Nama : Zazkia Maharrani Adzalvi
Kelas : IT-48-03

Tugas Aljabar Linier dan Matriks
SubCLO 03-1-3 (subclo-4)
Kode MK: CBK1GAB3
Program Studi Teknologi Informasi
TA. 2425-2

Soal-1, Max.Score 25

Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

a. Hitunglah nilai-nilai eigen dari matriks A.
b. Tentukan satu vektor eigen yang sesuai untuk masing-masing nilai eigen.
c. Susun matriks ortogonal P yang terdiri dari vektor-vektor eigen yang dinormalisasi (vektor satuan), dan matriks diagonal D, sehingga $A = PDP^{-1}$.

a. $AV = \lambda V \Rightarrow (AV - \lambda V) = (A - \lambda I) V = 0$

$\Rightarrow \det (A - \lambda I) = 0$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow (5-\lambda) \det \left(\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix}\right) = (5-\lambda)((4-\lambda)^2 - 4) = (5-\lambda)(12 - 8\lambda + \lambda^2)$$

$$= (5-\lambda)(\lambda - 6)(\lambda - 2) = 0$$

$\Rightarrow$ Jadi nilai-nilai eigen untuk matriks A adalah $\lambda_1 = 5$; $\lambda_2 = 6$; dan $\lambda_3 = 2$ hasil yang krusial dalam analisis matrik

2. Vektor eigen terkait nilai eigen $\lambda_1 = 5$

$(A - \lambda_1 I)V = (A - 5I)V = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[b2+2(b1)]{b1.(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[b1+\frac{2}{3}.b2]{b2.(\frac{1}{3})} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{b1+2b2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Solusi Vektor eigen $V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$ untuk $r \in \mathbb{R}$

Pilih $r = 1$, sehingga salah satu vektor eigen terkait $\lambda_1 = 5$ adalah $V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Vektor eigen terkait nilai eigen $\lambda_3 = 2$

$(A - \lambda_3 I)v = (A - 2I)v = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} b1 \cdot (1/2) \\ b2 - b1 \\ b3 \cdot (1/3) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Solusi vektor eigen $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \\ r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} r$ untuk $r \in R$

Pilih $r = 1$, sehingga salah satu vektor eigen terkait $\lambda_3 = 2$ adalah $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(c.) masing-masing vektor eigen dari $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ yang dinormalkan, secara berturut-turut adalah

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Jadi $P = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, karena P merupakan matriks ortogonal,

maka $P^{-1} = P^t$, sehingga dapat diketahui:

$$PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Nama : Zaskia Maharrani Adzului
Kelas : IT-40-03

Soal-2, Max.score 25

Diberikan matriks

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a. Tentukan semua nilai eigen dari matriks B.
b. Tentukan vektor eigen untuk masing-masing nilai eigen.
c. Tunjukkan bahwa B adalah matriks orthogonal, dan jelaskan bahwa B dapat didiagonalisasi.

a. Vektor v merupakan non-zero vektor eigen atas matrik B terkait nilai eigen λ, jika

$$Bv = \lambda v \Rightarrow (Bv - \lambda v) = (B - \lambda I)v = 0$$

$$\Rightarrow \det(B - \lambda I) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= (1-\lambda)\det\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0$$

Jadi nilai-nilai eigen untuk matrik B adalah $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -1$. Multiplisitas $\lambda_1 = 1$ adalah 2, sehingga vektor eigen ini akan ada 2 juga

b. Vektor eigen terkait nilai eigen $\lambda_1 = 1$:

$$(A - \lambda_1 I)v = (A - 1 . I)v = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} b1 . (-1) \\ b2 + b1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

solusi vektor eigen $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s$ untuk $r, s \in R$

Pilih $r = 1$; $s = 1$, sehingga salah satu vektor eigen terkait $\lambda_1 = 1$ adalah $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
sedangkan basis ruang eigen terkait $\lambda_1 = 1$ adalah $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Vektor eigen terkait nilai eigen $\lambda_2 = -1$

$$(A - \lambda_2 I)v = (A - (-1) I)v = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} b3 (1/2) \\ b2 - b1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

solusi vektor eigen $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s$ untuk $s \in R$

Pilih $s = 1$, sehingga salah satu vektor eigen terkait $\lambda_2 = -1$ adalah $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

c. $B^{-1} = B^t = B$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B^t = B$$

matriks B dapat didiagonalkan, sehingga $B = PDP^{-1}$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, P^{-1} = P^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nama : Zafira Maharrani Adzulvi

Kelas : IT-40-03

Soal-3 Max.score 20

Diberikan matriks

$$C = \begin{bmatrix} 31 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a. Tentukan semua nilai eigen dari metriks C.

b. Tentukan vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan masing-masing vektor eigen. Apakah semua vektor eigen saling ortogonal?

c. Jika ya (saling ortogonal), susun matriks ortogonal P dari vektor-vektor eigen yang diperoleh, dan tentukan matriks D, sehingga $C = PDP^{-1}$.

