



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY  
INSTITUTE OF MATHEMATICS

# ZLOMKOVÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE CAPUTOVA TYPU – NUMERICKÁ ANALÝZA

CAPUTO TYPE FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS – NUMERICAL ANALYSIS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE  
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

Ondřej Havelka

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

doc. Ing. Petr Tomášek, Ph.D.

BRNO 2024



## Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky  
Student: **Ondřej Havelka**  
Studijní program: Matematické inženýrství  
Studijní obor: bez specializace  
Vedoucí práce: **doc. Ing. Petr Tomášek, Ph.D.**  
Akademický rok: 2022/23

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

### **Zlomkové diferenciální rovnice Caputova typu – numerická analýza**

#### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

Teorie zlomkových diferenciálních rovnic je v současné době jednou z nejstudovanějších oblastí matematické analýzy. Zavedení neceločíselných derivací otevřelo celou řadu nových problémů a výzev. Numerické řešení a analýza počátečních problémů zlomkových diferenciálních rovnic je pak jednou z nich.

#### **Cíle bakalářské práce:**

- Nastudování problematiky numerických metod pro zlomkové diferenciální rovnice.
- Realizace vybraných numerických metod ve vhodném programovacím prostředí.
- Diskuze vlastností numerických metod při řešení testovacích úloh.

#### **Seznam doporučené literatury:**

DIETHELM, K. The analysis of fractional differential equations: an application-oriented exposition using differential operators of Caputo type. Berlin: Springer, 2010, viii, 247 s. ISBN 978-3-642-14573-5.

LI, C., ZENG, F. Numerical methods for fractional calculus. Boca Raton: CRC Press, 2015, 281 s. ISBN-13: 978-1-4822-5380-1.

## **Abstrakt**

Bakalářská práce se zabývá zlomkovými diferenciálními rovnicemi Caputova typu. Jsou uvedeny některé základní pojmy zlomkového kalkulu. Následně jsou představeny zlomkové derivace a integrál, na což navazuje formulace počáteční úlohy pro neceločíselné diferenciální rovnice. V oblasti numerických metod je práce zaměřena na Eulerovy metody, které jsou otestovány na několika vybraných úlohách.

## **Abstract**

Bachelor's thesis deals with Caputo fractional differential equations. There are introduced some basic concepts of fractional calculus. Then fractional derivatives and integral is introduced, followed by initial problem for fractional ordinary differential equations. In the area of numerical methods, thesis is focused on fractional Euler methods, which are tested on several examples.

## **Klíčová slova**

Zlomkové diferenciální rovnice, Caputova derivace, Eulerovy metody pro zlomkové diferenciální rovnice, Mittag-Lefflerova funkce.

## **Keywords**

Fractional differential equations, Caputo derivative, Fractional Euler methods, Mittag-Leffler function.



Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Zlomkové diferenciální rovnice Caputova typu – Numerická analýza* vypracoval samostatně pod vedením doc. Ing. Petra Tomáška, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Ondřej Havelka



Chtěl bych poděkovat svému školiteli docentu Tomáškoví za odborné vedení a za pomoc při zpracovávání této práce, která byla často vysoko nad rámec povinností či domluvy. Dále bych rád poděkoval všem kamarádům, spolužákům a spolubydlícím za podporu v těžkých chvílích. A v poslední řadě děkuji sobě, že jsem se tohoto dožil.

Ondřej Havelka





## Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>11</b>
1.1	Motivační úloha . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Základní pojmy</b>	<b>12</b>
2.1	Speciální funkce . . . . .	12
2.2	Zlomková derivace a integrál . . . . .	16
2.3	Zlomkové diferenciální rovnice . . . . .	18
2.4	Využití zlomkových diferenciálních rovnic . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Numerické metody pro zlomkové diferenciální rovnice</b>	<b>21</b>
3.1	Základní pojmy numerického počtu . . . . .	21
3.2	Algoritmy pro výpočet Caputovy derivace . . . . .	22
3.3	Algoritmy pro řešení diferenciálních rovnic Caputova typu . . . . .	22
3.4	Testovací úlohy . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Závěr</b>	<b>29</b>

# 1 Úvod

Problematika neceločíselných derivací je stará téměř jako problematika běžných celočíselných derivací a ukazuje touhu matematiků zobecňovat problémy. Jak se ale v této práci později naznačí, nejedná se o jednoznačné zobecnění, jelikož lze zlomkovou derivaci zadefinovat vícero neekvivalentními způsoby.

