Matriks dan Operasinya

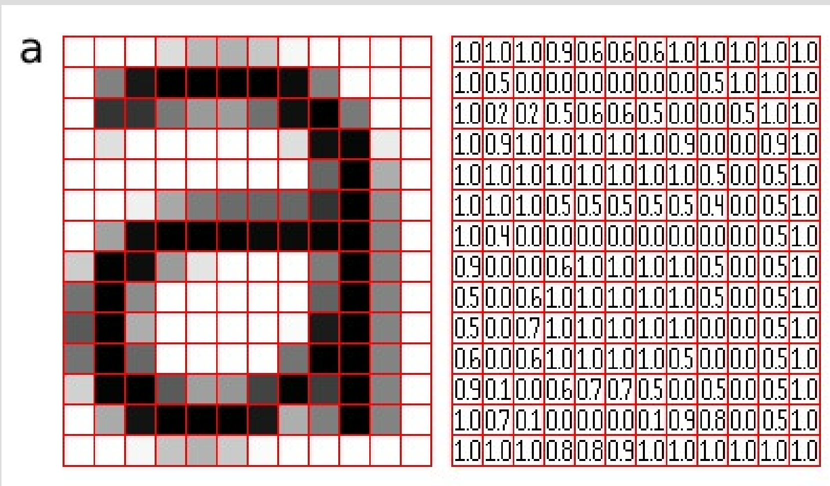
Sub Pokok Bahasan

- Pendahuluan: Matriks
- Jenis-jenis Matriks
- Operasi Matriks
- Operasi Baris Elementer
- Matriks Invers (Balikan)

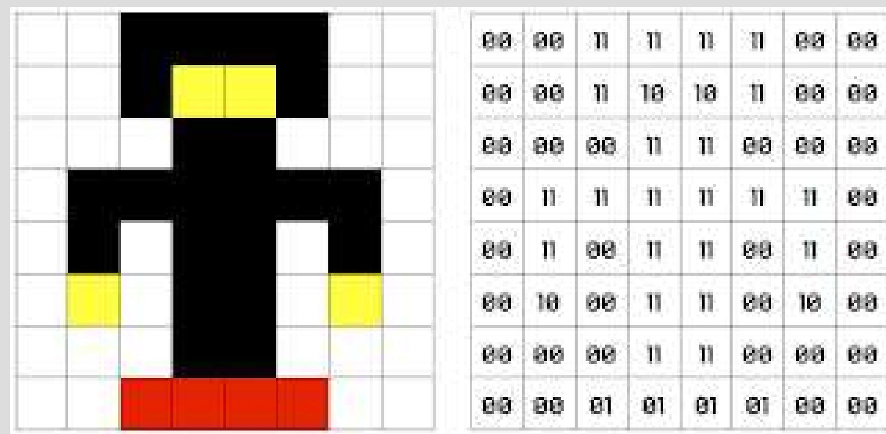
Beberapa Aplikasi Matriks

- Representasi image (citra)
- C*hanel/ Frequency assignment*
- *Operation Research*
- dan lain-lain.

Bagaimana Citra direpresentasikan di Komputer?

