Sistem Persamaan Linear

Sub Pokok Bahasan

- Pendahuluan
- Solusi SPL dengan OBE
- Solusi SPL dengan Invers matriks dan Aturan Crammer
- SPL Homogen

Beberapa Aplikasi Matriks

- Rangkaian listrik
- Jaringan Komputer
- Model Ekonomi
- dan lain-lain.

Sistem Persamaan Linear

Persamaan linear adalah persamaan dimana peubahnya tidak memuat eksponensial, trigonometri (seperti sin, cos, dll.), perkalian, pembagian dengan peubah lain atau dirinya sendiri.

Contoh :

- Jika perusahaan A membeli 1 Laptop $(\text{Misal Laptop} = x)$ dan 2 PC $(\text{Misal PC} = y)$ maka ia harus membayar $ 5000, sedangkan jika membeli 3 Laptop dan 1 PC maka ia harus membayar $ 10000.

  Representasi SPL dari masalah tersebut adalah

$$\begin{cases} x + 2y = 5000 \\ 3x + y = 10000 \end{cases}$$

Solusi SPL

Solusi SPL adalah Himpunan bilangan Real dimana jika disubstitusikan pada peubah suatu SPL akan memenuhi nilai kebenaran SPL tersebut.

Perhatikan SPL :

$$\begin{cases} x + 2y = 5000 \\ 3x + y = 10000 \end{cases}$$

Maka

$\{x = 3000, y = 1000\}$ merupakan solusi SPL

$\{x = 1000, y = 3000\}$ bukan solusi SPL

Suatu SPL, terkait dengan solusi, mempunyai tiga kemungkinan :

- SPL mempunyai solusi tunggal
- SPL mempunyai solusi tak hingga banyak
- SPL tidak mempunyai solusi

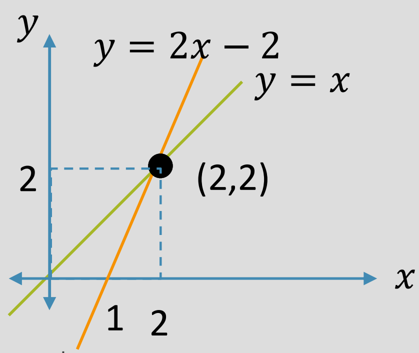
Solusi SPL_Ilustrasi Pada Bidang Kartesius

CASE I

Perhatikan SPL

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

Jika digambar dalam kartesius



(2, 2) merupakan titik potong dua garis tersebut

Tidak ada titik potong yang lain selain titik tersebut

Artinya : SPL $2x - y = 2$ dan $x - y = 0$ mempunyai **solusi tunggal**, yaitu $x = 2, y = 2$

Solusi SPL_Ilustrasi Pada Bidang Kartesius(2)

Solusi sistem persamaan linear $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$ juga dapat ditentukan menggunakan metode eliminasi dan substitusi. Berikut adalah langkah pencarian solusi menggunakan metode eliminasi dan substitusi

(i) Menggunakan metode eliminasi

a. Misal$(x - y = 0)$ adalah persamaan 1 sedangkan $(2x - y = 2)$ adalah persamaan 2.

b. Untuk menetukan x maka samakan konstanta pengali y di kedua persamaan. Lalu selisihkan kedua persamaan tersebut.

$$\begin{array}{l} x - y = 0 \\ \underline{2x - y = 2 \quad -} \\ -x + 0y = -2 \rightarrow x = 2 \end{array}$$

c. Untuk menentukan y maka samakan konstanta pengali x di kedua persamaan. Lalu selisihkan kedua persamaan

$$\begin{array}{l} x - y = 0 | \times 2 \mid 2x - 2y = 0 \\ 2x - y = 2 | \times 1 \mid \underline{2x - y = 2 \ -} \\ \qquad\qquad 0\text{x} + -y \quad = -2 \rightarrow y = 2 \end{array}$$

(ii) Menggunakan metode substitusi

a. Misal$(x - y = 0)$ adalah persamaan 1 sedangkan $(2x - y = 2)$ adalah persamaan 2.

