Vektor di Bidang dan Ruang

Sub Pokok Bahasan

- Notasi
- Operasi Vektor (Review)
- Perkalian titik (Lanjutan)
- Perkalian silang

Beberapa Aplikasi

- Proses Grafika Komputer
- Kuantisasi pada Proses Kompresi
- Least Square pada Optimisasi
- dan lain-lain.

Review Operasi Vektor

Jika diketahui $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3), k \in R$ serta sudut yang dibentuk $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ adalah α maka

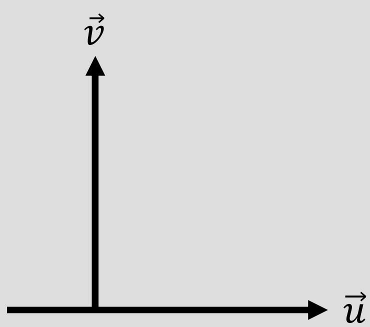
A. Penjumlahan antar Vektor $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

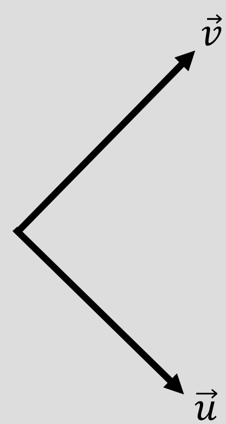
B. Perkalian Vektor
   i. Vektor dengan scalar $k\vec{u} = (ku_1, ku_2, ku_3)$
   ii. Vektor dengan vektor
      a. Hasil Kali Titik (Dot Product)
         - $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos \alpha$
         - $\vec{u} \cdot \vec{v} = \mathrm{u}_1\mathrm{v}_1 + \mathrm{u}_2\mathrm{v}_2 + \mathrm{u}_3\mathrm{v}_3$
      b. Hasil Kali Silang (Cross Product)

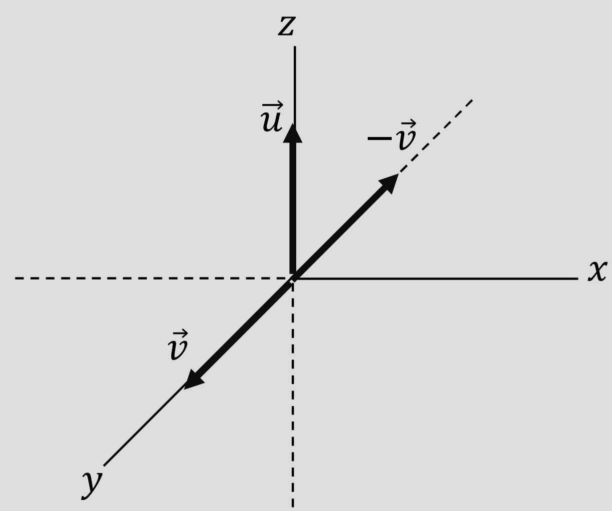
Orthogonality

Dua buah vektor tidak nol $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ dikatakan orthogonal(tegak lurus) jika $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Contoh vektor yang orthogonal:







Orthogonality(2)

Misal A adalah himpunan tak nol di R^2 (ataupun R^3) dimana setiap pasang vektor anggotanya saling orthogonal, maka A disebut HIMPUNAN orthogonal.

Jika B adalah himpunan vektor dimana anggota himpunan B merupakan anggota himpunan A yang telah dinormalisasi sebelumnya. Maka himpunan B disebut himpunan othonormal.

Orthogonality(3)

Contoh:

1. Tunjukkan apakah $\vec{a} = (1,2,3)$ dan $\vec{b} = (-3,0,1)$ adalah vektor yang saling orthogonal di R^3
2. Tunjukan bahwa himpunan $K = \{(1,0,0), (0,-1,0), (0,0,1)\}$ adalah vektor orthogonal?

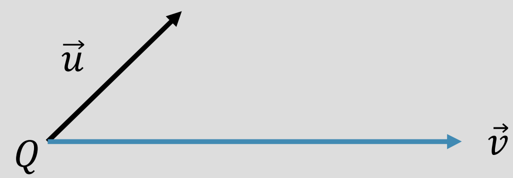
Jawab:

1. $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ adalah vektor orthogonal karena
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1 \cdot -3) + (2 \cdot 0) + (3 \cdot 1) = 0$$
2. Untuk menunjukkan K adalah himpunan orthogonal maka setiap pasang vektor anggota di K haruslah orthogonal.

