

# 西安交通大学

## 本科毕业设计（论文）

强关联多光子动力学模拟

学院（部、中心）：物理学院

专业：理科试验班（物理 H）

班级：物理试验班 92

学生姓名：刘铠铭

学号：2173414093

指导教师：张永昌

2023 年 06 月



## 摘要

作为通用量子计算的基础操作之一——双量子比特门基于量子比特之间的非线性相互作用实现。与其他系统相比，光学系统具有相干性好、易调控、扩展性好等优势。然而，在光学系统中实现双量子比特门十分困难，因为光子之间本身不存在任何相互作用。如果能够产生光子之间的有效非线性作用，那么就可以基于该非线性作用实现确定性的双量子比特门。本文基于里德堡原子方案实现光子非线性：里德堡原子处于里德堡态时有很强的长程相互作用。光子在里德堡原子气体中传播时，光子与三能级里德堡原子气体相耦合，形成里德堡极化子。光子在电磁诱导透明条件下以慢光形式传播，里德堡态之间的长程相互作用会通过极化子映射到光子上，产生光子之间的有效非线性作用。多个光子在相互靠近或者远离的过程中，它们之间的相对相位会发生改变，从而实现相位翻转等逻辑门操作。

本文通过理论分析和数值模拟的方法，研究了里德堡原子气体中的强关联多光子系统。本文具体进行了以下研究：建立强关联多光子系统的物理模型，基于麦克斯韦方程组推导出光场在里德堡原子气体中的动力学方程，并使用 MATLAB 完成了一维强关联双光子系统、一维强关联三光子系统和二维强关联双光子系统的动力学模拟。在数值模拟中，本文具体探究了光子的概率密度和相位在里德堡气体中实时演化过程以及光子之间的相对相位与相互作用强度、相互作用时间、里德堡阻塞半径这三个参数的关系，通过调控相应参数可以实现相位翻转等逻辑门操作。本文通过数值模拟证明了基于光子非线性实现双量子比特门的可行性。本文讨论了当前程序的改进方案，这将为二维强关联多光子系统的研究提供有价值的参考。

**关键词：**双量子比特门；光子；里德堡原子；光子非线性；电磁诱导透明；里德堡阻塞效应；动力学模拟

## ABSTRACT

As one of the basic operations of universal quantum computing, two-qubit gates are based on nonlinear interactions. Compared with other systems, the optical system has the advantages of good coherence, easy regulation, and high scalability. However, implementing two-qubit gates in optical systems is difficult because photons do not interact with each other in vacuum. If an effective nonlinear interaction of photons can be generated, the two-qubit gates can be realized. This thesis realized photonic nonlinearity by using Rydberg atom scheme: Rydberg atoms have strong long-range interactions when they are in the Rydberg state. When the photons propagates in the Rydberg atomic gas, photons are coupled with three-level Rydberg atoms by an external control beam to form Rydberg polaritons. Photons propagate as slow light under electromagnetically induced transparency, and the long-range interactions between Rydberg states can be mapped onto photons via polaritons, resulting in effective nonlinear interactions. When multiple photons approach to or move away from each other, the relative phase between them will change, thereby realizing logic gate operations such as phase inversion.

In this thesis, we focused on the strongly correlated multi-photon system in Rydberg atomic gas. We conducted theoretical analysis and numerical simulation. Specifically, the following research was carried out: We established a physical model of strongly correlated multi-photon system, and we derived the dynamic equation of the light field in the Rydberg atomic gas based on Maxwell's equations. We used MATLAB to do numerical simulation of one-dimensional strongly correlated two-photon system, one-dimensional strongly correlated three-photon system, and two-dimensional two-photon system. We explored the real-time evolution of the probability density and phase of photons and the relationship between the phase of photons and the three parameters of interaction strength, interaction time, and Rydberg blockade radius. Logic gate operations such as phase inversion can be realized by adjusting the these parameters. We demonstrated the feasibility of realizing two-qubit gates based on photonic nonlinearity through numerical simulation. We also discussed the improvement scheme of the current program, which will provide a valuable reference for the study of two-dimensional strongly correlated multi-photon system.

**KEY WORDS:** Two-qubit gates; photons; Rydberg atoms; photonic nonlinearity; electromagnetically induced transparency; Rydberg blockade effect; dynamics simulation

## 目 录

1 絮论 .....	1
1.1 研究意义 .....	1
1.2 研究背景 .....	2
1.3 研究方案 .....	4
2 光子与里德堡原子耦合系统的物理模型 .....	5
2.1 里德堡原子的基本性质 .....	5
2.1.1 里德堡阻塞效应 .....	6
2.1.2 里德堡气体中的电磁诱导透明 .....	7
2.1.3 里德堡原子实现双量子比特门的思路 .....	8
2.2 光场在里德堡原子气体中的动力学方程 .....	9
2.2.1 一维强关联多光子系统动力学方程 .....	9
2.2.2 一维强关联双光子系统动力学方程 .....	11
2.2.3 一维强关联三光子系统动力学方程 .....	14
2.2.4 二维强关联双光子系统动力学方程 .....	15
2.3 本章小结 .....	16
3 强关联多光子动力学数值模拟 .....	17
3.1 一维强关联双光子系统 .....	17
3.1.1 一维强关联双光子系统算法设计 .....	17
3.1.2 一维强关联双光子系统传播过程的可视化模拟 .....	19
3.1.3 一维强关联双光子系统实时演化过程中的数值分析 .....	20
3.1.4 一维强关联双光子系统末态相位 .....	23
3.2 一维强关联三光子系统 .....	24
3.2.1 一维强关联三光子系统算法设计 .....	24
3.2.2 一维强关联三光子系统传播过程的可视化模拟 .....	26
3.2.3 一维强关联三光子系统传播过程中相位的多角度可视化 .....	27
3.2.4 一维强关联三光子系统实时演化过程的数值分析 .....	29
3.2.5 一维强关联三光子系统末态相位 .....	32
3.2.6 一维强关联三光子系统调控两个阻塞区域参数不同 .....	32

3.3 二维强关联双光子系统.....	34
3.3.1 二维强关联双光子系统算法设计.....	34
3.3.2 二维强关联双光子系统实时演化过程的数值分析 .....	37
3.3.3 二维强关联双光子系统末态相位.....	39
3.4 本章小结.....	40
4 结论与展望 .....	41
4.1 结论 .....	41
4.2 展望 .....	41
致 谢.....	43
参考文献.....	44
附录 A 外文原文 .....	46
附录 B 外文翻译.....	51
附录 C 计算机源程序.....	57
附录 D 任务书 .....	87
附录 E 考核评议书.....	90
附录 F 答辩结果 .....	95

# 1 绪论

## 1.1 研究意义

第四次工业革命，是以基因工程、量子信息技术、可控核聚变、清洁能源以及生物技术等为技术突破口的工业革命。量子科技作为关键技术之一，正在全世界范围内蓬勃发展。量子科技的发展对国家安全、工业发展和科技进步都有着极为重要的意义。量子计算作为量子科技的典型应用，具远超经典计算的速度优势。如图 1-1 所示，“九章”是中国科学技术大学相关技术团队研制的 76 个光子的量子计算原型机，于 2020 年 12 月 4 日宣布构建成功。在求解 5000 万个样本的高斯玻色取样 (boson sampling) 问题时，九章只需 200 秒，而以 415 PFLOPS 计算速度成为 TOP500 排名第一的超级计算机“富岳”需 6 亿年；当求解 100 亿个样本时，九章需 10 小时，而富岳需 1200 亿年。根据目前最优的经典算法，“九章”对于处理高斯玻色取样的速度比超级计算机“富岳”快 100 万亿倍 [1]。

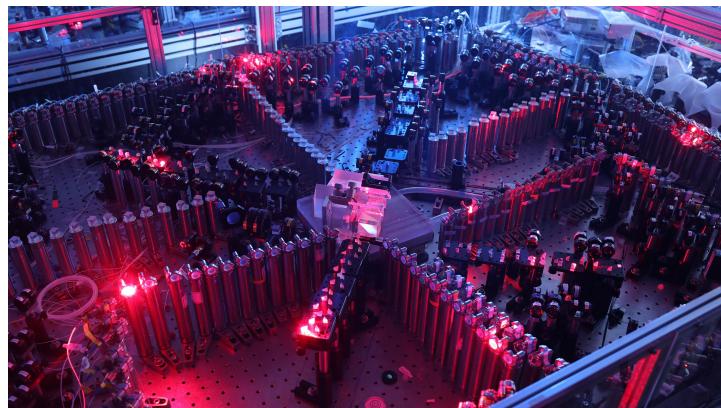


图 1-1 九章计算机（部分）[1]

国内外对量子计算的研究采用的系统主要有超导线路、量子点、离子阱、光学系统等，目前这些系统都面临着各自的瓶颈，还未能实现通用量子计算。通用量子计算的概念由 Deustch 在 1985 年提出 [2]——通用量子计算是指利用单量子比特门和双量子比特门来实现任意的量子算法。其中单量子比特门基于线性光学操作，在目前所采用的各种量子计算系统中都很容易实现，比如“九章量子计算机”。但是仅凭借单量子比特门只能解决特定的问题，无法实现普遍的量子计算，所以双量子比特门的实现成为了待解决的重要问题。

双量子比特门是基于量子比特之间的非线性相互作用来实现。由于光子之间本身不存在任何相互作用，所以在光学系统中实现双量子比特门尤为困难。但是光学系统由于其相干性好、易调控等特点，在进行量子计算方面有独特的优势。如果能够产生光子之间的有效非线性作用，那么就可以实现确定性的双量子比特门，突破目前限制光学系统量子计算的主要难点。

## 1.2 研究背景

虽然在真空中光子之间不存在任何相互作用，但是通过将光子与克尔介质、单个粒子或者粒子系综的耦合可以实现光子非线性。目前实现光子的非线性相互作用的方案主要有以下几类：

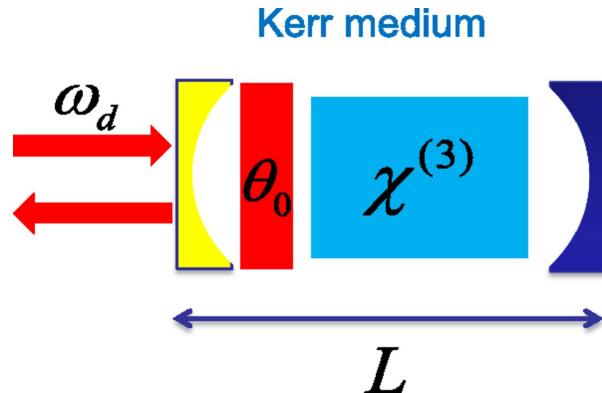


图 1-2 克尔介质中的光学非线性 [3]

### (1) 基于克尔介质方案

如图 1-2 所示，利用克尔介质可以实现光子的非线性，但是该非线性效应依赖于光场的强度，并且会随着光强的减弱而衰减。在量子计算中进行的是单（少）光子操作，其光强在克尔介质中所诱导的非线性作用极其微弱，难以应用于量子比特中。尽管在实验中已经观察到了在低光强下大克尔非线性，但是这种大克尔非线性仍然受限于经典的范畴，无法在量子层面实现非线性 [4]。

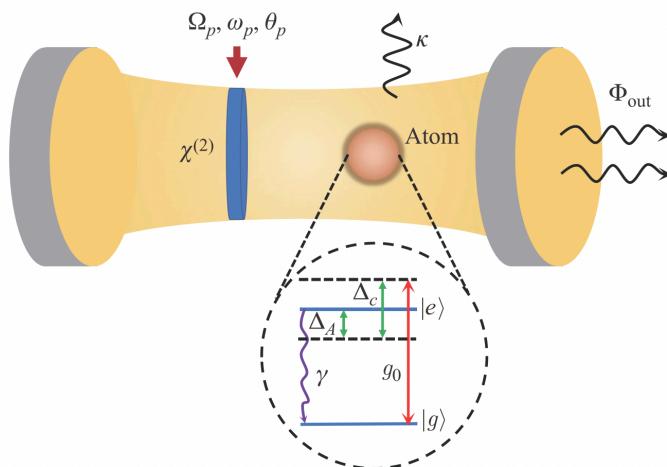


图 1-3 单原子中的光学非线性 [5]

### (2) 单原子系统方案

如图 1-3 所示，通过将光子耦合到单个粒子，例如原子，可以实现光子非线性。但是这种耦合方式的缺点十分明显：光子与单个原子之间的相互作用的强度比较弱，使

得相关的非线性相当低效。为了解决这个问题，需要增强光子与单个原子之间的相互作用强度。然而在自由空间中，难以实现如此巨大的相互作用强度，因此需要将光子限制在非常小的模式空间中，比如通过将单个原子限制在高品质的光学微腔中以提升光子与原子的相互作用强度，从而实现光学非线性。原子与微腔光场的强耦合可以导致原子与腔内光子集体激发的能级劈裂，当腔内激发一个光子之后，该能级劈裂就会造成第二个光子激发的能量失谐进而阻止激发第二个光子，从而等效地在光子之间产生排斥作用。

### (3) 原子气体方案

如图 1-4 所示，实现的光子非线性相互作用的另一种方案是将光子耦合到粒子系综 [6]，与第二个方案的不同之处是光子不再与单个原子耦合，而是与原子气体相互作用。在这种情况下利用光子与许多相同量子系统集体增强耦合。如果被耦合的物质具有很强的依赖于状态的相互作用，我们可以在此粒子系综中建立巨大的光学非线性。这种思路为我们提供了一个从根本上实现量子光学非线性的独特方法，其中两个光子之间的非线性相互作用可以通过由长程粒子-粒子相互作用介导的非局域非线性来实现。

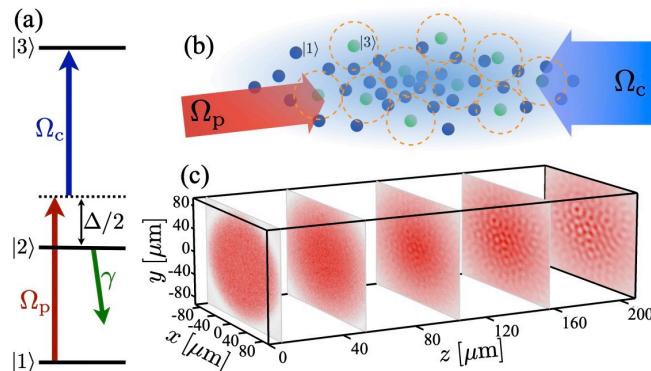


图 1-4 里德堡原子气体中的光学非线性 [7]

### (4) 里德堡原子气体方案

虽然传统材料很难满足这些条件，但里德堡原子处于里德堡态时有很强的“范德瓦尔斯力”或者“偶极-偶极相互作用”。光子在里德堡原子气体中传播时，首先通过外加控制光场与三能级里德堡原子气体相耦合，形成里德堡极化子。与此同时，光子在电磁诱导透明（Electromagnetically Induced Transparency）条件下以慢光形式传播，里德堡态之间的长程相互作用会通过极化子映射到光子上，形成光子之间的有效非线性作用。那么多个光子在相互靠近或者远离的过程中，光子之间的相对相位会发生改变，从而实现相位翻转等逻辑门操作。

里德堡原子诱导的光子非线性有两个重要的优势：

- (1) 与克尔介质以及与另外两个方案相比，光子之间的非线性相互作用更强；
- (2) 这是一种非局域性的长程相互作用，便于在实际应用中同时进行多比特操控。

由于上述优势，利用里德堡原子产生的光子非线性很有希望应用于双量子比特相位门，并且在世界范围内吸引了大量的研究。例如，德国马克思普朗克量子光学研究所在世界上首次实现了基于里德堡原子的双光子比特门。但是受限于双光子系统非线性相互作用的耗散性和存储效率，保真度和效率都达不到理想标准 [8]。此外，有关里德堡原子系统的研究在国内也引起了广泛的关注。例如，中国科学技术大学利用里德堡原子气体进行量子存储 [9] 和量子模拟 [10]；清华大学对多分量里德堡系统中原子间强相互作用的调控 [11]，等等。国内对里德堡系统的研究取得了许多进展，但是对于如何调控里德堡原子系统中的强关联多光子非线性以及实现双量子比特门的具体方案还缺乏研究。

### 1.3 研究方案

本文研究了由里德堡气体诱导的光子之间的非线性相互作用以及这种光子非线性对实现双量子比特门的重要意义。通过设计里德堡原子气体与控制光场和探测光场之间的相干耦合，可以实现里德堡气体中的电磁诱导透明（EIT），在 EIT 条件下，光子会以慢光形式传播。当其中一个里德堡原子被光场激发到里德堡态时，由于里德堡阻塞效应，在它周围阻塞体积内的其他原子的里德堡态的能级会升高，因此不能被激发到里德堡态，这正是里德堡原子之间长程相互作用的体现。由于光子与里德堡原子耦合形成准粒子——里德堡极化子，里德堡态之间的长程相互作用会映射到光子之间，从而实现光子非线性。

本文采用理论分析和数值模拟的方法，研究里德堡原子气体中的强关联多光子系统，证明了基于该系统中的光子非线性相互作用实现双量子比特门操作的可行性。针对该目标，本文主要进行了以下研究：首先建立了一维强关联多光子系统的物理模型，然后基于麦克斯韦方程组推导出光场在里德堡原子气体中的动力学方程，并使用 MATLAB 软件完成了一维强关联双光子系统、一维强关联三光子系统和二维强关联双光子系统的动力学模拟。在数值模拟中，本文具体探究了光子在里德堡气体中传播过程，并对其进行了可视化，展示了多光子系统的波函数和相对相位在经过阻塞区域前后的变化过程。本文还具体探索了多光子系统在里德堡原子气体中的动力学性质：比如光子之间的相对相位与相互作用强度、相互作用时间和里德堡阻塞半径这三个参数的关系。本文还讨论了当前程序的改进方案，这将为二维强关联多光子动力学模拟的研究提供有价值的参考，为基于非线性光学的确定性量子门操作提供有力的支撑。

## 2 光子与里德堡原子耦合系统的物理模型

本章首先介绍了里德堡原子的基本性质，比如原子半径、寿命和相互作用的形式，接着引入了两个重要概念：里德堡阻塞效应和里德堡气体中的电磁诱导透明，并通过这两个概念解释了里德堡气体中光子非线性的来源和实现基于光子非线性实现双量子比特门的思路。本章的后半部分先推导了一维强关联多光子系统的动力学方程，进而推导出一位强关联双光子系统、一维强关联三光子系统和二维强关联双光子系统的动力学方程。

### 2.1 里德堡原子的基本性质

里德堡原子是指具有高激发态电子（主量子数  $n$  很大）的原子。里德堡原子中只有一个电子处于很高的激发态，离原子实（原子核和其余的电子）很远，原子实对这个电子的库仑作用可视为一个点电荷的库仑作用，因此可以将里德堡原子看作类氢原子，将多体问题转化为单电子问题，这样就大大简化了计算。本文的数值模拟是基于铷原子实现的。铷里德堡原子和氢原子之间的主要区别在于铷原子没有仅携带单电荷的原子核，屏蔽效应和隧穿效应使原子核的真实结构需要被考虑，从而让能级发生偏移。因此在描述电子结合能  $E_n$  的玻尔模型中，需要引入有效主量子数  $n^*$ ，铷原子的能级表达式为 [12]

$$E_n = -hc \frac{R_{Rb}}{(n^*)^2} \quad (2-1)$$

$R_{Rb} = R_\infty / (1 + m_e/m_{Rb})$  是与质量相关的里德堡常数，其中，里德堡常数为  $R_\infty$ ，有效主量子数  $n^* = n - \delta_{nl}$ 。 $m_e$  和  $m_{Rb}$  分别为电子和里德堡原子的质量。量子缺陷  $\delta_{nl}$  由屏蔽效应和隧穿效应引起，它的取值取决于主量子数  $n$  和角动量量子数  $l$ ，它是一个经验值。里德堡原子的主量子数  $n$  很大，根据玻尔模型，电子的轨道半径为：

$$r_n = n^2 \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} \quad (2-2)$$

由于电子玻尔半径与  $n^2$  成正比，里德堡原子的半径比一般原子大很多。 $n = 250$  的里德堡原子半径约为  $3.3\mu\text{m}$ [13]，接近一个典型细菌的大小。较大的原子半径使被激发的电子与原子核之间拥有很大的偶极矩，因此里德堡原子还具有与  $n^4$  成正比的偶极-偶极相互作用。相距  $r = |\mathbf{r}|$  的两个里德堡原子之间的偶极-偶极相互作用为

$$\hat{\mathcal{V}}_{dip}(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\boldsymbol{\mu}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}}_2}{|\mathbf{r}|^3} - \frac{3(\hat{\boldsymbol{\mu}}_1 \cdot \mathbf{r})(\hat{\boldsymbol{\mu}}_2 \cdot \mathbf{r})}{|\mathbf{r}|^5} \quad (2-3)$$

公式 (2-3) 中,  $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$  分别表示两个里德堡原子偶极矩。

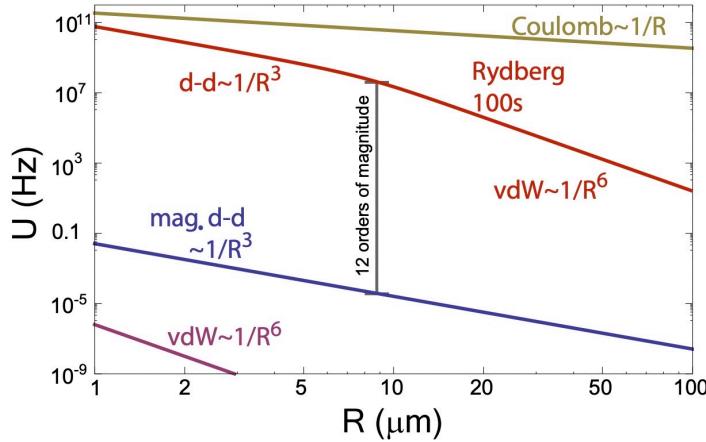


图 2-1 里德堡态之间的范德瓦尔斯相互作用与基态之间的范德瓦尔斯相互作用的比较 [14], 红线表示里德堡态之间的范德瓦尔斯相互作用, 紫线表示基态之间的范德瓦尔斯相互作用

如图 2-1 所示, 里德堡原子处于里德堡态时还具有很强的长程“范德瓦尔斯相互作用”(红线), 这种相互作用可以超过里德堡原子处于基态时的 10 个数量级(紫线), 范德瓦尔斯势的表达式为

$$V(r) = \frac{C_6}{r^6} \quad (2-4)$$

其中范德瓦尔斯系数为  $C_6 \propto n^{11}$ , 表现出对主量子数  $n$  的强烈依赖性。因此对于高位里德堡态(即主量子数很大的里德堡态)来说, 这种相互作用就变得很强。这些物理特性使得里德堡原子在量子信息科技领域具有许多潜在的应用, 因此当光子与里德堡原子相互耦合的时候, 两个光子之间的相互作用可以通过由长程里德堡-里德堡相互作用介导的非局域非线性来实现。

里德堡原子除了具有长程相互作用, 还拥有很长的辐射寿命。由于电子基态波函数和里德堡态波函数之间很小的空间重叠使得里德堡态的自发衰减速率很小, 因此里德堡态具有正比于  $n^3$  的辐射寿命, 并且在实验中可以达到 100 微秒数量级 [12]。那么光子与里德堡原子气体就可以形成一种稳定的准粒子——里德堡极化子, 光子与里德堡态经过准粒子激发完成相干耦合, 同时里德堡态的相互作用会通过极化子映射到光子上, 形成光子之间有效的非线性作用 [15]。

### 2.1.1 里德堡阻塞效应

里德堡原子之间的相互作用导致了非常显著的偶极子阻塞效应。它首先由 Lukin 等人于 2001 年提出 [16], 后来由 Singer 和 Tong 等人在 2004 年的实验中观察到 [17]。

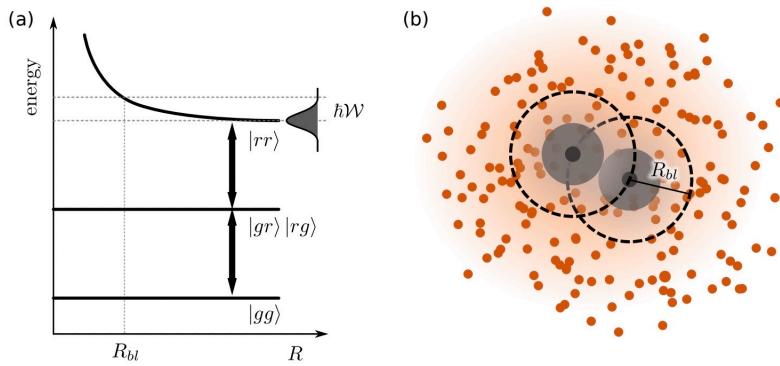


图 2-2 里德堡阻塞效应示意图 [12]，被激发到里德堡态的原子（黑色），其周围阻塞体积内的其他处于基态的原子（橙色）其里德堡态能级发生偏移，因此阻塞体积内的其他原子不能被激发到里德堡态

首先光子将单个里德堡原子从基态  $|g\rangle$  激发到里德堡态  $|r\rangle$ ，并实现跃迁共振。如图 2-2 (b) 所示，被激发到里德堡态的原子会与附近的原子产生相互作用，并使附近原子的里德堡态产生能级偏移。如图 2-2 (a) 所示，在阻塞半径  $R_b$  内，此能级偏移将会大于激发带宽  $\mathcal{W}$ ，从而导致周围的里德堡原子不能被激发到里德堡态。通过能级偏移可以定义里德堡阻塞半径：

$$\Delta E(R_b) = \hbar\mathcal{W} \quad (2-5)$$

在此半径内两个里德堡原子不能被同时激发到里德堡态。里德堡阻塞效应是里德堡原子之间长程相互作用的直观体现。这种相互作用的范围分布在一个体积上，其大小由阻塞半径给定，最高可达  $(10\mu m)^3$ 。在阻塞半径内包含的原子越多，光子之间的非线性相互作用就越强。

### 2.1.2 里德堡气体中的电磁诱导透明

电磁诱导透明 (Electromagnetically induced transparency, EIT)，一般是用两束光同时照射到原子介质（如大量原子组成的气体），使得其中一束光能够在与原子跃迁共振时通过原子介质而不产生吸收和反射的现象。

这个概念最初是由 Harris 于 1990 年提出并讨论的 [18]，并且在不久后就由 Boller 于 1991 首次通过实验展示了这种效果 [19]。从量子力学的角度，电磁诱导透明可以解释如下：由于光子与原子之间的相互作用，进入原子介质的光子部分转化为集体原子激发，导致称为暗态极化子的准粒子的相干形成。由于极化子兼具光子和原子的特性，可以通过影响极化子来间接地操控光子。例如可以将光的群速度减慢到  $17m/s$  [20]，即慢光效应。

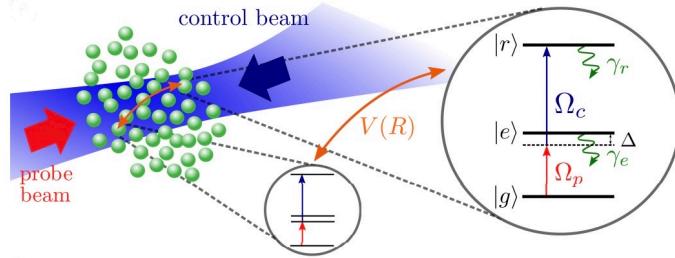


图 2-3 电磁诱导透明示意图 [8]，两束激光同时照射里德堡原子气体，探测光场将部分原子从基态  $|g\rangle$  耦合到低位激发态  $|e\rangle$ ，控制光场再将部分原子从低位激发态  $|e\rangle$  耦合到里德堡态  $|r\rangle$ ，控制光场足够强时，电磁诱导透明可以使原本吸收性的原子介质对探测光场透明

如图 2-3 所示，电磁诱导透明 (EIT) 可以出现在由两个光场驱动的三能级原子 (比如里德堡原子) 气体中。它依赖于冷原子气体与控制光场和探测光场的相干耦合，当原子与两个相干光场耦合时会对光场的传播产生显著的影响。在里德堡原子气体中，相关的激发方案为，首先通过较弱的探测光场将一些里德堡原子从基态  $|g\rangle$  耦合到低位激发态  $|e\rangle$ ，然后由更强的控制光场驱动里德堡原子从低位激发态  $|e\rangle$  耦合到里德堡态  $|r\rangle$ ，并且在基态  $|g\rangle$  和里德堡态  $|gr\rangle$  之间建立双光子共振耦合。在强控制场存在的情况下，电磁诱导透明可以使原本吸收性的原子介质对探测光场变得透明 [21]。

### 2.1.3 里德堡原子实现双量子比特门的思路

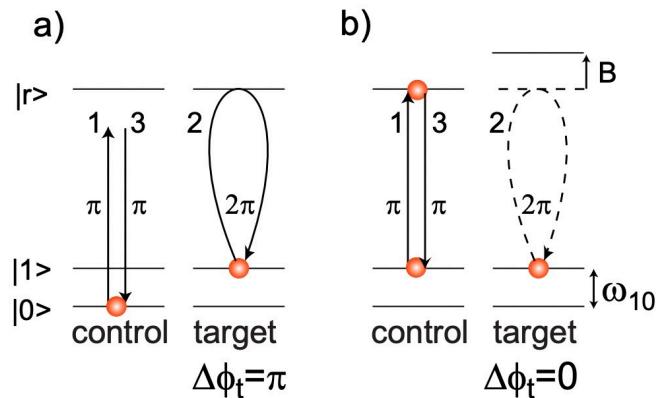


图 2-4 基于里德堡原子本身的双量子比特门示意图 [14]

如图 2-4 所示，基于里德堡原子的双量子比特门的实现思路如下，对于三能级的里德堡原子，存在基态  $|g\rangle$ 、激发态  $|e\rangle$ 、里德堡态  $|r\rangle$ 。两个原子分别为控制原子和目标原子，当两个原子的初始态为  $|ge\rangle$  时，控制光场没有与里德堡能级  $|r\rangle$  耦合，目标原子可以获取一个  $\pi$  的相移。当两个原子的初始态为  $|ee\rangle$  时，两个原子都被耦合到里德堡能级。在理想情况下，由于原子之间的阻塞效应，双原子激发带宽比拉比频率  $\Omega$  大时，目标原子不能被激发，因此不会获得相移。因此，演化矩阵可以用这样一组基表示

$|gg\rangle, |ge\rangle, |eg\rangle, |ee\rangle$ , 即  $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ , 这是一个受控  $Z(C_z)$  门。 $C_z$  门可以很容易转换为 CNOT 门, CNOT 门与单个量子位操作一起可以形成一组用于量子计算的通用门 [14]。

