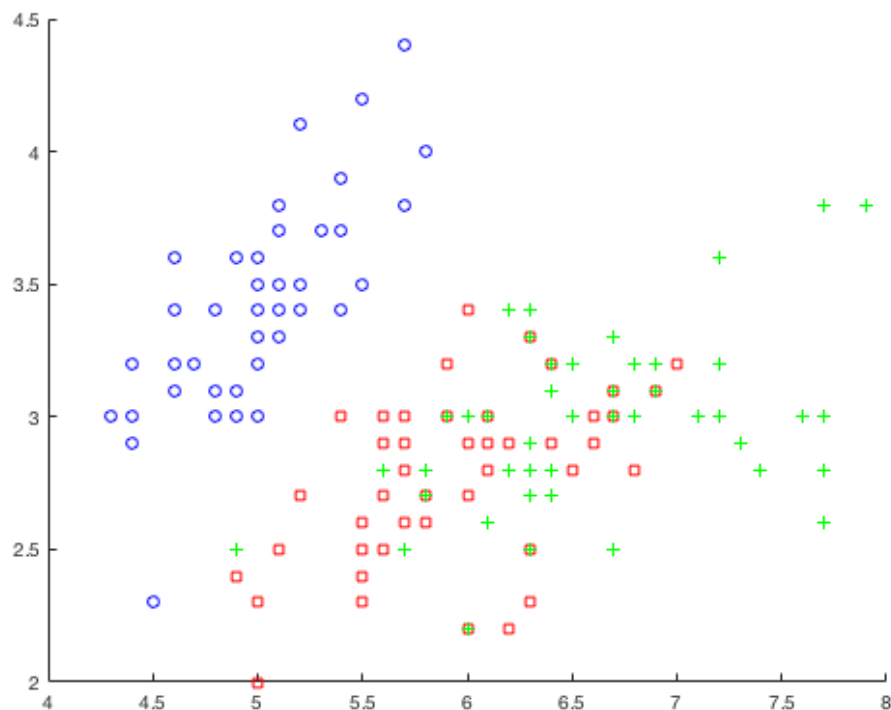
Παρατηρούμε πως το αποτέλεσμα του PCA δεν θα μπορούσε να μας είναι χρήσιμο για την κατασκευή classifier. Στα δείγματα, που πλέον είναι σε μία διάσταση, υπάρχει μεγάλο overlap και έτσι είναι σχεδόν απίθανο να γίνει σωστή επιλογή ως προς την κλάση. Αυτό συμβαίνει διότι ο PCA δεν λαμβάνει υπόψιν τα label των δειγμάτων και απλά τα προβάλλει στην ευθεία κατά την οποία υπάρχει μέγιστη διασπορά, πράγμα που δεν μας ωφελεί στην συγκεκριμένη περίπτωση.

## Μέρος 2

Στο δεύτερο μέρος της άσκησης γίνεται γενίκευση του αλγορίθμου LDA που χρησιμοποιήσαμε πριν, εισάγοντας πλέον δείγματα από την βάση δεδομένων Fisher's Iris.

**a)** Αφού φορτώσουμε τα δείγματα από το αρχείο 'fisheriris.mat' θα πάρουμε τον πίνακα *meas* οποιού περιέχει μετρήσεις πάνω σε 150 λουλούδια. Το κάθε *sample* έχει 4 μετρήσεις/features που σημαίνει ότι ο πίνακας μας έχει διαστάσεις 150x4. Επίσης θα πάρουμε και τον πίνακα *species* (150x1) που σε κάθε σειρά του είναι αποθηκευμένη η κλάση που ανήκει το λουλούδι της αντίστοιχης σειράς του *meas*. Έπειτα μετατρέπεται ο πίνακας *species* με κατάλληλο τρόπο σε έναν αντίστοιχο ο οποίος αντί να περιέχει πληροφορία για τις κλάσεις σε μορφή string (setosa, Versicolor, Virginica) θέτουμε έναν αριθμό (0,1,2) για την κάθε κλάση.

