Vektor di Bidang dan Ruang

Sub Pokok Bahasan

- Notasi dan Operasi Vektor
- Perkalian titik
- Perkalian silang

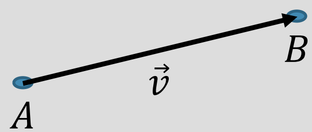
Beberapa Aplikasi

- Proses Grafika Komputer
- Kuantisasi pada Proses Kompresi
- Least Square pada Optimisasi
- dan lain-lain.

Vektor

- Vektor adalah besaran yang mempunyai arah.

  Misal $\vec{v}$ adalah vector yang memiliki titik awal A dan titik akhir B maka $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ dapat digambarkan sebagai berikut

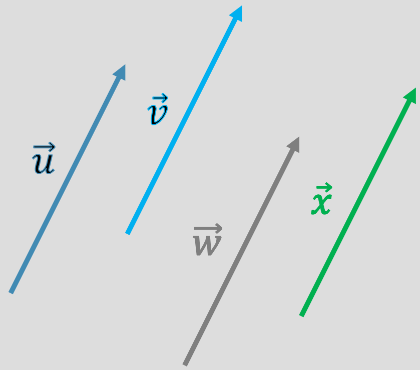


- Jika $\vec{a}$ adalah vector di R^2 dan $\vec{b}$ adalah vector di R^3, maka $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ dapat dinotasikan sebagai berikut:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} \text{ dan } \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = b_1\hat{\imath} + b_2\hat{\jmath} + b_3\hat{k}$$

Vektor(2)

- Vektor-vektor yang memiliki panjang dan arah yang sama disebut dengan vektor yang ekuivalen(tanpa memerhatikan posisi).
- Contoh:



$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dan $\vec{x}$ memiliki arah dan panjang yang sama, Oleh karena itu $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dan $\vec{x}$ adalah vektor yang ekuivalen

Operasi Vektor

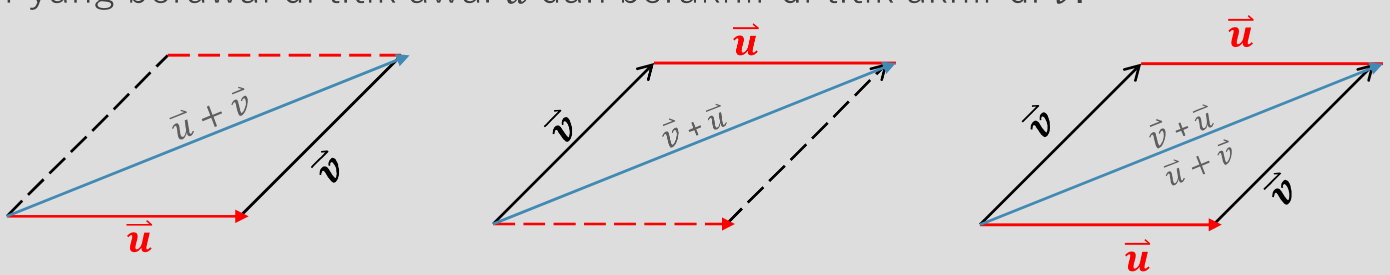
- Operasi Vektor meliputi:
  - A. Penjumlahan antar Vektor
  - B. Perkalian Vektor
    - i. Vektor dengan scalar
    - ii. Vektor dengan vektor
      - a. Hasil Kali Titik (Dot Product)
      - b. Hasil Kali Silang (Cross Product)

Operasi Vektor_Penjumlahan antar Vektor

A. Penjumlahan antar Vektor

Misalkan $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ adalah vector-vector yang berada diruang yang sama.

Jika titik awal $\vec{v}$ diletakan di titik akhir $\vec{u}$, maka vector $(\vec{u} + \vec{v})$ direpresentasikan sebagai vektor yang berawal di titik awal $\vec{u}$ dan berakhir di titik akhir di $\vec{v}$.