以上是基于里德堡原子实现双量子比特门的思路, 那么如何通过光子系统实现双量子比特门呢? 通过控制光场和探测光场在里德堡原子气体中的相干耦合, 可以实现里德堡气体中的电磁诱导透明 (EIT), 在 EIT 条件下, 光子会以慢光形式传播。当其中一个里德堡原子被光场从基态  $|g\rangle$  被激发到里德堡态  $|r\rangle$  时, 根据里德堡阻塞效应, 处于里德堡态的原子与其周围的原子之间会产生长程相互作用。由于光子与里德堡原子耦合形成准粒子——里德堡极化子, 里德堡态之间的长程相互作用会映射到光子之间, 从而实现光子之间强的、长程的、非线性相互作用。光子之间的非线性相互作用会使光子之间的相对相位发生改变, 进而通过调控相位具体的变化大小, 就可以制备量子比特门, 完成相位翻转等逻辑门操作。

## 2.2 光场在里德堡原子气体中的动力学方程

### 2.2.1 一维强关联多光子系统动力学方程

通过麦克斯韦方程组描述光场与介质的相互作用, 介质是里德堡原子气体, 可以得到量子化的光场传播方程

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) \hat{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{P}(\mathbf{r}, t) \quad (2-6)$$

其中  $\epsilon_0$  表示真空介电常数,  $c$  表示光速,  $\nabla$  是梯度算符。介质的极化强度  $\hat{P}(\mathbf{r}, t)$  是光场的源项, 光场的传播方向平行于 z 轴。为了简化方程, 光场的形式退化为平面波, 光场的表达式为

$$\hat{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_k \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V}} \left( \hat{a}_k e^{i(kz - \omega_k t)} + h.c. \right) \quad (2-7)$$

由于探测光场的单色性很好, 可以将其视为频率为  $\omega_p$  的单色场, 探测光场的表达式为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}_p(\mathbf{r}, t) &= \sqrt{\frac{\hbar\omega_p}{2\epsilon_0}} \left( \hat{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}_p e^{i(k_p z - \omega_p t)} + h.c. \right) \\ &= \mathcal{E}_p \left( \hat{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}_p e^{i(k_p z + \omega_p t)} + h.c. \right) \end{aligned} \quad (2-8)$$

同理得到控制光场的表达式为

$$\mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_c \mathcal{E}_c(\mathbf{r}) e^{-i\omega_c t} + c.c. \quad (2-9)$$

其中， $\mathbf{e}_{p,c}$  为极化方向， $\mathcal{E}_p = (\frac{\hbar\omega_p}{2\epsilon_0})^{1/2}$ ，并且  $\mathcal{E}_p \hat{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, t)$  与  $\mathbf{E}_c$  是在时空慢变的电场包络算符，而慢变极化场的表达式为

$$\hat{P}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathcal{P}}(\mathbf{r}, t) \exp\{i(k_p z - \omega_p t)\} \quad (2-10)$$

将光场和慢变极化场的表达式代入 Maxwell-Bloch 方程，可以得到光场在里德堡原子气体中的传播方程

$$(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{c}{2k_p} \nabla_{\perp}^2) \hat{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{\hbar} \sqrt{\frac{\hbar\omega_p}{2\epsilon_0}} \hat{P}(\mathbf{r}, t) \quad (2-11)$$

光场的色散关系为  $\omega_p = ck_p$ ， $\nabla_{\perp}^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$ ，此外通过慢变近似，光场和极化场在 z 方向上和时间上缓慢变化。于是我们得到了在外界极化场的作用下，光场在里德堡气体中传播行为。如果涉及的光场强度变大，则原子响应不再仅仅由线性磁化率定义，而是必须包括更高阶的项 [8]。

$$\langle \hat{\mathcal{P}} \rangle = \epsilon_0 [\chi^{(1)} \langle \hat{E} \rangle + \chi^{(2)} \langle \hat{E} \hat{E} \rangle + \chi^{(3)} \langle \hat{E} \hat{E} \hat{E} \rangle + \dots] \quad (2-12)$$

在一维强关联多光子系统中，势能的表达式为

$$V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \chi^{(1)}(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' \chi^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') |\mathcal{E}(\mathbf{r}')|^2 \quad (2-13)$$

其中磁化率的一阶和三阶形式分别为

$$\chi^{(1)}(\mathbf{r}) = -ig^2 \frac{\bar{\gamma}}{c(\Omega^2 + \bar{\gamma}\Gamma)} \rho(\mathbf{r}) \quad (2-14)$$

$$\chi^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\Omega^4}{c|a|^2 a} \frac{2(\bar{\gamma} + \Gamma)V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{2a(\bar{\gamma} + \Gamma) + i(a + \Gamma^2)V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} g^4 \rho(\mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}) \quad (2-15)$$

## 2.2.2 一维强关联双光子系统动力学方程

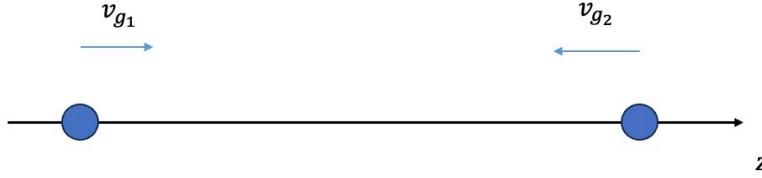


图 2-5 一维强关联双光子系统传播过程示意图，两个光子分别以群速度  $v_{g_1}$  和  $v_{g_2}$  沿  $z$  轴传播，相向而行，通过数值模拟研究光子进入阻塞区域前后波函数及其相位的变化

本文仅考虑一维情况，如图 2-5 所示，两个光子沿  $z$  轴传播，所以垂直于  $z$  轴的衍射项  $\nabla_{\perp}^2$  很微弱，可以忽略不计，在一维强关联双光子系统中，令  $r = z_1 - z_2$ ，其中  $z_1$  和  $z_2$  分别描述两个光子的坐标，用  $\psi(z_1, z_2)$  代替原方程中的  $\hat{E}(\mathbf{r}, t)$ ，表示一维双光子系统的波函数（为了简化符号， $\psi(z_1, z_2) = \psi(z_1, z_2, t)$  中的显式时间依赖性在下文中省略），可以用如下动力学方程描述系统的演化过程：

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(z_1, z_2) = -iv_{g_1} \frac{\partial}{\partial z_1} \psi(z_1, z_2) - iv_{g_2} \frac{\partial}{\partial z_2} \psi(z_1, z_2) + V_{ex}(z_1 - z_2) \psi(z_1, z_2) \quad (2-16)$$

如果想计算出两个光子传播的群速度  $v_{g_1}$ 、 $v_{g_2}$  以及范德瓦尔斯势场  $V_{ex}(z_1 - z_2)$  的具体表达式，需要具体求解一维双光子系统波函数所遵循的动力学方程 [22]

$$c \partial_r \mathbf{v} = \mathbf{M}(r, \omega) \mathbf{v} \quad (2-17)$$

其中  $\mathbf{v}$  代表双光子波函数矩阵，它的表达式为  $\mathbf{v} = [EE(R, r, \omega), ES_+(R, r, \omega)]$ ，其中  $EE(R, r, \omega)$  和  $ES_+(R, r, \omega)$  都是双激发态波函数。

并且

$$\mathbf{M}(r, \omega) = \begin{bmatrix} i\frac{\omega}{2} - \frac{g^2 n}{\Gamma} & -\frac{g\sqrt{n}\Omega}{\Gamma} \\ -\frac{g\sqrt{n}\Omega}{\Gamma} & i\omega - \frac{\Omega^2}{\Gamma} + \frac{ig^2 n [\omega - V(r)]}{2\Omega^2 + iV(r)\Gamma - i\omega\Gamma} \end{bmatrix} \quad (2-18)$$

$R$  仅仅通过边界条件引入，因此在现在这个问题中并不重要。对于窄带脉冲来说，可以对  $\mathbf{M}(r, \omega)$  进行展开，得到

$$\mathbf{M}(r, \omega) \approx \mathbf{M}_0 + \omega \mathbf{M}_1 \quad (2-19)$$

其中

$$\mathbf{M}_0 = -\frac{1}{\Gamma} \begin{bmatrix} g^2 n & g\sqrt{n}\Omega \\ g\sqrt{n}\Omega & \Omega^2 + g^2 n \mathcal{V} \end{bmatrix} \quad (2-20)$$

$$\mathbf{M}_1 = i \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 - 2g^2 n \frac{\Omega^2 \mathcal{V}^2}{\Gamma^2 V^2} \end{bmatrix} \quad (2-21)$$

有效势能  $\mathcal{V}$  的表达式为

$$\mathcal{V} = \frac{\Gamma V}{\Gamma V - i2\Omega^2} \quad (2-22)$$

在里德堡阻塞半径外，有效势能  $\mathcal{V} \approx i\Gamma V / 2\Omega^2$ ，其中  $\Gamma = \gamma + i\Delta$ ，在阻塞半径内  $\mathcal{V} \approx 1$ ，并且  $\mathcal{V}/V \approx 0$ ，里德堡极化子的解退化为  $\mathbf{M}_0$  的特征向量，所以在接下来的推导中，我们只需要考虑  $\mathbf{M}_0$ ，那么现在一维双光子系统所遵循的动力学方程为

$$c\partial_r \mathbf{v} = \mathbf{M}_0 \mathbf{v} \quad (2-23)$$

把此方程展开得到

$$c\partial_r \begin{bmatrix} EE(r, \omega) \\ ES_+(r, \omega) \end{bmatrix} = -\frac{1}{\Gamma} \begin{bmatrix} g^2 n & g\sqrt{n}\Omega \\ g\sqrt{n}\Omega & \Omega^2 + g^2 n \mathcal{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EE(r, \omega) \\ ES_+(r, \omega) \end{bmatrix} \quad (2-24)$$

由此可以得到一维强关联双光子系统的两个动力学方程

$$c\partial_r EE(r, \omega) = -\frac{1}{\Gamma} (g^2 n EE(r, \omega) + g\sqrt{n}\Omega ES_+(r, \omega)) \quad (2-25)$$

$$c\partial_r ES_+(r, \omega) = -\frac{1}{\Gamma} (g\sqrt{n}EE(r, \omega) + (\Omega^2 + g^2 n \mathcal{V})ES_+(r, \omega)) \quad (2-26)$$

通过求解  $\mathbf{M}_0$  的特征值和特征向量可发现  $ES_+/EE = -g\sqrt{n}/\Omega$  是  $\mathbf{M}_0$  的特征值为 0 的时候对应的特征向量。将  $ES_+/EE = -g\sqrt{n}/\Omega$  代入方程 (2-26)，只保留  $EE$  项，经过化简得到一维强关联双光子动力学方程为

$$c\partial_r EE(r, \omega) = -\frac{g^2 n \mathcal{V}}{\Gamma} EE(r, \omega) \quad (2-27)$$

为了获得群速度的具体形式，等式两边同乘  $\frac{\Omega^2}{g^2 n}$ ，动力学方程变为

$$c\frac{\Omega^2}{g^2 n} \partial_r EE(r, \omega) = -\frac{\Omega^2 \mathcal{V}}{\Gamma} EE(r, \omega) \quad (2-28)$$

由于光子在里德堡气体中传播，所以还需引入时间偏导项  $\partial_t$ ，此时动力学方程为

$$\partial_t EE(r, \omega) + c\frac{\Omega^2}{g^2 n} \partial_r EE(r, \omega) = -\frac{\Omega^2 \mathcal{V}}{\Gamma} EE(r, \omega) \quad (2-29)$$

其中，光子传播的群速度的表达式为  $v_g = c\frac{\Omega^2}{g^2 n}$ ，将有效势能  $\mathcal{V} = \Gamma V / (\Gamma V - i2\Omega^2)$  和范德瓦尔斯相互作用  $V = \frac{C_6}{r^6}$  的表达式代入动力学方程得到

$$i\partial_t EE(r, \omega) = -iv_g \partial_r EE(r, \omega) + \frac{\Omega^2}{i\gamma + \Delta} \frac{1}{1 + (\frac{r}{R_b})^6} EE(r, \omega) \quad (2-30)$$

在一维强关联双光子系统中， $r = z_1 - z_2$  表示光子之间的相对位置，数值模拟中使用的群速度是光子之间的相对群速度，所以对于空间的偏微分算符有如下关系

$$\partial_r \psi(z_1, z_2) = \frac{1}{2}(\partial_{z_1} - \partial_{z_2})\psi(z_1, z_2) \quad (2-31)$$

此外，用  $\psi(z_1, z_2)$  代替原方程中的  $EE(r, \omega)$ ，得到了一维强关联双光子系统动力学方程的一般形式

$$i\frac{\partial}{\partial t} \psi(z_1, z_2) = -iv_{g1} \frac{\partial}{\partial z_1} \psi(z_1, z_2) - iv_{g2} \frac{\partial}{\partial z_2} \psi(z_1, z_2) + V_{ex}(z_1 - z_2)\psi(z_1, z_2) \quad (2-32)$$

(2-32) 式中一些物理量的表达式如下所示，

$$V_{ex}(z_1 - z_2) = \frac{\Omega^2}{i\gamma + \Delta} \frac{1}{1 + (\frac{(z_1 - z_2)}{R_b})^6} \quad (2-33)$$

$$v_{g1} = -v_{g2} = \frac{1}{2}v_g = c\frac{\Omega^2}{2g^2 n} \quad (2-34)$$

$$R_{b0} = \left( \frac{C_6(i\gamma + \Delta)}{2\Omega^2} \right)^{1/6} \quad (2-35)$$

$$\Gamma = \gamma - i\Delta \quad (2-36)$$

### 2.2.3 一维强关联三光子系统动力学方程

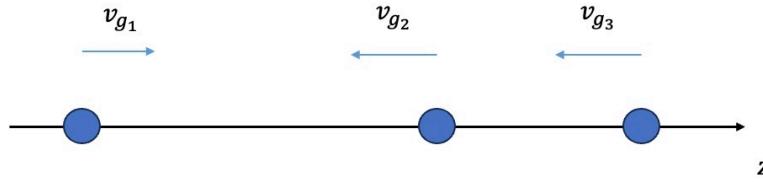


图 2-6 一维强关联三光子系统传播过程示意图，三个光子分别以群速度  $v_{g_1}$ 、 $v_{g_2}$  和  $v_{g_3}$  沿  $z$  轴传播，第一个光子与另外两个光子相向而行，通过数值模拟研究光子进入两个阻塞区域前后波函数及其相位的变化

如图 2-6 所示，一维强关联三光子系统中，三个光子均沿  $z$  轴传播，群速度分别为  $v_{g_1}, v_{g_2}, v_{g_3}$ 。通过类比一维强关联双光子系统的动力学方程，可以很容易推导出一维强关联三光子系统的动力学方程。我们用  $\psi(z_1, z_2, z_3)$  表示位置分别为  $z_1, z_2$  和  $z_3$  处的三光子的波函数。（为了简化符号， $\psi(z_1, z_2, z_3) = \psi(z_1, z_2, z_3, t)$  中的显式时间依赖性在下文中省略）。同时，一维双光子系统只需要考虑两个光子之间的相互作用，而一维三光子系统还需考虑三个光子两两之间的相互作用。

因此可以用如下动力学方程描述一维强关联三光子系统在里德堡气体中的传播过程：

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(z_1, z_2, z_3) = -i(v_{g_1} \frac{\partial}{\partial z_1} + v_{g_2} \frac{\partial}{\partial z_2} + v_{g_3} \frac{\partial}{\partial z_3}) \psi(z_1, z_2, z_3) + (V_{ex}(z_1 - z_2) + V_{ex}(z_2 - z_3) + V_{ex}(z_1 - z_3)) \psi(z_1, z_2, z_3) \quad (2-37)$$

其中三个光子的群速度分别为

$$v_{g_1} = -v_{g_2} = -v_{g_3} = \frac{1}{2}v_g = c \frac{\Omega^2}{2g^2n} \quad (2-38)$$

## 2.2.4 二维强关联双光子系统动力学方程

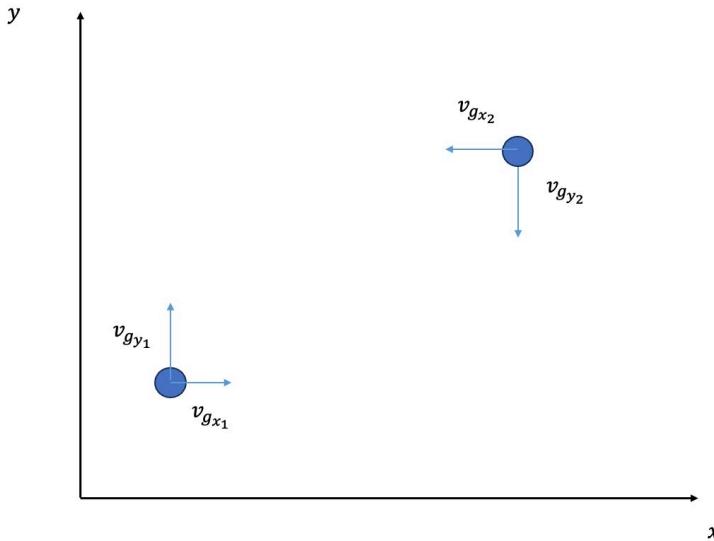


图 2-7 二维强关联双光子系统传播过程示意图，两个光子分别以群速度  $\mathbf{v}_{g1} = (v_{gx_1}, v_{gy_1})$ ,  $\mathbf{v}_{g2} = (v_{gx_2}, v_{gy_2})$  在二维平面 (x-y) 传播，通过数值模拟研究光子进入阻塞区域前后波函数及其相位的变化

通过类比一维强关联双光子系统的动力学方程，可以很容易推导出二维强关联双光子系统的动力学方程。我们用  $\psi(x_1, y_1, x_2, y_2)$  表示位置分别为  $x_1, y_1, x_2, y_2$  处的二维双光子的波函数。(为了简化符号,  $\psi(x_1, y_1, x_2, y_2) = \psi(x_1, y_1, x_2, y_2, t)$  中的显式时间依赖性在下文中省略)。因此可以用如下动力学方程描述二维强关联双光子系统在里德堡气体中的传播过程:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x_1, y_1, x_2, y_2) = -i(v_{gx_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + v_{gy_1} \frac{\partial}{\partial y_1} + v_{gx_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + v_{gy_2} \frac{\partial}{\partial y_2}) \psi(x_1, y_1, x_2, y_2) + V_{ex}(x_1, y_2, x_2, y_2) \psi(x_1, y_1, x_2, y_2) \quad (2-39)$$

如图 2-7 所示，两个光子在二维平面运动，群速度分别为

$$\mathbf{v}_{g1} = (v_{gx_1}, v_{gy_1}); \mathbf{v}_{g2} = (v_{gx_2}, v_{gy_2}) \quad (2-40)$$

$$\sqrt{v_{gx_1}^2 + v_{gy_1}^2} = \sqrt{v_{gx_2}^2 + v_{gy_2}^2} = \frac{1}{2}v_g = c \frac{\Omega^2}{2g^2n} \quad (2-41)$$

势能的表达式为

$$V_{ex}(x_1, y_2, x_2, y_2) = \frac{\Omega^2}{i\gamma + \Delta} \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}}{R_b}\right)^6} \quad (2-42)$$

## 2.3 本章小结

本章从里德堡原子的基本性质引入，详细阐述了里德堡阻塞效应和电磁诱导透明的物理概念，进而解释了里德堡气体中光子非线性的来源。本章通过类比里德堡原子实现的双量子比特门思路，进一步阐述了光子与里德堡原子气体耦合所产生的光子非线性实现双量子比特门的思路。本章首先通过 Maxwell 方程组推导出一维强关联多光子系统的动力学方程，并进一步推导出一维强关联双光子系统、一维强关联三光子系统和二维强关联双光子系统的动力学方程，为第三章的数值模拟部分打下良好的基础。

### 3 强关联多光子动力学数值模拟

基于一维强关联双光子动力学方程、一维强关联三光子动力学方程和二维强关联双光子动力学方程，本章使用 MATLAB 软件完成了一维强关联双光子系统、一维强关联三光子系统和二维强关联双光子系统的动力学模拟。在数值模拟中，本章具体探究了光子在里德堡气体中传播过程，并对其进行了可视化，展示了多光子系统的波函数和相对相位在经过阻塞区域前后的变化过程。本章还具体探索了多光子系统在里德堡原子气体中的动力学性质：比如光子之间的相对相位与相互作用强度、相互作用时间和里德堡阻塞半径这三个参数的关系，并且将双光子系统和三光子系统进行了对比。在二维强关联双光子系统中，本章还探究了当两个光子在两条相距为  $d$  的平行路径上运动时，末态相位随平行线之间距离  $d$  的变化关系，这将为二维强关联多光子动力学模拟的研究提供有价值的参考，为基于非线性光学的确定性量子门操作提供有力的支撑。

#### 3.1 一维强关联双光子系统

##### 3.1.1 一维强关联双光子系统算法设计

数值模拟条件：在一维空间中，两个光子分别与两个里德堡原子耦合形成两个里德堡极化子，两个光子的群速度分别为  $v_{g_1}$  和  $v_{g_2}$ ，光子之间的范德瓦尔斯相互作用为  $V_{ex}(z_1 - z_2)$ ，用  $\psi(z_1, z_2)$  表示位置为  $z_1$  和  $z_2$  处的双光子波函数，量纲分别为  $s$  和  $\mu m$ ，（为了简化符号， $\psi(z_1, z_2) = \psi(z_1, z_2, t)$  中的显式时间依赖性在下文中省略），第二章中描述双光子在里德堡气体中的传播方程为

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(z_1, z_2) = -iv_{g_1} \frac{\partial}{\partial z_1} \psi(z_1, z_2) - iv_{g_2} \frac{\partial}{\partial z_2} \psi(z_1, z_2) + V_{ex}(z_1 - z_2) \psi(z_1, z_2) \quad (3-1)$$

(3-1) 式是一个含时的薛定谔方程，根据量子力学可以得到波函数的演化过程遵循

$$\psi(z_1, z_2, t + dt) = e^{\frac{-iHdt}{\hbar}} \psi(z_1, z_2, t) \quad (3-2)$$

动力学模拟需要设定相应的初始条件。对于一维空间的单光子系统来说，可以将其波函数的初态近似视为一维的高斯波包，其表达式为

$$\psi_{t=0}(z_1) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(z_1 - z_{10})^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3-3)$$

那么对于一维双光子系统，两个光子的坐标在实空间中是两个一维的坐标，但是在希尔伯特空间中可以将两个一维的坐标视为一个二维的坐标，所以可以将双光子系统初态波函数近似视为二维的高斯波包。

$$\psi_{t=0}(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(z_1 - z_{10})^2 + (z_2 - z_{20})^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3-4)$$

其中， $z_{10}$  和  $z_{20}$  分别代表第一个光子和第二个光子的初始位置。一维强关联双光子系统的哈密顿量为

$$H = T + V = v_{g_1} \partial_{z_1} + v_{g_2} \partial_{z_2} + V_{ex}(z_1 - z_2) \quad (3-5)$$

建立一维强关联双光子数值模型的方案为：

- (1) 在 Matlab 中建立  $50\mu m \times 50\mu m$  的坐标空间，并将坐标空间划分为  $256 \times 256$  的网格；
- (2) 建立与坐标空间相对应的动量空间（即  $k$  空间），同样将动量空间划分为  $256 \times 256$  的网格；
- (3) 理想情况下，波函数的演化过程遵循公式 (3-2)。但是在数值模拟中，由于空间网格划分精度以及时间精度有限的问题，可以通过对哈密顿量中的运动项进行拆分并和势能项交换顺序来提升演化的准确性，新的哈密顿量表达式为

$$H = T_1 + T_2 + V + T_2 + T_1 = \frac{v_{g_1} \partial_{z_1}}{2} + \frac{v_{g_2} \partial_{z_2}}{2} + V_{ex}(z_1 - z_2) + \frac{v_{g_2} \partial_{z_2}}{2} + \frac{v_{g_1} \partial_{z_1}}{2} \quad (3-6)$$

算符作用到波函数上要严格遵循 (3-6) 式中的顺序才可以保证演化的精度，所以在数值模拟中，波函数演化的公式为

$$\psi(z_1, z_2, t + dt) = e^{\frac{-iHdt}{\hbar}} \psi(z_1, z_2, t) = e^{\frac{-iT_1dt}{\hbar}} e^{\frac{-iT_2dt}{\hbar}} e^{\frac{-iV_{ex}dt}{\hbar}} e^{\frac{-iT_1dt}{\hbar}} e^{\frac{-iT_2dt}{\hbar}} \psi(z_1, z_2, t) \quad (3-7)$$

在数值模拟中使用铷里德堡原子的参数，具体取值如下所示：

$$\Delta = 20\gamma, \Omega = 2\Delta, g\sqrt{n} = 100\Delta \sim 470\Delta$$

$$|r\rangle = 70S_{1/2}, \gamma = 2\pi \times 6.067\text{MHz}, C_6 = 2\pi \times 864 \text{GHz}\mu\text{m}^6$$

将参数代入程序中，并设置时间精度为  $10^{-12}s$ ，模拟一维强关联双光子系统的传播过程。

### 3.1.2 一维强关联双光子系统传播过程的可视化模拟

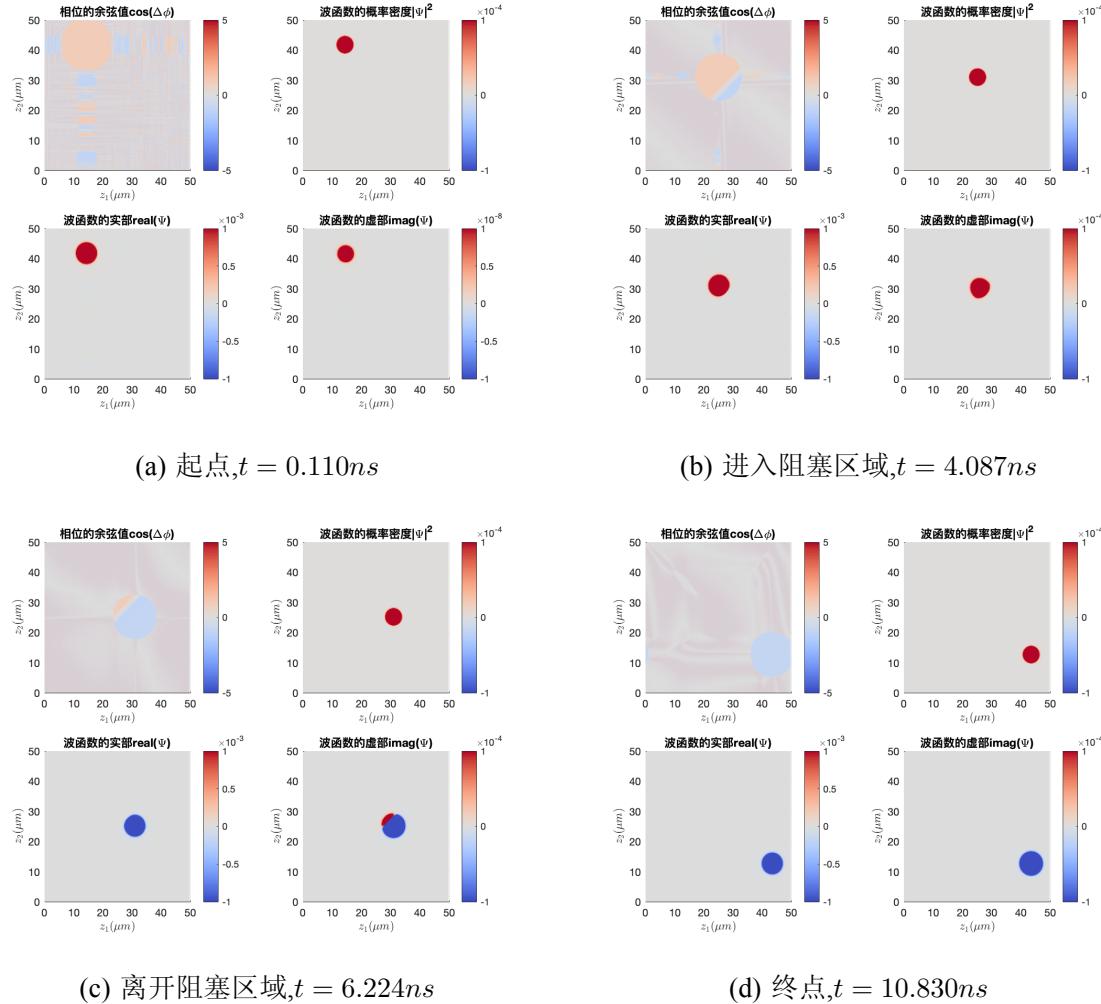


图 3-1 一维强关联双光子系统波函数的概率密度、实部、虚部、相位在传播过程中的可视化

图 3-1 展示了一维强关联双光子系统传播过程中的可视化图像，其中  $z_1$  和  $z_2$  分别代表两个光子的位置。设定光子的初始位置分别为  $z_{10} = 14\mu\text{m}$ ,  $z_{20} = 42\mu\text{m}$ , 群速度分别为  $v_{g1} = -v_{g2} = \frac{1}{2}v_g = c\frac{\Omega^2}{2g^2n}$ , 即两个光子相向而行, 相互作用强度  $g\sqrt{n} = 470\Delta$ , 阻塞半径  $R_b = R_{b0}$ 。

其中  $\cos(\Delta\phi)$  表示光子之间相对相位的余弦值,  $|\Psi|^2$  表示光子波函数的概率密度分布,  $\text{real}(\Psi)$  和  $\text{imag}(\Psi)$  分别表示光子波函数实部和虚部在坐标空间的分布。

高斯波包的半径（即位置的标准差）为  $1\mu\text{m}$ , 在  $50\mu\text{m} \times 50\mu\text{m}$  的网格中难以观察, 所以通过调整颜色栏的取值范围可以扩大高斯波包波函数的可视化范围。双光子系统实时相位的余弦值  $\cos(\Delta\phi)$  的取值范围是  $[-1, 1]$ , 但是由于空间分辨率和时间分辨率有限, 导致其在演化过程中周围会出现一些噪声, 影响可视化的效果, 同样可以通过调整颜色栏的取值范围减弱噪声的影响。

通过图 3-1 可以得到如下结论：

(1) 光子之间实时相位的余弦值  $\cos(\Delta\phi)$  在起点处为红色的圆，即  $\cos(\Delta\phi) \approx 1$ 。因为未进入阻塞区域之前，光子之间的相互作用极其微弱，对光子之间相对相位的改变非常小；在进入阻塞区域的过程中，未进入阻塞区域的部分依然是红色，在阻塞区域内的部分变成了蓝色，这是由于光子之间的非线性相互作用， $\cos(\Delta\phi)$  发生了改变；在离开阻塞区域的过程中，离开阻塞区域的部分变成蓝色，在阻塞区域内的部分依然红色， $\cos(\Delta\phi)$  从正值变成了负值；当光子完全离开阻塞区域时，相位完全变成蓝色的圆。但是仅通过示意图无法精确获得  $\cos(\Delta\phi)$  具体的数值变化，所以之后会通过图 3-2 进行具体的分析。

(2) 双光子波函数的概率密度在传播过程中没有明显的变化，这说明光子之间的非线性相互作用改变的仅仅是光子之间的相对相位，对波函数的振幅以及分布并没有明显的影响。

(3) 双光子波函数的实部在起点处是红色的圆；在进入阻塞区域的过程中，实部与阻塞区域之间有明显的相互挤压，处于阻塞区域外面的部分依然是红色，这是受到相互作用的体现；离开阻塞区域的过程中，离开阻塞区域的部分变成蓝色；完全离开阻塞区域时，实部完全变成蓝色的圆，说明波函数的实部经过相互作用从正值变成了负值。