**b)** Στην συνέχεια περάσαμε τα δεδομένα από την συνάρτηση που υλοποιήσαμε στο προηγούμενο μέρος έτσι ώστε να γίνει κανονικοποίηση. Έπειτα, εμφανίσαμε τα 2 πρώτα features σε 2D plot με διαφορετικό χρώμα ανά κλάση όπως φαίνεται παρακάτω:



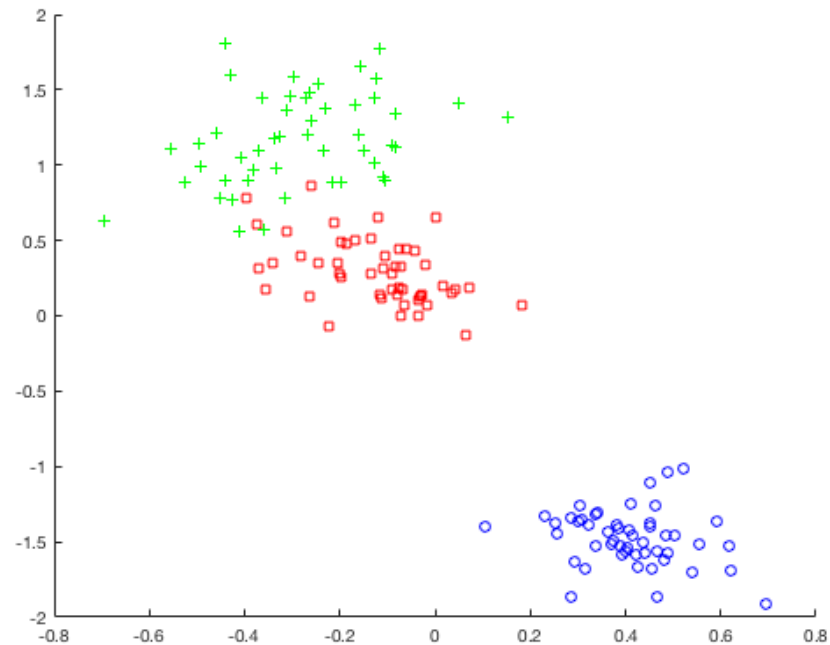
**c)** Στο τρέχων ερώτημα υλοποιείται η συνάρτηση 'myLDA' η οποία δέχεται σαν ορίσματα τα δείγματα, τα label τους και την επιθυμητή διάσταση. Θα πρέπει μετά από υπολογισμούς να επιστρέψει ιδιοδιανύσματα στον πίνακα *A*.

Αρχικά με ένα for loop υπολογίζεται η Prior πιθανότητα της κάθε κλάσης και αποθηκεύεται στην μεταβλητή *P*. Στην περίπτωση μας οι κλάσεις είναι ισοπίθανες διότι έχουμε 50 δείγματα για την κάθε μία ( $P = 50/150$ ). Στο ίδιο loop υπολογίζεται και η μέση τιμή της κάθε κλάσης. Έπειτα υπολογίζεται ο ολικός μέσος με την εντολή 'mean(mean(Samples))'. Με μία δεύτερη επανάληψη υπολογίζεται ο πίνακας σκέδασης  $S_W$  και  $S_b$  υλοποιώντας τους τύπους παρακάτω:

$$S_b = \sum_{i=1}^C n_i (\mu_i - \mu)(\mu_i - \mu)^T$$
$$S_W = \sum_{i=1}^C S_i$$

Αφού γίνει ταξινόμηση των ιδιοδιανυσμάτων επιστρέφονται τα πρώτα  $K$ , όπου  $K$  η επιθυμητή διάσταση.

**d)** Στο τελευταίο ερώτημα ξαναχρησιμοποιούμε την συνάρτηση 'projectDataLDA' του προηγούμενου μέρους της άσκησης έτσι ώστε να γίνει η προβολή στα διανύσματα  $v$ , τα διαχωρίζουμε με βάση τα label τους και τα εμφανίζουμε:



Παρατηρώντας το αποτέλεσμα, έχουμε καθαρή εικόνα για τον διαχωρισμό των 3 κλάσεων. Τα μπλε δείγματα είναι αρκετά απομακρυσμένα από τα άλλα δύο, και μπορούμε πλέον να χωρίσουμε τα κόκκινα με τα πράσινα με ένα μικρό ποσοστό λάθος απόφασης πράγμα που αποτελεί βελτίωση σε σχέση με το αρχικό διάγραμμα όπου τα πράσινα και τα κόκκινα σχεδόν συμπίπταν.

