

Matriks dan Operasinya

Sub Pokok Bahasan

- Pendahuluan: Matriks
- Jenis-jenis Matriks
- Operasi Matriks
- Operasi Baris Elementer
- Matriks Invers (Balikan)

Beberapa Aplikasi Matriks

- Representasi image (citra)
- *Chanel/ Frequency assignment*
- *Operation Research*
- dan lain-lain.

Review Penjumlahan dan Perkalian Matriks

1. Penjumlahan Matriks dengan Matriks

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

2. Perkalian Matriks dengan Skalar

$$k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

3. Perkalian Matriks dengan Matriks

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rj} & \dots & b_{rn} \end{bmatrix}$$

Maka entri matriks AB baris i kolom j adalah

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ir}b_{rj}$$

Operasi Matriks_Perkalian dan Penjumlahan

Jika diketahui A, B, C adalah matriks berukuran sama dan α, β merupakan unsur bilangan Riil,

Maka operasi matriks pada A, B, C memenuhi sifat berikut:

- $A + B = B + A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

Operasi Matriks_Perkalian dan Penjumlahan(2)

Contoh_1:

Diketahui matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tentukan

- a. AA^T
- b. A^TA
- c. Apakah $AA^T = A^TA$

Operasi Matriks_Perkalian dan Penjumlahan(3)

Jawab:

Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ maka $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, Oleh karena itu,

$$a. AA^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 13 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b. A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

c. Karena AA^T berukuran 3×3 sedangkan $A^T A$ berukuran 2×2 maka $AA^T \neq A^T A$
(Sifat komutatif perkalian tidak berlaku pada matriks)

Operasi Matriks_Operasi Baris Elementer

Operasi baris elementer meliputi :

1. Pertukaran Baris
2. Perkalian suatu baris dengan konstanta tak nol
3. Penjumlahan hasil perkalian suatu baris dengan konstanta tak nol (seperti butir 2) dengan baris yang lain.

Contoh OBE 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[b_1 \leftrightarrow b_2]{\sim} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

“Baris pertama ditukar dengan baris ke 2”

Operasi Matriks_Operasi Baris Elementer(2)

Contoh OBE 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}b_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

“Baris pertama dikalikan dengan bilangan $\frac{1}{2}$ ”

Contoh OBE 3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}b_1 + b_2} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

“Baris pertama dikalikan dengan bilangan $1/2$ **LALU** ditambahkan **KE** baris kedua”

Operasi Matriks_Operasi Baris Elementer(3)

Beberapa definisi yang perlu diketahui

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Baris pertama dan baris dua dinamakan baris tak nol (karena pada kedua baris tersebut memuat unsur tak nol)
- Bilangan 1 pada baris pertama dan bilangan 3 pada baris kedua dinamakan unsur pertama tak nol pada baris masing-masing
- Bilangan 1 pada baris pertama dan kolom pertama dinamakan satu utama
- Baris ketiga dinamakan baris nol (karena setiap unsur pada baris ketiga adalah nol)

Operasi Matriks_Operasi Baris Elementer(4)

Sifat matriks hasil OBE :

- Pada baris tak nol maka unsur tak nol pertama adalah 1(dinamakan satu utama)
- Pada baris yang berturutan, baris yang lebih rendah memuat 1 utama yang lebih ke kanan
- Jika ada baris nol maka baris tersebut diletakan pada baris yang paling bawah
- Pada kolom yang memuat unsur 1 utama, maka unsur yang lainnya adalah 0

Matriks dinamakan **esilon baris** jika memenuhi sifat **1,2, dan 3** (proses eliminasi gauss)

Matriks dinamakan **esilon baris tereduksi** jika memenuhi sifat **1,2,3, dan 4** (proses eliminasi gauss jordan)

Operasi Matriks_Operasi Baris Elementer(5)

Contoh_2:

Tentukan matriks esilon baris tereduksi dari

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Operasi Matriks_Operasi Baris Elementer(6)

Jawab:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2b_1 + b_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{b_2 \leftrightarrow b_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{-2b_2 + b_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-b_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-b_3 + b_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{b_2 + b_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Operasi Matriks_ Operasi Baris Elementer(7)