(4) 双光子波函数的虚部在起点处是红色的圆；在进入阻塞区域的过程中，虚部与阻塞区域之间有明显的相互挤压，处于阻塞区域外面的部分依然是红色，即为正值，处于阻塞区域内部的部分是蓝色，这是受到相互作用的体现；离开阻塞区域的过程中，离开阻塞区域的部分为蓝色；完全离开阻塞区域时，整个虚部变成蓝色的圆，具体的数值分析可以在图 3-2 完成。

### 3.1.3 一维强关联双光子系统实时演化过程中的数值分析

图 3-2 展示了一维强关联双光子系统传播过程中波函数的实部、波函数的虚部，波函数的相位、波函数相位的余弦值随时间演化的数值曲线。结合图 3-1 可以得到如下结论：

(1) 波函数的实部和虚部在阻塞区域外不变，在阻塞区域内以余弦（或正弦）的形式震荡，波函数的虚部比实部落后半个周期，经过阻塞区域后，波函数的实部变号而虚部刚好与进入阻塞区域之前的数值相同。

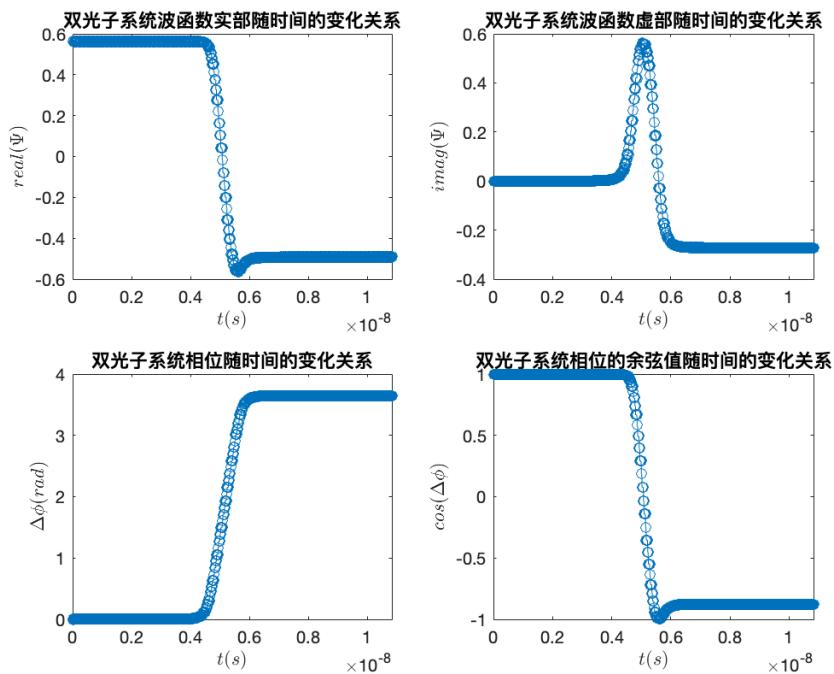


图 3-2 一维强关联双光子系统在传播过程中波函数实部、虚部、相位随时间的变化关系

(2) 波函数的相位在阻塞区域外没有明显变化，当光子进入阻塞区域后，由于光子之间的非线性相互作用，相位开始线性增加，离开阻塞区域后，相位停止变化。

(3) 波函数相位的余弦值  $\cos(\Delta\phi)$  从起点一直到进入阻塞区域之前的一段路程中  $\cos(\Delta\phi) \approx 1$ ，因为未进入阻塞区域之前，光子之间的相互作用及其微弱，对相位的改变非常小；在阻塞区域内部， $\cos(\Delta\phi)$  一共变化了约 0.5 个周期，这对阻塞区域内相位由红色变成蓝色作出很好的解释，因为在变化的 0.5 个周期内  $\cos(\Delta\phi)$  从 1 下降到 -1 因此会从红色过渡到蓝色。

但是光子末态相位的余弦值并不是刚好完成翻转，能否通过调整阻塞半径或者相互作用强度精确操控末态相位的变化呢？

于是，分别通过调整阻塞半径和相互作用强度，将参数调整为  $R_b = R_{b_0}, g\sqrt{n} = 436\Delta$ ，或者  $R_b = 0.86R_{b_0}, g\sqrt{n} = 470\Delta$ ，如图 3-3 和图 3-4 所示都可以使末态相位刚好完成 1 次翻转（即从 0 到  $\pi$ ），这也证明了通过里德堡气体中的光学非线性实现双量子比特门的可行性。

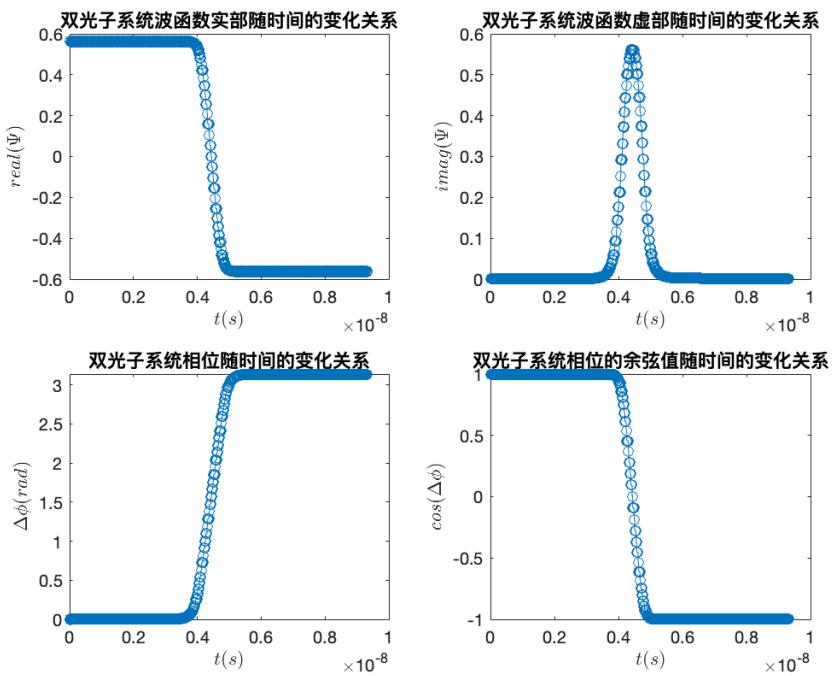


图 3-3  $R_b = R_{b_0}$ ,  $g\sqrt{n} = 436\Delta$ , 一维强关联双光子系统在传播过程中波函数的实部、虚部、相位随时间的变化关系

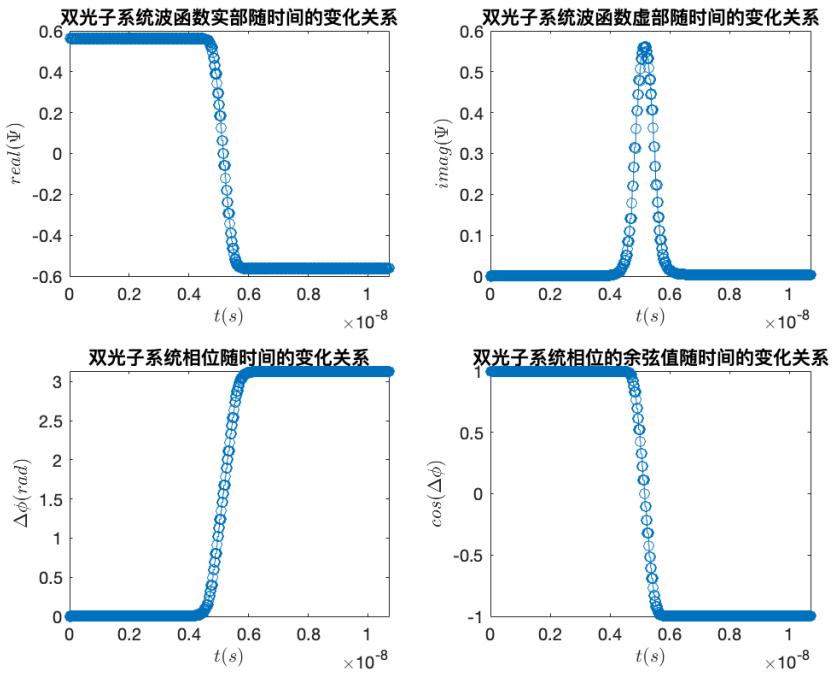
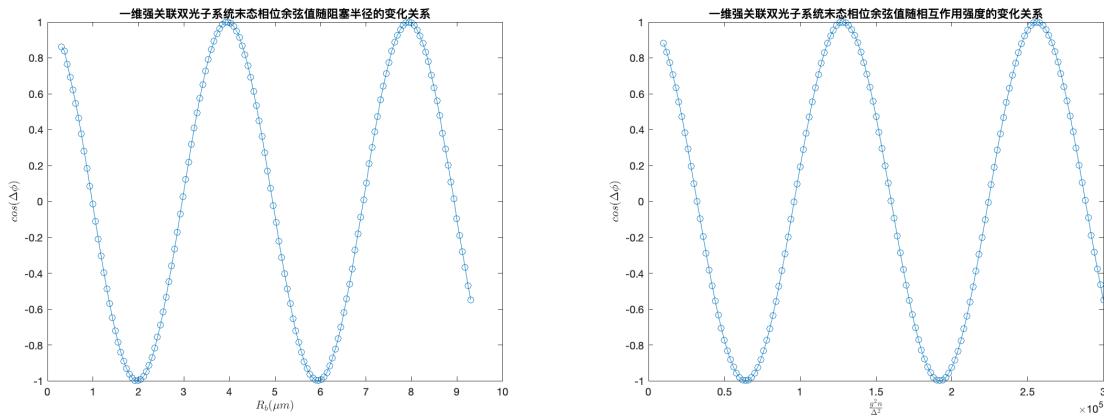


图 3-4  $R_b = 0.86R_{b_0}$ ,  $g\sqrt{n} = 470\Delta$ , 一维强关联双光子系统在传播过程中波函数的实部、虚部、相位随时间的变化关系

### 3.1.4 一维强关联双光子系统末态相位



(a) 末态相位与阻塞半径的关系 (b) 末态相位与相互作用强度的关系

图 3-5 一维强关联双光子系统末态相位与阻塞半径以及相互作用强度的关系

本文关心的问题是光子离开阻塞区域后总的相位变化，即末态相位。比如相位翻转需要获得  $\pi$  的相位改变，因此，如果能通过调控参量改变末态相位的取值，就可以在一定范围内调控末态相位的大小，实现量子比特的门操作。

图 3-5 得到了一维双光子系统末态相位的余弦值和里德堡阻塞半径的关系以及末态相位的余弦值和相互作用强度的关系，发现  $\cos(\Delta\phi)$  与阻塞半径以及相互作用强度均呈周期性变化。

- (1) 首先以里德堡阻塞半径为自变量, 取值范围为  $[0.1R_{b0}, 3R_{b0}]$ , 约等于  $0.3\mu m \sim 9.3\mu m$ , 此时  $g\sqrt{n} = 550\Delta$  是一个常数, 得到  $\cos(\Delta\phi)$  随阻塞半径的增加呈周期性变化;
  - (2) 以相互作用强度  $g^2n$  为自变量, 为了方便表述,  $g\sqrt{n}$  取值范围为  $[100\Delta, 550\Delta]$ , 此时  $R_b = 3R_{b0}$  是一个常数, 得到  $\cos(\Delta\phi)$  随相互作用强度的增加呈周期性变化;
  - (3) 并且如果把阻塞半径和相互作用强度的乘积作为新的变量, 可以得到一条新的曲线, 不难发现图 3-5 中曲线 (a) 和 (b) 刚好能够完美重合。换言之, 只要保证阻塞半径和相互作用强度的乘积保持不变, 末态相位就会相同, 图 3-3 和图 3-4 的结果也体现了这条规律。

其实，在2010年Lukin组已经完成了这项工作。他们的工作如图3-6所示，图3-6的(a)(b)(c)(d)展示了一维强关联双光子系统中，光子在经过阻塞区域前后相位的可视化图像。Lukin也研究了末态相位与阻塞半径 $R_b$ 和相互作用强度 $g\sqrt{n}$ 的关系，并且将阻塞半径和相互作用的乘积作为新的变量，将两张图合二为一得到图3-6(e)。本文到目前为止完成的工作是对他们文章的复现[22]，并且结果符合良好。此外，本文还将在此基础上进行拓展，对一维强关联三光子系统和二维强关联双光子系统进行探究。

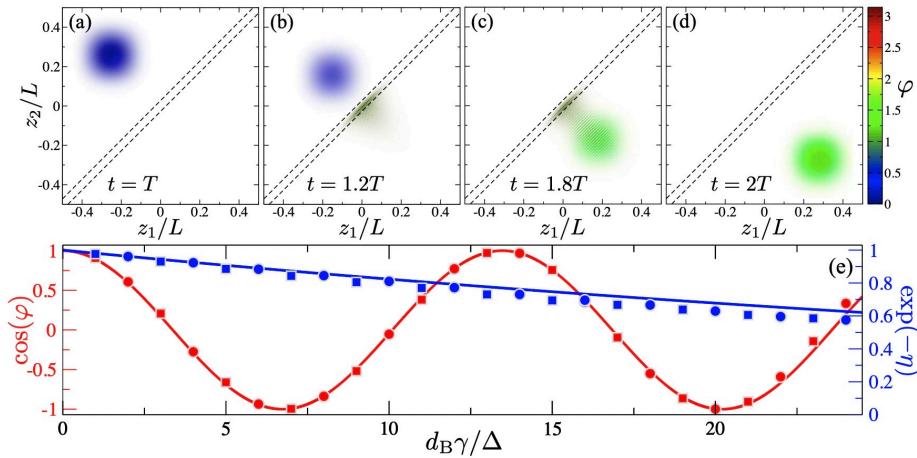


图 3-6 末态相位与阻塞半径以及相互作用强度的关系 [22]

## 3.2 一维强关联三光子系统

### 3.2.1 一维强关联三光子系统算法设计

数值模拟条件：在一维空间中，三个光子分别与里德堡原子气体耦合形成三个里德堡极化子，三个光子的群速度分别为  $v_{g1}$ 、 $v_{g2}$  和  $v_{g3}$ ，光子之间的范德瓦尔斯相互作用分别为  $V_{ex}(z_1 - z_2)$ 、 $V_{ex}(z_1 - z_3)$  和  $V_{ex}(z_2 - z_3)$ 。用  $\psi(z_1, z_2, z_3)$  表示位置为  $z_1$ 、 $z_2$  和  $z_3$  处的三光子系统波函数，量纲分别为  $s$  和  $\mu m$ ，(为了简化符号， $\psi(z_1, z_2, z_3) = \psi(z_1, z_2, z_3, t)$  中的显式时间依赖性在下文中省略)，第二章中描述三光子在里德堡气体中的传播方程为

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \psi(z_1, z_2, z_3) = & -i(v_{g1} \frac{\partial}{\partial z_1} + v_{g2} \frac{\partial}{\partial z_2} + v_{g3} \frac{\partial}{\partial z_3}) \psi(z_1, z_2, z_3) \\ & + (V_{ex}(z_1 - z_2) + V_{ex}(z_2 - z_3) + V_{ex}(z_1 - z_3)) \psi(z_1, z_2, z_3) \end{aligned} \quad (3-8)$$

一维强关联三光子系统与一维强关联双光子系统的演化过程类似，根据量子力学可以得到三光子波函数的演化过程遵循

$$\psi(z_1, z_2, z_3, t + dt) = e^{\frac{-iHdt}{\hbar}} \psi(z_1, z_2, z_3, t) \quad (3-9)$$

对于一维强关联三光子系统，三个光子的坐标在实空间中是三个一维的坐标，但是在希尔伯特空间中可以将三个一维的坐标视为一个三维的坐标，所以可以将三光子系统初态波函数近似视为三维的高斯波包。

$$\psi_{t=0}(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(z_1 - z_{10})^2 + (z_2 - z_{20})^2 + (z_3 - z_{30})^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3-10)$$

其中,  $z_{10}$ 、 $z_{20}$  和  $z_{30}$  分别代表第一个光子、第二个光子和第三个光子的初始位置。一维强关联三光子系统的哈密顿量为

$$H = T + V = v_{g1}\partial_{z_1} + v_{g2}\partial_{z_2} + v_{g3}\partial_{z_3} + V_{ex}(z_1 - z_2) + V_{ex}(z_1 - z_3) + V_{ex}(z_2 - z_3) \quad (3-11)$$

建立一维强关联三光子数值模型的方案为:

- (1) 在 Matlab 中建立  $50\mu m \times 50\mu m \times 50\mu m$  的坐标空间, 并将坐标空间划分为  $256 \times 256 \times 256$  的网格;
- (2) 建立与坐标空间相对应的动量空间 (即  $k$  空间), 同样将动量空间划分为  $256 \times 256 \times 256$  的网格;
- (3) 理想情况下, 波函数的演化过程遵循公式 (3-9)。但是在数值模拟中, 由于空间网格划分精度以及时间精度有限的问题, 可以通过对哈密顿量中的运动项进行拆分并和势能项交换顺序来提升演化的准确性。由于本文研究的是目标光子 (即第一个光子) 相对于另外两个光子的相对相位变化, 所以不需要考虑第二个光子和第三个光子之间的相互作用  $V_{ex}(z_2 - z_3)$ , 则新的哈密顿量表达式为

$$H = T_1 + T_2 + T_3 + V + T_3 + T_2 + T_1 \quad (3-12)$$

$$H = \frac{v_{g1}\partial_{z_1}}{2} + \frac{v_{g2}\partial_{z_2}}{2} + \frac{v_{g3}\partial_{z_3}}{2} + V_{ex}(z_1 - z_2) + V_{ex}(z_1 - z_3) + \frac{v_{g3}\partial_{z_3}}{2} + \frac{v_{g2}\partial_{z_2}}{2} + \frac{v_{g1}\partial_{z_1}}{2} \quad (3-13)$$

算符作用到波函数上要严格遵循 (3-13) 式中的顺序才可以保证演化的精度, 所以在数值模拟中, 波函数演化的公式为

$$\begin{aligned} & \psi(z_1, z_2, t + dt) \\ &= e^{\frac{-iHdt}{\hbar}} \psi(z_1, z_2, t) \\ &= e^{\frac{-iT_1dt}{\hbar}} e^{\frac{-iT_2dt}{\hbar}} e^{\frac{-iT_3dt}{\hbar}} e^{\frac{-iV_{ex}(z_1-z_3)dt}{\hbar}} e^{\frac{-iV_{ex}(z_1-z_3)dt}{\hbar}} e^{\frac{-iT_3dt}{\hbar}} e^{\frac{-iT_2dt}{\hbar}} e^{\frac{-iT_1dt}{\hbar}} \psi(z_1, z_2, t) \end{aligned} \quad (3-14)$$

在数值模拟中使用铷里德堡原子的参数, 具体取值如下所示:

$$\Delta = 20\gamma, \Omega = 2\Delta, g\sqrt{n} = 100\Delta \sim 550\Delta$$

$$|r\rangle = 70S_{1/2}, \gamma = 2\pi \times 6.067\text{MHz}, C_6 = 2\pi \times 864 \text{GHz}\mu\text{m}^6$$

将参数代入程序中, 并设置时间精度为  $10^{-12}s$ , 模拟一维强关联三光子系统的传播过程。

### 3.2.2 一维强关联三光子系统传播过程的可视化模拟

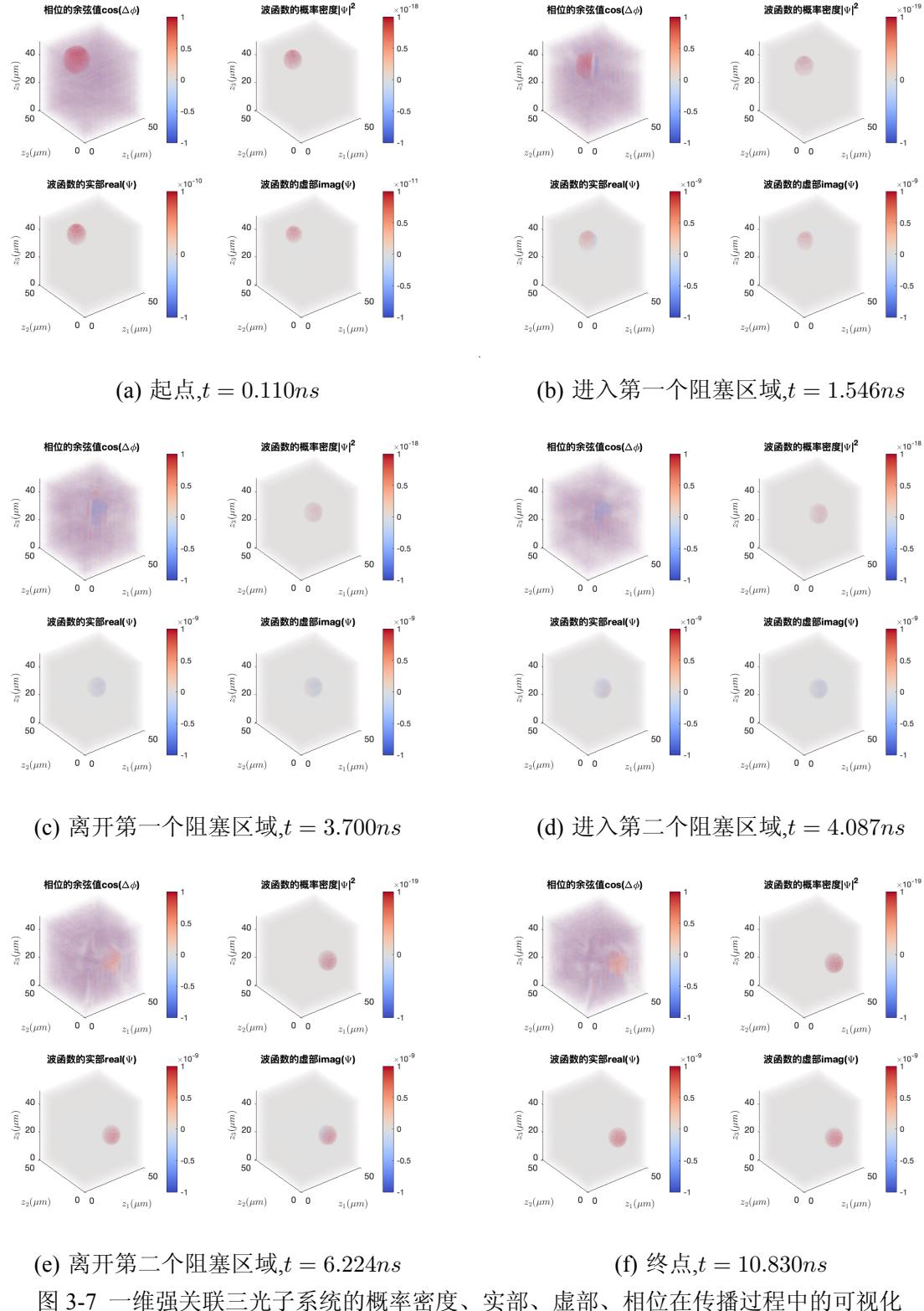


图 3-7 一维强关联三光子系统的概率密度、实部、虚部、相位在传播过程中的可视化

图 3-7 展示了一维强关联三光子系统传播过程中的可视化图像，其中  $z_1$ 、 $z_2$  和  $z_3$  分别代表三个光子的位置。设定光子的初始位置分别为  $z_{10} = 14\mu m$ ,  $z_{20} = 28\mu m$ ,  $z_{30} = 42\mu m$  群速度分别为  $v_{g1} = -v_{g2} = -v_{g3} = \frac{1}{2}v_g = c\frac{\Omega^2}{2g^2n}$ , 即第一个光子与另外两个光子相向而行, 相互作用强度  $g\sqrt{n} = 470\Delta$ , 阻塞半径  $R_b = R_{b0}$ 。

其中  $\cos(\Delta\phi)$  表示目标光子（即第一个光子）与另外两个光子之间相对相位的余弦值,  $|\Psi|^2$  表示光子波函数的概率密度分布,  $real(\Psi)$  和  $imag(\Psi)$  分别表示光子波函数实部和虚部在坐标空间的分布。

高斯波包的半径（即位置的标准差）为  $1\mu m$ , 在  $50\mu m \times 50\mu m \times 50\mu m$  的网格中难以观察, 所以通过调整颜色栏的取值范围可以扩大高斯波包波函数的可视化范围。

通过图 3-7 可以得到如下结论：

(1) 实时相位的余弦值  $\cos(\Delta\phi)$  在起点处为红色的球, 即  $\cos(\Delta\phi) \approx 1$ 。因为未进入阻塞区域之前, 光子之间的相互作用极其微弱, 对光子之间相对相位的改变非常小; 通过第一个阻塞区域后, 相位从红色的球变成了蓝色的球, 即  $\cos(\Delta\phi)$  从正值变成了负值; 通过第二个阻塞区域后, 相位又从蓝色变回红色的球, 即  $\cos(\Delta\phi)$  从负值重新变回正值。但是仅通过示意图无法精确获得  $\cos(\Delta\phi)$  具体的数值变化, 并且由于相位周围的噪声很难完全清除, 所以之后会通过图 3-8 和 3-9 进行具体的分析。

(2) 一维三光子波函数的概率密度在传播过程中没有明显的变化, 这说明光子之间的非线性相互作用改变的仅仅是光子之间的相对相位, 对波函数的振幅以及分布并没有明显的影响。

(3) 一维三光子波函数的实部在起点处是红色的球; 在进入第一个阻塞区域的过程中, 实部与阻塞区域之间有明显的相互挤压, 完全离开第一个阻塞区域时, 实部完全变成蓝色的球, 说明波函数的实部经过相互作用从正值变成了负值; 经过第二个阻塞区域之后, 波函数的实部又变回了正值。

(4) 一维三光子波函数的虚部在起点处是红色的球, 经过第一个阻塞区域后, 颜色没有改变, 与双光子系统的结果一致, 经过第二个阻塞区域后, 虚部变为负值, 具体的数值分析可以在图 3-9 完成。

### 3.2.3 一维强关联三光子系统传播过程中相位的多角度可视化

受到噪声的影响, 在图 3-7 中只能观测到相位在阻塞区域外部的情况, 通过图 3-8 可以从多角度观察相位余弦值的变化, 减小周围噪声对观测的影响。图 3-8 中图 (b) 和图 (c) 中的俯视图展示了光子进出第一个阻塞区域的图像, 可以清晰地观测到阻塞区域内部的红色与蓝色渐变的分界线。图 3-8 中图 (d) 和图 (e) 中的正视图展示了光子进出第二个阻塞区域的图像, 同样可以观测到阻塞区域内部光子的相位由蓝色变为红色的过程。

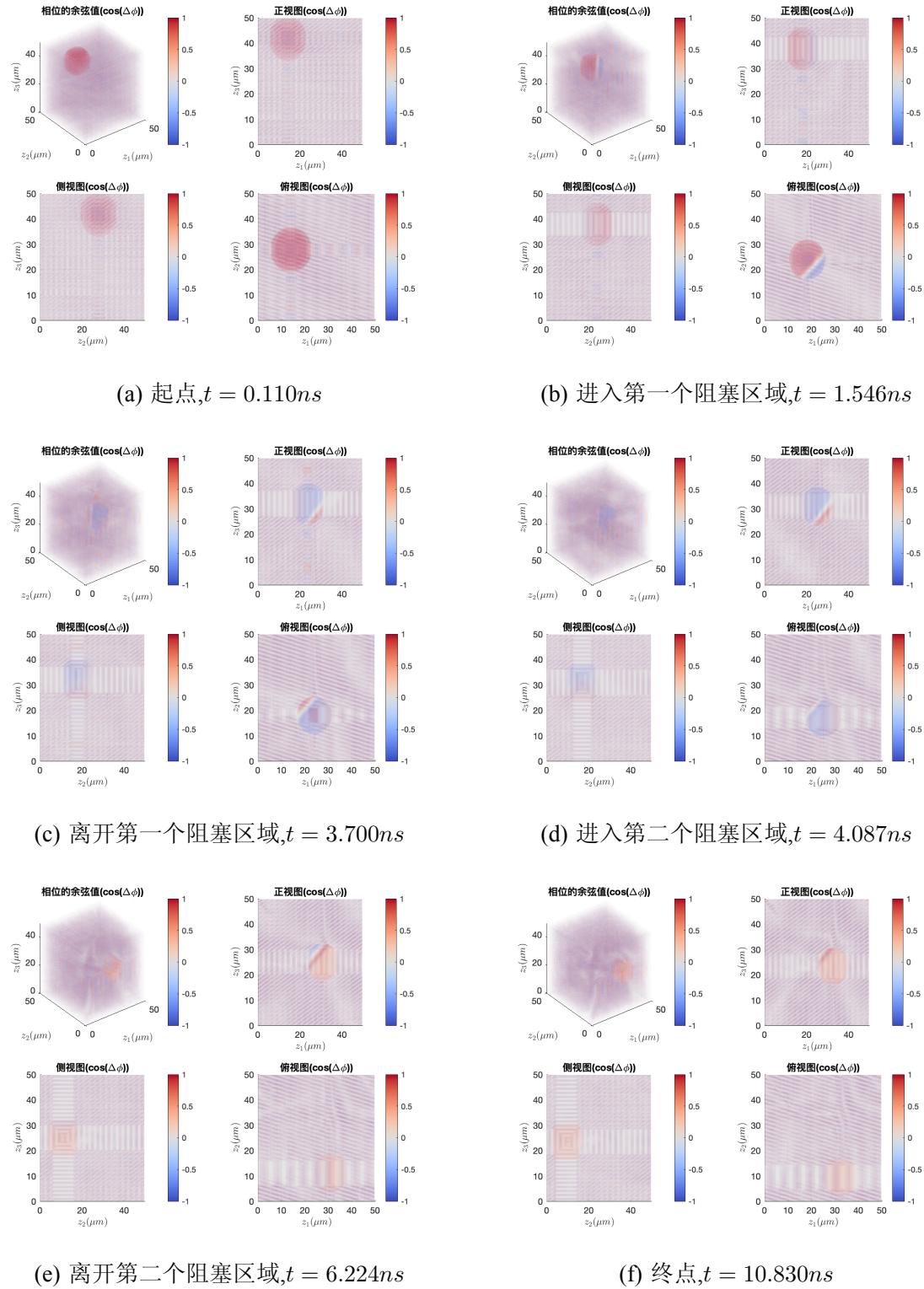


图 3-8 一维强关联三光子系统在传播过程中相位的多角度可视化

### 3.2.4 一维强关联三光子系统实时演化过程的数值分析

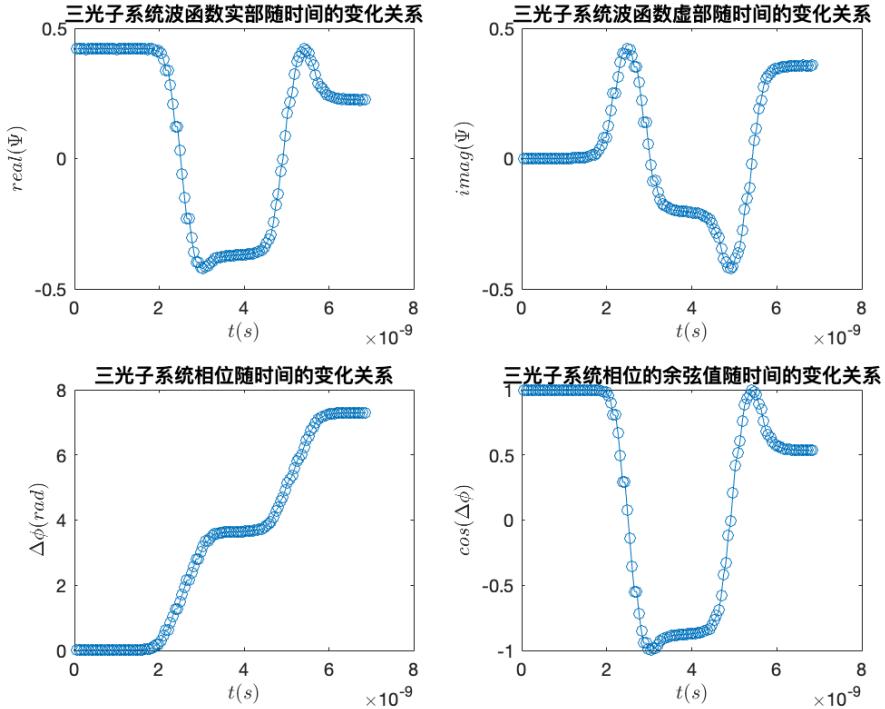


图 3-9  $R_b = R_{b_0}, g\sqrt{n} = 470\Delta$ , 一维强关联三光子系统在传播过程中波函数的实部、虚部、相位随时间的变化关系

图 3-9 展示了一维三光子系统波函数实部、虚部、相位随时间变化的曲线。MATLAB 中相位默认的变化范围是  $[-\pi, \pi]$ , 因此相位在增加到  $\pi$  时会产生突变, 从  $\pi$  直接下降到  $-\pi$ , 为了使相位在阻塞区域内的变化曲线连续且直观, 我们使用 MATLAB 中的 `unwrap()` 函数对原本分段的相位曲线做了连续化的数学处理, 并且后续所有的相位曲线也同样做了连续化处理。图 (c) 清晰地展示了光子在经过两个阻塞区域的过程中相位“阶梯式”增加的过程, 图 (d) 展示了相位的余弦值的两次翻转过程。当三个光子完全相同的时候, 相比于相同参数下的一维双光子系统, 一维三光子系统可以获得两倍的末态相位。但是光子末态相位的余弦值并不是刚好完成翻转, 那么对于一维三光子系统, 是否也能通过调整阻塞半径或者相互作用强度精确操控末态相位的变化呢?