b. Untuk menetukan x maka,

   i. Karena $x - y = 0$ maka $y = x$

   ii. Subtitusikan $y = x$ ke persamaan 2, maka $2x - x = 2 \rightarrow x = 2$

c. Untuk menentukan y maka,

   i. Karena $x - y = 0$ maka $x = y$

   ii. Subtitusikan $x = y$ ke persamaan 2, maka $2(y) - y = 2 \rightarrow y = 2$

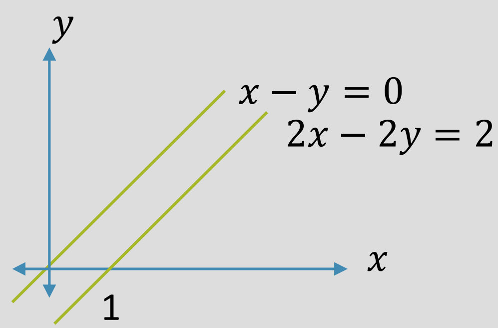
Solusi SPL_Ilustrasi Pada Bidang Kartesius(3)

CASE II

Perhatikan SPL

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$$

Jika digambar dalam kartesius



Terlihat bahwa dua garis tersebut adalah sejajar (Tak akan pernah diperoleh titik potong kedua garis itu)

Artinya, SPL diatas **TIDAK mempunyai solusi**

Solusi SPL_Ilustrasi Pada Bidang Kartesius(4)

Solusi sistem persamaan linear $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$ juga dapat ditentukan menggunakan metode eliminasi dan substitusi. Berikut adalah langkah pencarian solusi menggunakan metode eliminasi dan substitusi

(i) Menggunakan metode eliminasi

a. Misal$(x - y = 0)$ adalah persamaan 1 sedangkan $(2x - 2y = 2)$ adalah persamaan 2.

b. Untuk menetukan x maka samakan konstanta pengali y di kedua persamaan. Lalu selisihkan kedua persamaan tersebut.

$$x - y = 0 | \times 2 \mid 2x - 2y = 0$$
$$2x - 2y = 2 | \times 1 \mid \underline{2x - 2y = 2} \; -$$
$$0x - 0y = -2$$

$\rightarrow$ Karena tidak terdapat x dan y yang memenuhi persamaan ini maka, SPL tidak memiliki solusi

(ii) Menggunakan metode substitusi

a. Misal$(x - y = 0)$ adalah persamaan 1 sedangkan $(2x - 2y = 2)$ adalah persamaan 2.

b. Untuk menetukan x maka,

   i. Karena $x - y = 0$ maka $y = x$

   ii. Subtitusikan $y = x$ ke persamaan 2, maka $2x - 2x = 2 \rightarrow 0x = 2 \rightarrow$ Karena tidak terdapat yang memenuhi persamaan ini maka, SPL tidak memiliki solusi

Solusi SPL_Ilustrasi Pada Bidang Kartesius(5)

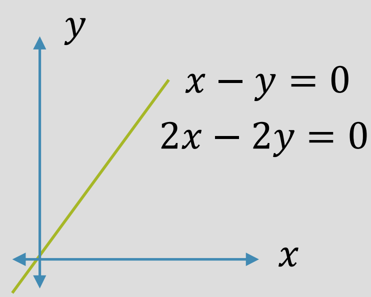
CASE III

Perhatikan SPL

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

Jika kedua ruas pada persamaan kedua dikalikan ½, maka akan diperoleh persamaan yang sama dengan pers. pertama

Jika digambar dalam kartesius



Terlihat bahwa dua garis tersebut adalah berimpit (Titik potong kedua garis banyak sekali disepanjang garis tersebut)

Artinya, SPL diatas mempunyai **solusi tak hingga banyak**

Solusi SPL_Ilustrasi Pada Bidang Kartesius(6)

Solusi sistem persamaan linear $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$ juga dapat ditentukan menggunakan metode eliminasi dan substitusi. Berikut adalah langkah pencarian solusi menggunakan metode eliminasi dan substitusi

(i) Menggunakan metode eliminasi

a. Misal$(x - y = 0)$ adalah persamaan 1 sedangkan $(2x - 2y = 0)$ adalah persamaan 2.

b. Untuk menetukan x maka samakan konstanta pengali y di kedua persamaan. Lalu selisihkan kedua persamaan tersebut.

$$x - \ y = 0| \times 2 \ | \ 2x - 2y = 0$$
$$2x - 2y = 0| \times 1 \ | \ \underline{2x - 2y = 0} \ -$$
$$0x + 0y = 0$$

$\rightarrow$ Persamaan ini akan bernilai benar untuk x dan y sembarang bilangan Real. Oleh karena itu, SPL ini memiliki solusi banyak

(ii) Menggunakan metode substitusi

a. Misal$(x - y = 0)$ adalah persamaan 1 sedangkan $(2x - 2y = 0)$ adalah persamaan 2.

