Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Yayasan Pendidikan Telkom

DETERMINAN

CTI1B3/ ALJABAR LINEAR DAN MATRIKS

FAKULTAS INFORMATIKA

CENTER OF LEARNING & OPEN EDUCATION TELKOM UNIVERSITY

Determinan Matriks

Sub Pokok Bahasan

- Determinan matriks 2x2 dan 3x3
- Determinan dengan OBE
- Determinan dengan Ekspansi Kofaktor

Beberapa Aplikasi Matriks

- Menentukan Solusi SPL
- Optimasi
- Model Ekonomi
- dan lain-lain.

Determinan Matriks

Metode Sarrus

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

(+) (-)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

(+) (+) (+) (-) (-) (-)

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Determinan Matriks(2)

Contoh:

Tentukan Determinan Matriks

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$\boldsymbol{det\,(K) = |K| = k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}}$$
$$\boldsymbol{= 1(4) - (2)(3)}$$
$$\boldsymbol{= 4 - 6}$$
$$\boldsymbol{= -2}$$

Determinan Matriks(3)

Contoh:

Tentukan Determinan Matriks

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$\det(B) = |B| = b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33} - b_{13}b_{22}b_{31}$$

$$= (3)(1)(1) + (2)(0)(-2) + (-1)(1)(-2) - (-1)(1)(-2) - (3)(0)(-2) - (2)(1)(1)$$

$$= 3 + 0 + 2 - 2 - 0 - 2$$

$$= 1$$

Determinan Matriks(4)

Perhatikan

a. $\det\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix} = 1(3) - 2(0) = 3 - 0 = 3$

b. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 4 & 5\\0 & 0 & 6\end{vmatrix}$

$= (1)(4)(6) + (2)(5)(0) + (3)(0)(0) - (1)(5)(0) - (2)(0)(6) - (3)(4)(0)$

$= 24 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0$

$= 24$

c. $\det\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\4 & 5 & 0\\7 & 8 & 9\end{bmatrix}$

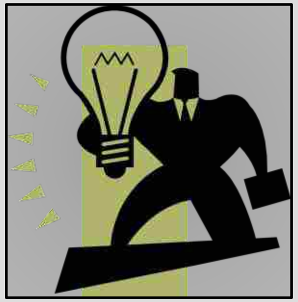
$= (1)(5)(9) + (0)(0)(7) + (0)(4)(8) - (1)(0)(8) - (0)(4)(9) - (0)(5)(7)$

$= 45 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0$

$= 45$

Determinan matriks segitiga = Hasilkali unsur diagonal?

Bagaimana dengan matriks 4x4, 5x5, 6x6?



Determinan dengan OBE(2)

Menghitung determinan matriks dengan cara mengkalikan unsur-unsur diagonalnya hanya berlaku untuk matriks dengan bentuk segitiga bawah ataupun matriks segitiga atas.

Oleh karena itu :

Matriks bujur sangkar ~ OBE ~ Matriks Segitiga

Berikut ini adalah **pengaruh OBE** pada nilai determinan suatu matriks, yaitu :

1. Jika matriks B berasal dari matriks A dengan satu kali pertukaran baris maka $\boldsymbol{det\,(B) = -det\,(A)}$

   Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 3$$

   sehingga

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow |B| = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 = -|A|$$

Determinan dengan OBE(3)

2. **Jika matriks B berasal dari matriks A dengan mengalikan satu baris A dengan k maka $det\,(B) = k\,det\,(A)$**

   Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = (2)(1) - (1)(-1) = 3$$

   maka jika $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, determinan dari B adalah

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) - (1)(-2) = 6$$

OBE yang dilakukan pada matriks tersebut adalah $2b_2$

   perhatikan pula bahwa $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(3) = 2|A| = 6$

3. **Jika matriks B berasal dari matriks A dengan perkalian sebuah baris dengan konstanta tak nol k lalu dijumlahkan pada baris lain maka $det\,(B) = det\,(A)$**

   Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = (1)(-6) - (3)(2) = -12$$

OBE yang dilakukan pada matriks tersebut adalah $-2b_1 + b_2$

   maka jika $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$, determinan dari B adalah

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} = 1(-12) - (3)(0) = -12$$

   perhatikan pula bahwa $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = |A|$

Determinan dengan OBE(4)

Tentukan determinan matriks berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Jawab :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \text{(hasil dari pertukaran } b_1 \text{ dan } b_2$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \text{(hasil dari penjumlahan } -2b_1 \text{ ke } b_2\text{)}$$

Determinan dengan OBE(5)

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -\left(-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix}\right)$$ (hasil dari pertukaran b_2 dan b_3

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$ (hasil dari penjumlahan $3b_2$ ke b_3)

$$= (1)(1)(4)$$

$$= 4$$

Determinan dengan Ekspansi Kofaktor

Diketahui matriks A berukuran $n \times n$ seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Beberapa definisi yang perlu diketahui

- M_{ij} disebut **Minor- *ij*** yaitu determinan matriks A dengan menghilangkan baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$ matriks A.