于是, 如图 3-10 和图 3-11 所示, 分别通过调整阻塞半径和相互作用强度, 将参数调整为  $R_b = R_{b_0}, g\sqrt{n} = 436\Delta$ , 或者  $R_b = 0.86R_{b_0}, g\sqrt{n} = 470\Delta$ , 都可以使相位的余弦值刚好完成两次翻转。

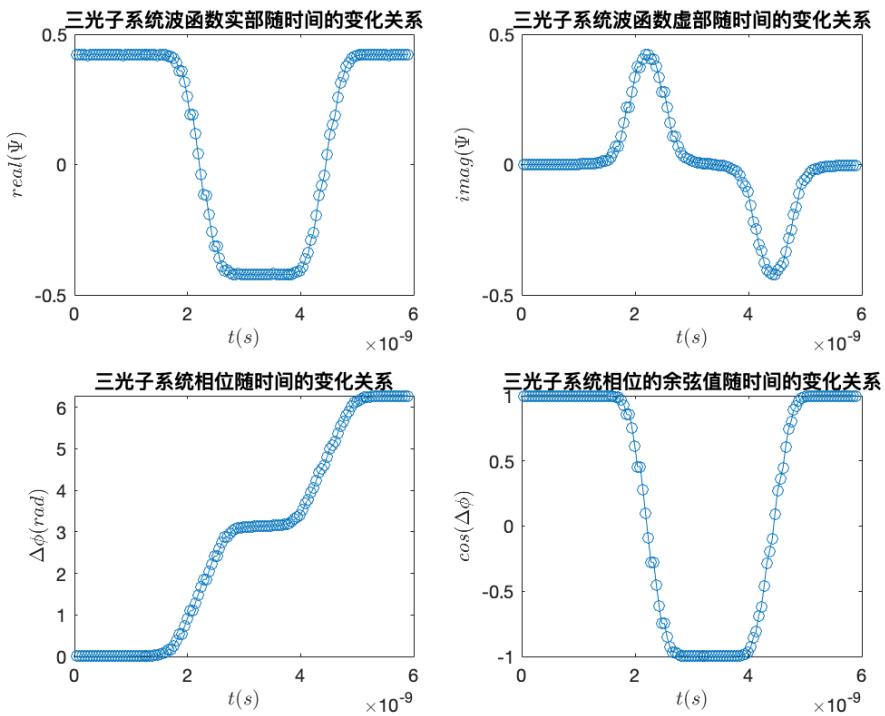


图 3-10  $R_b = R_{b_0}$ ,  $g\sqrt{n} = 436\Delta$ , 一维强关联三光子系统在传播过程中波函数的实部、虚部、相位随时间的变化关系

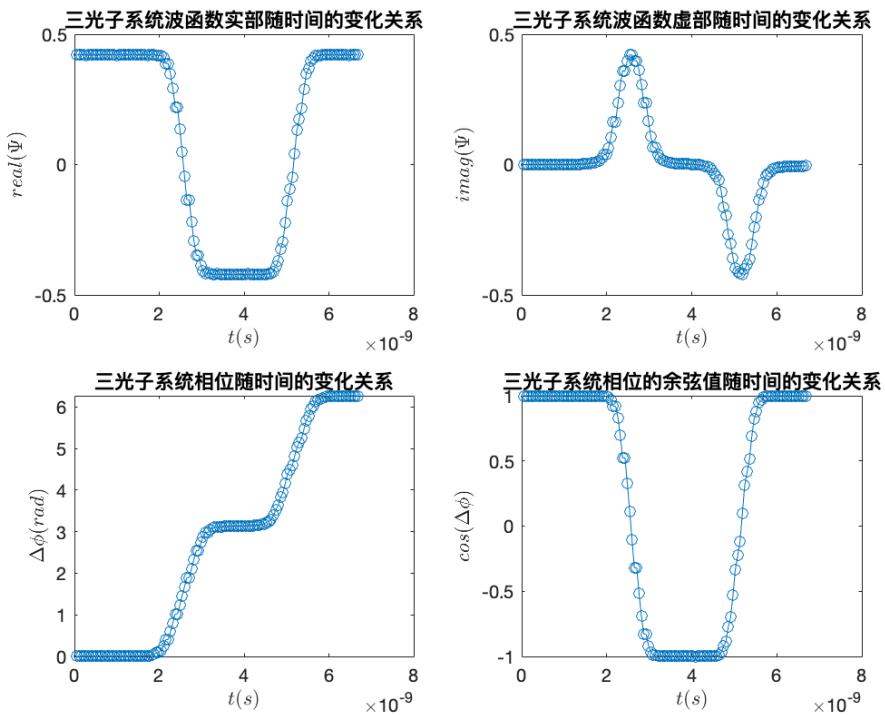


图 3-11  $R_b = 0.86R_{b_0}$ ,  $g\sqrt{n} = 470\Delta$ , 一维强关联三光子系统在传播过程中波函数的实部、虚部、相位随时间的变化关系

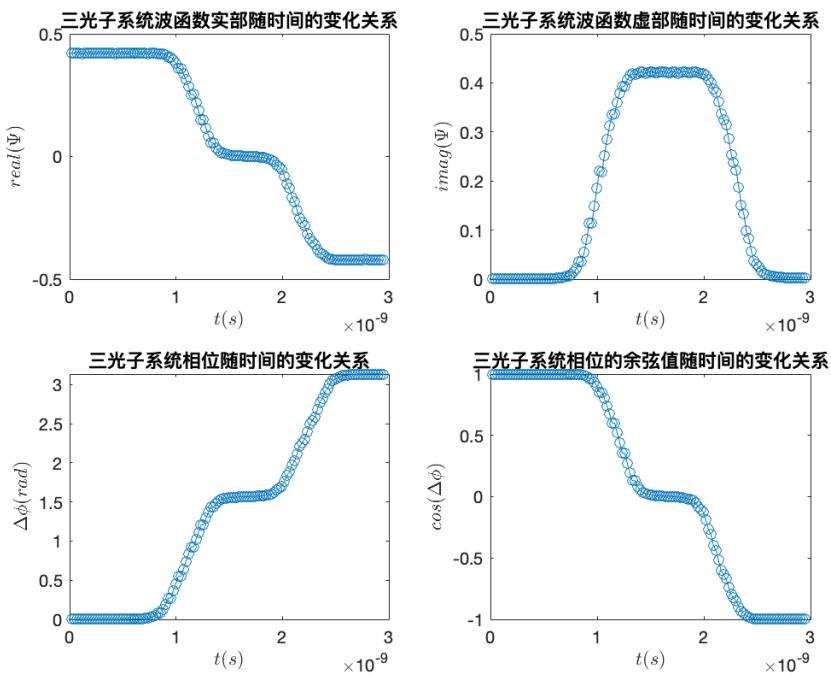


图 3-12  $R_b = R_{b_0}$ ,  $g\sqrt{n} = 308\Delta$ , 一维强关联三光子系统在传播过程中波函数的实部、虚部、相位随时间的变化关系

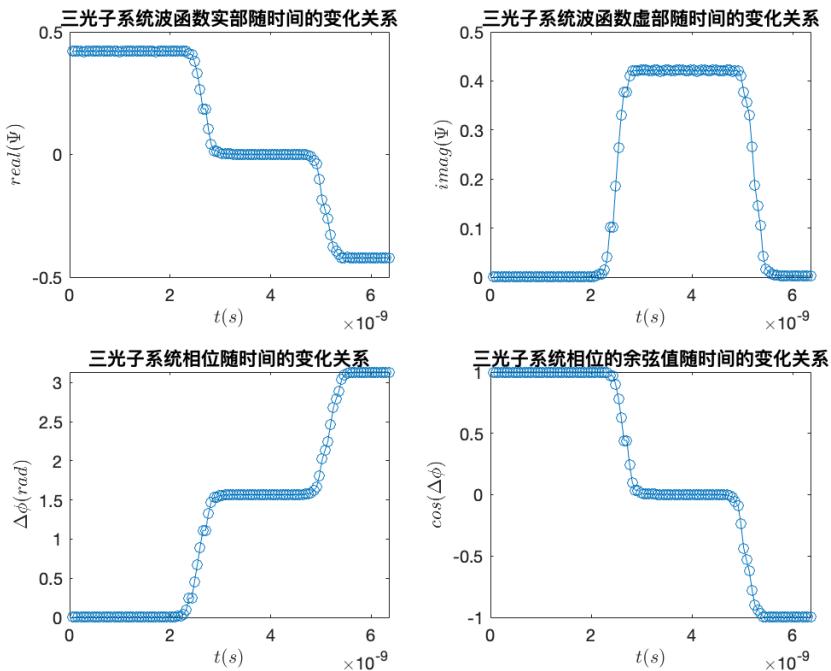


图 3-13  $R_b = 0.43R_{b_0}$ ,  $g\sqrt{n} = 470\Delta$ , 一维强关联三光子系统在传播过程中波函数的实部、虚部、相位随时间的变化关系

如果需要末态相位的余弦值刚好翻转一次, 可以将参数进一步调整为  $R_b = R_{b_0}$ ,  $g\sqrt{n} = 308\Delta$  或  $R_b = 0.43R_{b_0}$ ,  $g\sqrt{n} = 470\Delta$ , 即图 3-12 和图 3-13 所

展示的结果，可以使末态相位的余弦值刚好发生一次翻转，这也证明了通过里德堡气体中的光学非线性实现双量子比特门的可行性。通过图 3-12 和图 3-13 可以发现只要保证阻塞半径和相互作用强度的乘积保持不变，末态相位就会一致，这与一维双光子系统发现的规律相同。

### 3.2.5 一维强关联三光子系统末态相位

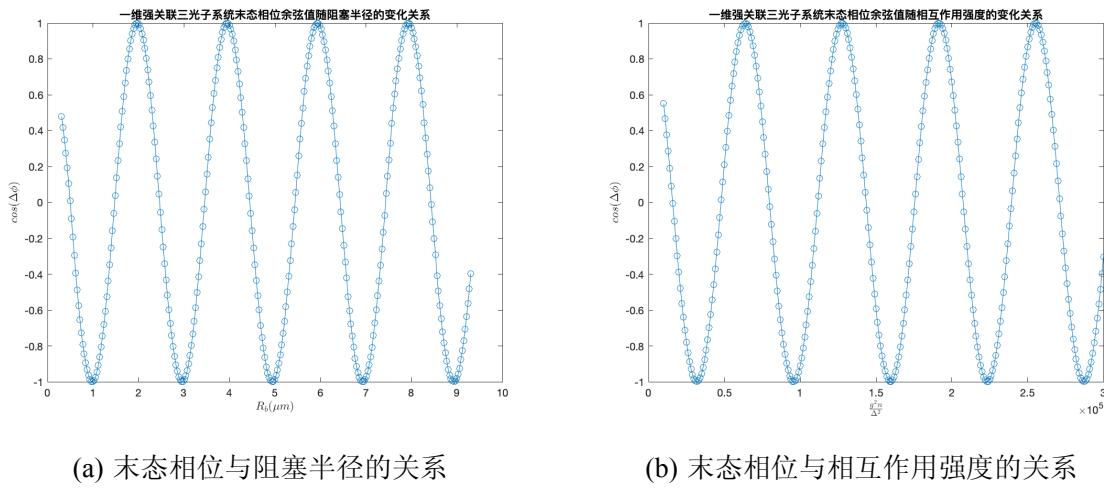


图 3-14 一维强关联三光子系统的末态相位的余弦值与阻塞半径以及相互作用强度的关系

图 3-14 展示了当三个光子的阻塞半径以及相互作用强度完全相同的时候，一维三光子系统末态相位的余弦值和里德堡阻塞半径的关系以及末态相位的余弦值和相互作用强度的关系，发现  $\cos(\Delta\phi)$  与阻塞半径以及相互作用强度均呈周期性变化关系。

- (1) 首先以里德堡阻塞半径为自变量，取值范围为  $[0.1R_{b0}, 3R_{b0}]$ ，约等于  $0.3\mu m \sim 9.3\mu m$ ，此时  $g\sqrt{n} = 550\Delta$  是一个常数，得到  $\cos(\Delta\phi)$  随阻塞半径的增加呈周期性变化；
- (2) 以相互作用强度  $g^2n$  为自变量，为了方便表述， $g\sqrt{n}$  取值范围为  $[100\Delta, 550\Delta]$ ，此时  $R_b = 3R_{b0}$  是一个常数，得到  $\cos(\Delta\phi)$  随相互作用强度的增加呈周期性变化；
- (3) 并且如果把阻塞半径和相互作用强度的乘积作为新的变量，可以得到一条新的曲线，只要保证相互作用强度和阻塞半径的乘积不变，就可以得到相同的末态相位，即图 3-14 中图 (a) 和图 (b) 可以完美重合；
- (4) 三光子系统相位变化的角速度是相同参数下的双光子系统的两倍，这一点与图 3-9 的结论相互印证。

### 3.2.6 一维强关联三光子系统调控两个阻塞区域参数不同

在一维三光子系统中，通过调控两个阻塞区域内部的参数取值不同，也可以实现相位的灵活调控。

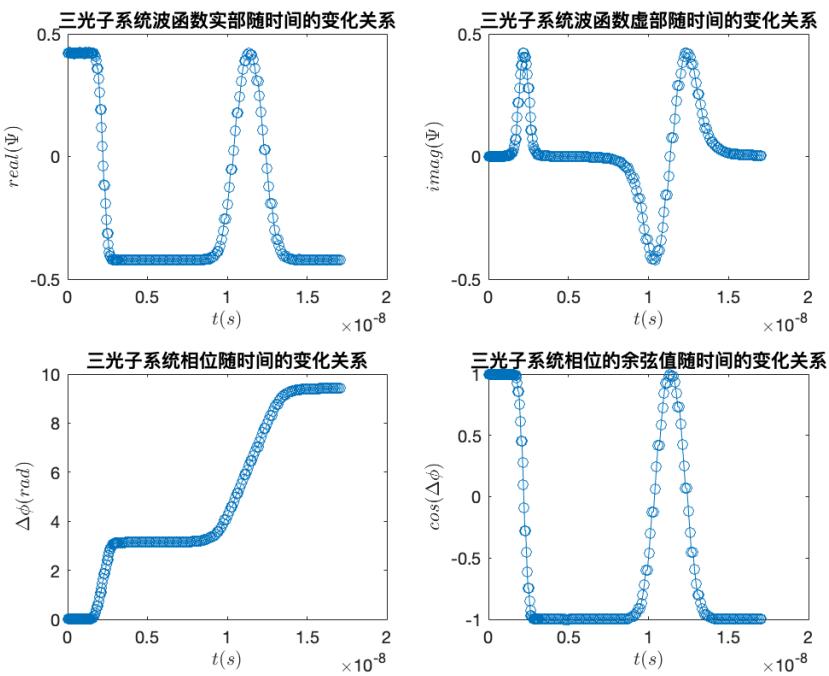


图 3-15 第一个阻塞区域的  $R_b = R_{b_0}, g\sqrt{n} = 436\Delta$ , 第二个阻塞区域的  $R_b = R_{b_0}, g\sqrt{n} = 617\Delta$ , 一维强关联三光子系统在传播过程中波函数的实部、虚部、相位随时间的变化关系

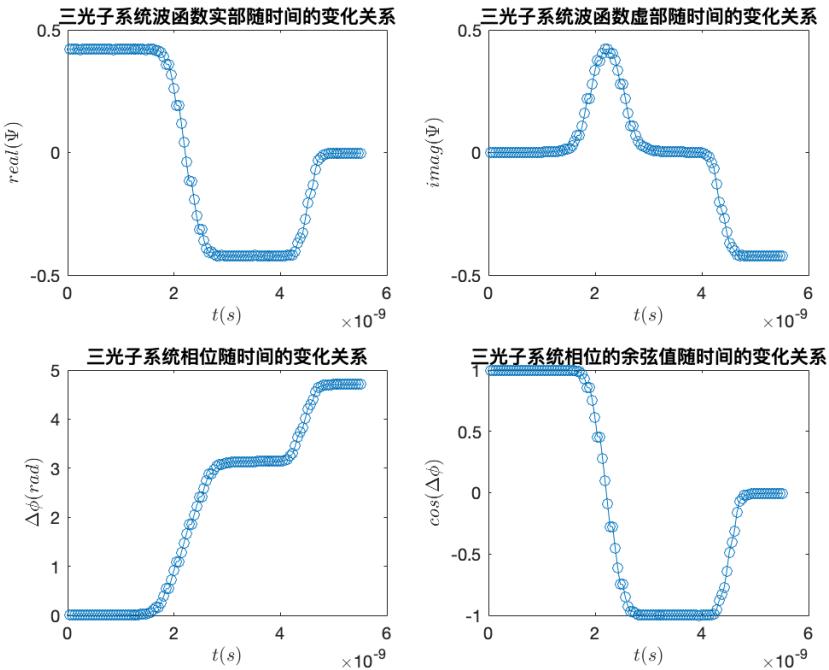


图 3-16 第一个阻塞区域的  $R_b = R_{b_0}, g\sqrt{n} = 436\Delta$ , 第二个阻塞区域的  $R_b = 0.5R_{b_0}, g\sqrt{n} = 436\Delta$ , 一维强关联三光子系统在传播过程中波函数的实部、虚部、相位随时间的变化关系

如图 3-15 所示, 通过调控两个阻塞区域内的相互作用强度不同, 可以获得不同的相位改变。光子在经过第一个阻塞区域时,  $R_b = R_{b_0}, g\sqrt{n} = 436\Delta$ , 与图 3-10 形成对

照，光子在经过第二个阻塞区域时，调控相互作用强度  $g^2 n$  为第一个阻塞区域的两倍，即  $R_b = R_{b_0}, g\sqrt{n} = 617\Delta$ ，则光子在第二个阻塞区域获得的相位变化恰好是在第一个阻塞区域获得的相位变化的两倍。

如图 3-16 所示，通过调控两个阻塞区域的阻塞半径不同，可以获得不同的相位改变。光子在经过第一个阻塞区域时， $R_b = R_{b_0}, g\sqrt{n} = 436\Delta$ ，与图 3-10 形成对照，光子在经过第二个阻塞区域时，调控阻塞半径  $R_b$  为第一个阻塞区域的一半，即  $R_b = 0.5R_{b_0}, g\sqrt{n} = 436\Delta$ ，则光子在第二个阻塞区域获得的相位变化恰好是在第一个阻塞区域获得的相位变化的一半。

结合图 3-15 和图 3-16，在一维强关联三光子系统中，通过调控两个阻塞区域的阻塞半径或者相互作用强度不同，可以让光子在两个阻塞区域内获得不同的相位改变，通过这种方式可以灵活调控相位。量子计算最终需要一个集成式的系统，在这个系统中存在多个量子比特，即多光子系统，那么三光子系统的数值模拟将为多光子系统提供有价值的参考。同时，集成式的系统需要在二维空间中才能实现，因此，接下来将通过二维强关联双光子系统的数值模拟对二维多光子系统进行初步探索。

### 3.3 二维强关联双光子系统

#### 3.3.1 二维强关联双光子系统算法设计

**数值模拟条件：**在二维空间中，两个光子分别与里德堡原子气体耦合形成里德堡极化子，两个光子的沿  $x$  方向和  $y$  方向的群速度分别为  $v_{g_{x_1}}, v_{g_{x_2}}, v_{g_{y_1}}, v_{g_{y_2}}$ ，光子之间的范德瓦尔斯相互作用为  $V_{ex}(x_1, y_2, x_2, y_2)$ ，用  $\psi(x_1, y_1, x_2, y_2)$  表示位置为  $(x_1, y_1)$  和  $(x_2, y_2)$  处的双光子波函数，量纲分别为  $s$  和  $\mu m$ ，(为了简化符号， $\psi(x_1, y_1, x_2, y_2) = \psi(x_1, y_1, x_2, y_2, t)$  中的显式时间依赖性在下文中省略)，第二章中描述二维双光子在里德堡气体中的传播方程为

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x_1, y_1, x_2, y_2) &= -i(v_{g_{x_1}} \frac{\partial}{\partial x_1} + v_{g_{y_1}} \frac{\partial}{\partial y_1} + v_{g_{x_2}} \frac{\partial}{\partial x_2} + v_{g_{y_2}} \frac{\partial}{\partial y_2}) \psi(x_1, y_1, x_2, y_2) \\ &\quad + V_{ex}(x_1, y_2, x_2, y_2) \psi(x_1, y_1, x_2, y_2) \end{aligned} \quad (3-15)$$

两个光子在二维平面运动，群速度分别为

$$\mathbf{v}_{g1} = (v_{g_{x_1}}, v_{g_{y_1}}); \mathbf{v}_{g2} = (v_{g_{x_2}}, v_{g_{y_2}}) \quad (3-16)$$

$$\sqrt{v_{g_{x_1}}^2 + v_{g_{y_1}}^2} = \sqrt{v_{g_{x_2}}^2 + v_{g_{y_2}}^2} = \frac{1}{2}v_g = c\frac{\Omega^2}{2g^2n} \quad (3-17)$$

势能的表达式为

$$V_{ex}(x_1, y_2, x_2, y_2) = \frac{\Omega^2}{i\gamma + \Delta} \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}}{R_b}\right)^6} \quad (3-18)$$

二维强关联双光子系统与一维强关联双光子系统的演化过程类似，根据量子力学可以得到双光子波函数的演化过程遵循

$$\psi(x_1, y_1, x_2, y_2, t + dt) = e^{\frac{-iHdt}{\hbar}} \psi(x_1, y_1, x_2, y_2, t) \quad (3-19)$$

对于二维强关联双光子系统，两个光子的坐标在实空间中是两个二维的坐标，但是在希尔伯特空间中可以将两个二维的坐标视为一个四维的坐标，所以可以将二维双光子系统初态波函数近似视为四维的高斯波包。

$$\psi_{t=0}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^2} \exp\left(-\frac{(x_1 - x_{10})^2 + (y_1 - y_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 + (y_2 - y_{20})^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3-20)$$

其中， $(x_{10}, y_{10})$  和  $(x_{20}, y_{20})$  分别代表第一个光子和第二个光子的初始位置。二维强关联双光子系统的哈密顿量为

$$H = T + V = v_{g_{x_1}} \partial_{x_1} + v_{g_{y_1}} \partial_{y_1} + v_{g_{x_2}} \partial_{x_2} + v_{g_{y_2}} \partial_{y_2} + V_{ex}(z_1 - z_2) + V_{ex}(x_1, y_2, x_2, y_2) \quad (3-21)$$

建立二维强关联双光子数值模型的方案为：

(1) 在 Matlab 中建立  $10\mu m \times 10\mu m \times 10\mu m \times 10\mu m$  的坐标空间，并将坐标空间划分为  $64 \times 64 \times 64 \times 64$  的网格；

(2) 建立与坐标空间相对应的动量空间（即  $k$  空间），同样将动量空间划分为  $64 \times 64 \times 64 \times 64$  的网格；

(3) 理想情况下，波函数的演化过程遵循公式 (3-19)。但是在数值模拟中，由于空间网格划分精度以及时间精度有限的问题，通过对哈密顿量中的运动项进行拆分并和势能项交换顺序来提升演化的准确性，则新的哈密顿量表达式为

$$H = T_{x_1} + T_{y_1} + T_{x_2} + T_{y_2} + V + T_{y_2} + T_{x_2} + T_{y_1} + T_{x_1} \quad (3-22)$$

哈密顿量的具体表达式可以表示为

$$\begin{aligned} H = & \frac{v_{g_{x_1}} \partial_{x_1}}{2} + \frac{v_{g_{y_1}} \partial_{y_1}}{2} + \frac{v_{g_{x_2}} \partial_{x_2}}{2} + \frac{v_{g_{y_2}} \partial_{y_2}}{2} \\ & + V_{ex}(x_1, x_2, y_1, y_2) + \frac{v_{g_{x_2}} \partial_{x_2}}{2} + \frac{v_{g_{y_2}} \partial_{y_2}}{2} + \frac{v_{g_{y_1}} \partial_{y_1}}{2} + \frac{v_{g_{x_1}} \partial_{x_1}}{2} \end{aligned} \quad (3-23)$$

算符作用到波函数上要严格遵循 (3-23) 式中的顺序才可以保证演化的精度，所以在数值模拟中，波函数演化的公式为

$$\begin{aligned} & \psi(x_1, y_1, x_2, y_2, t + dt) \\ &= e^{\frac{-iHdt}{\hbar}} \psi(x_1, y_1, x_2, y_2, t) \\ &= e^{\frac{-iT_{x_1}dt}{\hbar}} e^{\frac{-iT_{y_1}dt}{\hbar}} e^{\frac{-iT_{x_2}dt}{\hbar}} e^{\frac{-iT_{y_2}dt}{\hbar}} e^{\frac{-iV_{ex}(x_1, y_1, x_2, y_2)dt}{\hbar}} \\ & \quad e^{\frac{-iT_{y_2}dt}{\hbar}} e^{\frac{-iT_{x_2}dt}{\hbar}} e^{\frac{-iT_{y_1}dt}{\hbar}} e^{\frac{-iT_{x_1}dt}{\hbar}} \psi(x_1, y_1, x_2, y_2, t) \end{aligned} \quad (3-24)$$

在数值模拟中使用铷里德堡原子的参数，具体取值如下所示：

$$\Delta = 20\gamma, \Omega = 2\Delta, g\sqrt{n} = 700\Delta$$

$$|r\rangle = 70S_{1/2}, \gamma = 2\pi \times 6.067\text{MHz}, C_6 = 2\pi \times 864 \text{ GHz}\mu\text{m}^6$$

将参数代入程序中，并设置时间精度为  $10^{-12}s$ ，模拟二维强关联双光子系统的传播过程。

对于二维强关联双光子系统的动力学模拟，主要有两个困难点。

(1) 每个光子都需要两个维度, 总共需要四个维度来描述这个系统, 如果将坐标空间划分为  $(2^8)^4$  的网格, 对内存的占用率很大, 需要使用内存更大的服务器进行计算, 也可以通过缩小空间总范围在不增加内存占用的条件下提升空间分辨率。本文使用的方法就是通过缩小空间的总范围来确保获得较高的空间分辨率。

(2) 二维强关联双光子系统的波函数是一个四维标量场, 所以很难展示出实时演化的图像, 但是这并不影响计算出不同时刻的波函数, 因此可以获得实时相位的图像。

对于二维强关联双光子系统, 如果两个光子的中心仍然在同一条直线上运动, 那么和一维双光子系统相位的变化不会有区别。因此在二维强关联双光子系统中将不再重复讨论阻塞半径和相互作用强度对相位变化的影响。如果两个光子在两条平行线上运动, 两条平行线之间的距离为  $d$ , 并且两条平行线之间的距离小于  $2R_b$ , 那么就可以通过调整平行线之间的距离来控制两个光子阻塞体积重叠的大小, 从而控制相位的改变量。

### 3.3.2 二维强关联双光子系统实时演化过程的数值分析

图 3-17 展示了二维强关联双光子系统传播过程中波函数的实部、波函数的虚部, 波函数的相位、波函数相位的余弦值随时间演化的数值曲线。其中 (a)(b)(c)(d)(e)(f) 分别表示  $d = 0, 1, 2, 3, 4, 5\mu m$  时的实时演化曲线。通过对比可以得到如下结论: 两个光子运动路径之间的距离  $d$  越大, 则末态相位的改变量越小。这是由于两个光子相遇时阻塞区域的重叠体积随着  $d$  的增加而缩小, 则相应的相互作用时间也会缩短, 因此光子之间的相对相位的变化量减小。

这是否意味着可以在一定范围内自由调控相位的改变呢? 比如在一维强关联双光子系统中, 末态相位改变  $2\pi$ , 那么在二维强关联双光子系统中, 就可以通过调整光子运动路径之间的距离  $d$  获得从  $[0, 2\pi]$  这个范围内任意一个相位改变。

为了进一步探究光子运动路径之间的距离对末态相位的影响, 将  $d$  设置为自变量, 并以  $0.1\mu m$  为步长, 取值范围为  $[0\mu m, 7\mu m]$ , 探究二维强关联双光子系统末态相位与两个光子运动路径之间的距离  $d$  的数值关系。