Poprvé se k neceločíselné derivaci dostaneme nedlouho po roce 1676, kdy Gottfried Wilhelm Leibniz představil svoji teorii diferenciálního počtu. Již v roce 1695 se Guillaume de l'Hospital ve své korespondenci s G. W. Leibnizem táže na interpretaci půlté derivace funkce  $y(x)$  neboli  $n = 1/2$  ve výrazu  $d^n y(x)/dx^n$ . G. W. Leibniz tehdy odpověděl, že " $dx^{\frac{1}{2}} = x \cdot \sqrt{dx} : x$ ", což se později ukázalo jako nepřesné. O paradoxu, který svým tvrzením způsobil, pojednává například A. Hilfer ve druhé kapitole [11].

V následujících staletích se svými definicemi neceločíselných derivací či integrálů přicházeli postupně Leonhard Paul Euler (1730), Jean Baptiste Joseph Fourier (1820–1822), Niels Henrik Abel (1823–1826), Joseph Liouville (1832–1855), Georg Friedrich Bernhard Riemann (1847–1876), Michele Caputo (1967) a další. V dnešní době se pak nejčastěji využívají Riemann-Liouvillova derivace a Caputova derivace, na kterou bude práce zaměřena, a to zejména na řešení počátečních úloh zlomkových diferenciálních rovnic. Cílem práce je zpracovat základní přístupy numerického řešení těchto problémů a ověřit jejich přesnost a řád konvergence na testovacích úlohách.

Ve druhé kapitole jsou zadefinovány gama a Mittag-Lefflerova funkce, zároveň je i krátce pojednáno o možnosti výpočtu funkční hodnoty Mittag-Lefflerovy funkce. Ve třetí kapitole se zavádí pojem Riemann-Liouvillov integrál a je krátce pojednáno o některých vlastnostech Caputovy derivace. Dále je zavedena počáteční úloha zlomkových diferenciálních rovnic a věty o existenci a jednoznačnosti řešení této rovnice. Na konci druhé kapitoly se ukáže využití zlomkových diferenciálních rovnic pro modelování mechanického oscilátoru. Ve třetí kapitole se nejprve zavedou některé pojmy numerického počtu a následně se představí numerické algoritmy pro výpočet Caputovy derivace a počátečních úloh zlomkových diferenciálních rovnic pomocí Eulerových metod. Jejich implementace v prostředí Matlab je součástí přílohy této bakalářské práce. Na konci této kapitoly budou algoritmy zpracované v programu Matlab otestovány na vybraných úlohách a numerické řešení bude porovnáno s analytickým řešením.

## 1.1 Motivační úloha

Zlomkové diferenciální úlohy plní svou úlohu v řadě technických a vědních oborů. Jako jednu z historicky prvních úloh spojených se zlomkovou derivací se dá považovat úloha tautochrony, tedy křivky, po které je doba "klouzání" hmotného bodu  $T$  v homogenním tíhovém poli nezávislá na počáteční poloze. Touto úlohou se zabýval již výše zmíněný N. H. Abel, který popsal tento problém integrální rovnice:

$$\sqrt{2g}T = \int_0^\eta (\eta - y)^{-\frac{1}{2}} f'(y) dy, \quad (1.1)$$

kde  $g$  je gravitační zrychlení,  $\eta$  je počáteční poloha tělesa na ose  $y$  a  $f(y)$  je rovnicí křivky. V následujících letech se ukázalo, že tato integrální rovnice (1.1) odpovídá zlomkové diferenciální rovnici:

$$\sqrt{2g}T = \Gamma(0.5) \cdot {}_0D_\eta^{-\frac{1}{2}} f'(\eta),$$

kde operátor zlomkové derivace  ${}_0D_\eta^{-\frac{1}{2}}$  je zadefinován níže (viz vztah (2.8)).