Oleh karena itu, jika $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ maka

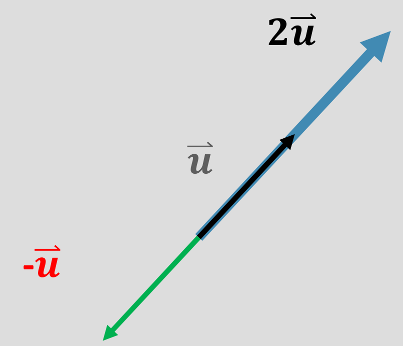
$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

Operasi Vektor_Perkalian Vektor dengan Skalar

Vektor dengan scalar

Perkalian vector $\vec{u}$ dengan scalar $k, (k\,\vec{u})$ didefinisikan sebagai vector yang panjangnya k kali panjang vector $\vec{u}$ dengan arah:

- Searah dengan $\vec{u}$, jika $k > 0$
- Berlawanan arah dengan $\vec{u}$, jika $k < 0$



Contoh:

Misalkan $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ maka

1. $k\vec{u} = (ku_1, ku_2, ku_3)$
2. $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

$= (u_1, u_2, u_3) + (-v_1, -v_2, -v_3)$

$= (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$

Norm Vektor

Diketahui $\vec{u}$ adalah vector di R^2 sedangkan $\vec{v}$ adalah vector di R^3.

Panjang dari vector $\vec{u}$, $\vec{v}$ berturut-turut dinotasikan $\|\vec{u}\|$ dan $\|\vec{v}\|$, menurut teorema phytagoras maka

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

dan

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Jika $\vec{v}$ adalah vector, dan k adalah sembarng scalar Real,maka

a. $\|\vec{v}\| \geq 0$
b. $\|\vec{v}\| = 0$ jika dan hanya jika $\vec{v} = 0$
c. $\|k\vec{v}\| = |k|\|\vec{v}\|$

Norm Vektor(2)

Setiap vector yang memiliki panjang 1, maka vector tersebut disebut dengan vector satuan

Contoh:

Tentukan vector satuan yang memiliki arah dengan vector $\vec{a} = (2,2,-1)$.

Jawab:

Misal $\vec{k}$ adalah vector satuan yang searah dengan $\vec{a}$, maka

$$\vec{k} = \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}}(2,2,-1) = \frac{1}{3}(2,2,-1) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$$

Contoh_1:

Diketahui $\vec{u} = (5,12)$ sedangkan $\vec{v} = (-1,2,3)$.
Tentukan panjang dari kedua vektor tersebut!
Jawab:

a. $\|\vec{u}\| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$

b. $\|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$

Jarak Antar Titik

Diketahui P_1 dan P_2 adalah titik di R^2 atau di R^3, maka panjang vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ setara dengan jarak d antara 2 titik tersebut.

Jika $P_1(x_1, y_1)$ dan $P_2(x_2, y_2)$ adalah titik di R^2, maka jarak antara titik tersebut adalah

$$d(P_1, P_2) = \left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

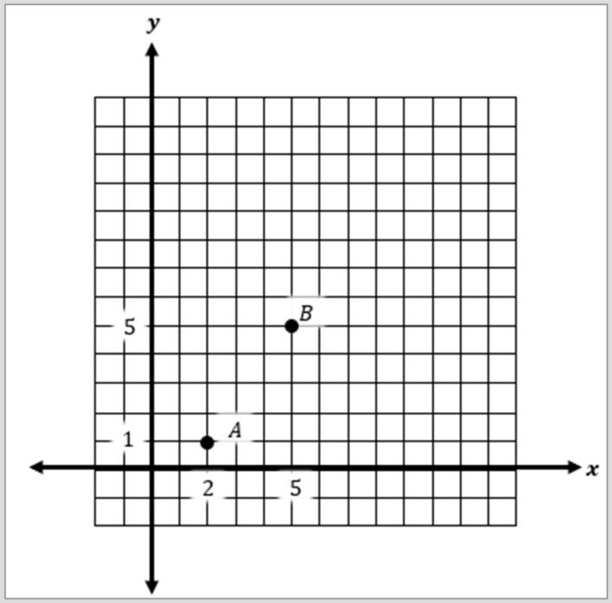
Sedangkan

Jika $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$ adalah titik di R^2, maka jarak antara titik tersebut adalah

$$d(P_1, P_2) = \left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Jarak Antar Titik(2)

Tentukan jarak antar titik
A dan B



Jawab:

Dari gambar diketahui bahwa $A(2,1)$ dan $B(5,5)$.