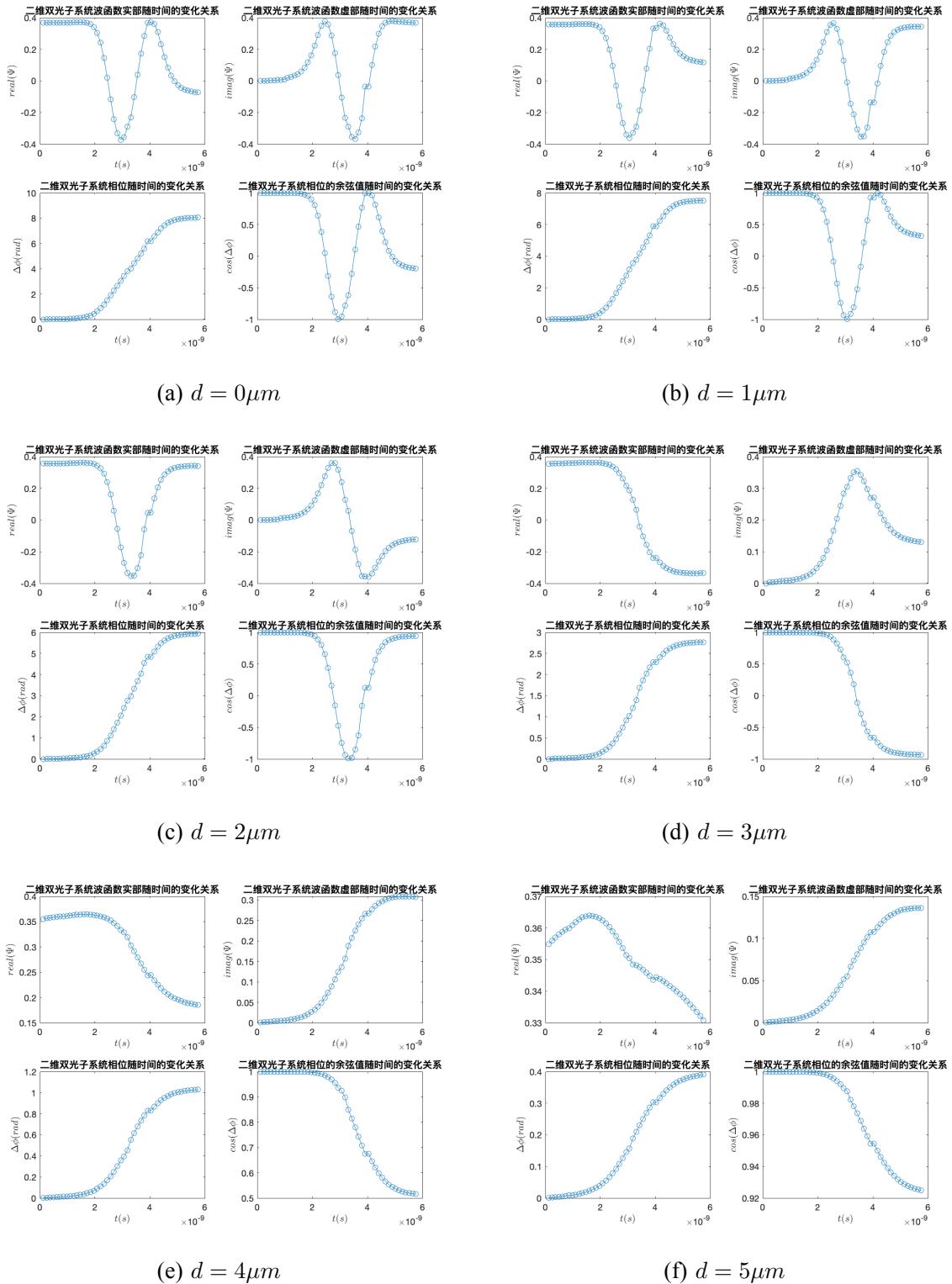


图 3-17 二维强关联双光子系统在传播过程波函数的实部、虚部、相位随时间的变化关系，两个光子运动路径为两条平行的直线，平行线之间的距离为  $d$ ,  $R_b = R_{b0}$ ,  $g\sqrt{n} = 700\Delta$ , 图中展示了  $d = 0, 1, 2, 3, 4, 5(\mu m)$  时，波函数的实部、虚部、相位演化曲线

### 3.3.3 二维强关联双光子系统末态相位

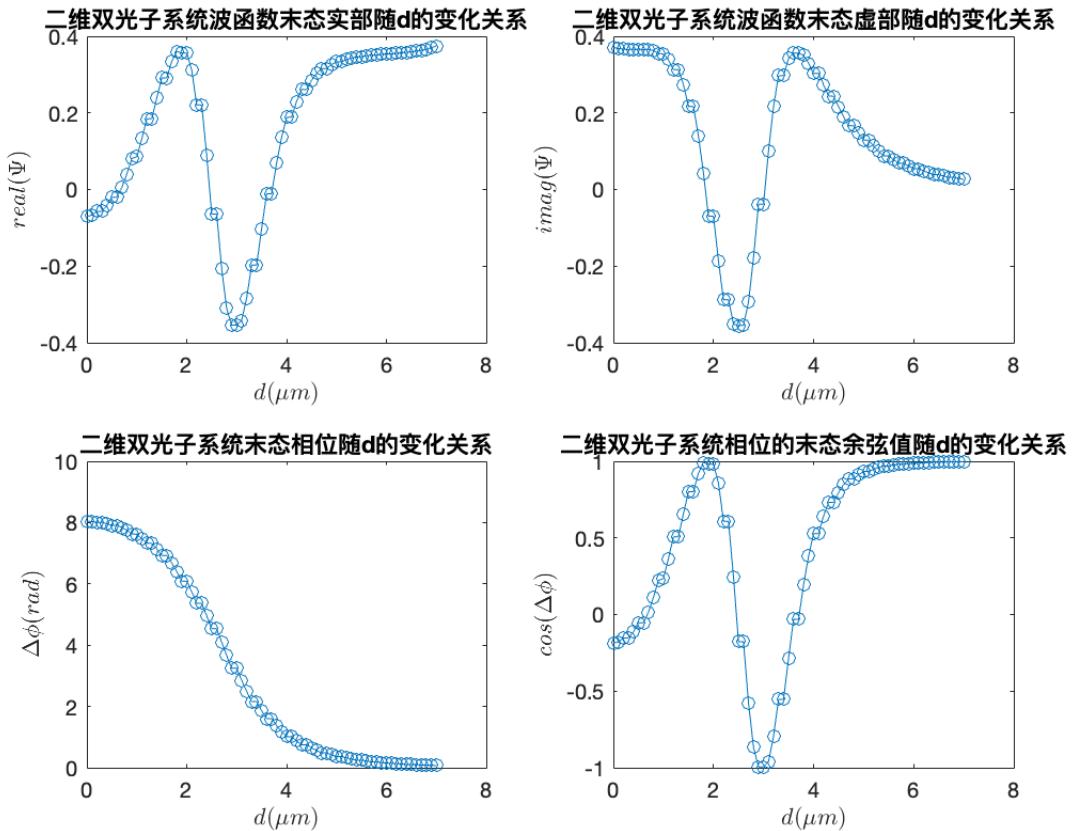


图 3-18 二维强关联双光子系统的末态实部、虚部、相位随两个光子运动路径（平行线）之间距离  $d$  的变化关系， $R_b = R_{b0}$ ,  $g\sqrt{n} = 700\Delta$ ,  $d = [0, 7](\mu m)$

由图 3-18 可以得到如下结论：在二维强关联双光子系统中，末态相位随平行线之间距离  $d$  的增大而减小， $d = 0\mu m$  时，末态相位最大，约为  $8rad$ ， $d = 6\mu m$  时，末态相位约等于 0，几乎不发生改变，这是由于阻塞体积的重叠部分随着  $d$  的增大而减小，图 3-18 的结论与图 3-17 相符合。二维强关联双光子系统相比于一维强关联双光子系统更加灵活，可以通过调整两条平行线之间的距离调控末态相位。

虽然在一维系统中，我们可以通过调控阻塞半径  $R_b$  和相互作用强度  $g\sqrt{n}$  来调控光子之间的末态相位，但是在实际情况下，阻塞半径和相互作用强度一般是由里德堡原子本身的性质决定，因此想要改变这两个参量比较困难。相较而言，调整两个光子运动路径（平行线）之间的距离更简单，并且具有可操作性，因此，二维强关联双光子系统对于实现双光子比特门有潜在的应用价值。

### 3.4 本章小结

本章分别探索了一维强关联双光子系统、一维强关联三光子系统和二维强关联双光子系统的动力学模拟。本章首先从算法设计的角度出发，详细阐述了数值模型的建立思路以及参量的取值依据。在一维强关联双光子和三光子系统中，本章探索了光子波函数的实时演化过程，并进行了可视化。本章还具体探索了一维多光子系统在里德堡原子气体中的动力学性质：比如光子之间的相对相位与相互作用强度、相互作用时间和里德堡阻塞半径这三个参数的关系。通过对一维强关联双光子系统和一维强关联三光子系统可以发现，在三个光子的阻塞半径相互作用强度完全相同的时候，一维强关联三光子系统会获得两倍的末态相位。此外，通过调控每个光子与里德堡原子之间的耦合强度或者失谐可以让光子在不同阻塞区域内的相互作用强度发生变化，同样也可以调控不同阻塞区域的阻塞半径的大小不同，因此一维强关联三光子系统可以更灵活的调控相位的变化。

在二维强关联双光子系统中，本章还探究了当两个光子在两条相距为  $d$  的平行路径上运动时，末态相位随平行路径之间的距离  $d$  的变化关系，发现末态相位随  $d$  的增加而减小，并证明可以通过调控平行线之间的距离  $d$  可以自由调控末态相位的取值。这将为二维强关联多光子动力学模拟的研究提供有价值的参考，为基于非线性光学的确定性量子门操作提供有力的支撑。

## 4 结论与展望

### 4.1 结论

本文通过理论推导得到了强关联多光子系统的动力学方程，并且以此动力学方程为基础，分别推导出一维强关联双光子系统、一维强关联三光子系统和二维强关联双光子系统的动力学方程。将铷里德堡原子的参数代入 MATLAB 中，对一维强关联双光子系统和一维强关联三光子系统的传播过程进行了动力学模拟，分析了光子在进入阻塞区域前后波函数的相位，概率密度，实部、虚部的演化过程。光子波函数的概率密度在运动过程中仅仅发生位移而振幅和分布形式不发生变化。光子在阻塞区域外受到的相互作用十分微弱，在阻塞区域内，光子之间的相对相位线性增加，相位的余弦值、波函数的实部、虚部均呈周期形式变化。此外，通过调控阻塞半径和相互作用强度的大小可以获得不同的末态相位，并且末态相位随着阻塞半径和相互作用强度的增加均以周期形式变化。在相同参数下，一维强关联三光子系统相比于一维强关联双光子系统由于多出一个阻塞区域，可以获得 2 倍的相位变化。此外，通过调控每个光子与里德堡原子之间的耦合强度或者失谐可以让光子在两个阻塞区域内的相互作用强度发生变化，同样也可以调控两个阻塞区域的阻塞半径的大小不同，因此一维强关联三光子系统可以更灵活的调控相位的变化。然后，本文对二维强关联双光子系统进行了动力学模拟，分析了光子在传播过程中波函数的相位、实部、虚部随时间的变化曲线。在阻塞区域外，由于光子之间的相互作用强度很弱，相位不发生明显变化，阻塞区域内，由于光子之间的相互作用，相位线性增加，相位的余弦值呈周期性变化。此外，通过调控两个光子运动路径（平行线）之间的距离  $d$  可以获得不同的末态相位，随着  $d$  的增加，阻塞区域的重叠体积减小，末态相位也随之减小。可以通过调控  $d$  获得不同的末态相位。由于不需要改变里德堡原子本身的性质，调控运动路径之间的距离  $d$  比调控阻塞半径  $R_b$  和相互作用强度  $g\sqrt{n}$  更具有可操作性。

### 4.2 展望

在一维强关联三光子系统中，如果第二个光子和第三个光子与第一个光子之间的相互作用强度不同，或者阻塞半径不同，实时相位演化会发生改变，通过这种方式可以更灵活地调控末态相位的变化。

对于二维强关联双光子系统的动力学模拟，主要有两个困难点。第一，每个光子都需要两个维度，总共需要四个维度来描述这个系统，于是需要将坐标空间划分为  $(2^8)^4$  的网格。本文通过缩小空间总范围的方法，在不增加内存占用的条件下提升空间分辨率，但是这限制了光子的运动范围，当阻塞半径比较大时，较小的空间范围无法完成模拟。所以可以通过使用内存较大的服务器进一步完善二维强关联双光子系统的动力学模拟的结果。此外，由于二维强关联双光子系统的波函数是四维标量场，所以很难

完成波函数的可视化模拟。但是可以固定第二个光子的位置，使第一个光子运动，然后 MATLAB 描述波函数的四维矩阵中通过第二个光子固定的位置坐标截取一个二维矩阵，得到第一个光子的波函数在传播过程中的可视化模拟。

量子计算的实现需要基于集成式系统，即多光子系统，其中包含多个量子比特。因此在二维强关联双光子系统的基础上，需要进一步探索二维多光子系统的动力学性质。二维强关联多光子系统的数值模拟需要用更高维的矩阵描述其波函数，因此需要更大的内存和更强的计算能力。

## 致 谢

亲爱的导师、亲爱的家人、亲爱的朋友们：

时光荏苒，转眼间我即将完成本科学业，站在毕业论文的终点，回首这段旅程，我心中充满感慨与感恩。在这里，我想向所有支持和帮助过我的人表示深深的谢意。

首先，我要由衷地感谢我的导师张永昌教授。感谢您对我的教导和悉心指导，让我能够在学术道路上迈出坚实的步伐。您的丰富知识、独到见解和严谨的治学态度，都对我产生了深远的影响。您的指导和支持使我在研究中克服了许多困难，提高了自己的学术能力。我将永远铭记您的谆谆教诲和悉心栽培。

我还要感谢师兄师姐们。感谢你们在科研过程中给予我的帮助和指导。你们的经验分享、技术支持和无私帮助让我受益匪浅。在我遇到困难和迷茫的时候，你们总是给予我鼓励和支持，帮助我找到解决问题的方向。与你们一起探讨问题、共同成长的时光将成为我宝贵的回忆。

同时，我要感谢我的家人和朋友们。感谢你们一直以来的陪伴和支持。你们对我的理解、鼓励和关怀是我前进的动力。你们无私的爱和包容让我在学业上能够专注、奋发向前。感谢你们在我失落时给予的鼓励，在我成功时与我分享喜悦。

最后，我要向所有在我学习生涯中遇到的老师、同学和朋友们致以衷心的感谢。感谢你们在学术上的交流与合作，让我不断汲取知识的营养，拓宽了我的学术视野。在大学的日子里，你们的友谊和支持使我度过了难忘的岁月，留下了美好的回忆。

毕业是新的起点，未来的道路上还有无尽的挑战等待着我。在新的征程中，我将牢记您的教诲和帮助，不断努力学习和成长，为实现自己的梦想而努力奋斗。我相信，我将能够迎接未来的挑战，展现出自己的才华和潜力。

最后，再次向所有曾经帮助过我的人表示最诚挚的感谢。是你们的支持和鼓励，让我在本科学业的旅程中感受到无尽的温暖和爱。我将永远怀着感恩之心，珍惜所受的一切恩惠，并将秉持着积极向上的精神，回报社会，造福他人。

谢谢大家！祝愿您们一切顺利，前程似锦！愿我们的未来充满希望和成功！

衷心感谢！

## 参考文献

- [1] Zhong H S, Wang H, Deng Y H, et al. Quantum computational advantage using photons[J]. *Science*, 2020, 370(6523):1460-1463.
- [2] Deutsch D. Quantum theory, the church–turing principle and the universal quantum computer[J]. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 1985, 400(1818): 97-117.
- [3] Shi T, Kimble H, Cirac J I. Topological phenomena in classical optical networks[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2017, 114(43):E8967-E8976.
- [4] Kang H, Zhu Y. Observation of large kerr nonlinearity at low light intensities[J]. *Physical Review Letters*, 2003, 91(9):093601.
- [5] Chen D L, Chen Y H, Liu Y, et al. Detecting a single atom in a cavity using the  $\chi$  (2) nonlinear medium [J]. *Frontiers of Physics*, 2022, 17(5):52501.
- [6] Hammerer K, Sørensen A S, Polzik E S. Quantum interface between light and atomic ensembles[J]. *Reviews of Modern Physics*, 2010, 82(2):1041.
- [7] Sevinçli S, Henkel N, Ates C, et al. Nonlocal nonlinear optics in cold rydberg gases[J]. *Physical Review Letters*, 2011, 107(15):153001.
- [8] Tebben A, Hainaut C, Walther V, et al. Blockade-induced resonant enhancement of the optical nonlinearity in a rydberg medium[J]. *Physical Review A*, 2019, 100(6):063812.
- [9] Wang K, Zhang W, Zhou Z, et al. Optical storage of orbital angular momentum via rydberg electromagnetically induced transparency[J]. *Chinese Optics Letters*, 2017, 15(6):060201.
- [10] Ding D S, Busche H, Shi B S, et al. Phase diagram and self-organizing dynamics in a thermal ensemble of strongly interacting rydberg atoms[J]. *Physical Review X*, 2020, 10(2):021023.
- [11] Cui Y, Shen C, Deng M, et al. Observation of broad d-wave feshbach resonances with a triplet structure [J]. *Physical Review Letters*, 2017, 119(20):203402.
- [12] Günter G G. Interfacing rydberg atoms with light and observing their interaction driven dynamics[D]. 2014.
- [13] Karpiuk T, Brewczyk M, Rzążewski K, et al. Imaging single rydberg electrons in a bose–einstein condensate[J]. *New Journal of Physics*, 2015, 17(5):053046.
- [14] Saffman M, Walker T G, Mølmer K. Quantum information with rydberg atoms[J]. *Reviews of Modern Physics*, 2010, 82(3):2313.
- [15] Peyronel T, Firstenberg O, Liang Q Y, et al. Quantum nonlinear optics with single photons enabled by strongly interacting atoms[J]. *Nature*, 2012, 488(7409):57-60.
- [16] Lukin M D, Fleischhauer M, Cote R, et al. Dipole blockade and quantum information processing in mesoscopic atomic ensembles[J]. *Physical Review Letters*, 2001, 87(3):037901.
- [17] Singer K, Reetz-Lamour M, Amthor T, et al. Suppression of excitation and spectral broadening induced by interactions in a cold gas of rydberg atoms[J]. *Physical Review Letters*, 2004, 93(16):163001.
- [18] Harris S E, Field J, Imamoğlu A. Nonlinear optical processes using electromagnetically induced transparency[J]. *Physical Review Letters*, 1990, 64(10):1107.
- [19] Boller K J, Imamoğlu A, Harris S E. Observation of electromagnetically induced transparency[J]. *Physical Review Letters*, 1991, 66(20):2593.

- [20] Dutton Z, Budde M, Slowe C, et al. Observation of quantum shock waves created with ultra-compressed slow light pulses in a bose-einstein condensate[J]. Science, 2001, 293(5530):663-668.
- [21] Fleischhauer M, Imamoglu A, Marangos J P. Electromagnetically induced transparency: Optics in coherent media[J]. Reviews of Modern Physics, 2005, 77(2):633.
- [22] Gorshkov A V, Otterbach J, Fleischhauer M, et al. Photon-photon interactions via rydberg blockade [J]. Physical Review Letters, 2011, 107(13):133602.

## 附录 A 外文原文

### Nonlocal Nonlinear Optics in cold Rydberg Gases

S. Sevincli,<sup>1</sup> N. Henkel,<sup>1</sup> C. Ates,<sup>2</sup> and T. Pohl<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Max Planck Institute for the Physics of Complex Systems, 01187 Dresden, Germany

<sup>2</sup>School of Physics and Astronomy, University of Nottingham, Nottingham, NG7 2RD, United Kingdom

We present an analytical theory for the nonlinear optical response of a strongly interacting Rydberg gas under conditions of electromagnetically induced transparency. Simple formulae for the third order optical susceptibility are derived and shown to be in excellent agreement with recent experiments. The obtained expressions reveal strong nonlinearities, which in addition are of highly nonlocal character. This property together with enormous strength of the Rydberg-induced nonlinearities is shown to yield a unique laboratory platform for nonlinear wave phenomena, such as collapse-arrested modulational instabilities in a self-defocussing medium.

PACS numbers: 32.80.Ee, 42.50.Gy, 42.65.-k

Advances in designing materials with highly intensity-dependent refraction [1–3] have ushered in numerous studies of nonlocal nonlinear wave phenomena [4–8]. Many of these settings, such as, nematic liquid crystals [1, 2] or thermal media [3], require high power laser light. On the other hand, electromagnetically induced transparency (EIT) in ultracold multi-level atoms [9, 10] provides an elegant mechanism to suppress photon loss and simultaneously increase light-matter interaction times to enhance nonlinear effects. Combined with sufficiently large nonlinearities, this holds great potential for few-photon nonlinear optics [11, 12] and may enable applications in communication and quantum information science.

Recently, it was recognized that EIT-schemes involving highly excited atomic Rydberg levels provide promising perspectives for such applications [13–22]. In particular, the huge polarizability of Rydberg states gives rise to giant Kerr coefficients [15], but also entails strong long-range interactions, which render Rydberg-EIT media intrinsically nonlinear. Indeed, a recent theory for two-photon pulses revealed the emergence of strong effective photon-photon interactions [23], while experiments [21] and numerical calculations [24] demonstrated greatly enhanced nonlinear absorption coefficients in the opposite limit of large photon numbers.

In this letter, we develop an analytical theory for the nonlinear optical response of a strongly interacting Rydberg-EIT medium to monochromatic multi-photon light sources. Based on the approach, we give a simple formula for the nonlinear absorption coefficient that provides an excellent description of recent measurements on cold Rubidium gases [21]. For large single-photon detunings, absorption is shown to be greatly suppressed – yet maintaining huge refractive nonlinearities, that exceed previous records in ultracold Kerr media [10] by several orders of magnitude. Combined with their long range this makes for an ideal nonlinear medium to study nonlocal wave phenomena, in which the *strength*, the *range* and even the *sign* of the nonlocal interaction kernel can be widely tuned with high accuracy. To demonstrate this

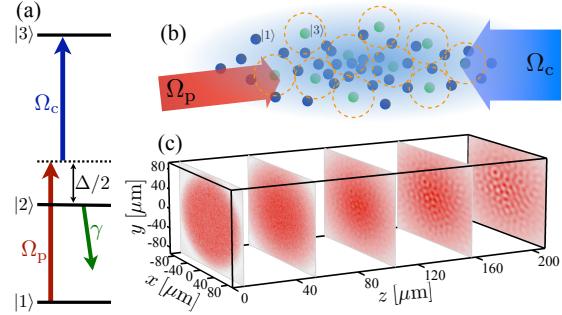


FIG. 1: a) Three-level scheme for isolated atoms, where the atomic ground state  $|1\rangle$ , an intermediate state  $|2\rangle$  and a highly excited Rydberg state  $|3\rangle$  are mutually driven by a strong control and a weak probe field with Rabi frequencies  $\Omega_c$  and  $\Omega_p$ , respectively. On two-photon resonance, EIT ensures lossless propagation of the optical fields, unaffected by spontaneous decay ( $\gamma$ ) and the single-photon detuning  $\Delta/2$ . (b) In a gas of atoms, the strong van der Waals interaction between atoms in Rydberg states ( $|3\rangle$ ) inhibit multiple Rydberg excitations within a blockade radius  $R_c$ , giving rise to a strongly nonlinear optical response of the medium. The resulting nonlinear beam propagation, for example, leads to modulation instabilities, as shown in (c) for a Rubidium  $70S_{1/2}$  Rydberg gas with a density of  $8 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$  and  $\Omega_p/2\pi = 0.35 \text{ MHz}$ ,  $\Omega_c/2\pi = 80 \text{ MHz}$ ,  $\Delta/2\pi = 1.2 \text{ GHz}$ .

potential, we present numerical results for the propagation of cw laser light and show that paradigm phenomena, such as optical solitons and modulational instabilities (see Fig.1c) are observable with current experimental capabilities.

Consider first the propagation of a beam with amplitude  $\Omega_p$  (see Fig.1b) and wavenumber  $k$  as described by the paraxial wave equation

$$\left( -\frac{i}{2k} \nabla_{\perp}^2 + \frac{\partial}{\partial z} \right) \Omega_p(\mathbf{r}) = \frac{ik}{2} \chi(\mathbf{r}) \Omega_p(\mathbf{r}), \quad (1)$$

where  $\nabla_{\perp}$  accounts for the transverse dynamics with respect to the axial coordinate  $\mathbf{r}_{\perp} = (x, y)$  perpendicular

to the propagation direction  $z$ . The relevant medium properties are contained in the complex susceptibility

$$\chi = \chi_R + i\chi_I = \frac{2\varphi_{12}^2}{\hbar\epsilon_0\Omega_p}\rho_{12}, \quad (2)$$

which is determined by the dipole matrix element  $\varphi_{12}$  of the probe transition and the corresponding atomic coherence density  $\rho_{12}$ . The probe field,  $\Omega_p$ , drives the lower transition between the ground state,  $|1\rangle$ , and a low-lying excited state,  $|2\rangle$ , of ladder-type three-level atoms (see Fig.1a), whose optical response is controlled by a strong control field, driving the upper transition between  $|2\rangle$  and a Rydberg state,  $|3\rangle$ , with a Rabi frequency  $\Omega_c > \Omega_p$ . Without interactions, this yields a perfect EIT medium, in which each of the  $N$  atoms in the gas settles into a dark state  $|d_i\rangle \propto \Omega_c|1_i\rangle - \Omega_p(\mathbf{r}_i)|3_i\rangle$  ( $i = 1, \dots, N$ ) such that  $\rho_{12} = \chi = 0$  and the probe beam is unaffected by the atomic medium [9]. In the presence of strong Rydberg-Rydberg atom interactions the gas dynamics becomes highly correlated due to the resulting level shifts of multiply excited Rydberg states. Within a critical blockade radius  $R_c$  all but a single Rydberg excitation are inhibited [25] (see Fig.1b) and removed from two-photon resonance, thereby diminishing EIT, and, thus giving rise to nonlocal absorption and refraction within a range  $\sim R_c$ . Since the Rydberg state population in the unperturbed dark states  $|d_i\rangle$  is proportional to  $\Omega_p(\mathbf{r}_i)^2$  one, hence, expects an intensity-dependent, i.e. nonlinear, optical response.

Having established a simple picture of the basic mechanisms we now derive the resulting optical susceptibility from the underlying Heisenberg equations for the atomic transition operators  $\hat{\sigma}_{\alpha\beta}^{(i)} = |\alpha_i\rangle\langle\beta_i|$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ ). In the limit of low probe intensities ( $\Omega_p(\mathbf{r}_i) \ll \Omega_c$ ) these can be expanded in  $\Omega_p/\Omega_c$  [26]. Upon adiabatic elimination of  $\hat{\sigma}_{12}^{(i)}$  one obtains a single dynamical equation for the two-photon transition operator of the  $i$ th atom

$$\frac{d}{dt}\hat{\sigma}_{13}^{(i)} = -\Omega_c \frac{\Omega_p(\mathbf{r}_i) + \Omega_c\hat{\sigma}_{13}^{(i)}}{2\Gamma} - \frac{\gamma_{13}}{2}\hat{\sigma}_{13}^{(i)} - i \sum_{j \neq i} V_{ij}\hat{\sigma}_{33}^{(j)}\hat{\sigma}_{13}^{(i)}, \quad (3)$$

where  $\hat{\sigma}_{33}^{(i)} = \hat{\sigma}_{31}^{(i)}\hat{\sigma}_{13}^{(i)}$ ,  $\Gamma = \gamma + \gamma_{12} - i\Delta$ ,  $\Delta/2$  is the single-photon detuning and the rates  $\gamma$ ,  $\gamma_{12}$  and  $\gamma_{13}$  account for the spontaneous decay of the intermediate state as well as the linewidth of the probe and two-photon transition, respectively. The last term in eq.(3) describes the interactions between atoms in the Rydberg state  $|3\rangle$  and  $V_{ij} = C_6/|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^6$  denotes the corresponding van der Waals potential for atoms at positions  $\mathbf{r}_i$  and  $\mathbf{r}_j$ . Since the van der Waals coefficient  $C_6 \propto n^{11}$  drastically increases with the atom's principal quantum number  $n$ , the interaction between highly excited Rydberg atoms exceeds that of the two low-lying states by many orders of magnitude. Proper inclusion of the resulting strong atomic correlations requires knowledge of the two-body

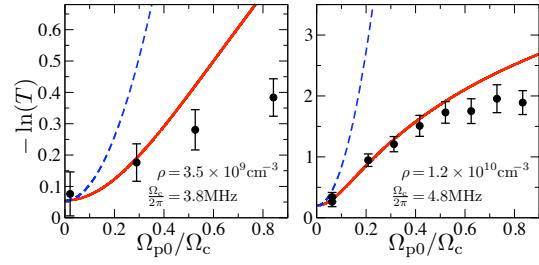


FIG. 2: Nonlinear transmission of a cold Rubidium Rydberg-EIT medium with  $|3\rangle = |60S_{1/2}\rangle$  at two different densities and control Rabi frequencies, and for  $\gamma_{12}/2\pi = 110\text{kHz}$  and  $\gamma_{13}/2\pi = 220\text{kHz}$  [21]. Up to  $\Omega_{p0} \approx 0.3\Omega_c$  there is good agreement between our low- $\Omega_p$  prediction eqs.(5) and (6) (solid line) and the experimental data [21, 27] (symbols). The dashed lines neglect the drop in absorption due to attenuation and averaging over the initial transverse beam profile.

correlators  $\hat{\sigma}_{\alpha\beta}^{(j)}\hat{\sigma}_{\alpha'\beta'}^{(i)}$  whose dynamics follows from eq.(3) by applying the chain rule. Being primarily interested in the leading order nonlinear contribution to  $\chi$ , we can once more expand the resulting two-body equations to leading order in  $\Omega_p$ . This amounts to dropping direct three-body correlators and, thus, yields a closed set of evolution equations for the one- and two-body operators. Setting  $\frac{d}{dt}\langle\hat{\sigma}_{\alpha\beta}^{(i)}\rangle = \frac{d}{dt}\langle\hat{\sigma}_{\alpha\beta}^{(j)}\hat{\sigma}_{\alpha'\beta'}^{(i)}\rangle = 0$ , the steady state expectation values are then readily obtained from the resulting set of algebraic equations. Finally, we take the continuum limit by defining continuous densities  $\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = \sum_i \langle\hat{\sigma}_{\alpha\beta}^{(i)}\rangle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ , and obtain

$$\begin{aligned} \rho_{12}(\mathbf{r}) = & \frac{i\gamma_{13}\Omega_p(\mathbf{r})}{\Omega_c^2 + \gamma_{13}\Gamma}\rho - \frac{\Omega_p(\mathbf{r})\Omega_c^4}{(\Omega_c^2 - \gamma_{13}\Gamma)|\Omega_c^2 + \gamma_{13}\Gamma|^2}\rho^2 \\ & \times \int d\mathbf{r}' \frac{2|\Omega_p(\mathbf{r}')|^2 V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\Omega_c^2 + \gamma_{13}\Gamma + i\Gamma V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}, \end{aligned} \quad (4)$$

where  $\rho = \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$  is the total atomic density. Together with eq.(2) this yields the leading-order nonlinear susceptibility and permits to propagate the probe beam according to eq.(1).