Perhatikan hasil OBE tersebut

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Untuk setiap baris unsur tak nol pertama adalah 1
- Pada baris yang berturutan, baris yang lebih rendah memuat 1 utama yang lebih ke kanan
- Pada kolom yang memuat unsur 1 utama, maka unsur yang lainnya adalah 0

Oleh karena itu, eselon baris tereduksi dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ adalah
 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Invers Matriks

Misal A adalah matriks bujur sangkar. B dinamakan invers matriks A jika memenuhi

$$AB = I \text{ atau } BA = I$$

Sebaliknya, A juga dinamakan invers matriks dari B . Notasi $A = B^{-1}$

Salah satu cara menentukan invers matriks adalah menggunakan OBE.

$$(A|I) \sim \dots \sim (I|A^{-1})$$

Jika OBE pada matriks A tidak menghasilkan matriks identitas maka A tidak memiliki invers

Contoh_3

Tentukan matriks invers (jika ada) dari:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{b_1 \leftrightarrow b_2} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-3b_1 + b_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-b_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-b_3 + b_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

Contoh_3(2)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-b_2 + b_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

Jadi,

$$\text{Invers Matriks dari } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ adalah } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Contoh_3(3)

Perhatikan bahwa:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Contoh_4

Tentukan matriks invers (jika ada) dari:

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0.75 & -0.25 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0.5 & 0.5 & -0.5 & 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.75 & -0.25 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{2b_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.75 & -0.25 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2}b_1 + b_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & -0.5 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{4}b_1 + b_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & -0.5 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}b_2 + b_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -0.5 & 1 \end{array} \right]$$

Karena terdapat baris 0 setelah OBE (tidak dapat dibentuk menjadi matriks identitas), maka A tidak memiliki invers

Sifat-sifat Invers Matriks

Diketahui A dan B adalah matriks bujur sangkar yang memiliki invers maka

- i. $(A^{-1})^{-1} = A$
- ii. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- iii. Misal $k \in R$ maka $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$
- iv. Sebagai akibat dari (ii) maka $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

Contoh_5

Diketahui

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Tentukan $(AB)^{-1}$

Jawab:

$(AB)^{-1}$ dapat ditentukan dengan

1. $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$, maka $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$

2. (menggunakan sifat $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$)

Karena $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{bmatrix}$, maka $B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$

Contoh_6

Diketahui

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

tentukan (A^{-3})

Jawab:

Karena $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ maka $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

A^{-3} dapat ditentukan menggunakan

$$A^{-3} = (A^{-1})^3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & -30 \\ -15 & 11 \end{bmatrix}$$

Hasil yang sama juga bisa didapatkan dengan $(A^3)^{-1}$.

$$\text{Karena } A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 30 \\ 15 & 41 \end{bmatrix} \text{ maka } (A^3)^{-1} = \begin{bmatrix} 41 & -30 \\ -15 & 11 \end{bmatrix} = (A^{-1})^3$$

Contoh_7

Jika diketahui matriks-matriks dibawah ini adalah matriks berorde $n \times n$ dan memiliki invers. Maka sederhanakan ekspresi berikut:

$$(AB)^{-1}(AC^{-1})(D^{-1}C^{-1})^{-1}D^{-1}$$

Jawab:

$$\begin{aligned}(AB)^{-1}(AC)^{-1}(D^{-1}C^{-1})^{-1}D^{-1} &= B^{-1}A^{-1}AC^{-1}(C^{-1})^{-1}(D^{-1})^{-1}D^{-1} \text{ menggunakan sifat invers ke (ii)} \\ &= B^{-1}A^{-1}AC^{-1}CDD^{-1} \text{ menggunakan sifat invers ke (i)} \\ &= B^{-1}III \text{ karena } A^{-1}A = C^{-1}C = DD^{-1} = I \\ &= B^{-1}\end{aligned}$$

Latihan

1. Diketahui matriks A dan B sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{bmatrix}$$

- A. Tentukan matriks eselon baris dari A dan B
- B. Tentukan matriks eselon baris tereduksi dari A dan B
2. Jika diketahui matriks-matriks dibawah ini adalah matriks berorde $n \times n$ dan memiliki invers. Maka sederhanakan ekspresi berikut:

$$C^{-1}(B^{-1}A^{-1})^{-1}(AB)^{-1}C$$



THANKYOU