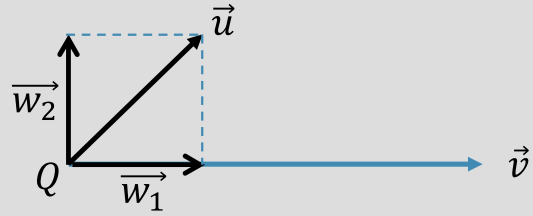
K adalah himpunan orthogonal karena
$$(1,0,0) \cdot (0,-1,0) = (1 \cdot 0) + (0 \cdot -1) + (0 \cdot 0) = 0$$
$$(1,0,0) \cdot (0,0,1) = (1 \cdot 0) + (0 \cdot 0) + (0 \cdot 1) = 0$$
$$(0,-1,0) \cdot (0,0,1) = (0 \cdot 0) + (-1 \cdot 0) + (0 \cdot 1) = 0$$

Projeksi Ortogonal

Misal diketahui dua buah vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ dengan titik awal yang sama yakni Q.

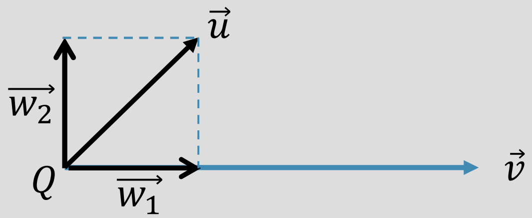


Jika $\overrightarrow{w_1}$ adalah vektor dengan titik awal Q dan memiliki titik akhir sejajar dengan titik akhir $\vec{u}$, sedangkan $\overrightarrow{w_2} = \vec{u} - \overrightarrow{w_1}$ ($\vec{u} = \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}$), maka



Projeksi Orthogonal(2)

Perhatikan



dari gambar diatas terlihat bahwa $\vec{u}$ dapat didekomposisi menjadi $\overrightarrow{w_1}$ dan $\overrightarrow{w_2}$. Dimana $\overrightarrow{w_1}$ adalah vektor yang searah dengan $\vec{v}$ sedangkan $\overrightarrow{w_2}$ adalah vektor yang tegak lurus terhadap $\vec{v}$

Bagaimana cara menentukan $\overrightarrow{w_1}$ dan $\overrightarrow{w_2}$?

Projeksi Orthogonal(3)

$\overrightarrow{w_1}$ adalah vektor yang searah dengan $\vec{v}$ maka

$$\overrightarrow{w_1} = k\vec{v}$$

Ingat bahwa: $\vec{u} = \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}$

$$\leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = (\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}) \cdot \vec{v}$$

$$\leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = (\overrightarrow{w_1} \cdot \vec{v} + \overrightarrow{w_2} \cdot \vec{v})$$

$$\leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{w_1} \cdot \vec{v}$$

$$\leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = k\vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$\leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = k\|\vec{v}\|^2$$

$$\leftrightarrow k = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$$

Sehingga didapat $\overrightarrow{w_1} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$

$\overrightarrow{w_2}$ adalah vektor yang tegak lurus terhadap $\vec{v}$ dimana

$\vec{u} = \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}$, maka

$$\overrightarrow{w_2} = \vec{u} - \overrightarrow{w_1}$$

Karena $\overrightarrow{w_1} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$, didapat

$$\overrightarrow{w_2} = \vec{u} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$$

$\overrightarrow{w_1}$ adalah vektor projeksi orthogonal dari $\vec{u}$ di $\vec{a}$ (vektor komponen $\vec{u}$ di $\vec{a}$)

Sedangkan

$\overrightarrow{w_2}$ adalah vektor komponen $\vec{u}$ yang orthogonal terhadap $\vec{a}$

Projeksi Orthogonal(4)

Contoh:

Tentukan proyeksi orthogonal vector $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ di vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Jawab:

$$Proj_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}}{1^2+3^2+(-4)^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-2+(-12)+(-12)}{26}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{26}{26}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Operasi Vektor_Perkalian antar Vektor (Cross Product)_1

b. Hasilkali silang (Cross Product)

Hasilkali silang merupakan operasi antara **dua buah vektor pada ruang $\mathbb{R}^3$.** Hasil perkalian ini **menghasilkan sebuah vector di $\mathbb{R}^3$ yang tegak lurus terhadap kedua vector lainnya.**

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \hat{\imath} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \hat{\jmath} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_! & b_2 \end{vmatrix} \hat{k}$$

Operasi Vektor_Perkalian antar Vektor (Cross Product)_2

Contoh:

Tentukan $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ dimana $\vec{u} = (1,2,-2),\ \vec{v} = (3,0,1)$

Jawab:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \left(2.1 - 0(-2)\right)\hat{\imath} + (3(-2)-1(1))\ \hat{\jmath} + (1(0)-3(2))\ \hat{k}$$

$$= 2\hat{\imath} - 7\hat{\jmath} - 6\hat{k}$$

Hubungan Cross Product dan Dot Product

Beberapa sifat Cross Product:

a. $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$

b. $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$

c. $\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$

d. $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$

e. $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{w} \cdot \vec{v})\vec{u}$

Interpretasi Geometri dari Cross Product

Dari sifat ke-3 diperoleh $\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$

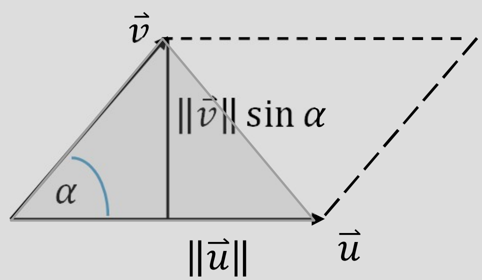
Misal α adalah sudut yang dibentuk antara $\vec{u}$ dan $\vec{v}$, maka

$$\begin{aligned}
\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \\
&= \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\alpha)^2 \\
&= \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 \cos^2\alpha \\
&= \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2(1 - \cos^2\alpha) \\
&= \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 \sin^2\alpha
\end{aligned}$$

Jadi $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin\alpha$

Area Parallelogram

Perhatikan Ilustrasi berikut:



Luas Jajar Genjang=$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin \alpha$

Luas Segitiga yang dibentuk oleh kedua vector tersebut adalah

$$\frac{1}{2}\|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

Area Parallelogram(2)

Diketahui titik-titik diruang adalah

$A = (1, -1, -2)$
$B = (4,1,0)$
$C = (2,3,3)$

Dengan menggunakan hasilkali silang, tentukan luas segitiga ABC!

Jawab:

Orientasi pada titik A

1. $\overrightarrow{AB} = B - A = (4,1,0)$-$(1, -1, -2)$=(3,2,2)
2. $\overrightarrow{AC} = C - A = (2,3,3)$ -$(1, -1, -2)$=(1,4,5)

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\hat{\imath} - 13\hat{\jmath} + 10\hat{k}$$

Luas segitiga ABC yang berimpit di A adalah

Luas= $\frac{1}{2}\sqrt{4 + 169 + 100} = \frac{1}{2}\sqrt{273}$

Area Parallelogram(3)

Orientasi pada titik B

1. $\overrightarrow{BA} = A - B = (1,-1,-2) - (4,1,0)$=(-3,-2,-2)
2. $\overrightarrow{BC} = C - B = (2,3,3)$ -(4,1,0)=(-2,2,3)

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -3 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2\hat{\imath} + 13\hat{\jmath} - 10\hat{k}$$

Luas segitiga ABC yang berimpit di A adalah

Luas= $\frac{1}{2}\sqrt{4 + 169 + 100} = \frac{1}{2}\sqrt{273}$

Skalar Triple Product

Diketahui $\vec{u}, \vec{v}$, dan $\vec{w}$ adalah vektor di R^3, maka

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Disebut skalar triple product dari $\vec{u}, \vec{v}$, dan $\vec{w}$

Skalar triple dari $\vec{u} = (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3), \vec{v} = (\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3)$ dan $\vec{w} = (\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \mathrm{w}_3)$ dapat dihitung menggunakan persamaan

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Skalar Triple Product(2)

$$\vec{u} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Dapat dibuktikan dengan

$$\vec{u} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = \vec{u} \cdot \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \hat{\imath} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \hat{\jmath} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \hat{k} \right)$$

$$= \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} u_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} u_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} u_3$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

LATIHAN

1. Tentukan $\cos$ sudut yang terbentuk oleh pasangan vector berikut:
   a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$
   b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ dan $\vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$
2. Tentukan proyeksi orthogonal vector terhadap vector dan tentukan panjang vector proyeksi tersebut:
   a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$
   b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dan $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
3. Tentukan 2 buah vector satuan di bidang yang tegak lurus terhadap

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

LATIHAN(2)

4. Tentukan vector yang tegak lurus terhadap vector

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dan } \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

5. Tentukan luas segitiga yang mempunyai titik sudut $P(2,0,-3), Q(1,4,5)$ dan $R(7,2,9)$