If the atoms are driven on single-photon resonance,  $\Delta = 0$ , the main interaction effect will be nonlinear absorption. Hence, one can neglect the transverse beam dynamics ( $\nabla_\perp^2$ ) as well as the nonlocality in eq.(4), by setting  $\Omega_p^2(\mathbf{r}') \approx \Omega_p^2(\mathbf{r})$ . With this simplification one obtains local first and third order susceptibilities, defined by  $\chi(\mathbf{r}) = \chi^{(1)} + \chi^{(3)}\Omega_p^2(\mathbf{r})$ . The remaining spatial integral in eq.(4) can be carried out analytically to give

$$\begin{aligned} \chi_R^{(1)} &= 0, \quad \chi_I^{(1)} = \frac{6\pi\gamma\gamma_{13}}{k^3(\gamma_{13}\Gamma + \Omega_c^2)}\rho, \\ \chi_R^{(3)} &= -\frac{4\sqrt{2}\pi^3\gamma\Omega_c^4|C_6|^{-1/2}}{k^3\sqrt{\Gamma}[\gamma_{13}\Gamma + \Omega_c^2]^{7/2}}\rho^2, \quad \chi_I^{(3)} = |\chi_R^{(3)}|. \end{aligned} \quad (5)$$

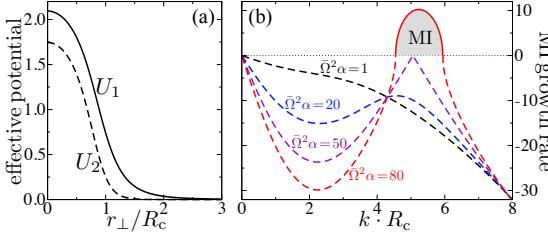


FIG. 3: (a) Effective photon-photon interaction potentials, introduced in eq.(8). (b) Growth rate  $\Gamma_{\text{MI}}$  of intensity modulations with wavenumber  $k$  for *defocussing* nonlinearities of different strengths  $\Omega^2\alpha$ . The dashed lines show the corresponding imaginary part while the solid lines correspond to the real part of  $\Gamma_{\text{MI}}$ . The critical value of  $\Omega^2\alpha_{\text{MI}} = 50.06$  marks the onset of a modulational instability within a narrow window of wave numbers indicated by the grey shaded area for  $\Omega^2\alpha = 80$ .

This expression permits a simple interpretation, by introducing the resonant blockade radius  $\tilde{R}_c$ , defined by the distance at which the interaction  $|C_6|/\tilde{R}_c^6$  exceeds the width  $\delta_{\text{EIT}} = \Omega_2^2/\Gamma$  of the EIT window [23]. Substitution of  $C_6$  by  $\tilde{R}_c = (|C_6|/\delta_{\text{EIT}})^{1/6}$  shows that  $\chi^{(3)}$  is proportional to the corresponding two-level response times the number  $R_c^3\rho$  of blockaded atoms, which is consistent with the simple picture outlined above and the numerical findings of [24].

Experimentally, nonlinear absorption has been recently studied in a cold Rubidium gas involving  $|3\rangle = |60S_{1/2}\rangle$  Rydberg states [21]. In the experiments the transmission,  $T$ , of a Gaussian probe beam ( $\Omega_p = \Omega_{p0}e^{-r_\perp^2/w^2}$ ) through the gas of length  $l$  was measured for different intensities and atomic densities. Within the local approximation this configuration permits a simple solution of eq.(1) for the integrated beam transmission

$$T = T_0 \frac{\ln(1+p)}{p}, \quad (6)$$

where  $p = \Omega_{p0}^2 \chi_I^{(3)} (1 - T_0) / \chi_I^{(1)}$  and  $T_0 = e^{-kx^{(1)}l}$  is the first order transmission. Fig.2 shows a comparison to the measured transmission for two different densities and demonstrates good agreement, even for rather large probe Rabi frequencies of up to  $\Omega_{p0} \approx 0.3\Omega_c$ . Note that the backaction of the nonlinear beam attenuation onto susceptibility and, equally important, the averaging over the transverse beam profile are both essential for a proper description of the experiment. Neglecting these effects yields the dashed lines in Fig.2, which significantly overestimates the nonlinear absorption.

Since on resonance  $\chi_I^{(3)} = |\chi_R^{(3)}|$  [cf. eq.(5)], large nonlinear refraction is inevitably accompanied by high photon loss. However, for large single-photon detunings  $\Delta \gg \gamma$  eq.(4) yields  $\chi_I \sim (\gamma/\Delta)\chi_R^{(3)}$ , such that dissipative loss

can be greatly suppressed. For instance, for a Rubidium Rydberg gas with  $\Omega_c/2\pi = 5\text{MHz}$ ,  $\Omega_p/2\pi = 0.5\text{MHz}$ ,  $\Delta = 30\text{GHz}$  and  $\rho = 8 \times 10^{13}\text{cm}^{-3}$  one obtains a large absorption length of  $l_{\text{abs}} \approx 1\text{mm}$ , and yet a high nonlinear refractive index  $n_2 \approx 2 \times 10^4\text{cm}^2/\text{W}$  which is 5 orders of magnitude greater than previously obtained with ultracold Rb groundstate atoms at the same density [10].

As refraction starts to dominate absorption, the nonlocality of  $\chi^{(3)}$  [cf. eq.(4)] becomes significant. To account for its effects on the transverse beam propagation we recast eqs.(2,4) into

$$\chi(\mathbf{r}) = -\frac{12\pi\gamma\rho^2}{k^3\Delta\Omega_c^2} \int d\mathbf{r}' \frac{|\Omega_p(\mathbf{r}'_\perp, z)|^2}{1 + \frac{|r'-r|^6}{R_c^6}} - i\frac{\gamma}{\Delta} \frac{|\Omega_p(\mathbf{r}'_\perp, z)|^2}{\left[1 + \frac{|r'-r|^6}{R_c^6}\right]^2}, \quad (7)$$

where we assumed  $\gamma_{12} \ll \gamma$ ,  $\gamma_{13} \ll \delta_{\text{EIT}} = \Omega_c^2/\Delta$  and introduced the off-resonant blockade radius  $R_c = (C_6/\delta_{\text{EIT}})^{1/6}$  ( $C_6\Delta > 0$ ) [23] set by the off-resonant EIT width  $\delta_{\text{EIT}}$ . To simplify matters, we proceed by defining scaled coordinates  $\tau = z/(kR_c^2)$ ,  $\xi = \mathbf{r}_\perp/R_c$  and the dimensionless probe amplitude  $\Omega$ , normalized to  $\int \Omega^2(\xi, \tau) d^2\xi = 1$ . Retaining the local approximation along the propagation direction [31] this yields a two-dimensional nonlinear Schrödinger equation

$$i\partial_\tau \Omega(\xi, \tau) = \left[ -\frac{\nabla_\xi^2}{2} + \alpha \int d\xi' |\Omega(\xi', \tau)|^2 U_1(\xi - \xi') - i\frac{\gamma}{\Delta} \alpha \int d\xi' |\Omega(\xi', \tau)|^2 U_2(\xi - \xi') \right] \Omega(\xi, \tau), \quad (8)$$

where  $\alpha = \frac{36\pi^2\rho^2\gamma^2P_p}{\hbar k^4 c R_c^3 \Omega_c^2} C_6$  parametrizes the strength of the nonlinearity,  $P_p$  denotes the probe beam power and the effective interaction potentials  $U_m(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} dz [1 + (\xi^2 + z^2)^3]^{-m}$  are shown in Fig.3a. As  $\alpha \propto C_6$ , repulsive atomic interactions lead to self-defocussing nonlinearities, while attractive atomic interactions map onto self-focussing nonlinearities.

The former case, can, e.g., be realized with cold Rb( $70S_{1/2}$ ) Rydberg states as in the experiments [21]

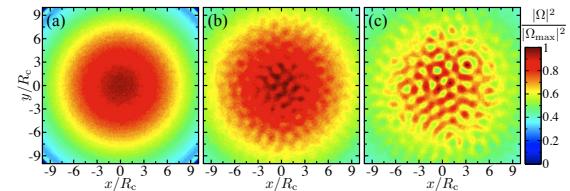


FIG. 4: Output beam profile  $|\Omega|^2(\mathbf{r}_\perp)$  for  $\Omega_{p0}/2\pi = 0.35\text{MHz}$ ,  $\Omega_c/2\pi = 80\text{MHz}$  and  $\Delta/2\pi = 1.2\text{GHz}$  after propagation over  $l = 210\mu\text{m}$  through a Rb( $70S_{1/2}$ ) EIT medium at three different densities (a)  $4 \times 10^{13}\text{cm}^{-3}$ , (b)  $5.5 \times 10^{13}\text{cm}^{-3}$  and (c)  $8 \times 10^{13}\text{cm}^{-3}$ . For the color coding each distribution has been normalized by the actual maximum intensity  $|\Omega_{\text{max}}|^2$ .

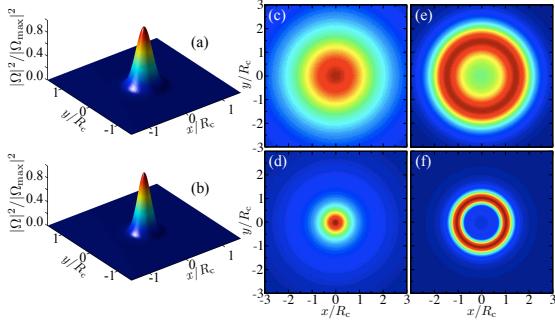


FIG. 5: Intensity profiles  $|\Omega|^2(\mathbf{r}_\perp)$  for a Sr( $50^1S_0$ ) EIT medium with  $\Omega_0/2\pi = 0.3\text{MHz}$ ,  $\Omega_c/2\pi = 15\text{MHz}$ ,  $\Delta/2\pi = 3.2\text{GHz}$  at two different densities of (a,c,e)  $8 \times 10^{11}\text{cm}^{-3}$  and (b,d,f)  $1.2 \times 10^{12}\text{cm}^{-3}$ . Panels (a,b) show the stable soliton solutions, while panels (c-f) show the compressed output intensity profile after a propagation length  $l = 240\mu\text{m}$  for an input beam with (c,d)  $\nu = 2$  and (e,f)  $\nu = 6$ . The color coding is identical to Fig.4.

discussed above. While the resulting photon-photon interactions are isotropically repulsive, the corresponding momentum space interaction  $\tilde{U}_1(k)$  is not sign-definite. Despite being *defocussing*, the present nonlocal interaction can, consequently, promote a modulational instability. In Fig.3b we show the corresponding rate  $\Gamma_{\text{MI}}(k) = -\frac{k}{2}\sqrt{k^2 - 4\alpha\Omega^2\tilde{U}_1(k)}$  [4] for a given mode with wave number  $k$  to grow out of a homogenous amplitude  $\Omega(\xi) = \text{const.}$ . This growth rate  $\Gamma_{\text{MI}}$  assumes real values within a narrow range around  $k \approx 2\pi$  at a critical interaction strength  $\alpha\Omega^2 \approx 50$  [28], resulting in stable transverse intensity modulations on a length scale  $\sim R_c$  as the beam propagates through the medium (cf. Fig.1c). To examine their observability, we performed numerical simulations of eq.(8) for a Rb( $70S_{1/2}$ ) Rydberg gas traversed by a super-Gaussian beam  $\Omega = \Omega_0 e^{-(\xi/w)^\nu + i\phi}$  with  $\nu = 6$  and small spatial phase noise  $\phi$ . Fig.4 shows calculated output intensity profiles for different atomic densities and demonstrates that highly localized, rather regular intensity patterns can be realized in high density gases with feasible laser parameters.

Self-focussing nonlinearities arise from attractive Rydberg interactions, as occurring between  $n^1S_0$  states of Strontium atoms [29], for which EIT has been recently observed [14]. In this case, modulational instabilities can, in principle, occur for any  $\alpha < 0$  and sufficiently large beam widths. More importantly, however, the attractive photonic softcore-interaction enables the formation of *stable* bright solitons, leading to tight beam focussing. A simple variational analysis of eq.(8) (see, e.g., [30]) yields a critical interaction strength of  $\alpha_{\text{so}} \approx 0.71$ , above which stable bright solitons exist. Figs.5a and 5b show two examples for a Sr( $50^1S_0$ ) gas and reveal a character-

istic soliton size  $\lesssim R_c$ . In addition we show final intensity profiles for a Gaussian ( $\nu = 2$ ) and super-Gaussian ( $\nu = 6$ ) input beam. All cases are for an input width of  $w = 3R_c$  and demonstrate significant focussing after the considered propagation length  $l = 240\mu\text{m}$ . In the latter case, the beam compression is superimposed by a radial MI leading to a ring-shaped hollow output beam. With a typical size of several  $\mu\text{m}$  these structures are readily observable experimentally.

In conclusion, we have presented a theory for the nonlinear response of a strongly interacting Rydberg-EIT gas, giving good agreement with recent measurements. The derived expressions for the third-order susceptibility suggest that huge nonlinearities of highly nonlocal character can be experimentally realized, which provides an ideal setting to study complex nonlinear wave phenomena. To demonstrate these prospects we have shown that the observation of basic effects such as the formation of bright solitons and collapse-arrested modulational instabilities are within experimental reach. The latter is particularly interesting in the uncommon case of defocussing, nonlocal nonlinearities. Here, the repulsion between emerging intensity peaks combined with transverse beam confinement may promote the formation of transverse supersolid or crystalline states of photons. This question may be addressed within the present approach, extended to quantum light in order to account for atom-photon and photon-photon correlations, which would open up a general framework for studying many-body physics with strongly interacting photons. From a different perspective, we expect the discussed nonlinear light propagation to be relevant for interpreting cold Rydberg gas experiments at high densities.

We are grateful to A. Gorshkov, M.D. Lukin, J.D. Pritchard, C.S. Adams, S. Skupin, J. Otterbach and M. Fleischhauer for valuable discussions, and thank C.S. Adams for providing unpublished experimental data.

- [1] M. Peccianti *et al.*, Optics Letters, **27** 1460 (2002).
- [2] C. Conti *et al.*, Phys. Rev. Lett. **92**, 113902 (2004).
- [3] C. Rotschild *et al.*, Nature Phys. **2** 769 (2006).
- [4] J. Wyller *et al.*, Phys. Rev. E **66** 066615 (2002).
- [5] C. Conti *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91** 073901 (2003).
- [6] D. Mihalache *et al.*, Phys. Rev. E **73** 025601(R) (2005).
- [7] S. Skupin *et al.*, Phys. Rev. Lett. **98** 263902 (2007).
- [8] I.B. Burgess *et al.*, Phys. Rev. Lett. **102**, 203903 (2009).
- [9] M. Fleischhauer *et al.*, Rev. Mod. Phys., **77**, 633 (2005).
- [10] L. Hau *et al.*, Nature (London) 397, 594 (1999).
- [11] S.E. Harris *et al.*, Phys. Rev. Lett., **64**, 1107 (1990).
- [12] M. Bajcsy *et al.*, Phys. Rev. Lett. **102**, 203902 (2009).
- [13] I. Friedler *et al.*, Phys. Rev. A **72**, 043803 (2005).
- [14] S. Mauger *et al.*, J. Phys. B **40**, F319 (2007).
- [15] A.K. Mohapatra *et al.*, Nature Phys. **4**, 890 (2008).
- [16] J. Zhao *et al.*, Opt. Express **17**, 15821 (2009).

- [17] T. Pohl *et al.*, Phys. Rev. Lett. **104**, 043002 (2010).
- [18] B. Olmos and I. Lesanovsky, Phys. Rev. A **82**, 063404 (2010).
- [19] A.K. Mohapatra *et al.*, Phys. Rev. Lett. **98**, 113003 (2010).
- [20] H. Schempp *et al.*, Phys. Rev. Lett. **104**, 173602 (2010).
- [21] J.D. Pritchard *et al.*, Phys. Rev. Lett. **105**, 193603 (2010).
- [22] C. Guerlin *et al.*, Phys. Rev. A **82**, 053832 (2010).
- [23] A.V. Gorshkov *et al.*, arXiv:1103.3700
- [24] C. Ates *et al.*, Phys. Rev. A **83**, 041802 (2011).
- [25] M.D. Lukin *et al.*, Phys. Rev. Lett. **87**, 037901 (2001).
- [26] M. Fleischhauer and M.D. Lukin, Phys. Rev. A **65**, 022314 (2002).
- [27] C.S. Adams, private communication.
- [28] N. Henkel *et al.*, Phys. Rev. Lett. **104**, 195302 (2010).
- [29] R. Mukherjee *et al.*, arXiv:1102.3792
- [30] F. Maucher *et al.*, Phys. Rev. Lett. **106**, 170401 (2011).
- [31] We verified numerically that the local approximation still holds along the propagation direction for the parameters of this work.



## 附录 B 外文翻译

### 冷里德堡气体中的非局域非线性光学

S. Sevincli,<sup>1</sup> N. Henkel,<sup>1</sup> C. Ates,<sup>2</sup> and T. Pohl<sup>1</sup> Max

刘铠铭译

#### 摘要

我们提出了在电磁感应透明条件下强相互作用里德堡气体的非线性光学响应的分析理论。推导了三阶光学磁化率的简单公式，并证明与最近的实验非常吻合。获得的表达式揭示了强烈的非线性，此外还具有高度非局部特征。这一特性与里德堡引起的非线性的巨大强度一起被证明可以产生一个独特的非线性波现象实验室平台，例如自散焦介质中的坍缩抑制调制不稳定性。

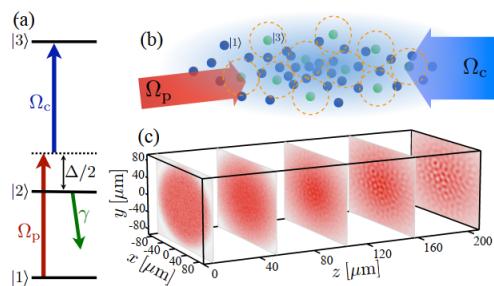
在设计具有高度依赖于强度的折射 [1-3] 的材料方面取得的进展已经引发了对非局部非线性波现象的大量研究 [4-8]。其中许多材料，例如向列液晶 [1、2] 或热介质 [3]，都需要高功率激光。另一方面超冷多能级原子中的电磁感应透明性 (EIT) [9, 10] 提供了一种优雅的机制来抑制光子损失，同时增加光-物质相互作用时间以增强非线性效应。结合足够大的非线性，这对少光子非线性光学[11, 12] 具有巨大的潜力，并可能使通信和量子信息科学中的应用成为可能。

最近，人们认识到涉及高激发里德堡原子能级的 EIT 方案为此类应用提供了有希望的前景 [13-22]。特别是，里德堡态的巨大极化率产生了巨大的克尔系数 [15]，但也需要强长程相互作用，这使得里德堡-EIT 介质在本质上是非线性的。事实上，最近关于两个光子脉冲的理论揭示了强有效光子-光子相互作用的出现 [23]，而实验 [21] 和数值计算 [24] 表明在大光子数的相反极限下大大增强了非线性吸收系数。

在这篇文章中，我们针对强相互作用的 Rydberg-EIT 介质对单色多光子光源的非线性光学响应开发了一种分析理论。基于该方法，我们给出了一个简单的非线性吸收系数公式，该公式很好地描述了最近对冷铷气体的测量 [21]。对于大的单光子失谐，吸收被证明被极大地抑制了 但保持了巨大的折射非线性，这超过了超冷克尔介质 [10] 之前的记录几个数量级。结合它

们的长距离，这使得研究非局部波现象的理想非线性介质成为可能，其中非局部相互作用核

的强度、范围甚至符号都可以高精度地广泛调整。为了证明这一点潜力，我们提出了连续波激光传播的数值结果，并表明范例现象，例如光孤子和调制不稳定性（见图 1c）可以用当前的实验能力观察到。



图一： a) 孤立原子的三能级方案，其中原子基态  $|1\rangle$ 、中间态  $|2\rangle$  和高度激发的里德伯态  $|3\rangle$  由强控制和拉比频率为  $\Omega_c$  的弱探测场相互驱动和  $\Omega_p$ ，分别。在双光子共振中，EIT 确保光场的无损传播，不受自发衰减 ( $\gamma$ ) 和单光子失谐  $\Delta/2$  的影响。 (b) 在原子气体中，里德堡态 ( $|3\rangle$ ) 原子之间的强范德华相互作用抑制了封锁半径  $R_c$  内的多个里德堡态激发，从而引起介质的强非线性光学响应。例如，由此产生的非线性光束传播会导致调制不稳定，如 (c) 所示，铷  $70S1/2$  里德堡气体的密度为  $8 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ ，并且  $\Omega_p/2\pi = 0.35 \text{ MHz}$ ,  $\Omega_c/2\pi = 80 \text{ MHz}$ ,  $\Delta/2\pi = 1.2 \text{ GHz}$ .

首先考虑具有振幅  $\Omega_p$  (见图 1b) 和波数  $k$  的光束的传播，如旁轴波动方程所述

$$\left( -\frac{i}{2k} \nabla_{\perp}^2 + \frac{\partial}{\partial z} \right) \Omega_p(\mathbf{r}) = \frac{ik}{2} \chi(\mathbf{r}) \Omega_p(\mathbf{r}) \quad (1)$$

其中  $\nabla_{\perp}$  考虑了相对于轴向坐标  $\mathbf{r}_{\perp} = (x, y)$  垂直的横向动力学到传播方向  $z$ 。相关的介质特性包含在复杂的磁化率中

$$\chi = \chi_R + i\chi_1 = \frac{2\phi_{12}^2}{\hbar\epsilon_0\Omega_p}\rho_{12} \quad (2)$$

它由探针跃迁的偶极子矩阵元素  $\rho_{12}$  和相应的原子相干密度  $\rho_{12}$  决定。探测场  $\Omega_p$  驱动梯型三能级原子的基态  $|1\rangle$  和低位激发态  $|2\rangle$  之间的较低跃迁（见图 1a），其光学响应由下式控制强大的控制场，驱动  $|2\rangle$  和里德伯态  $|3\rangle$  之间的上跃迁，Rabi 频率  $\Omega_c > \Omega_p$ 。在没有相互作用的情况下，这会产生一个完美的 EIT 介质，其中气体中的  $N$  个原子中的每一个都进入暗态  $|d_i\rangle \propto \Omega_c |1_i\rangle - \Omega_p(\mathbf{r}_i) |3_i\rangle (i = 1, \dots, N)$ 。这样  $\rho_{12} = \chi = 0$  并且探测光束不受原子介质的影响 [9]。在存在强里德堡里德堡原子相互作用的情况下，由于多激发里德堡态的能级偏移，气体动力学变得高度相关。在临界封锁半径  $R_c$  内，除了单个里德伯激发外，所有激发都被抑制 [25]（见图 1b）并从双光子共振中移除，从而减少 EIT，从而在一定范围内引起非局部吸收和折射  $\sim R_c$ 。由于未受干扰的暗态中的里德堡态群  $|d_i\rangle$  与  $\Omega_p(r_i)^2$  成正比，因此，期望得到与强度相关的，即非线性的，光学的响应。

建立了基本机制的简单图片后，我们现在从原子跃迁算子的基本海森堡方程中推导出最终的光学磁化率  $\hat{\sigma}_{\alpha\beta}^{(i)} = |\alpha_i\rangle\langle\beta_i| (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$ 。在低探测强度 ( $\Omega_p(r_i) \ll \Omega_c$ ) 的极限可以扩展为  $\Omega_p/\Omega_c$  [26]。在绝热消除  $\hat{\sigma}_{12}^{(i)}$  的情况下，我们获得了第  $i$  个原子的双光子跃迁算子单个动力学方程

$$\frac{d}{dt}\hat{\sigma}_{13}^{(i)} = -\Omega_c \frac{\Omega_p(r_i) + \Omega_c \hat{\sigma}_{13}^{(i)}}{2\Gamma} - \frac{\gamma_{13}}{2} \hat{\sigma}_{13}^{(i)} - i \sum_{j \neq i} V_{ij} \hat{\sigma}_{33}^{(j)} \hat{\sigma}_{13}^{(i)} \quad (3)$$

其中  $\hat{\sigma}_{33}^{(i)} = \hat{\sigma}_{31}^{(i)} \hat{\sigma}_{13}^{(i)}$ ,  $\Gamma = \gamma + \gamma_{12} - i\Delta$ ,  $\Delta/2$  是单光子失谐。 $\gamma$ 、 $\gamma_{12}$  和  $\gamma_{13}$  分别解释了中间态的自发衰变以及探测场的线宽和双光子跃迁得线宽。等式 (3) 中的最后一项描述了里德堡态原子之间的相互作用  $|3\rangle$ ,  $V_{ij} = C_6/|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^6$  表示位置  $r_i$  和  $r_j$  处原子的相应范德华势。由于范德华系数  $C_6 \propto n^{11}$  随着原子的主要量子数  $n$  急剧增加，高度激发的里德堡原子之间的相互作用超过两个低位态的相互作用许多数量级。正确包含由此产生的强原子相关

性需要二体知识相关  $\hat{\sigma}_{\alpha\beta}^{(j)} \hat{\sigma}_{\alpha'\beta'}^{(i)}$ , 它的动力学方程遵循公式 (3)，并应用链式法则。主要对  $\chi$  的首项感兴趣，因为它的贡献最大。我们可以再一次扩展生成的二体方程为  $\Omega_p$  中的首阶。这相当于放弃了直接的三体相关项，因此，为一阶和二阶产生了一组封闭的演化方程器。设  $\frac{d}{dt}\langle\hat{\sigma}_{\alpha\beta}^{(i)}\rangle = \frac{d}{dt}\langle\hat{\sigma}_{\alpha\beta}^{(j)}\hat{\sigma}_{\alpha'\beta'}^{(i)}\rangle = 0$ , 然后可以很容易地从所得的代数方程组中获得稳态期望值。最后，我们通过定义连续密度  $\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) =$

$$\sum_i \langle\hat{\sigma}_{\alpha\beta}^{(i)}\rangle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

$$\rho_{12}(\mathbf{r}) = \frac{i\gamma_{13}\Omega_p(\mathbf{r})}{\Omega_c^2 + \gamma_{13}\Gamma^2} \rho - \frac{\Omega_p(\mathbf{r})\Omega_c^4}{(\Omega_c^2 - \gamma_{13}\Gamma) + \Omega_c^2 + \gamma_{13}\Gamma)^2} \rho^2 \quad (4)$$

$$\times \int d\mathbf{r}' \frac{2|\Omega_p(\mathbf{r}')|^2 V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\Omega_c^2 + \gamma_{13}\Gamma + i\Gamma V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')},$$

其中  $\rho = \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$  与等式 (2) 一起产生了前导阶非线性磁化率，并允许根据等式 (1) 传播探测光束。

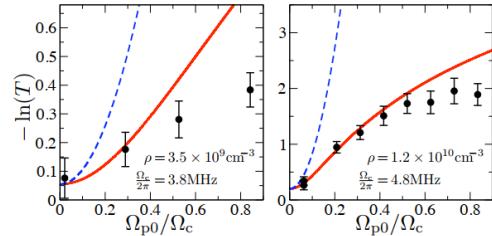


图 2：冷铷 Rydberg EIT 介质的非线性传输， $|3\rangle = |60S_{1/2}\rangle$  在两个不同的密度和控制 Rabi 频率下， $\gamma_{12}/2\pi = 110\text{kHz}$  和  $\gamma_{13}/2\pi = 220\text{kHz}$  [21]。直到  $\Omega_{p0} \approx 0.3\Omega_c$ ，我们的低  $\Omega_p$  预测方程 (5) 和 (6) (实线) 与实验数据 [21, 27] 之间有很好的一致性。虚线忽略了由于初始横向光束轮廓上的衰减和平均而导致的吸收下降。

如果原子被单光子共振驱动， $\Delta = 0$ ，主要的相互作用效应将是非线性吸收。因此，可以忽略横向光束动力学 ( $\nabla^2 \perp$ ) 以及等式 (4) 中的非定域性，通过设  $\Omega_p^2(\mathbf{r}') \approx \Omega_p^2(\mathbf{r})$  获得局部一阶和三阶磁化率，定义为  $\chi(\mathbf{r}) = \chi^{(1)} + \chi^{(3)}\Omega_p^2(\mathbf{r})$ 。对式 (4) 中剩余的空间积分进行解析可得

$$\begin{aligned}\chi_R^{(1)} &= 0, \chi_I^{(1)} = \frac{6\pi\gamma_{13}}{k^3(\gamma_{13}\Gamma + \Omega_6^2)}\rho, \\ \chi_R^{(3)} &= -\frac{4\sqrt{2}\pi^3\gamma\Omega_6^4C_6|C_6|^{-1/2}}{k^3\sqrt{\Gamma[\gamma_{13}\Gamma + \Omega_6^2]^{7/2}}}\rho^2, \quad \chi_I^{(3)} = |\chi_R^{(3)}|\end{aligned}\quad (5)$$

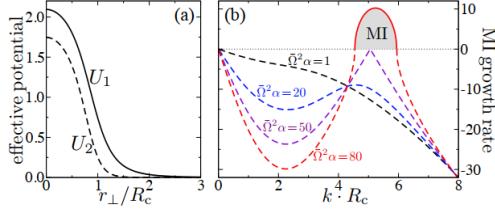


图 3: (a) 有效的光子-光子相互作用势，在等式 (8) 中引入。 (b) 具有波数  $k$  的强度调制的增长率  $\Gamma_{MI}$ ，用于散焦不同强度  $\Omega^2 \alpha$  的非线性。虚线表示相应的虚部，而实线表示  $\Gamma_{MI}$  的实部。  $\Omega^2 \alpha_{MI} = 50.06$  的临界值标志着调制不稳定在  $\Omega^2 \alpha = 80$  的灰色阴影区域指示的窄波数窗口内开始。

通过引入由相互作用  $|C_6|/\tilde{R}_c^6$  超过 EIT 窗口的宽度  $\delta_{EIT} = \Omega_2^2/\Gamma$  的距离定义的共振阻塞半径  $\tilde{R}_c$ ，该表达式允许进行简单的解释 [23]。用  $\tilde{R}_c = (|C_6|/\delta_{EIT})^{1/6}$  替换  $C_6$  显示  $\chi^{(3)}$  与相应两能级响应时间和阻塞原子的数量成正比，这与上面概述的简单图片和 [24] 数值一致。

在实验上，最近研究了涉及  $|3\rangle = |60S_{1/2}\rangle$  里德堡态的冷铷气体中的非线性吸收 [21]。在实验中，对于不同强度和原子密度，测量了通过长度为 1 的气体的高斯探测光的传输系数  $T$ 。在局部近似中，此配置允许对等式 (1) 的集成光束传输进行简单求解

$$T = T_0 \frac{\ln(1+p)}{p}, \quad (6)$$

其中  $p = \Omega_{po}^2 \chi_I^{(3)} (1 - T_0) / \chi_I^{(1)}$  和  $T_0 = e^{-k\chi^{(1)}l}$  — 阶传输。图 2 显示了两种不同密度的比较，