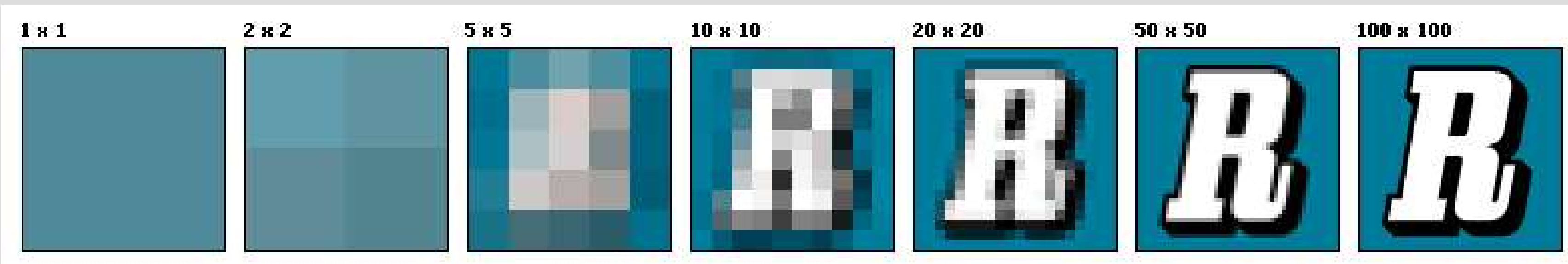


http://pippin.gimp.org/image_processing/chap_dir.html



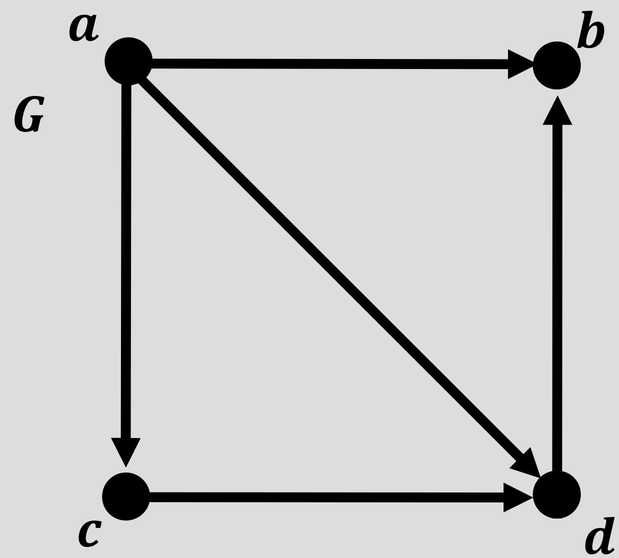
https://sites.google.com/a/online.sch.im/computing-and-ict-qe-ii/curriculum/cs/data-representation/2-graphic-processing/binary-images-1?tmpl=%2Fsystem%2Fapp%2Ftemplates%2Fprint%2F&showPrintDialog=1

Resolusi Citra



https://en.wikipedia.org/wiki/Image_resolution

Representasi Graf



Matriks Ketetanggaan G

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriks

Matriks adalah kumpulan bilangan yang tersusun atas baris dan kolom

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Baris pertama

Kolom Kedua

Unsur/entri/elemen ke-mn (baris ke m dan kolom ke n)

matriks diatas berukuran(orde) $m \times n$

Matriks(2)

Contoh dari Matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix},\ A \text{ adalah matriks berorde } 3 \times 2$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, A \text{ adalah matriks berorde } 1 \times 4$$

$$C = \begin{bmatrix} \pi & \sqrt{3} & -1 \\ e & 0.5 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A \text{ adalah matriks berorde } 3 \times 3$$

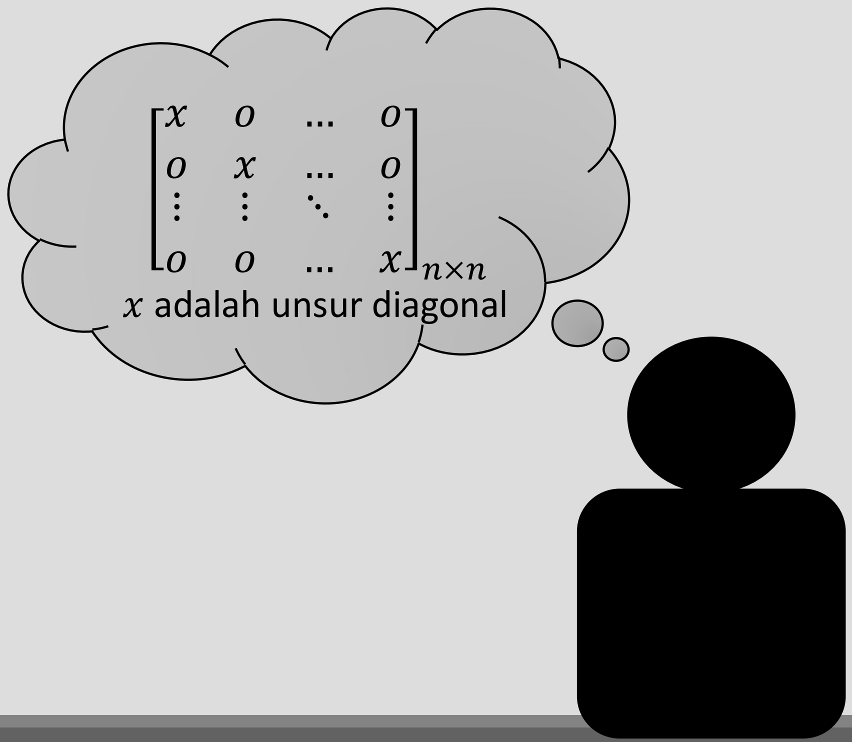
$$D = [4], D \text{ adalah matriks berorde } 1 \times 1$$