b. Untuk menetukan x maka,
   i. Karena $x - y = 0$ maka $y = x$
   ii. Subtitusikan $y = x$ ke persamaan 2, maka $2x - 2x = 0 \rightarrow 0x = 0 \rightarrow$ Persamaan ini akan bernilai benar untuk setiap x bilangan Real

c. Untuk menentukan y maka,
   i. Karena $x - y = 0$ maka $x = y$
   ii. Subtitusikan $x = y$ ke persamaan 2, maka $2(y) - 2y = 0 \rightarrow 0y = 2 \rightarrow$ Persamaan ini akan bernilai benar untuk setiap y bilangan Real

SPL dalam Perkalian Matriks

Jika sistem persamaan linear terdiri dari m persamaan dan n variable, maka bentuk umum sistem persamaan linear tersebut adalah

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Sistem persamaan linear diatas dapat dituliskan dalam bentuk perkalian matriks sbb:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

SPL dalam Perkalian Matriks(2)

atau

$$AX = B$$

dimana

- A dinamakan matriks koefisien
- X dinamakan matriks peubah
- B dinamakan matriks konstanta

Contoh :

Perhatikan bahwa SPL

$$\begin{cases} x + 2y = 5000 \\ 3x + y = 10000 \end{cases}$$

dapat ditulis dalam bentuk perkalian matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5000 \\ 10000 \end{bmatrix}$$

Solusi Sistem Persamaan Linear dengan OBE

Menentukan solusi Sistem Persamaan Linear menggunakan OBE dapat dilakukan dengan 2 cara

Eliminasi Gauss- Penyulihan Mundur

a) Tulis SPL dalam bentuk matriks yang diperbesar
b) Lakukan OBE sampai menjadi esilon baris
c) Kembalikan kedalam bentuk perkalian matriks, lalu tentukan solusi SPL dengan penyulihan mundur

Eliminasi Gauss Jordan

a) Tulis SPL dalam bentuk matriks yang diperbesar
b) Lakukan OBE sampai menjadi esilon baris tereduksi
c) Kembalikan kedalam bentuk perkalian matriks untuk menentukan setaip variabel dari solusi SPL tersebut

Solusi Sistem Persamaan Linear dengan OBE(2)

Contoh :

Tentukan solusi dari SPL

$$3x - y = 5$$
$$x + 3y = 5$$

Menggunakan

a. Eliminasi Gaussian- Penyuliahan mundur
b. Eliminasi Gauss Jordan

Jawab :

a. Matriks yang diperbesar dari SPL tersebut $\begin{bmatrix} 3 & -1 & | & 5 \\ 1 & 3 & | & 5 \end{bmatrix}$. Untuk membentuk matriks eselon baris pada matriks koefisien maka dilakukan OBE sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & | & 5 \\ 1 & 3 & | & 5 \end{bmatrix} \underset{\sim}{b_1 \leftrightarrow b_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 5 \\ 3 & -1 & | & 5 \end{bmatrix} \underset{\sim}{-3b_1 + b_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 5 \\ 0 & -10 & | & -10 \end{bmatrix} \underset{\sim}{b_2 \cdot \frac{1}{-10}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 5 \\ 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Dalam bentuk perkalian matriks maka didapat $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

Artinya $1x + 3y = 5$ dan $y = 1$

Karena $y = 1$ maka $x = 5 - 3(1) = 2$

Solusi Sistem Persamaan Linear dengan OBE(3)

b. Matriks yang diperbesar dari SPL tersebut $\begin{bmatrix} 3 & -1 & | & 5 \\ 1 & 3 & | & 5 \end{bmatrix}$. Untuk membentuk matriks eselon baris tereduksi pada matriks koefisien maka dilakukan OBE sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & | & 5 \\ 1 & 3 & | & 5 \end{bmatrix} \underset{\sim}{b_1 \leftrightarrow b_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 5 \\ 3 & -1 & | & 5 \end{bmatrix} \underset{\sim}{-3b_1 + b_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 5 \\ 0 & -10 & | & -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 5 \\ 0 & -10 & | & -10 \end{bmatrix} \underset{\sim}{b_2 \cdot \frac{1}{-1}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 5 \\ 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{-3b_2 + b_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Tulis kembali matriks yang diperbesar hasil OBE menjadi perkalian matriks

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Maka, solusi SPL tersebut adalah $x = 2$ dan $y = 1$

Solusi Sistem Persamaan Linear dengan OBE(4)

Contoh :

Tentukan solusi (jika ada) dari SPL berikut :

a. $\begin{cases} a + c = 4 \\ a - b = -1 \\ 2b + c = 7 \end{cases}$

b. $\begin{cases} a + c = 4 \\ a - b = -1 \\ -a + b = 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} a + c = 4 \\ a - b = -1 \\ -a + b = 2 \end{cases}$