并证明了传输的一致性，即使对于高达  $\Omega_{po} \approx 0.3 \Omega_c$  的相当大的探测 Rabi 频率也是如此。请注意，非线性光束衰减对磁化率的反作用，同样重要的是，横向光束轮廓的平均对于正确描述实验都是必不可少的。忽略这些影响会产生图 2 中的虚线，它显着高估了非线性

吸收。

由于共振  $\chi_I^{(3)} = |\chi_R^{(3)}|$ 。巨大的非线性折射不可避免地伴随着高光子损失。然而，对于大的单光子失谐  $\Delta \gg \gamma$  会产生  $\chi_I \sim (\gamma/\Delta)\chi_R^{(3)}$ 。这样的耗散损失可以被大大压制。例如，对于  $\Omega_c/2\pi = 5\text{MHz}$ 、 $\Omega_{po}/2\pi = 0.5\text{MHz}$ 、 $\Delta = 30\text{GHz}$  和  $\rho = 8 \times 10^{13}\text{cm}^{-3}$  的铷里德伯气体，可以获得大的吸收长度  $l_{abs} \approx 1\text{mm}$ ，并且具有高非线性折射率  $n_2 \approx 2 \times 10^4 \text{ cm}^2/\text{W}$ ，比以前在相同密度下用超冷 Rb 基态原子获得的折射率高 5 个数量级 [10]。

当折射开始支配吸收时， $\chi^{(3)}$  的非局域性开始变得重要。为了考虑 它对横向光束传播的影响，我们将等式 (2, 4) 重铸为

$$\begin{aligned}\chi(\mathbf{r}) = -\frac{12\pi\gamma\rho^2}{k^3\Delta\Omega_c^2} \int d\mathbf{r}' \frac{|\Omega_p(\mathbf{r}'_\perp, z)|^2}{1 + \frac{|r' - r|^6}{R_c^6}} \\ - i \frac{\gamma}{\Delta} \frac{|\Omega_p(\mathbf{r}'_\perp, z)|^2}{[1 + \frac{|r' - r|^6}{R_c^6}]^2} \quad (7)\end{aligned}$$

其中我们假设  $\gamma/12 \gg \Delta$  并引入由非共振 EIT 宽度  $\delta_{EIT}$  设置的非共振阻塞半径  $R_c = (C_6/\delta_{EIT})^{1/6}$  ( $C_6 \Delta > 0$ ) [23]。为了简化问题，我们通过定义比例坐标  $\tau = z/(kR_c^2)$ ,  $\xi = \mathbf{r}_\perp/R_c$  和无量纲探头振幅  $\Omega$ ，归一化为  $\int \Omega^2(\xi, \tau) d^2\xi = 1$ 。保留沿传播方向的局部近似 [31] 这产生二维非线性薛定谔方程

$$\begin{aligned}i \partial_\tau \Omega(\xi, \tau) = & \left[ -\frac{\nabla^2 \xi}{2} + \alpha \int d\xi' |\Omega(\xi', \tau)|^2 U_1(\xi - \xi') \right. \\ & \left. - i \frac{\gamma^i}{\Delta} \alpha \int d\xi' |\Omega(\xi', \tau)|^2 U_2(\xi - \xi') \right] \Omega(\xi, \tau), \quad (8)\end{aligned}$$

排斥性原子相互作用导致自散焦非线性，而有吸引力的原子相互作用映射到自聚焦非线性。前一种情况，例如，可以像实验中那样用冷 Rb( $nS_{1/2}$ ) 里德堡态来实现 [21]

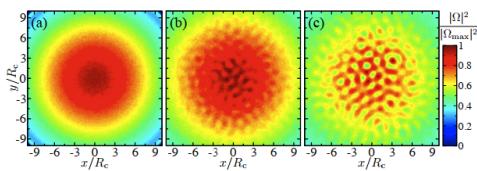


图 4: 输出光束轮廓  $|\Omega|^2(r_{\perp})$  对于  $\Omega_p/2\pi = 0.35\text{MHz}$ ,  $\Omega_c/2\pi = 80\text{MHz}$  和  $\Delta/2\pi = 1.2\text{GHz}$ , 在三个不同密度下通过  $\text{Rb}(nS_{1/2})$  EIT 介质传播  $l = 210\mu\text{m}$  后 (a)  $4 \times 10^{13}\text{cm}^{-3}$ , (b)  $5.5 \times 10^{13}\text{cm}^{-3}$  和 (c)  $8 \times 10^{13}\text{cm}^{-3}$ 。对于颜色编码, 每个  $|\Omega|_{\max}|^2$  分布都归一化为实际最大强度

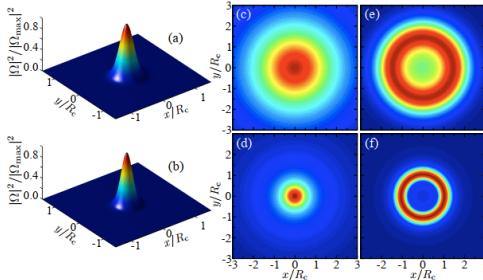


图 5: 强度分布  $|\Omega|^2(r_{\perp})$  对于  $\Omega_0/2\pi = 0.3\text{MHz}$ ,  $\Omega_c/2\pi = 15\text{MHz}$ ,  $\Delta/2\pi = 3.2\text{GHz}$  在两个不同密度 (a, c, e)  $8 \times 10^{11}\text{cm}^{-3}$  和 (b, d, f)  $1.2 \times 10^{12}\text{cm}^{-3}$ 。面板 (a, b) 显示了稳定的孤子解, 而面板 (c-f) 显示了对于具有 (c, d)  $v = 2$  和 (e, f) 的输入光束, 在传播长度  $l = 240\mu\text{m}$  之后的强度分布中的压缩输出  $v = 6$ 。颜色编码与图 4 相同。

上面讨论过。虽然由此产生的光子-光子相互作用是各向同性排斥的, 但相应的动量空间相互作用  $\tilde{U}_1(k)$  不是符号确定的。

尽管散焦, 但当前的非局部相互作用可以因此促进稳定性的调制。在图 3b 中, 我们显示了给定模式的相应速率  $\Gamma_{\text{MI}}(k) =$

$-\frac{k}{2}\sqrt{k^2 - 4\alpha\Omega^2\tilde{U}_1(k)}$  [4]. 该增长率  $\Gamma_{\text{MI}}$  假设

在临界相互实数值 [28] 导致稳态反向强度模式。我们对超高斯光束  $\Omega = \Omega_0 e^{-(\xi/w)^v+i\phi}$  与  $v = 6$  和小的  $\text{Rb}(7S1/2)$  里德堡气体进行了等式 (8) 的数值模拟空间相位噪声  $\Phi$ 。图 4 显示了针对不同原子密度计算出的输出强度分布, 并证明了高度局部化、高密度气体中实现。相当规则的强度模式可以在具有可行激光参数的条件下实现。

自聚焦非线性源于有吸引力的 Rydberg 相互作用, 如发生在锶原子的  $n^1S_0$  态之间 [29], 最近观察到 EIT [14]。在这种情况下, 原则上, 对于任何  $\alpha < 0$  和足够大的光束宽度, 都会发生调制不稳定性。然而, 更重要的是, 有吸引力的光子软核相互作用能够形成稳定的亮孤子, 从而导致紧密的光束聚焦。

方程式 (8) 的简单变分分析 (见, 例如, [30]) 产生  $\alpha_{\text{so}} \approx 0.71$  的临界相互作用强度, 高于该强度存在稳定的亮孤子。图 5a 和 5b 显示了  $\text{Sr}(50^1S_0)$  气体的两个例子并揭示了一个特征。孤子大小小于等于  $R_c$ 。此外, 我们还展示了高斯 ( $v = 2$ ) 和超高斯 ( $v = 6$ ) 输入光束的最终强度分布。所有情况都是针对  $w = 3R_c$  的输入宽度, 并在考虑的传播长度  $l = 240\mu\text{m}$  后表现出显着的聚焦。在后一种情况下, 光束压缩由径向 MI 叠加, 导致环形空心输出光束。这些结构的典型尺寸为几微米, 很容易通过实验观察到。

总之, 我们提出了一种强相互作用 Rydberg-EIT 气体的非线性响应理论, 与最近的测量结果非常吻合。三阶磁化率的导出表达式表明, 高度非局部特征的巨大非线性可以通过实验实现, 这为研究复杂的非线性波动现象提供了理想的环境。为了证明这些前景, 我们已经表明, 对诸如亮孤子形成和坍缩阻滞调制不稳定性等基本效应的观察在实验范围内。后者在散焦、非局部非线性的罕见情况下特别有趣。在这里,

新出现的强度峰之间的排斥与横向光束限制相结合可能会促进光子的横向超固态或晶态的形成。这个问题可以在目前的方法中得到解决，扩展到量子光以解释原子-光子和光子-光子相关性，这将为研究许多具有强相互作用光子的身体物理学开辟一个通用框架。从不同的角度来看，我们希望所讨论的非线性光传播与解释高密度冷里德堡气体实验相关。

我们感谢 A. Gorshkov、MD Lukin、JD Pritchard、CS Adams、S. Skupin、J. Otterbach 和 M. Fleischhauer 进行的宝贵讨论，并感谢 CS Adams 提供未发表的实验数据。

- [23] A.V. Gorshkov *et al.*, arXiv:1103.3700
  - [24] C. Ates *et al.*, Phys. Rev. A **83**, 041802 (2011).
  - [25] M.D. Lukin *et al.*, Phys. Rev. Lett. **87**, 037901 (2001).
  - [26] M. Fleischhauer and M.D. Lukin, Phys. Rev. A **65**, 022314 (2002).
  - [27] C.S. Adams, private communication.
  - [28] N. Henkel *et al.*, Phys. Rev. Lett. **104**, 195302 (2010).
  - [29] R. Mukherjee *et al.*, arXiv:1102.3792
  - [30] F. Maucher *et al.*, Phys. Rev. Lett. **106**, 170401 (2011).
  - [31] We verified numerically that the local approximation still holds along the propagation direction for the parameters of this work.
- [1] M. Peccianti *et al.*, Optics Letters, **27** 1460 (2002).
  - [2] C. Conti *et al.*, Phys. Rev. Lett. **92**, 113902 (2004).
  - [3] C. Rotschild *et al.*, Nature Phys. **2** 769 (2006).
  - [4] J. Wyller *et al.*, Phys. Rev. E **66** 066615 (2002).
  - [5] C. Conti *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91** 073901 (2003).
  - [6] D. Mihalache *et al.*, Phys. Rev. E **73** 025601(R) (2005).
  - [7] S. Skupin *et al.*, Phys. Rev. Lett **98** 263902 (2007).
  - [8] I.B. Burgess *et al.*, Phys. Rev. Lett. **102**, 203903 (2009).
  - [9] M. Fleischhauer *et al.*, Rev. Mod. Phys., **77**, 633 (2005).
  - [10] L. Hau *et al.*, Nature (London) **397**, 594 (1999).
  - [11] S.E. Harris *et al.*, Phys. Rev. Lett., **64**, 1107 (1990).
  - [12] M. Bajcsy *et al.*, Phys. Rev. Lett. **102**, 203902 (2009).
  - [13] I. Friedler *et al.*, Phys. Rev. A **72**, 043803 (2005).
  - [14] S. Mauger *et al.*, J. Phys. B **40**, F319 (2007).
  - [15] A.K. Mohapatra *et al.*, Nature Phys. **4**, 890 (2008).
  - [16] J. Zhao *et al.*, Opt. Express **17**, 15821 (2009)
  - [17] T. Pohl *et al.*, Phys. Rev. Lett. **104**, 043002 (2010).
  - [18] B. Olmos and I. Lesanovsky, Phys. Rev. A **82**, 063404(2010).
  - [19] A.K. Mohapatra *et al.*, Phys. Rev. Lett. **98**, 113003(2010).
  - [20] H. Schempp *et al.*, Phys. Rev. Lett. **104**, 173602 (2010).
  - [21] J.D. Pritchard *et al.*, Phys. Rev. Lett. **105**, 193603(2010).
  - [22] C. Guerlin *et al.*, Phys. Rev. A **82**, 053832 (2010).

## 附录 C 计算机源程序

### —维双光子系统

```

%% counterpropagating
clc
close all
clear all
tic
%% define colormap
%{
color_1=[1,0,0];
color_2=[1,1,1];
color_3=[0,0,1];

num12=100;num23=100;

R_mat=[linspace(color_1(1),color_2(1),num12),linspace(color_2(1),color_3(1),num23)];
W_mat=[linspace(color_1(2),color_2(2),num12),linspace(color_2(2),color_3(2),num23)];
B_mat=[linspace(color_1(3),color_2(3),num12),linspace(color_2(3),color_3(3),num23)];
RWB=[R_mat',W_mat',B_mat'];
%}
%% define r space
xmin = 0;
xmax = 50;
Lx = xmax-xmin;
N = 2^8;
dx = Lx/N;
X = xmin:dx:xmax-dx;
Y=X;
[x,y] = meshgrid(X);
%% define k space
dkx = 2*pi/Lx;
Kx = linspace(-pi/dx,pi/dx,N+1);
Kx(end)=[];
Ky =Kx;
[kx,ky]=meshgrid(Kx);
%% Potential
% 量纲为 s, um
C6 = 2*pi*864*1e9;
gamma = 2.*pi.*6.067*1e6;
C = 3*1e8*1e6;
delta = 20*gamma;
g2n = 190096*delta^2;
ommiga = 2*delta;
Gamma = gamma; %-1i*delta;

```

```

Rb = ((C6.*((delta+0i*gamma))./(2*(ommiga.^2))).^(1/6);
Theta = [];
t = 0;
T= [];
Re = [];
Im = [];
Tkm = [];

dt_initial = 1e-16;
dt = g2n./ommiga.^2*dt_initial;% Rc很小的时候dt与vg的乘积很大，约等于1e3远大于网
格划分，所以结果不平滑
a = ommiga.^2/delta;
V = -a./(1+(((x-y)./Rb).^6));
%V(abs(x-y)>Rc(m)) = 0;
%% define T and V
vgr = 0.5*C*ommiga^2./(g2n);
vg1 = vgr;
vg2 = -vgr;
T1 = vg1*kx./2;
T2 = vg2*ky./2;
A1 = exp(-1i*dt.*T1); %x1 direction
A2 = exp(-1i*dt.*T2); %x2 direction
B = exp(-1i*dt.*V);
%% initial state
x0 = 14;
y0 = 42;
gammax = 1;
gamma = 1;
sigma = 1;
u=exp(-(gammax*(x-x0).^2+gamma*(y-y0).^2)/(2.*sigma.^2))/sqrt(2.*pi^(3/2));
nor1=sum(sum(abs(u).^2))*dx^2;
u=u./sqrt(nor1); % 归一化 centered gaussian
%{
figure(1)
subplot(2,2,1)
contourf(x,y,abs(u))
title('abs\phil');
xlabel('第一个光子的位置x1')
ylabel('第二个光子的位置x2')
colorbar;
subplot(2,2,2)
contourf(x,y,abs(u).^2)
%
```

```
title('abs|\phi|^2');
xlabel('第一个光子的位置x1')
ylabel('第二个光子的位置x2')
colorbar;
subplot(2,2,3)
contourf(x,y,real(u))
title('real(\phi)');
xlabel('第一个光子的位置x1')
ylabel('第二个光子的位置x2')
colorbar;
subplot(2,2,4)
contourf(x,y,imag(u))
title('imag(\phi)');
xlabel('第一个光子的位置x1')
ylabel('第二个光子的位置x2')
colorbar;
%}
%% time evolution
n = 0;
P = [0,0,0];
%n0 = 600;
while 1
    n=n+1;
    %step1 y direction
    u = fftshift(fft(u,[],2),2);
    u = ifft(ifftshift(A1.*u),[],2);
    %step2 x direction
    u = fftshift(fft(u));
    u = ifft(ifftshift(A2.*u));
    %step3
    u = B.*u;
    %step4
    u = fftshift(fft(u));
    u = ifft(ifftshift(A2.*u));
    %step5
    u = fftshift(fft(u,[],2),2);
    u = ifft(ifftshift(A1.*u),[],2);
    u = u;

    theta = cos(angle(u(abs(u)==max(max(abs(u))))));
```

```

Theta= [Theta, theta];
im = imag(u(abs(u)==max(max(abs(u)))); 
Im = [Im, im];
re = real(u(abs(u)==max(max(abs(u)))); 
Re = [Re, re];
t = t + dt;
T = [T, t];

if n==20
    Tkm = [Tkm,t];
    figure(1)
    colormap(PYCM().coolwarm())
    subplot(2,2,1)
    surf(x,y,cos(angle(u)))
    view(0,90)
    shading flat
    title('相位的余弦值cos(\Delta\phi)');
    xlabel('$z_{\{1\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
    ylabel('$z_{\{2\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
    xlim([xmin,xmax])
    ylim([xmin,xmax])
    colorbar;
    clim([-5,5])
    subplot(2,2,2)
    surf(x,y,abs(u).^2)
    view(0,90)
    shading flat
    title('波函数的概率密度|\Psi|^2');
    xlabel('$z_{\{1\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
    ylabel('$z_{\{2\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
    xlim([xmin,xmax])
    ylim([xmin,xmax])
    colorbar;
    clim([-1e-4,1e-4])
    subplot(2,2,3)
    surf(x,y,real(u))
    view(0,90)
    shading flat
    title('波函数的实部real(\Psi)');
    xlabel('$z_{\{1\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
    ylabel('$z_{\{2\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
    xlim([xmin,xmax])
    ylim([xmin,xmax])

```

```

colorbar;
clim([-1e-3,1e-3])
subplot(2,2,4)
surf(x,y,imag(u))
view(0,90)
shading flat
title('波函数的虚部imag(\Psi)');
xlabel('$z_{\{1\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
ylabel('$z_{\{2\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
xlim([xmin,xmax])
ylim([xmin,xmax])
colorbar;
clim([-1e-8,1e-8])
%sgtitle(['t=',num2str(t)])
end

%theta = cos(angle(u(fix(3*N/4),fix(3*N/4))));
%Theta(m)=theta;
[indexy,indexx]=find(abs(u)==max(abs(u),[],'all'));
%      aa=x(indexx)
%      bb=y(indexy)

if X(indexx)-Y(indexy)>(Rb+sqrt(gamma))*sqrt(2) && P(1) == 0
    Tkm = [Tkm,t];
    P(1) = 1
    figure(2)
    colormap(PYCM().coolwarm())
    subplot(2,2,1)
    surf(x,y,cos(angle(u)))
    view(0,90)
    shading flat
    title('相位的余弦值cos(\Delta\phi)');
    xlabel('$z_{\{1\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
    ylabel('$z_{\{2\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
    xlim([xmin,xmax])
    ylim([xmin,xmax])
    colorbar;
    clim([-5,5])
end

```

```

subplot(2,2,2)
surf(x,y,abs(u).^2)
view(0,90)
shading flat
title('波函数的概率密度|\Psi|^2');
xlabel('$z_{\{1\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
ylabel('$z_{\{2\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
xlim([xmin,xmax])
ylim([xmin,xmax])
colorbar;
clim([-1e-4,1e-4])
subplot(2,2,3)
surf(x,y,real(u))
view(0,90)
shading flat
title('波函数的实部real(\Psi)');
xlabel('$z_{\{1\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
ylabel('$z_{\{2\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
xlim([xmin,xmax])
ylim([xmin,xmax])
colorbar;
clim([-1e-3,1e-3])
subplot(2,2,4)
surf(x,y,imag(u))
view(0,90)
shading flat
title('波函数的虚部imag(\Psi)');
xlabel('$z_{\{1\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
ylabel('$z_{\{2\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
xlim([xmin,xmax])
ylim([xmin,xmax])
colorbar;
clim([-1e-4,1e-4])
%sgtitle(['t=',num2str(t)])
end

if X(indexx)-Y(indexy)>(Rb+sqrt(gamma))*sqrt(2) && P(2) == 0
Tkm = [Tkm,t];
P(2) = 1
figure(3)
colormap(PYCM().coolwarm())
subplot(2,2,1)

```

```
surf(x,y,cos(angle(u)))
view(0,90)
shading flat
title('相位的余弦值cos(\Delta\phi)');
xlabel('$z_{1}(\{\mu m\})$', 'interpreter', 'latex', 'FontWeight', 'bold')
ylabel('$z_{2}(\{\mu m\})$', 'interpreter', 'latex', 'FontWeight', 'bold')
xlim([xmin,xmax])
ylim([xmin,xmax])
colorbar;
clim([-5,5])
subplot(2,2,2)
surf(x,y,abs(u).^2)
view(0,90)
shading flat
title('波函数的概率密度|\Psi|^2');
xlabel('$z_{1}(\{\mu m\})$', 'interpreter', 'latex', 'FontWeight', 'bold')
ylabel('$z_{2}(\{\mu m\})$', 'interpreter', 'latex', 'FontWeight', 'bold')
xlim([xmin,xmax])
ylim([xmin,xmax])
colorbar;
clim([-1e-4,1e-4])
subplot(2,2,3)
surf(x,y,real(u))
view(0,90)
shading flat
title('波函数的实部real(\Psi)');
xlabel('$z_{1}(\{\mu m\})$', 'interpreter', 'latex', 'FontWeight', 'bold')
ylabel('$z_{2}(\{\mu m\})$', 'interpreter', 'latex', 'FontWeight', 'bold')
xlim([xmin,xmax])
ylim([xmin,xmax])
colorbar;
clim([-1e-3,1e-3])
subplot(2,2,4)
surf(x,y,imag(u))
view(0,90)
shading flat
title('波函数的虚部imag(\Psi)');
xlabel('$z_{1}(\{\mu m\})$', 'interpreter', 'latex', 'FontWeight', 'bold')
ylabel('$z_{2}(\{\mu m\})$', 'interpreter', 'latex', 'FontWeight', 'bold')
xlim([xmin,xmax])
ylim([xmin,xmax])
colorbar;
```

```

clim([-1e-4,1e-4])
%sgtitle(['t=',num2str(t)])
end

if X(indexx)-Y(indexy)>(Rb+sqrt(gamma))*sqrt(2)+25
    Tkm = [Tkm,t];
    figure(4)
    colormap(PYCM().coolwarm())
    subplot(2,2,1)
    surf(x,y,cos(angle(u)))
    view(0,90)
    shading flat
    title('相位的余弦值cos(\Delta\phi)');
    xlabel('$z_{\{1\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
    ylabel('$z_{\{2\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
    xlim([xmin,xmax])
    ylim([xmin,xmax])
    colorbar;
    clim([-5,5])
    subplot(2,2,2)
    surf(x,y,abs(u).^2)
    view(0,90)
    shading flat
    title('波函数的概率密度|\Psi|^2');
    xlabel('$z_{\{1\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
    ylabel('$z_{\{2\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
    xlim([xmin,xmax])
    ylim([xmin,xmax])
    colorbar;
    clim([-1e-4,1e-4])
    subplot(2,2,3)
    surf(x,y,real(u))
    view(0,90)
    shading flat
    title('波函数的实部real(\Psi)');
    xlabel('$z_{\{1\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
    ylabel('$z_{\{2\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
    xlim([xmin,xmax])
    ylim([xmin,xmax])
    colorbar;
    clim([-1e-3,1e-3])

```

```
subplot(2,2,4)
surf(x,y,imag(u))
view(0,90)
shading flat
title('波函数的虚部');
xlabel('$z_{1}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
ylabel('$z_{2}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
xlim([xmin,xmax])
ylim([xmin,xmax])
colorbar;
clim([-1e-4,1e-4])
%sgtitle(['t=',num2str(t)])
break
end
end
%theta = cos(angle(u(fix(3*N/4),fix(3*N/4))));

toc

An = atan2(Im,Re);
An = unwrap(An);

figure(5)

subplot(2,2,1)
plot(T,Re,'-o');
title('双光子系统波函数实部随时间的变化关系')
xlabel('t(s)','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
ylabel('real( $\Psi$ )','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')

subplot(2,2,2)
plot(T,Im,'-o');
title('双光子系统波函数虚部随时间的变化关系')
xlabel('t(s)','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
ylabel('imag( $\Psi$ )','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')

subplot(2,2,3)
plot(T,An,'-o');
title('双光子系统相位随时间的变化关系')
xlabel('t(s)','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
ylabel('Delta phi(rad)','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
```

```

subplot(2,2,4)
plot(T,Theta,'-o');
title('双光子系统相位的余弦值随时间的变化关系')
xlabel('$t(s)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
ylabel('$\cos(\Delta\phi)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')

Tkm
%set(gca,'xtick',0:1:15)

```

## 一维三光子系统

```

%% counterpropagating
clc
close all
clear all
tic
%% define r space
xmin = 0;
xmax = 50;
Lx = xmax-xmin;
N = 2^8;
dx = Lx/N;
X = xmin:dx:xmax-dx;
Y=X;
Z=X;
[x,y,z] = meshgrid(X);
%% define k space
dkx = 2*pi/Lx;
Kx = linspace(-pi/dx,pi/dx,N+1);
Kx(end)=[];
Ky =Kx;
[kx,ky,kz]=meshgrid(Kx);
%% Potential
% 量纲为 s, um
C6 = 2*pi*864*1e9;
gamma = 2.*pi.*6.067*1e6;
C = 3*1e8*1e6;
delta = 20*gamma;
g2n = 950000*delta^2;
ommiga = 2*delta;
Gamma = gamma; %-1i*delta;
Rb = ((C6.*(delta+0i*gamma))./(2*(ommiga.^2))).^(1/6);

```

```

Theta = [];
t = 0;
T= [];
Tkm = [];

dt_initial = 1e-15;
dt = g2n./(ommiga.^2)*dt_initial;% Rc很小的时候dt与vg的乘积很大，约等于1e3远大于
网格划分，所以结果不平滑
a = ommiga.^2/delta;
V1 = -a./(1+((x-y)./Rb).^6));
V2 = -a./(1+((y-z)./Rb).^6));
V3 = -a./(1+((x-z)./Rb).^6));
%V(abs(x-y)>Rc) = 0;
%% define T and V
vgr = C*ommiga^2./(g2n);
vg1 = 0.5*vgr;
vg2 = -0.5*vgr;
vg3 = -0.5*vgr;
T1 = vg1*kx./2;
T2 = vg2*ky./2;
T3 = vg3*kz./2;
A1 = exp(-1i*dt.*T1); %x1 direction
A2 = exp(-1i*dt.*T2); %x2 direction
A3 = exp(-1i*dt.*T3);
B = exp(-1i*dt.*(V1+V3));
%% initial state
x0 = 14;
y0 = 28;
z0 = 42;
gammax = 1;
gammay = 1;
gammaz = 1;
sigma = 1;
u=exp(-(gammax*(x-x0).^2+gammay*(y-y0).^2+gammaz*(z-
z0).^2)/(2.*sigma.^2))/sqrt(2.*pi^(3/2));
nor1=sum(sum(sum(abs(u).^2)))*dx^3;
u=u./sqrt(nor1); % 归一化 centered gaussian

kx = [];
ky = [];
kz = [];
T1 = [];
T2 = [];

```

```
T3 = [];

%% 初态波函数
%{
figure(1)
subplot(2,2,1)
isosurface(x,y,z,abs(u))
title('abs(\phi)');
xlabel('x')
ylabel('y')
colorbar;
view(3)
subplot(2,2,2)
isosurface(x,y,z,abs(u).^2)
title('abs(\phi)^2');
colorbar;
view(3)
subplot(2,2,3)
isosurface(x,y,z,real(u))
title('real(\phi)');
colorbar;
view(3)
subplot(2,2,4)
isosurface(x,y,z,imag(u))
title('imag(\phi)');
colorbar;
view(3)
%}
%% time evolution
n = 0;
P = [0,0,0,0,0];
M1 = [0,0,0,0,0,0];
M2 = [0,0,0,0,0,0];
M3 = [0,0,0,0,0,0];
M4 = [0,0,0,0,0,0];
M5 = [0,0,0,0,0,0];
M6 = [0,0,0,0,0,0];
xslice = (0:2:50);
yslice = (0:2:50);
zslice = (0:2:50);

%n0 = 600;
while 1
    n=n+1;
```

```

%step1 z direction
u = fftshift(fft(u,[],2),2);
u = ifft(ifftshift(A1.*u,2),[],2);
%step2 x direction
u = fftshift(fft(u,[],1),1);
u = ifft(ifftshift(A2.*u,1),[],1);
%step3 y direction
u = fftshift(fft(u,[],3),3);
u = ifft(ifftshift(A3.*u,3),[],3);
%step4
u = B.*u;
%step5
u = fftshift(fft(u,[],3),3);
u = ifft(ifftshift(A3.*u,3),[],3);
%step6
u = fftshift(fft(u,[],1),1);
u = ifft(ifftshift(A2.*u,1),[],1);
%step7
u = fftshift(fft(u,[],2),2);
u = ifft(ifftshift(A1.*u,2),[],2);
%u=u;

theta = cos(angle(u(abs(u)==max(max(max(max(u)))))));
Theta= [Theta, theta];
t = t + dt;
T = [T, t];

if n==1
    Tkm = [Tkm,t];
    M1(1)= max(max(max(abs(u))));
    M2(1)= min(min(min(abs(u))));
    M3(1)= max(max(max(real(u))));
    M4(1)= min(min(min(real(u))));
    M5(1)= max(max(max(imag(u))));
    M6(1)= min(min(min(imag(u))));

figure(1)

colormap(PYCM().coolwarm())
subplot(2,2,1)
slice(x,y,z,cos(angle(u)),xslice,yslice,zslice)
alpha(0.5*1e-1)
grid off

```

```

shading interp
title('相位的余弦值cos(\Delta\phi)');
xlabel('$z_{\{1\}}(\{\mu m\})$', 'interpreter', 'latex', 'FontWeight', 'bold')
ylabel('$z_{\{2\}}(\{\mu m\})$', 'interpreter', 'latex', 'FontWeight', 'bold')
zlabel('$z_{\{3\}}(\{\mu m\})$', 'interpreter', 'latex', 'FontWeight', 'bold')
xlim([xmin,xmax])
ylim([xmin,xmax])
zlim([xmin,xmax])
colorbar;
clim([-1,1])
view(3)
subplot(2,2,2)
slice(x,y,z,abs(u).^2,xslice,yslice,zslice)
alpha(1e-1)
grid off
shading interp
title('波函数的概率密度|\Psi|^2');
xlabel('$z_{\{1\}}(\{\mu m\})$', 'interpreter', 'latex', 'FontWeight', 'bold')
ylabel('$z_{\{2\}}(\{\mu m\})$', 'interpreter', 'latex', 'FontWeight', 'bold')
zlabel('$z_{\{3\}}(\{\mu m\})$', 'interpreter', 'latex', 'FontWeight', 'bold')
xlim([xmin,xmax])
ylim([xmin,xmax])
zlim([xmin,xmax])
colorbar;
clim([-1e-18,1e-18])
view(3)
subplot(2,2,3)
slice(x,y,z,real(u),xslce,yslice,zslice)
alpha(1e-1)
grid off
shading interp
title('波函数的实部real(\Psi)');
xlabel('$z_{\{1\}}(\{\mu m\})$', 'interpreter', 'latex', 'FontWeight', 'bold')
ylabel('$z_{\{2\}}(\{\mu m\})$', 'interpreter', 'latex', 'FontWeight', 'bold')
zlabel('$z_{\{3\}}(\{\mu m\})$', 'interpreter', 'latex', 'FontWeight', 'bold')
xlim([xmin,xmax])
ylim([xmin,xmax])
zlim([xmin,xmax])
colorbar;
clim([-1e-10,1e-10])
view(3)
subplot(2,2,4)
slice(x,y,z,imag(u),xslce,yslice,zslice)