#### ΘΕΜΑ 4: Bayes

έχουμε 2 κλάσεις με  $P(\omega_1)$  και  $P(\omega_2)$

$$\mu_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mu_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1.2 & -0.4 \\ -0.4 & 1.2 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.4 \\ 0.4 & 1.2 \end{bmatrix}$$

a) Για τον υπολογισμό του συνόρου απόφασης ξεκινάμε από την σχέση:

$$P(\omega_1)P(x|\omega_1) = P(\omega_2)P(x|\omega_2)$$

$$\Leftrightarrow P(\omega_1) \frac{1}{2\pi|\Sigma_1|^{\frac{1}{2}}} e^{\left[-\frac{1}{2} \Sigma_1^{-2} \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i}\right]} = P(\omega_2) \frac{1}{2\pi|\Sigma_2|^{\frac{1}{2}}} e^{\left[-\frac{1}{2} \Sigma_2^{-2} \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i}\right]}$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(\omega_1)}{P(\omega_2)} \cdot \frac{|\Sigma_2|^{\frac{1}{2}}}{|\Sigma_1|^{\frac{1}{2}}} e^{\left[-\frac{1}{2} \Sigma_1^{-2} \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i}\right]} = e^{\left[-\frac{1}{2} \Sigma_2^{-2} \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i}\right]}$$

$$\Leftrightarrow \ln \left( \frac{P(\omega_1)}{P(\omega_2)} \cdot \frac{|\Sigma_2|^{\frac{1}{2}}}{|\Sigma_1|^{\frac{1}{2}}} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{(x_1 - 3)^2}{1.2} + \frac{(x_2 - 3)^2}{1.2} \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{(x_1 - 6)^2}{1.2} + \frac{(x_2 - 6)^2}{1.2} \right)$$

$$\text{Αν θέσουμε } C = \ln \left( \frac{P(\omega_1)}{P(\omega_2)} \cdot \frac{|\Sigma_2|^{\frac{1}{2}}}{|\Sigma_1|^{\frac{1}{2}}} \right)$$

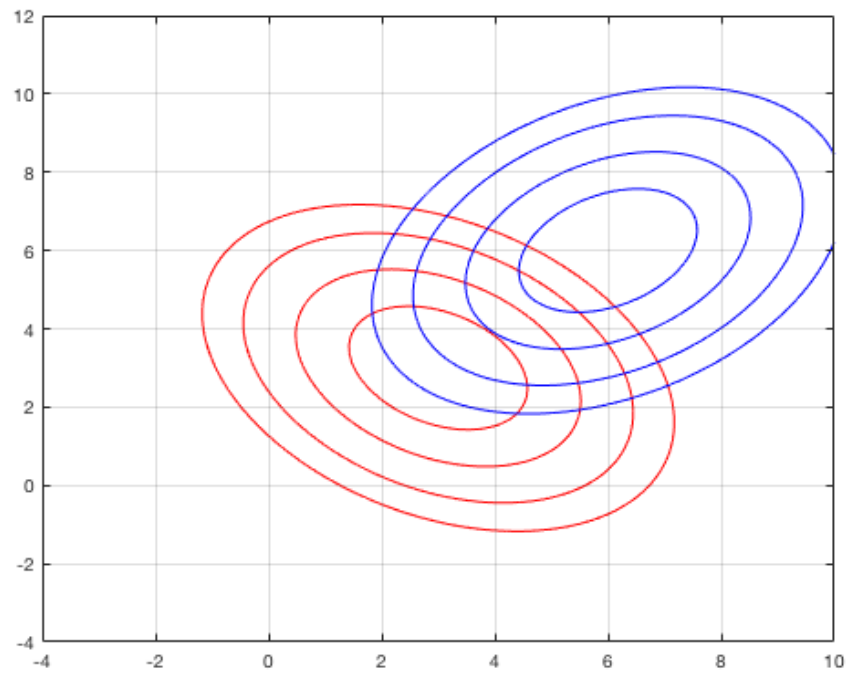
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left[ \frac{(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2}{1.2} \right] - \frac{1}{2} \left[ \frac{(x_1 - 6)^2 + (x_2 - 6)^2}{1.2} \right] = C$$

$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 - (x_1 - 6)^2 - (x_2 - 6)^2 = 2.4 \cdot C$$