Solusi Sistem Persamaan Linear dengan OBE(5)

Jawab :

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 4 \\ 1 & -1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 2 & 1 & | & 7 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}$

Sehingga didapatkan solusi Sistem Persamaan tersebut adalah $\boldsymbol{a = 1. b = 2, c = 3}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 4 \\ 1 & -1 & 0 & | & -1 \\ -1 & 1 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$

Jika dikembalikan dalam bentuk perkalian matriks diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ini memberikan $\boldsymbol{a + c = 1}$ dan $\boldsymbol{b + c = 5}$.
Dengan memilih $\boldsymbol{c = t}$, dimana t adalah parameter.

Maka solusi $\boldsymbol{SPL}$ tersebut adalah:

$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$**, dimana $\boldsymbol{t}$ adalah parameter**

Solusi Sistem Persamaan Linear dengan OBE(6)

c) $\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right]$

Terlihat bahwa ada baris nol pada matriks koefisien tetapi matriks konstanta pada baris ke-3 sama dengan 1 (tak nol)

Dalam perkalian matriks maka didapat

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dari baris ke-3 diperoleh hubungan bahwa $0a + 0b + 0c = 1$

Tak ada nilai a, b dan c yang memenuhi persamaan tersebut. Sehingga SPL tersebut tidak memiliki solusi

Solusi Sistem Persamaan Linear dengan OBE(7)

Contoh :

Diketahui SPL :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)\,z = a + 2 \end{cases}$$

Tentukan a sehingga SPL :

a. Mempunyai solusi tunggal

b. Tidak mempunyai solusi

c. Solusi yang tidak terhingga

Solusi Sistem Persamaan Linear dengan OBE(8)

Jawab:

Matriks diperbesar dari SPL adalah

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & a^2-14 & a+2 \end{array}\right] \underset{\sim}{\substack{-3b_1+b_2 \\ -4b_1+b_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & a^2-2 & a-14 \end{array}\right] \underset{\sim}{-b_2+b_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4 \end{array}\right]$$

a) Agar SPL mempunyai solusi tunggal:

$a^2 - 16 \neq 0$ sehingga $a \neq \pm 4$

b) Perhatikan baris ketiga

$0x + 0y + (a^2 - 16a)\, z = a - 4$

SPL tidak mempunyai solusi saat $a^2 - 16 = 0$ dan $a - 4 \neq 0$

Sehingga $a = \pm 4$ dan $a \neq 4$.

Jadi, $a = -4$.

c.) SPL mempunyai solusi tak hingga banyak jika memenuhi persamaan

$$a^2 - 16 = 0 \quad \text{dan} \quad a - 4 = 0$$

Jadi, $a = 4$

LATIHAN

1. Tentukan apakah sistem dibawah ini merupakan sistem persamaan linear atau bukan

   a) $2x_1 - x_4 = e^{10^{-5}}$

   $-x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -\cos 30$

   b) $\sin 2x_1 + x_3 = 3$

   $e^{2x_1+2x_4} = \frac{1}{2}$

   $4x_4 = 4$

   c) $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$

   $x_1 + x_2 = \frac{1}{5}$

   d) $7x_1 - x_2 + 2x - 3 = 0$

   $2x_1 + x_2 - x_3x_4 = 3$

   $-x_1 + 5x_2 + x_4 = 9$

LATIHAN(2)

2. Diketahui sistem persamaan linear sebagai berikut:

$$2x_1 - 4x_2 - x_3 = 1$$
$$x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$$
$$3x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 1$$

Tentukan apakah vektor berikut adlaah solusi sistem persamaan linear tersebut

a) (3,1,1)
b) (3,-1,1)
c) (13,5,2)
d) (13/2,5/2,2)
e) (17,7,5)

3. Menggunakan penyulihan mundur, tentukan solusi SPL dari matriks yang telah diperbesar berikut

a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & & 7 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & & 5 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}$

LATIHAN(3)

4. Menggunakan eliminasi Gauss Jordan tentukan solusi sistem persamaan berikut
   a) $2x + 2y + 4z = 0$
   $w - y - 3z = 0$
   $2w + 3x + y + z = 0$
   $-2w + x + 3y - 2z = 0$
   b) $2I_1 - I_2 + 3I_3 + 4I_4 = 9$
   $I_1 - 2I_3 + 7I_4 = 11$
   $3I_1 - 3I_2 + I_3 + 5I_4 = 8$
   $2I_1 + I_2 + 4I_3 + 4I - 4 = 10$


Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

THANKYOU