```

```

alpha(1e-1)
grid off
shading interp
title('波函数的虚部imag(\Psi)');
xlabel('$z_{\{1\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
ylabel('$z_{\{2\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
zlabel('$z_{\{3\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
xlim([xmin,xmax])
ylim([xmin,xmax])
zlim([xmin,xmax])
colorbar;
clim([-1e-11,1e-11])
view(3)
%sgtitle(['t=',num2str(t)])
end

%theta = cos(angle(u(fix(3*N/4),fix(3*N/4))));
%Theta(m)=theta;

s=size(u);
Lax=find(abs(u)==max(max(max(abs(u))))) ;
[indexy,indexx,indexz]=ind2sub(s,Lax);

%% 刚刚进入第一个阻塞区域
if X(indexx)-Y(indexy)>(Rb+sqrt(gamma))*sqrt(2) && P(1) == 0
    Tkm = [Tkm,t];
    P(1) = 1
    M1(2)= max(max(max(abs(u))));
    M2(2)= min(min(min(abs(u))));
    M3(2)= max(max(max(real(u))));
    M4(2)= min(min(min(real(u))));
    M5(2)= max(max(max(imag(u))));
    M6(2)= min(min(min(imag(u))));
    %{
    dt_initial = 1e-14;
    dt = g2n./(ommiga.^2)*dt_initial;
    A1 = exp(-1i*dt/2.*T1); %x1 direction
    A2 = exp(-1i*dt/2.*T2); %x2 direction
    A3 = exp(-1i*dt/2.*T3);

```

```

B = exp(-1i*dt.* (V1+V3));
%}

figure(2)
colormap(PYCM().coolwarm())
subplot(2,2,1)
slice(x,y,z,cos(angle(u)),xslice,yslice,zslice)
alpha(0.5*1e-1)
grid off
shading interp
title('相位的余弦值cos(Delta\phi)');
xlabel('$z_{\{1\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
ylabel('$z_{\{2\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
zlabel('$z_{\{3\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
xlim([xmin,xmax])
ylim([xmin,xmax])
zlim([xmin,xmax])
colorbar;
clim([-1,1])
view(3)
subplot(2,2,2)
slice(x,y,z,abs(u).^2,xslice,yslice,zslice)
alpha(1e-1)
grid off
shading interp
title('波函数的概率密度|\Psi|^2');
xlabel('$z_{\{1\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
ylabel('$z_{\{2\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
zlabel('$z_{\{3\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
xlim([xmin,xmax])
ylim([xmin,xmax])
zlim([xmin,xmax])
colorbar;
clim([-1e-19,1e-19])
view(3)
subplot(2,2,3)
slice(x,y,z,real(u),xslice,yslice,zslice)
alpha(1e-1)
grid off
shading interp
title('波函数的实部real(\Psi)');

```

```

xlabel('$z_{\{1\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
ylabel('$z_{\{2\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
zlabel('$z_{\{3\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
xlim([xmin,xmax])
ylim([xmin,xmax])
zlim([xmin,xmax])
colorbar;
clim([-1e-9,1e-9])
view(3)
subplot(2,2,4)
slice(x,y,z,imag(u),xslice,yslice,zslice)
alpha(1e-1)
grid off
shading interp
title('波函数的虚部imag(\Psi)');
xlabel('$z_{\{1\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
ylabel('$z_{\{2\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
zlabel('$z_{\{3\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
xlim([xmin,xmax])
ylim([xmin,xmax])
zlim([xmin,xmax])
colorbar;
clim([-1e-9,1e-9])
view(3)
%sgtitle(['t=',num2str(t)])

```

end

```

%% 出第一个阻塞区

if X(indexx)-Y(indexy)>(Rb+sqrt(gammax))*sqrt(2) && P(2) == 0
    Tkm = [Tkm,t];
    P(2)=1
    M1(3)= max(max(max(abs(u))));
    M2(3)= min(min(min(abs(u))));
    M3(3)= max(max(max(real(u))));
    M4(3)= min(min(min(real(u))));
    M5(3)= max(max(max(imag(u))));
    M6(3)= min(min(min(imag(u))));

    %{

```

```

dt_initial = 1e-15;
dt = g2n./(ommiga.^2)*dt_initial;
A1 = exp(-1i*dt/2.*T1); %x1 direction
A2 = exp(-1i*dt/2.*T2); %x2 direction
A3 = exp(-1i*dt/2.*T3);
B = exp(-1i*dt.*.(V1+V3));
%}
figure(3)
colormap(PYCM().coolwarm())
subplot(2,2,1)
slice(x,y,z,cos(angle(u)),xslice,yslice,zslice)
alpha(0.5*1e-1)
grid off
shading interp
title('相位的余弦值cos(\Delta\phi)');
xlabel('$z_{\{1\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
ylabel('$z_{\{2\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
zlabel('$z_{\{3\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
xlim([xmin,xmax])
ylim([xmin,xmax])
zlim([xmin,xmax])
colorbar;
clim([-1,1])
view(3)
subplot(2,2,2)
slice(x,y,z,abs(u).^2,xslice,yslice,zslice)
alpha(1e-1)
grid off
shading interp
title('波函数的概率密度|\Psi|^2');
xlabel('$z_{\{1\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
ylabel('$z_{\{2\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
zlabel('$z_{\{3\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
xlim([xmin,xmax])
ylim([xmin,xmax])
zlim([xmin,xmax])
colorbar;
clim([-1e-18,1e-18])
view(3)
subplot(2,2,3)
slice(x,y,z,real(u),xslice,yslice,zslice)
alpha(1e-1)
grid off

```

```

shading interp
title('波函数的实部real(\Psi)');
xlabel('$z_1(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
ylabel('$z_2(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
zlabel('$z_3(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
xlim([xmin,xmax])
ylim([xmin,xmax])
zlim([xmin,xmax])
colorbar;
clim([-1e-9,1e-9])
view(3)
subplot(2,2,4)
slice(x,y,z,imag(u),xslice,yslice,zslice)
alpha(1e-1)
grid off
shading interp
title('波函数的虚部imag(\Psi)');
xlabel('$z_1(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
ylabel('$z_2(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
zlabel('$z_3(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
xlim([xmin,xmax])
ylim([xmin,xmax])
zlim([xmin,xmax])
colorbar;
clim([-1e-9,1e-9])
view(3)
%sgtitle(['t=',num2str(t)])
end

%% 进入第二个阻塞区
if X(indexx)-Z(indexz)>-(Rb+sqrt(gamma))*sqrt(2) && P(3) == 0
Tkm = [Tkm,t];
P(3)=1
M1(4)= max(max(max(abs(u))));
M2(4)= min(min(min(abs(u))));
M3(4)= max(max(max(real(u))));
M4(4)= min(min(min(real(u))));
M5(4)= max(max(max(imag(u))));
M6(4)= min(min(min(imag(u))));
%{

```

```

dt_initial = 1e-15;
dt = g2n./(ommiga.^2)*dt_initial;
A1 = exp(-1i*dt/2.*T1); %x1 direction
A2 = exp(-1i*dt/2.*T2); %x2 direction
A3 = exp(-1i*dt/2.*T3);
B = exp(-1i*dt.* (V1+V3));
%}

figure(4)
colormap(PYCM().coolwarm())
subplot(2,2,1)
slice(x,y,z,cos(angle(u)),xslice,yslice,zslice)
alpha(0.4*1e-1)
grid off
shading interp
title('相位的余弦值cos(Delta\phi)');
xlabel('$z_{-1}\{\mu m\}$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
ylabel('$z_{-2}\{\mu m\}$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
zlabel('$z_{-3}\{\mu m\}$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
xlim([xmin,xmax])
ylim([xmin,xmax])
zlim([xmin,xmax])
colorbar;
clim([-1,1])
view(3)
subplot(2,2,2)
slice(x,y,z,abs(u).^2,xslice,yslice,zslice)
alpha(1e-1)
grid off
shading interp
title('波函数的概率密度|\Psi|^2');
xlabel('$z_{-1}\{\mu m\}$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
ylabel('$z_{-2}\{\mu m\}$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
zlabel('$z_{-3}\{\mu m\}$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
xlim([xmin,xmax])
ylim([xmin,xmax])
zlim([xmin,xmax])
colorbar;
clim([-1e-18,1e-18])
view(3)
subplot(2,2,3)
slice(x,y,z,real(u),xslice,yslice,zslice)
alpha(1e-1)

```

```

grid off
shading interp
title('波函数的实部real(\Psi)');
xlabel('$z_1\{\mu m\}$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
ylabel('$z_2\{\mu m\}$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
zlabel('$z_3\{\mu m\}$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
xlim([xmin,xmax])
ylim([xmin,xmax])
zlim([xmin,xmax])
colorbar;
clim([-1e-9,1e-9])
view(3)
subplot(2,2,4)
slice(x,y,z,imag(u),xslice,yslice,zslice)
alpha(1e-1)
grid off
shading interp
title('波函数的虚部imag(\Psi)');
xlabel('$z_1\{\mu m\}$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
ylabel('$z_2\{\mu m\}$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
zlabel('$z_3\{\mu m\}$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
xlim([xmin,xmax])
ylim([xmin,xmax])
zlim([xmin,xmax])
colorbar;
clim([-1e-9,1e-9])
view(3)
%sgtitle(['t=',num2str(t)])

```

end

```

%% 出第二个阻塞区
if X(indexx)-Z(indexz)>(Rb+sqrt(gamma))*sqrt(2) && P(4) == 0
    Tkm = [Tkm,t];
    P(4)=1
    M1(5)= max(max(max(abs(u))));
    M2(5)= min(min(min(abs(u))));
    M3(5)= max(max(max(real(u))));
    M4(5)= min(min(min(real(u))));
    M5(5)= max(max(max(imag(u))));

```

```

M6(5)= min(min(min(imag(u))));

%{
dt_initial = 1e-15;
dt = g2n./(ommiga.^2)*dt_initial;
A1 = exp(-1i*dt/2.*T1); %x1 direction
A2 = exp(-1i*dt/2.*T2); %x2 direction
A3 = exp(-1i*dt/2.*T3);
B = exp(-1i*dt.*(V1+V3));
%}
figure(5)
colormap(PYCM().coolwarm())
subplot(2,2,1)
slice(x,y,z,cos(angle(u)),xslice,yslice,zslice)
alpha(0.5*1e-1)
grid off
shading interp
title('相位的余弦值cos(\Delta\phi)');
xlabel('$z_{\{1\}}(\{\mu m\})$', 'interpreter', 'latex', 'FontWeight', 'bold')
ylabel('$z_{\{2\}}(\{\mu m\})$', 'interpreter', 'latex', 'FontWeight', 'bold')
zlabel('$z_{\{3\}}(\{\mu m\})$', 'interpreter', 'latex', 'FontWeight', 'bold')
xlim([xmin,xmax])
ylim([xmin,xmax])
zlim([xmin,xmax])
colorbar;
clim([-1,1])
view(3)
subplot(2,2,2)
slice(x,y,z,abs(u).^2,xslice,yslice,zslice)
alpha(1e-1)
grid off
shading interp
title('波函数的概率密度|\Psi|^2');
xlabel('$z_{\{1\}}(\{\mu m\})$', 'interpreter', 'latex', 'FontWeight', 'bold')
ylabel('$z_{\{2\}}(\{\mu m\})$', 'interpreter', 'latex', 'FontWeight', 'bold')
zlabel('$z_{\{3\}}(\{\mu m\})$', 'interpreter', 'latex', 'FontWeight', 'bold')
xlim([xmin,xmax])
ylim([xmin,xmax])
zlim([xmin,xmax])
colorbar;
clim([-1e-19,1e-19])
view(3)
subplot(2,2,3)
slice(x,y,z,real(u),xslice,yslice,zslice)

```

```

alpha(1e-1)
grid off
shading interp
title('波函数的实部real(\Psi)');
xlabel('$z_{\{1\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
ylabel('$z_{\{2\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
zlabel('$z_{\{3\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
xlim([xmin,xmax])
ylim([xmin,xmax])
zlim([xmin,xmax])
colorbar;
clim([-1e-9,1e-9])
view(3)
subplot(2,2,4)
slice(x,y,z,imag(u),xslice,yslice,zslice)
alpha(1e-1)
grid off
shading interp
title('波函数的虚部imag(\Psi)');
xlabel('$z_{\{1\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
ylabel('$z_{\{2\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
zlabel('$z_{\{3\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
xlim([xmin,xmax])
ylim([xmin,xmax])
zlim([xmin,xmax])
colorbar;
clim([-1e-9,1e-9])
view(3)
%sgtitle(['t=',num2str(t)])
end

if X(indexx)-Z(indexz)>(Rb+sqrt(gamma))*sqrt(2)+3
Tkm = [Tkm,t];
M1(6)= max(max(max(abs(u))));
M2(6)= min(min(min(abs(u))));
M3(6)= max(max(max(real(u))));
M4(6)= min(min(min(real(u))));
M5(6)= max(max(max(imag(u))));
M6(6)= min(min(min(imag(u))));

```

```

figure(6)
colormap(PYCM().coolwarm())
subplot(2,2,1)
slice(x,y,z,cos(angle(u)),xslice,yslice,zslice)
alpha(0.5*1e-1)
grid off
shading interp
title('相位的余弦值cos(\Delta\phi)');
xlabel('$z_{\{1\}}(\{\mu m\})$', 'interpreter', 'latex', 'FontWeight', 'bold')
ylabel('$z_{\{2\}}(\{\mu m\})$', 'interpreter', 'latex', 'FontWeight', 'bold')
zlabel('$z_{\{3\}}(\{\mu m\})$', 'interpreter', 'latex', 'FontWeight', 'bold')
xlim([xmin,xmax])
ylim([xmin,xmax])
zlim([xmin,xmax])
colorbar;
clim([-1,1])
view(3)
subplot(2,2,2)
slice(x,y,z,abs(u).^2,xslice,yslice,zslice)
alpha(1e-1)
grid off
shading interp
title('波函数的概率密度|\Psi|^2');
xlabel('$z_{\{1\}}(\{\mu m\})$', 'interpreter', 'latex', 'FontWeight', 'bold')
ylabel('$z_{\{2\}}(\{\mu m\})$', 'interpreter', 'latex', 'FontWeight', 'bold')
zlabel('$z_{\{3\}}(\{\mu m\})$', 'interpreter', 'latex', 'FontWeight', 'bold')
xlim([xmin,xmax])
ylim([xmin,xmax])
zlim([xmin,xmax])
colorbar;
clim([-1e-19,1e-19])
view(3)
subplot(2,2,3)
slice(x,y,z,real(u),xslice,yslice,zslice)
alpha(1e-1)
grid off
shading interp
title('波函数的实部real(\Psi)');
xlabel('$z_{\{1\}}(\{\mu m\})$', 'interpreter', 'latex', 'FontWeight', 'bold')
ylabel('$z_{\{2\}}(\{\mu m\})$', 'interpreter', 'latex', 'FontWeight', 'bold')
zlabel('$z_{\{3\}}(\{\mu m\})$', 'interpreter', 'latex', 'FontWeight', 'bold')
xlim([xmin,xmax])
ylim([xmin,xmax])

```

```
zlim([xmin,xmax])
colorbar;
clim([-1e-9,1e-9])
view(3)
subplot(2,2,4)
slice(x,y,z,imag(u),xslice,yslice,zslice)
alpha(1e-1)
grid off
shading interp
title('波函数的虚部');
xlabel('$z_{\{1\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
ylabel('$z_{\{2\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
zlabel('$z_{\{3\}}(\mu m)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
xlim([xmin,xmax])
ylim([xmin,xmax])
zlim([xmin,xmax])
colorbar;
clim([-1e-9,1e-9])
view(3)
%sgtitle(['t=',num2str(t)])
```

```
break
end

end
%theta = cos(angle(u(fix(3*N/4),fix(3*N/4))));

toc
%{
figure(7)
plot(T,Theta,'o');
title('三光子系统相位的余弦值随时间的变化关系')
xlabel('t(s)','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
ylabel('cos(Delta phi)','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')
%}
%set(gca,'xtick',0:1:15)
Tkm
```

## 二维双光子系统

```

%% counterpropagating
clc
close all
clear all
tic
%% define r space
xmin = 0;
xmax = 10;
Lx = xmax-xmin;
N = 2^6;
dx = Lx/N;
X = xmin:dx:xmax-dx;
X1=X;
Y1=X;
X2=X;
Y2=X;
[x1,y1,x2,y2] = ndgrid(X);
%% define k space
dkx = 2*pi/Lx;
Kx = linspace(-pi/dx,pi/dx,N+1);
Kx(end)=[];
Ky =Kx;
[kx1,ky1,kx2,ky2]=ndgrid(Kx);
%% Potential
% 量纲为 s, um
C6 = 2*pi*864*1e9;
gamma = 2.*pi.*6.067*1e6;
C = 3*1e8*1e6;
delta = 20*gamma;
g2n = 490000*delta^2;
ommiga = 2*delta;
Gamma = gamma; %-1i*delta;
Rb = ((C6.*(delta+0i*gamma))./(2*(ommiga.^2))).^(1/6);
Theta = [];
t = 0;
T= [];
Re = [];
Im = [];
Tk = [];
dt_initial = 1e-15;

```

```

dt = g2n./(ommiga.^2)*dt_initial;% Rc很小的时候dt与vg的乘积很大，约等于1e3远大于
网格划分，所以结果不平滑
a = ommiga.^2/delta;
r = ((x1-x2).^2+(y1-y2).^2).^0.5;
V = -a./(1+((r./Rb).^6));

%V(abs(x-y)>Rc) = 0;
%% define T and V
vgr = C*ommiga^2./(g2n);
vgx1 = 0.5*vgr;
vgy1 = 0;
vgx2 = -0.5*vgr;
vgy2 = 0;

Tx1 = vgx1*kx1./2;
Ty1 = vgy1*ky1./2;
Tx2 = vgx2*kx2./2;
Ty2 = vgy2*ky2./2;

Ax1 = exp(-1i*dt.*Tx1); %x1 direction
Ay1 = exp(-1i*dt.*Ty1); %y1 direction
Ax2 = exp(-1i*dt.*Tx2); %x2 direction
Ay2 = exp(-1i*dt.*Ty2); %y2 direction

B = exp(-1i*dt.^(V));

%% initial state
x10 = 1;
y10 = 1;
x20 = 9;
y20 = 6n g;

gammax1 = 1;
gammay1 = 1;
gammax2 = 1;
gammay2 = 1;
sigma = 1;
u=1/(2*pi*sigma^2)^2*exp(-(gammax1*(x1-x10).^2+gammay1*(y1-
y10).^2+gammax2*(x2-x20).^2+gammay2*(y2-y20).^2)./(2.*sigma.^2));
nor1=sum(sum(sum(abs(u).^2)))*dx^4;
u=u./sqrt(nor1); % 归一化 centered gaussian

kx1 = [];

```

```

ky1 = [];
kx2 = [];
ky2 = [];
Tx1 = [];
Ty1 = [];
Tx2 = [];
Ty2 = [];
%% time evolution
n = 0;
%{
P = [0,0,0,0,0];
M1 = [0,0,0,0,0,0];
M2 = [0,0,0,0,0,0];
M3 = [0,0,0,0,0,0];
M4 = [0,0,0,0,0,0];
M5 = [0,0,0,0,0,0];
M6 = [0,0,0,0,0,0];
xslice = (0:2:50);
yslice = (0:2:50);
zslice = (0:2:50);
%}
%n0 = 600;
L1 = [];
L2 = [];
L3 = [];
L4 = [];

while 1
    n=n+1
    %step1 x1 direction
    u = fftshift(fft(u,[],1),1);
    u = ifft(ifftshift(Ax1.*u,1),[],1);
    %step2 y1 direction
    u = fftshift(fft(u,[],2),2);
    u = ifft(ifftshift(Ay1.*u,2),[],2);
    %step3 x2 direction
    u = fftshift(fft(u,[],3),3);
    u = ifft(ifftshift(Ax2.*u,3),[],3);
    %step4 y2 direction
    u = fftshift(fft(u,[],4),4);
    u = ifft(ifftshift(Ay2.*u,4),[],4);
    %step5 V
    u = B.*u;
    %step6 y2 direction

```

```

u = fftshift(fft(u,[],4),4);
u = ifft(ifftshift(Ay2.*u,4),[],4);
%step7 x2 direction
u = fftshift(fft(u,[],3),3);
u = ifft(ifftshift(Ax2.*u,3),[],3);
%step8 y1 direction
u = fftshift(fft(u,[],2),2);
u = ifft(ifftshift(Ay1.*u,2),[],2);
%step9 x1 direction
u = fftshift(fft(u,[],1),1);
u = ifft(ifftshift(Ax1.*u,1),[],1);
%u=u;

theta = cos(angle(u(abs(u)==max(max(max(max(abs(u)))))));
Theta = [Theta, theta];
im = imag(u(abs(u)==max(max(max(max(abs(u))))));
Im = [Im, im];
re = real(u(abs(u)==max(max(max(max(abs(u))))));
Re = [Re, re];
t = t + dt;
T = [T, t];

s=size(u);
Lax=find(abs(u)==max(max(max(max(abs(u))))));
[indexx1,indexy1,indexx2,indexy2]=ind2sub(s,Lax);

L1 = [L1,X1(indexx1)];
L2 = [L2,Y1(indexy1)];
L3 = [L3,X2(indexx2)];
L4 = [L4,Y2(indexy2)];

if X1(indexx1)-X2(indexx2)>(Rb+sqrt(gamma1))*sqrt(2)
    %(Rb+sqrt(gamma1))*sqrt(2)
    break
end

end

```

```
%theta = cos(angle(u(fix(3*N/4),fix(3*N/4))));  
toc  
  
An = atan2(Im,Re);  
An = unwrap(An);  
  
figure(1)  
subplot(2,2,1)  
plot(T,Re,'-o');  
title('二维双光子系统波函数实部随时间的变化关系')  
xlabel('$t(s)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')  
ylabel('$\text{real}(\Psi)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')  
  
subplot(2,2,2)  
plot(T,Im,'-o');  
title('二维双光子系统波函数虚部随时间的变化关系')  
xlabel('$t(s)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')  
ylabel('$\text{imag}(\Psi)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')  
  
subplot(2,2,3)  
plot(T,An,'-o');  
title('二维双光子系统相位随时间的变化关系')  
xlabel('$t(s)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')  
ylabel('$\Delta\phi(\text{rad})$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')  
  
subplot(2,2,4)  
plot(T,Theta,'-o');  
title('二维双光子系统相位的余弦值随时间的变化关系')  
xlabel('$t(s)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')  
ylabel('$\cos(\Delta\phi)$','interpreter','latex', 'FontWeight','bold')  
  
Tkm  
  
%set(gca,'xtick',0:1:15)
```

---

附录 D 任务书

---

## 附录 D 任务书

### 毕业设计（论文）任务书

---

系（专业）0926 理科试验班（物理 H）

西安交通大学

系（专业）主任 左兆宇

批准日期 2022 年 11 月 11 日

## 毕业设计（论文）任务书

物理学院 0926 理科试验班（物理 H）专业 物理试验班 92 班 学生 刘铠铭

毕业设计(论文)课题 强关联多光子动力学模拟

毕业设计(论文)工作自 2022 年 9 月 26 日起至 2023 年 6 月 14 日止

课题的背景、意义及培养目标

光子由于其相干性好、易操控等优点已经成为当前进行量子计算、量子通信等领域研究的主要平台之一，然而由于光子之间本身并不存在相互作用，这就限制了多光子量子器件的发展，例如，量子计算中所需要的多比特量子门就需要量子比特之间存在相互作用，然而如果用光子作为量子比特载体就会存在难以避免的障碍，即光子之间并没有相互作用。虽然可以利用非线性介质实现光子间作用，但是其强度非常弱，难以满足单光子水平量子操控的需求。为此，近些年人们发展出了基于里德堡原子气体诱导光子产生强相互作用的方案，为推动光子平台量子科技发展提供了新的可能性。本课题将在强相互作用情况下，针对里德堡多光子系统的量子动力学过程，发展低维度（一维、二维）数值模拟方法，为探索光子非线性的有效调控方案提供理论支撑。  
培养目标：通过本课题的研究，预期使学生（1）理解并掌握里德堡原子的基本性质（2）掌握光与里德堡原子耦合系统基本理论处理方法，以及里德堡原子诱导光子产生相互作用的物理机制；（3）发展处理低维度长程强关联光子的数值算法，完成程序编写。

---

设计(论文)的原始数据与资料

前期工作已经熟悉了人工诱导光子非线性的基本理论，并建立了处理一维情况下双光子非线性动力学的模拟程序，为后续研究奠定了理论和技术基础。&nbsp;

---

## 附录 D 任务书

### 西安交通大学本科毕业设计（论文）

#### 课题的主要任务

(1) 理解掌握里德堡气体诱导光子非线性的相关理论；(2) 调研当前多光子非线性动力学数值处理技术及其面临的困难；(3) 发展低维系统多光子动力学高效的数值处理方案。&nbsp;

#### 课题的基本要求(工程设计类题应有技术经济分析要求)

(1) 理解和掌握光与里德堡原子耦合系统的理论处理方法；(2) 理解和掌握光子间相互作用的物理产生机制及其性质；(3) 建立模拟强关联多光子在低维度情况下动力学的数值程序 (Matlab 或 Python)；(4) 利用数值模拟探索强相互作用多光子系统的量子动力学特性。

#### 完成任务后提交的书面材料要求(图纸规格、数量，论文字数，外文翻译字数等)

(1) 已有理论和数值处理方案的详细调研总结报告；(2) 里德堡原子诱导光子产生有效相互作用的详细理论推导；(3) 低维长程强关联光子动力学的数值处理方案，以及相应的模拟程序 (Matlab 或 Python)；(4) 撰写本科毕业论文 (10000 字)。

#### 主要参考文献

[1] Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics, 65, 321 (2016). "Quantum and Nonlinear Optics in Strongly Interacting Atomic Ensembles"; [2] Phys. Rev. Lett. 107, 133602 (2011). "Photon-Photon Interactions via Rydberg Blockade"; [3] Phys. Rev. Lett. 107, 153001 (2011). "Nonlocal Nonlinear Optics in Cold Rydberg Gases"; [4] Nature 542, 206 (2017). "Symmetry-protected collisions between strongly interacting photons".

指导教师

张永昌

接受设计(论文)任务日期

2022 年 11 月 11 日

(注：由指导教师填写)

学生签名

刘铠铭



## 附录 E 考核评议书

毕业设计（论文）考核评议书

---

西 安 交 通 大 学

# 毕业设计(论文)考核评议书

物理学院 学院 0926 理科试验班(物理 H) 专业 物理试验班 92 班

指导教师对学生 刘铠铭 所完成的课题为 强关联多光子动力学模拟 的毕业设计(论文)进行的情况，完成的质量及评分的意见：该毕业论文针对光学量子计算系统面临的关键瓶颈之一，即光子之间本身不存在相互作用而难以实现多光子量子比特门，探索利用里德堡原子诱导光子产生相干性有效强相互作用的方案，在此基础上通过数值模拟研究了低维双光子、三光子系统在强相互作用条件下的相位变化规律，验证了利用里德堡原子实现多光子量子比特门的可行性，为进一步基于里德堡原子气体设计光子系统确定性量子比特门提供了理论参考。上述研究内容和结果达到了该毕业设计课题的预期目标，且行文规范、论述翔实，符合本科毕业论文要求，推荐参加毕业设计答辩。

指导教师建议成绩： A

指导教师 张永昌

2023 年 06 月 11 日



西 安 交 通 大 学  
毕 业 设 计 (论 文) 评 审 意 见 书 (一)

评审意见：\_\_\_\_\_论文基于里德堡原子气体中的光学非线性展开了探究，主要工作包括：1) 针对里德堡原子的基本性质以及里德堡原子气体中的光学非线性的物理机制进行介绍；2) 对一维和二维的强关联多光子系统的动力学方程进行了推导，并完成了一维强关联双光子系统、一维强关联三光子系统和二维强关联双光子系统的动力学模拟；3) 进行了形象的可视化展示，探究了光子波函数的概率密度、相位与时间、阻塞半径、相互作用强度、光子运动路径之间的关系。论文的研究方法与主要结果对使用光学系统中光子非线性实现双量子比特门有参考意义。

论文选题新颖，结构合理，层次清晰，逻辑性较强，综述全面，重点突出，能根据所学专业理论知识结合具体实践来分析问题。论文完全达到了本科毕业论文的要求，是一篇优秀的本科毕业论文，建议参加答辩并授予学士学位。

——  
评阅结论： 同意答辩

评阅人建议成绩： A

评阅人 栗生长 职称 教授

2023 年 06 月 12 日

西 安 交 通 大 学  
毕 业 设 计 (论 文) 评 审 意 见 书 (二)

评审意见：\_\_\_\_\_本文基于波函数的动力学实时演化方法，研究了里德堡原子气体中一维和二维强关联多光子系统的动力学性质，以及讨论了基于 MATLAB 的相关算法设计，研究结果可对于多光子动力学模拟和基于非线性光学的量子门操纵提供有价值的参考。论文写作较认真，态度科学严谨，具有较高的学术价值和应用价值，符合学术论文的写作要求和书写规范，但也存在个别书写不规范或者语句不通顺之处，主

要内容已达到学士学位所要求的学术水平，同意申请答辩。论文中存在的具体问题列举如下：

- (1) 中英文名词混合使用，例如，第二页“克尔非线性”和“Kerr 非线性”。
- (2) 研究性论文中公式的所有物理量，在首次出现时均应说明其指代的含义，例如公式(2-3)中的 $\mu_1$ ，等等。
- (3) 部分公式引用比较混乱，表述有误，例如，第十三页“(3-1) 式中一些物理量……”，应为“(2-32) 式中一些物理量”，等等。

评阅结论： 同意答辩

评阅人建议成绩： A+

评阅人 董彪 职称 助理研究员

2023 年 06 月 12 日

---

附录 F 答辩结果

---

## 附录 F 答辩结果

毕业设计（论文）答辩结果

---

# 毕业设计(论文)答辩结果

物理学院

0926 理科试验班（物理 H）专业

毕业设计(论文)答辩组对学生刘铠铭所完成的课题为强关联多光子  
动力学模拟的毕业设计(论文)经过答辩,其意见为\_\_\_\_\_  
并确定成绩为\_\_\_\_分

毕业设计(论文)答辩组负责人                   高宏

答辩组成员                   王少伟                   周宇

                                 王文慧                   全佺

                                 张永昌

---

2023 年 06 月 13 日