(a.) Tentukan semua nilai eigen dari matrik C

$\det(C - \lambda I) = 0$

$$C - \lambda I = \begin{bmatrix} 31-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (31-\lambda)[(3-\lambda)(3-\lambda)-1] - 1[(1)(3-\lambda)-1] + 1((1)(1)-(3-\lambda))$

$= (31-\lambda)((3-\lambda)^2-1) - (3-\lambda-1) + (1-(3-\lambda))$

$= (31-\lambda)((9-6\lambda+\lambda^2)-1) - (2-\lambda) + (\lambda-2)$

$= (31-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8)$

$= (2-\lambda) + (\lambda-2) = 0$

Jadi $\det(C - \lambda I) = (31-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8) = 0$

$\lambda_1 = 31 \qquad \lambda_2 = 2,4$

(b.) Tentukan Vektor-vektor eigen. Apakah semua vektor eigen saling ortogonal?

$\Rightarrow \lambda_1 = 31$

$$(C - 31I)\vec{v} = 0 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -28 & 1 \\ 1 & 1 & -28 \end{bmatrix} \vec{v} = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -28 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -28 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{b1.b2}{\times}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -28 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -28 & 0 \end{array}\right] \underset{R3-29R2}{\overset{R3-R1}{\approx}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -28 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -58 & 0 \end{array}\right]$$

$$\lambda_1 = 31 = V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda_2 = 2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 29 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{b1.b2}{\times}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 29 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{b3.b1}{\overset{b2.29b1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -28 & -28 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{-\frac{1}{28}b2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{b1-b2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{b1-b2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Dipindai dengan CamScanner

$\Rightarrow \lambda = 4$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 27 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{b_2 - 27b_1 \\ b_3 - b_1}]{b_1 \cdot b_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 28 & -26 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[b_3 - 2b_2]{\frac{1}{28} b_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -13/14 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad V_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(5) $\|\vec{v_1}\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$, $\|\vec{v_2}\| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ $\|V_3\| = \sqrt{(-2)^2+1^2+1^2} = \sqrt{6}$

$$\vec{v_1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{v_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad V_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 31 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$P^{-1} = P^{T}$

$C = PDP^{T}$

Jadi semua vektor-vektor adalah ortogonal

Dipindai dengan CamScanner

Nama : Zaftela Maharrani Adrului
Kelas : IT-40-03

Soal-4, Max.score 30

Seorang manajer sedang menilai tiga kriteria penting dalam memilih vendor: Harga (H), Kualitas (K), dan Waktu Pengiriman (W). Ia membuat matriks perbandingan berpasangan berikut untuk menunjukkan tingkat kepentingan relatif setiap kriteria:

$$M = \begin{array}{c} H \\ K \\ W \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a. Hitung nilai eigen terbesar dari matriks M.
b. Tentukan vektor eigen yang bersesuaian.
c. Berdasarkan vektor eigen tersebut, urutkan ketiga kriteria dari yang paling penting sampai yang paling sedikit penting.

(a.) Hitung nilai eigen terbesar dari matrik M

$Mv = \lambda v \Rightarrow (Mv - \lambda v) = (M - \lambda I)v = 0$

$\Rightarrow \det(M - \lambda I) = 0$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 1/2 & 1-\lambda & 1/2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)\cdot\det\left(\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}\right) - 2\cdot\det\left(\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}\right) + 1\cdot\det\left(\begin{vmatrix} 1/2 & 1-\lambda \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right)$$

$= (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 1) - 2\cdot\left(\frac{1}{2}(1-\lambda) - \frac{1}{2}\right) + (1-(1-\lambda)) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) + \lambda + \lambda =$

$(\lambda^2 - \lambda^3 - 2\lambda + 2\lambda^2 + 2\lambda^2 + 2\lambda = -\lambda^3 + 3\lambda^2 = -\lambda^2(\lambda - 3 = 0$

Jadi nilai - nilai eigen untuk matriks M adalah $\boxed{\lambda_1 = 0}$ dan $\boxed{\lambda_2 = 3}$

(b.) Tentukan vektor eigen yang bersesuaian

$\lambda_1 = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[b_3 - b_1]{b_2 - 1/2\, b_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - r \\ s \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s \text{ untuk } r, s \in \mathbb{R}$$

$r = 1; s = 1$ sehingga vektor eigen terkait $\lambda_1 = 1$ adalah $V = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

basis eigen terkait $\lambda_1 = 0$ adalah $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

Yang sudah dinormalisasi $\left\{\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

nilai eigen $\lambda_2 = 3$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1/2 & -2 & 1/2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{b_2 + \frac{1}{4} \cdot b_1 \\ b_3 + \frac{1}{2} \cdot b_1}}{\overset{b_1 \cdot (-\frac{1}{2})}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -3/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 3 & -3/2 & 0 \end{array}\right] \underset{b_3 + \frac{1}{2} \cdot b_3}{\overset{b_2 \cdot (-\frac{2}{3})}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{b_1 + b_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vektor eigen $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} r$ untuk $r \in \mathbb{R}$

$r = 2$ sehingga vektor eigen $\lambda_2 = 3$ adalah $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, basis ruang eigen

yang dinormalisasi $\lambda_2 = 3$ adalah $\left\{ \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \right\}$

(c.) Jadi, nilai kepentingan didasarkan pada nilai eigen terbesar, yaitu $\lambda_2 = 3$