  Contoh : Jika diketahui $X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

  maka M_{13}diperoleh dengan menghitung determinan matriks X yang terlebih dahulu dihilangkan baris 1 dan kolom 3nya$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right)$.

  Oleh karena itu $\mathrm{M}_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (2)(0) = 1$

Determainan dengan Ekspansi Kofaktor(2)

- C_{ij} dinamakan **kofaktor** $-\boldsymbol{ij}$. Kofaktor$-ij$ dapat dihitung dengan cara $(-1)^{i+j}\,M_{ij}$

  Contoh :

  $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

  maka

  $$C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

  $$= (-1)^3\big((1)(2) - (1)(0)\big)$$

  $$= -1\,(2)$$

  $$= -2$$

Determinan dengan Ekspansi Kofaktor(3)

Secara umum, cara menghitung determinan dengan ekspansi kofaktor:

Menghitung det (A) dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris ke$-i$

$$\det(A) = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \cdots + a_{in}c_{in}$$

Menghitung det (A) dengan ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke$-j$

$$\det(A) = a_{1j}\,C_{1j} + a_{2j}\,C_{2j} + \ldots + a_{nj}\,C_{nj}$$

Determinan dengan Ekspansi Kofaktor(4)

Contoh: Hitunglah $\det(A)$ dengan ekspansi kofaktor :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Jawab:

(Determinan dari matriks A dengan ekspansi kofaktor dapat dihitung menggunakan ekspansi kofaktor baris maupun ekspansi kofaktor kolom)

a. Jika det (A) dihitung menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-3

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = a_{31}\, C_{31} + a_{32}\, C_{32} + a_{33}\, C_{33}$$

$$= 0(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

= 0 -2 + 6

= 4

Determinan dengan Ekspansi Kofaktor(5)

b. Jika det (A) dihitung menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-3

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = a_{13}\,C_{13} + a_{23}\,C_{23} + a_{33}\,C_{33}$$

$$= 0(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

= 0 -2 + 6

= 4

Sifat-sifat Determinan

1) Diketahui A adalah matriks bujursangkar. Jika A memiliki baris 0 ataupun kolom 0, maka $\det(A) = 0$
2) $\det(A) = \det(A^T)$
3) $\det(A)\det(B) = \det(AB)$
4) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Invers menggunakan Kofaktor Matriks

Misalkan A memiliki invers, maka A^{-1} dapat ditentukan menggunakan persamaan

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj\ (A)$$

dimana

- A mempunyai invers *jika dan hanya jika* $\det(A) \neq 0$.
- Misal $A_{n\times n}$ merupakan matriks yang memiliki invers dan C_{ij} adalah kofaktor a_{ij}. Maka

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut matriks kofaktor A. Transpos dari matriks tersebut dinamakan adjoin A (notasi $adj(A)$).

$$adj\ (A) = C^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Invers menggunakan Kofaktor Matriks(2)

Berikut adalah beberapa sifat determinan matriks adalah :

1. Jika A adalah sembarang matriks bujursangkar, maka $\det(A) = \det(A^t)$
2. Jika A dan B merupakan matriks bujursangkar berukuran sama, maka:$\det(AB) = \det(A)\det(B)$
3. Jika A mempunyai invers maka :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Invers menggunakan Kofaktor Matriks(3)

Contoh:

Diketahui

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Tentukan matriks adjoin dari A!

Invers menggunakan Kofaktor Matriks(4)

Jawab:

Perhatikan bahwa

$$c_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1 \qquad c_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} = -1 \qquad c_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} = 2 \qquad c_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} = 1 \qquad c_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix} = -2$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix} = 1 \qquad c_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} = 1 \qquad c_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix} = -1$$

Sehingga didapat

$$C = \begin{bmatrix}-1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

Invers menggunakan Kofaktor Matriks(5)

Karena matriks kofaktor dari A adalah

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Maka adjoin dari matriks A adalah

$$C^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

LATIHAN

1. Tentukan determinan menggunakan OBE dan ekspansi kofaktor dari matriks berikut

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } Q = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Diketahui :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tunjukan bahwa : $det\,(\mathrm{A})\ det\,(\mathrm{B}) = det\,(\mathrm{AB})$

LATIHAN(2)

3. Diketahui $D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & k \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & k & 4 \end{bmatrix}$, tentukan nilai dari k agar $\det(D) = 29$

4. Diketahui matriks A= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. Jika $B = A^{-1}$ dan A^T merupakan transpos dari A. Maka, tentukan nilai

$$x = \frac{\det(2A^2) - \det(5B)}{\det\,(\mathrm{A^T B})}$$

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

THANKYOU