Misal $\vec{v}$ adalah vektor dengan titik awal A dan titik akhir B maka

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (5,5) - (2,1) = (3,4)$$

Karena jarak A ke B dapat dihitung dengan jarak vektor $\vec{v}$, maka

$$d(A,B) = \|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Operasi Vektor_Perkalian antar Vektor (Dot Product)

ii. Vektor dengan vektor

a. Hasilkali Titik (Dot Product)

Hasilkali titik merupakan operasi antara **dua buah vector pada ruang yang sama**. Hasil perkalian ini **menghasilkan sebuah skalar.**

Misalkan $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ adalah vector pada ruang yang sama, Maka hasil kali titik antara 2 vector tersebut adalah:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha$$

dimana

$\|\vec{u}\|$: panjang $\vec{u}$

$\|\vec{v}\|$: panjang $\vec{v}$

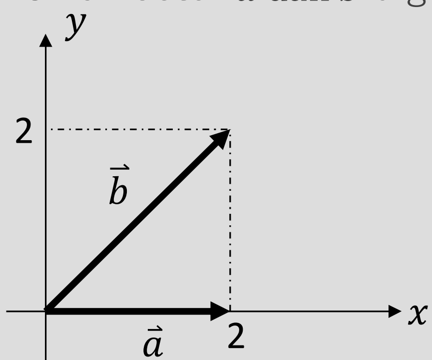
α : sudut antara keduanya

Operasi Vektor_Perkalian antar Vektor (Dot Product)_2

Contoh:

Tentukan hasil kali titik dari dua vector $\vec{a} = 2\hat{\imath}$ dan $\vec{b} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$

Jawab: Jika vector $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ digambarkan di bidang kartesius maka



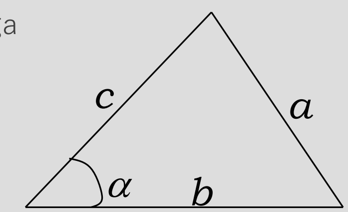
Karena $\tan\alpha = \frac{2}{2} = 1$; artinya $\alpha = 45$. Oleh karena itu $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|a\|\|b\| \cos\alpha$

$$= 2\sqrt{8}\frac{1}{\sqrt{2}} = 4$$

Operasi Vektor_Perkalian antar Vektor (Dot Product)_3

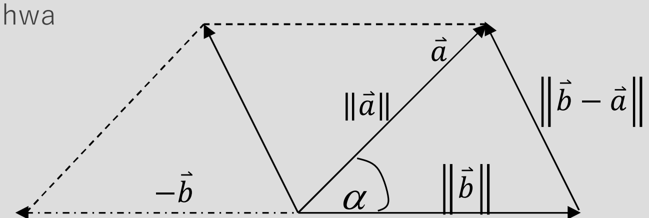
Ingat aturan cosinus

Jika diketahui segitiga



Maka berlaku $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

Perhatikan bahwa



dengan menerapkan aturan cosinus, maka didapat $\left\|\vec{b} - \vec{a}\right\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \left\|\vec{b}\right\|^2 - 2\|\vec{a}\|\left\|\vec{b}\right\|\cos\alpha$

Operasi Vektor_Perkalian antar Vektor (Dot Product)_4

Selanjutnya dapat ditulis

$$\|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \cos\alpha = \frac{1}{2}\left(\|\vec{a}\|^2 + \left\|\vec{b}\right\|^2 - \left\|\vec{b} - \vec{a}\right\|^2\right)$$

Misal $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ dan $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, maka