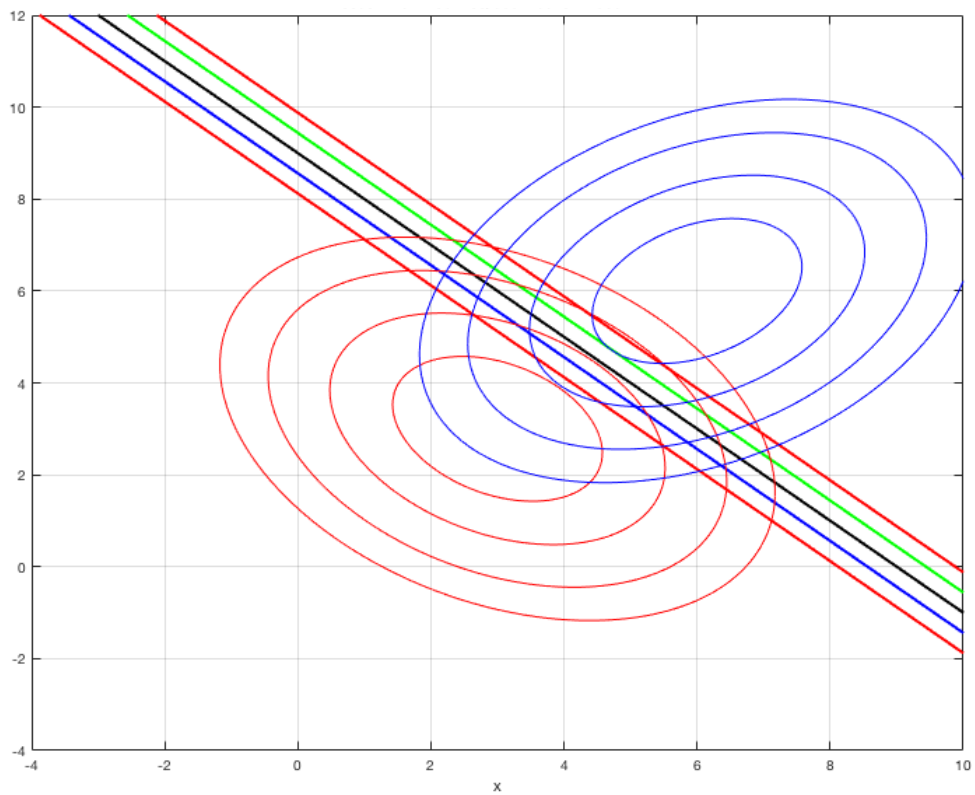
$$x_2 = -x_1 + \frac{2}{5}C + \frac{45}{5}$$

$$x_2 = -x_1 + \frac{2}{5}C + 9 \quad \text{για } C = \ln \left( \frac{P(\omega_1)}{P(\omega_2)} \cdot \frac{|\Sigma_2|^{\frac{1}{2}}}{|\Sigma_1|^{\frac{1}{2}}} \right)$$

**b)** Ο κώδικας για το 4<sup>ο</sup> θέμα, βρίσκεται στο αρχείο MATLAB 'exercise1\_4.m'. Στο πρώτο μέρος του κώδικα σχεδιάζονται οι καμπύλες για τις δύο κλάσεις σε κοινό διάγραμμα, όπως φαίνεται παρακάτω:

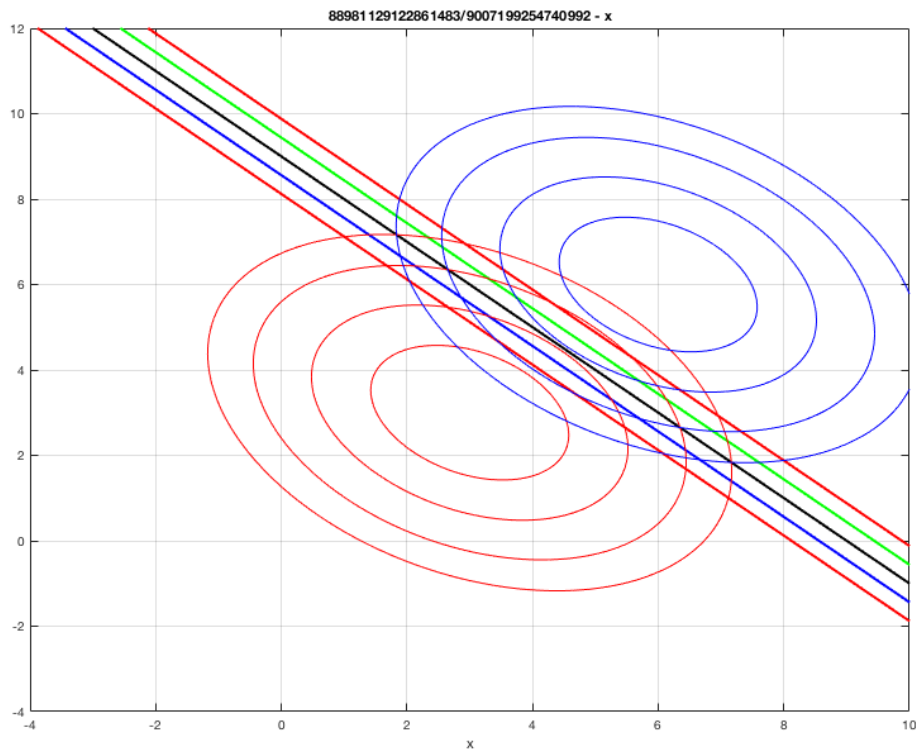


**c)** Πλέον έχουμε τις prior πιθανότητες των δύο κλάσεων και μπορούμε να δείξουμε το όριο απόφασης στην εικόνα για τα εξής  $P(\omega_1) = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9$



**d)** Παρατηρούμε πως όσο αυξάνεται η prior πιθανότητα της κλάσης  $\omega_1$  το σύνορο απόφασης μεταφέρεται όλο και πιο κοντά στην κλάση  $\omega_2$ . Στην περίπτωση που οι δυο κλάσεις είναι ισοπίθανες, το σύνορο βρίσκεται ακριβώς στην μέση. Η κίνηση αυτή του ορίου είναι λογική αφού η κλάση με μεγαλύτερη πιθανότητα θα πρέπει να έχει παραπάνω 'χώρο'.

**e)** Στην περίπτωση που οι κλάσεις έχουν ίδιους πίνακες συνδιασποράς, οι οριζουσες από την σταθερά  $C$  θα φύγουν και θα μείνουν μόνο οι πιθανότητες για να μεταβάλλουν αυτόν τον αριθμό. Τα αποτελέσματα φαίνονται παρακάτω:



## ΘΕΜΑ 5: Minimum Risk

έχουμε 2 ισοπίθανες κλάσεις:  $P(\omega_1) = P(\omega_2)$

$$\sigma_1 = 1 \text{ και } \sigma_2 = 2$$

$$L = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Η ταξινόμηση θα γίνει με βάση τις παρακάτω ποσότητες:

$$l_1 = \lambda_{11}P(\omega_1)P(x|\omega_1) + \lambda_{21}P(\omega_2)P(x|\omega_2)$$

$$l_2 = \lambda_{12}P(\omega_1)P(x|\omega_1) + \lambda_{22}P(\omega_2)P(x|\omega_2)$$

Το όριο απόφασης  $x_0$  θα είναι εκεί που ισχύει:  $l_1 = l_2$

$$\lambda_{12}P(\omega_1)P(x|\omega_1) + \cancel{\lambda_{22}P(\omega_2)P(x|\omega_2)} = \cancel{\lambda_{11}P(\omega_1)P(x|\omega_1)} + \lambda_{21}P(\omega_2)P(x|\omega_2)$$

$$\xrightarrow{P(\omega_1)=P(\omega_2)} \lambda_{12}P(x|\omega_1) = \lambda_{21}P(x|\omega_2)$$

$$\Rightarrow x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{2x}{4} \cdot e^{-\frac{x^2}{8}}$$

$$\Rightarrow x \left( 2e^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-\frac{x^2}{8}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \ln \left( 2e^{-\frac{x^2}{2}} \right) = \ln \left( e^{-\frac{x^2}{8}} \right)$$

$$\Rightarrow \ln 2 + \ln \left( e^{-\frac{x^2}{2}} \right) = \ln \left( e^{-\frac{x^2}{8}} \right)$$

$$\Rightarrow \ln 2 - \frac{x^2}{2} = -\frac{x^2}{8}$$

$$\Rightarrow 3x^2 = 8 \cdot \ln 2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{8 \cdot \ln 2}{3}} \xrightarrow{x \geq 0} x = 1.3595$$