

Sistem Persamaan Linear

Sub Pokok Bahasan

- Pendahuluan
- Solusi SPL dengan OBE
- Review Sistem Persamaan Linear
- Solusi SPL dengan Invers matriks dan Aturan Crammer
- SPL Homogen

Beberapa Aplikasi Matriks

- Rangkaian listrik
- Jaringan Komputer
- Model Ekonomi
- dan lain-lain.

Review SPL

Jika sistem persamaan linear terdiri dari m persamaan dan n variable, maka bentuk umum sistem persamaan linear tersebut adalah

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Sistem persamaan linear diatas dapat dituliskan dalam bentuk perkalian matriks sbb:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Solusi SPL dengan Matriks Invers

Tinjau sistem persamaan linear dengan n persamaan n variable berikut

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

atau

$$AX = B$$

Jika kedua ruas dikalikan dengan A^{-1} , maka persamaan diatas dapat dituliskan sebagai

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

Karena $A^{-1}A = I$ maka

$$X = A^{-1}B$$

Ingat bahwa suatu matriks A mempunyai invers jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$.

Solusi SPL dengan Matriks Invers(2)

Contoh :

Tentukan solusi dari SPL berikut :

$$\begin{cases} a + c = 4 \\ a - b = -1 \\ 2b + c = 7 \end{cases}$$

Jawab :

Perhatikan bahwa

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 + 0 + 2 = 1$$

Jadi A mempunyai Invers, menggunakan OBE maupun prinsip kofaktor, maka didapatkan A^{-1} adalah

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Solusi SPL dengan Matriks Invers(3)

sehingga $X = A^{-1} B$ berbentuk :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Jadi, Solusi SPL tersebut adalah $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Solusi SPL dengan Aturan Cramer

Misalkan SPL ditulis dalam bentuk $AX = B$, yaitu :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Jika determinan A tidak sama dengan nol maka solusi dapat ditentukan satu persatu (peubah $ke - i, x_i$)

Langkah-langkah aturan *cramer* adalah :

- Hitung determinan A
- Tentukan A_i , (A_i adalah matriks A dimana kolom ke- i diganti oleh B .)

Contoh :

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Solusi SPL dengan Aturan Cramer(2)

c. Hitung $|A_i|$

d. Solusi SPL untuk peubah adalah $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$

Contoh :

Tentukan solusi b dari SPL berikut :

$$\begin{cases} a + c = 4 \\ a - b = -1 \\ 2b + c = 7 \end{cases}$$

Jawab :

Perhatikan bahwa $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Solusi SPL dengan Aturan Cramer(3)

Maka

$$b = \frac{\det A_b}{\det A}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix}}{1}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-1 - 0) - 4(1 - 0) + 1(7 - 0)$$

$$= -1 + (-4) + 7$$

Jadi, Solusi peubah b yang memenuhi SPL adalah $b = 2$

Sistem Persamaan Linear Homogen

Bentuk umum

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

SPL homogen merupakan SPL yang konsisten (selalu mempunyai solusi).

Solusi SPL homogen dikatakan tunggal jika solusi itu adalah

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n = 0\}$$

Jika tidak demikian, SPL homogen mempunyai solusi tak hingga banyak (biasanya ditulis dalam bentuk parameter)

Solusi SPL Homogen menggunakan OBE

Contoh :
Tentukan solusi SPL homogen berikut

$$\begin{cases} 2p + q - 2r - 2s = 0 \\ p - q + 2r - s = 0 \\ -p + 2q - 4r + s = 0 \\ 3p - 3s = 0 \end{cases}$$

SPL dapat ditulis dalam bentuk

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right]$$

$r = b$ Dengan melakukan OBE diperoleh:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Maka solusi SPL homogen adalah

$$\begin{aligned} p &= a \\ q &= 2b \\ s &= a \end{aligned}$$

Dimana a, b merupakan bilangan Real Sembarang

Solusi SPL Homogen

Jika terdapat matriks A berukuran $n \times n$, maka pernyataan-pernyataan berikut adalah pernyataan yang ekuivalen (artinya, semuanya benar atau semuanya salah)

1. $\det(A) = 0$
2. A tidak memiliki invers
3. $Ax = 0$ hanya memiliki solusi tunggal (trivial)
4. Bentuk eselon baris tereduksi dari A adalah matriks Identitas berukuran $n \times n$

Solusi SPL Homogen(2)

Dari soal sebelumnya diketahui bahwa

$$\begin{cases} 2p + q - 2r - 2s = 0 \\ p - q + 2r - s = 0 \\ -p + 2q - 4r + s = 0 \\ 3p - 3s = 0 \end{cases}$$

memiliki solusi banyak. Hal ini dapat juga dapat dideteksi dengan memerhatikan matriks koefisien SPL tersebut.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Karena SPL homogen memiliki solusi banyak equivalen dengan pernyataan

- $\det(A) = 0$ maka A tidak memiliki invers.