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \cos\alpha$
2. $\|\vec{a}\,\|^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$
3. $\|\vec{b}\,\|^2 = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2$
4. $\left\|\vec{b} - \vec{a}\right\|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2$

$$= b_1^2 + b_2^2 + \ \dots + b_n^2 + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 - 2b_1a_1 - 2b_2a_2 - \cdots - 2b_na_n$$

Sehingga didapat

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}$$

Operasi Vektor_Perkalian antar Vektor (Dot Product)_5

Karena diketahui:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

Maka persoalan sebelumnya “Tentukan hasil kali titik dari dua vector $\vec{a} = 2\hat{\imath}$ dan $\vec{b} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$"

Dapat dihitung dengan cara: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

$$= 2(2) + 0(2)$$

$$= 4$$

Beberapa sifat hasilkali titik:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) + (\vec{a} \cdot \vec{c})$
3. $k\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = k\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot k\vec{b}$, dimana $k \in R$

LATIHAN

1. Diketahui:

$$A(1,1)$$
$$B(-1,-1,2)$$
$$\vec{u} = (1,2)$$
$$\vec{v} = (1,1,3)$$

   Dimana A adalah titik di R^2, B adalah titik di R^3, sedangkan $\vec{u}, \vec{v}$ secara berturut-turut adalah vektor di R^2 dan R^3. Maka

   (a) Tentukan titik akhir sebuah vektor yang memiliki titik awal A dan ekuivalen dengan vektor $\vec{u}$

   (b) Tentukan titik awal sebuah vektor yang memiliki titik akhir B dan ekuivalen dengan vektor $\vec{v}$

2. Tentukan titik awal dari $\vec{k}$ jika diketahui titik akhir dari vector tersebut adalah $Q(3,0,5)$ dimana

   a) $\vec{k}$ memiliki arah yang sama dengan $\vec{a} = (4,-2,-1)$

   b) $\vec{k}$ memiliki arah yang berlawanan dengan $\vec{a} = (4,-2,-1)$

LATIHAN(2)

3. Diketahui:

$$\vec{a} = (5,12) \qquad \vec{d} = (6,2,9)$$
$$\vec{b} = (2,-1) \qquad \vec{e} = (2,7,8)$$
$$\vec{c} = (0,1) \qquad \vec{f} = (3,4,7)$$

Dimana $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ merupakan vector di R^2 sedangkan $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$ merupakan vector di R^3. Maka

(a) Tentukan $\|\vec{a}\|, \left\|\vec{d}\right\|, \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}, \frac{\vec{d}}{\|\vec{d}\|}$

(b) Tentukan $4\vec{b} - \vec{c}$ (jika ada)

(c) Tentukan $3\vec{a} - \vec{d}$ (jika ada)

(d) Tentukan $2\vec{e} - 4\vec{c}$ (jika ada)

(e) Tentukan $2\vec{a} \cdot (-4\vec{c})$(jika ada)

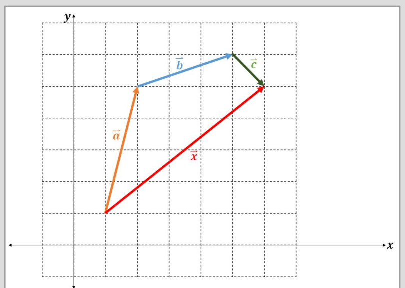
(f) Tentukan $2\vec{a} \cdot (-4\vec{d})$(jika ada)

(g) Tentukan $2\vec{f} \cdot (-4\vec{d})$(jika ada)

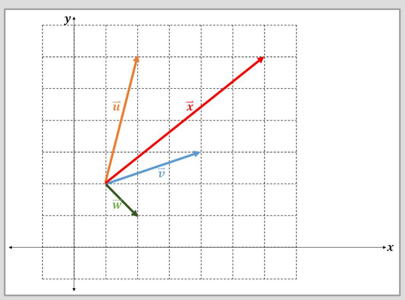
LATIHAN(3)

4. Tentukan vektor $\vec{x}$

   (a) Nyatakan vektor $\vec{x}$ dalam vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$



   (b) Nyatakan vektor $\vec{x}$ dalam vector $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$




Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

THANKYOU