Matriks(3)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Unsur diagonal suatu matriks adalah unsur yang ke$-ii$ $(i = 1 \dots m)$.

Oleh karena itu, $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm}$ adalah unsur diagonal dari matriks diatas $(m < n)$



Matriks(4)

Contoh:

1. Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$,

   maka $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = 3$, $a_{21} = 4$, $a_{22} = 5$, $a_{23} = 6$, $a_{31} = 7$, $a_{32} = 8$. $a_{33} = 9$

   Matriks A tersebut memiliki 3 unsur diagonal diantaranya $a_{11} = 1$, $a_{22} = 5$ dan $a_{33} = 9$

2. Jika $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$,

   maka $b_{11} = -1, b_{12} = 2, b_{21} = 3, b_{22} = -4$, $b_{31} = -5$, $b_{32} = 6$

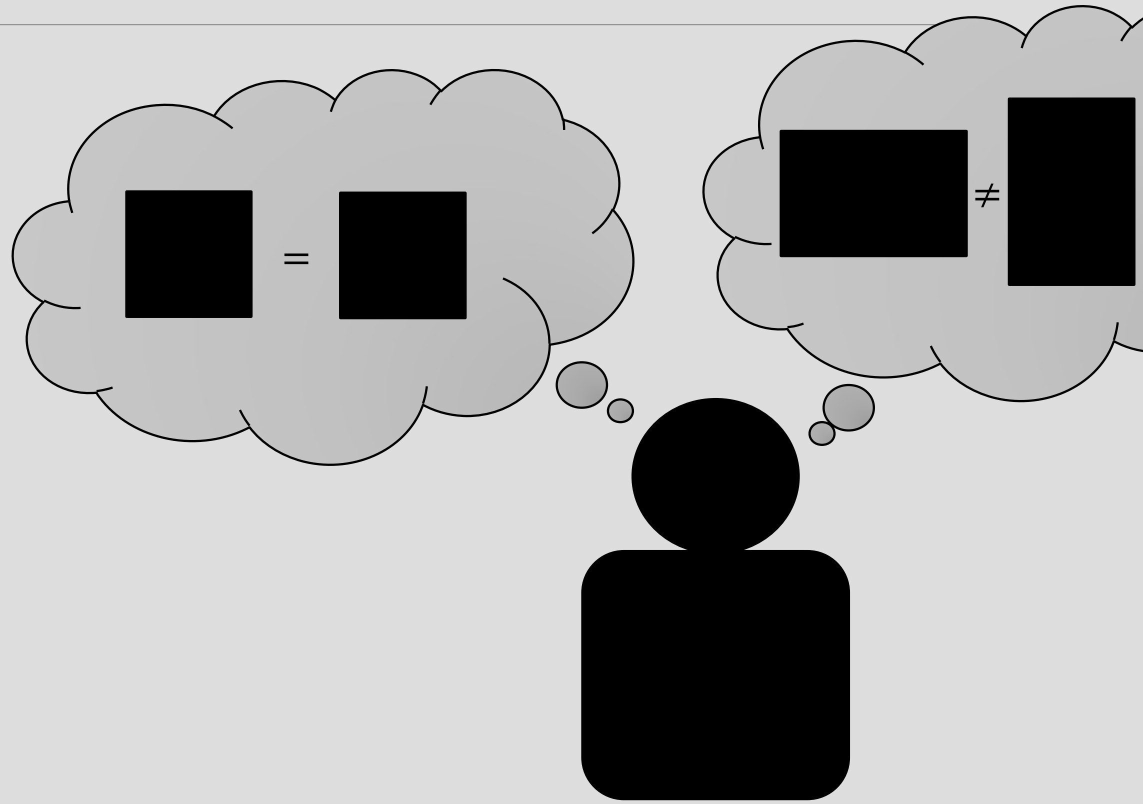
   Matriks B tersebut hanya memiliki 2 unsur diagonal diantaranya $b_{11} = -1$ dan $b_{22} = -4$