- Bentuk eselon tereduksi dari matriks A adalah $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Contoh_1:

Contoh :

Diketahui SPL

$$\begin{bmatrix} -b & 0 & 0 \\ 0 & 1-b & 1 \\ 0 & 1 & 1-b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Tentukan b agar SPL memiliki solusi tak hingga banyak
- Tuliskan solusi SPL tersebut

Jawab :

Solusi suatu SPL homogen adalah tak tunggal jika $\det(A) = 0$.

Contoh_1(2):

$$\begin{vmatrix} -b & 0 & 0 \\ 0 & 1-b & 1 \\ 0 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -b \begin{vmatrix} 1-b & 1 \\ 1 & 1-b \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -b((1-b)(1-b) - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -b(1 - 2b + b^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -b(b^2 - 2b) = 0$$

$$\Leftrightarrow b = 0 \text{ atau } b = 2$$

Solusi SPL tak hingga banyak saat $b = 0$ atau $b = 2$

Contoh_1(3):

Saat $b = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan OBE maka

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Misalkan p, q adalah parameter Riil, maka

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ -q \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} p + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} q$$

Contoh_1(4):

Saat $b = 2$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan OBE maka

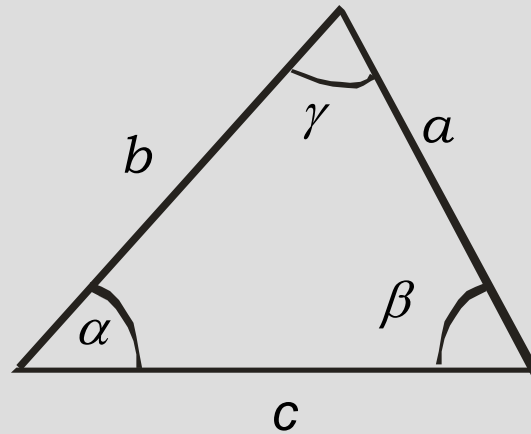
$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{b_1 \cdot -\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{b_2 \cdot -1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{-b_2 + b_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Misalkan q adalah parameter Riil, maka

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} q$$

Contoh_2:

Perhatikan ilustrasi segitiga berikut :



Tunjukkan bahwa:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Contoh_2(2):

Jawab :

Dari gambar tersebut diketahui bahwa :

$$c \cos \beta + b \cos \gamma = a$$

$$c \cos \alpha + a \cos \gamma = b$$

$$b \cos \alpha + a \cos \beta = c$$

atau

$$\begin{bmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Contoh_2(3)

Perhatikan bahwa :

$$\det \begin{bmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{bmatrix} = 0 + c(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} c & a \\ b & 0 \end{vmatrix} + b(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} c & 0 \\ b & a \end{vmatrix} = -c(ab) + b(ac)$$

dengan aturan Crammer diperoleh bahwa :

$$\cos \alpha = \frac{\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & 0 & a \\ c & a & 0 \end{vmatrix}}{2abc} = \frac{1}{2abc} \left(c(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} b & a \\ c & 0 \end{vmatrix} + 0 + a(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} \right)$$

Contoh_2(4)

$$\cos \alpha = \frac{ac^2 - a^3 + a^2b^2}{2abc} = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2bc}$$

Jadi terbukti bahwa:

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc \cos \alpha$$

LATIHAN

1. Tentukan solusi SPL berikut :

$$\begin{cases} 2a - 8b = 12 \\ 3a - 6b = 9 \\ -a + 2b = -4 \end{cases}$$

2. Tentukan solusi SPL:

$$\begin{cases} 2p - 2q - r + 3s = 4 \\ q + 2s = 1 \\ -2p + p - 2q - 4s = -2 \end{cases}$$

3. Tentukan solusi SPL homogen berikut:

$$\begin{aligned} p - 5q - 4r - 7t &= 0 \\ 2p + 10q - 7r + s - 7t &= 0 \\ r + s + 7t &= 0 \\ -2p - 10q + 8r + s + 18t &= 0 \end{aligned}$$

LATIHAN(2)

4. Diketahui SPL $AX = B$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Tentukan solusi SPL di atas dengan menggunakan :

- operasi baris elementer (OBE)
- Invers matrik
- Aturan Cramer

5. Diketahui

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X - X \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Tentukan $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ yang memenuhi.

LATIHAN(3)

6. SPL homogen (dengan peubah p , q , dan r)

$$p + 2q + r = 0$$

$$q + 2r = 0$$

$$k^2p + (k + 1)q + r = 0$$

Tentukan nilai k sehingga SPL punya solusi tunggal

7. Misalkan $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

Tentukan vektor tak nol $\vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ sehingga $B\vec{u} = 6\vec{u}$



THANKYOU