Kesetaraan Matriks

Misal terdapat dua buah matriks berukuran sama A dan B. Matriks A dikatakan sama dengan matriks B

$(A = B)$ jika setiap unsur dari matriksnya sama

$$(a_{ij} = b_{ij} \text{ untuk setiap } i \text{ dan } j)$$



Kesetaraan Matriks(2)

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \text{dan } C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

- Jika $x = 2$, maka $A = B$. (jika $x \neq 2$ maka $A \neq B$),

  Karena $a_{11} = b_{11} = 1$, $a_{12} = b_{12} = 2$, $a_{21} = b_{21} = 3$, $a_{22} = b_{22} = 4$

- Tidak terdapat x sehingga $B = C$, karena B dan C berbeda ukuran

Jenis-jenis Matriks

1. Matriks Bujur Sangkar

Matriks yang jumlah baris dan jumlah kolomnya sama

Contoh Matriks Bujur Sangkar:

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris dari matriks A =3

Kolom dari matriks A =3

Jenis-jenis Matriks(2)

2. Matriks Diagonal

Matriks bujur sangkar dimana setiap unsur yang **bukan** unsur diagonal bernilai nol

Contoh Matriks Diagonal:

$$A_{3\times3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B_{3\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jenis-jenis Matriks(3)

3. Matriks Simetris

   Matriks simetris adalah matriks bujur sangkar dimana $a_{ij} = a_{ji}$

   Contoh:

$$A_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad I_{4\times4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{2\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jenis-jenis Matriks(4)

4. Matriks Satuan

   Matriks diagonal dimana setiap unsur diagonalnya adalah satu

   Contoh:

$$I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad I_{4\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Jenis-jenis Matriks(5)

5. Matriks Nol

Matriks nol dimana setiap entrinya bernilai nol.

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; [0]$$

Jenis-jenis Matriks(6)

6. Matriks Segitiga

a. Matriks Segitiga Atas

Matriks yang semua unsur di bawah unsur diagonal pada kolom yang bersesuaian adalah nol

b. Matriks Segitiga Bawah

Matriks yang semua unsur di atas unsur diagonal pada kolom yang bersesuaian adalah nol

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

A adalah contoh matriks segitiga atas sedangkan B adalah contoh matriks segitiga bawah

Transpos Matriks

Diketahui A adalah matriks berukuran $m \times n$. Transpos matriks A, dinotasikan A^T, didefinisikan sebagai matriks berukuran $n \times m$ sebagai hasil dari menukar baris matriks A menjadi kolom dari matriks A^T.

Contoh:

1. $A_{3\times4} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \end{bmatrix}$ maka $A^T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \\ t_{14} & t_{24} & t_{34} \end{bmatrix}_{4\times3}$

2. $B_{2\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ maka $B^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}_{3\times2}$

Transpos Matriks(2)

3. $C_{3\times1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ maka $C^T = [1 \quad 0 \quad -1]_{1\times3}$
4. $D = [9]$ maka $D^T = [9]$

Oleh karena itu, **matriks $\boldsymbol{A}$ dapat dikatakan simetri jika $\boldsymbol{A = A^T}$**

Contoh_1:

Diketahui matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tentukan apakah matriks tersebut:

a. Matriks segitiga bawah?

b. Matriks simetri?

Jawab:

a. A adalah matriks segitiga bawah karena semua unsur di atas unsur diagonal pada kolom yang bersesuaian adalah nol

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Contoh_1(2):

b. A adalah matriks simetri, karena

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$$

Operasi Matriks

1. Penjumlahan Matriks
2. Perkalian Matriks
   - Perkalian skalar dengan matriks
   - Perkalian matriks dengan matriks
3. Operasi Baris Elementer (OBE)

Operasi Matriks_Penjumlahan Matriks

Syarat: Matriks yang dijumlahkan berorde (berukuran) sama

Jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ adalah matriks yang berukuran sama maka

$$(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$$

Contoh:

- $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}_{2\times 3} + \begin{bmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d+j & e+k & f+l \end{bmatrix}_{2\times 3}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}_{2\times 2}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

Operasi Matriks_Perkalian Matriks

Terdapat 2 jenis Perkalian dalam Matriks

- Perkalian skalar dengan matriks

Diketahui A adalah matriks berukuran $m \times n$ dan c adalah sembarang skalar. Hasil kali c dan A adalah matriks berukuran $m \times n$ dimana setiap entri dari matriks A dikalikan dengan c.

Contoh:

- $k\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} kp & kq \\ kr & ks \\ kt & ku \end{bmatrix}_{3\times 2}$
- -1$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -4 & -5 \end{bmatrix}_{2\times 3}$
- $0\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

Operasi Matriks_Perkalian Matriks(2)

- Perkalian matriks dengan matriks

  Misal terdapat 2 buah matriks A berorde $p \times q$ dan B berorde $m \times n$.
  - Matriks A dapat dikalikan dengan matriks B jika $q = m$. Hasil perkaliannya $(A \times B)$ berorde $p \times n$.
  - Matriks B dapat dikalikan dengan matriks A jika $n = p$. Hasil perkaliannya $(B \times A)$ berorde $m \times q$.

Diketahui $A = [a_{ij}]$ adalah matriks berukuran $m \times r$ dan $B = [b_{ij}]$ adalah matriks berukuran $r \times n$. Maka

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rj} & \dots & b_{rn} \end{bmatrix}$$

Maka entri matriks AB baris i kolom j adalah

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ir}b_{rj}$$

Operasi Matriks_Perkalian Matriks(3)

Contoh:

Diketahui $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}_{2\times 3}$, $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix}_{3\times 2}$ dan $C = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}_{1\times 3}$, maka

- $AB = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap + br + ct & aq + bs + cu \\ dp + er + ft & dq + es + fu \end{bmatrix}_{2\times 2}$

- BC tidak dapat ditentukan karena banyaknya kolom matriks B tidak sama dengan banyaknya baris matriks C

- $AC = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by + cz & dx + ey + fz \end{bmatrix}$

Latihan

1. Diketahui

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   apakah A adalah matriks

   a. Matriks segitiga atas? jelaskan!

   b. Matriks segitiga bawah? jelaskan!

   c. Matriks diagonal? jelaskan!

   d. Matriks simetri? jelaskan!

Latihan(2)

2. Diketahui ukuran matriks $A, B, C, D,$ dan E adalah sebagai berikut

$$A_{2\times 3}, B_{4\times 3}, C_{2\times 1}, D_{3\times 2}, E_{1\times 3}$$

Maka tentukan ukuran dari matriks (jika ada)

a. $AE^T + C$

b. $B^T + 2C$

c. $(AB^T)^T C$

d. DAB^T

e. $EA^T CD$

Latihan(3)

3. Diketahui $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, maka

   A. $4A$

   B. A^T, B^T, C^T

   C. AB

   D. AC

   E. $A(B + C)$

THANKYOU