## 2 Základní pojmy

Ve druhé kapitole budou představeny definice, se kterými se bude v práci pracovat. V první podkapitole to budou dvě speciální funkce, gama funkce a následně Mittag-Lefflerova funkce. Věty uvádějící vztahy speciálních funkcí budou zde udány bez důkazů. Ty je možné najít v [5] a v literatuře tam uvedené. Ve druhé podkapitole budou představeny stěžejní definice Riemann-Liouvillova integrálu i derivace a poté i Caputovy derivace, společně s některými důležitými vlastnostmi. Třetí podkapitola představí zlomkové diferenciální rovnice a uvede větu o jednoznačnosti řešení počátečních úloh. V poslední části této podkapitoly bude ukázán příklad využití zlomkových diferenciálních rovnic při modelování kmitání tlumeného mechanického oscilátoru.

### 2.1 Speciální funkce

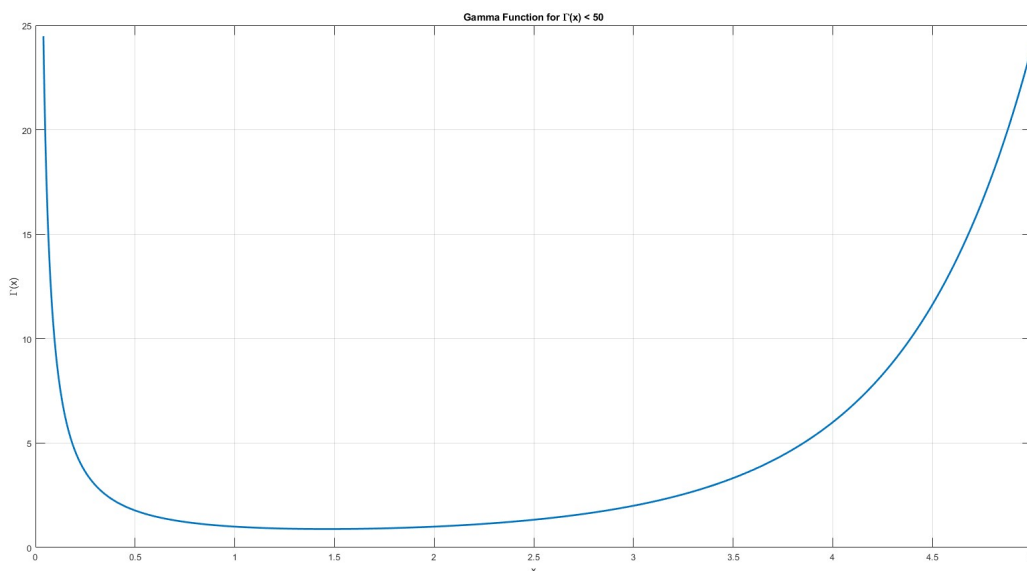
#### Gama funkce

Jako první ze speciálních funkcí nutných pro vstup do zlomkového kalkulu je gama funkce, která je funkcí zobecňující faktoriál. Tímto zobecněním myslíme zbavení se pout přirozených čísel a vstup do čísel kladných reálných. Gama funkci je sice možné definovat obecněji a to na oboru komplexních čísel, avšak pro účely této práce je zobecnění na kladná reálná čísla více než dostatečné. Při shrnutí poznatků o gama funkci je použita literatura [4].

**Definice 2.1.** *Gama funkce* Nechť  $z \in \mathbb{R}^+$ , pak hodnota *gama funkce* v bodě  $z$  je dána vztahem

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} \cdot e^{-t} dt, \quad z > 0$$

**Obrázek 2.1:** Graf gama funkce na intervalu (0,1, 5)



Z mnoha vlastností gama funkce budou zmíněny dva vztahy:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \Gamma(n+1) = n!. \quad (2.1)$$

$$\forall z \in \mathbb{R}^+ : \quad \Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z). \quad (2.2)$$

Faktoriál je tedy pouhým zjednodušením gama funkce a zároveň je možné gama funkci na oboru přirozených čísel uvažovat jako faktoriál. A stejně jako hodnotu faktoriálu lze spočítat pomocí rekurzivní funkce, která využívá pouze zadefinování hodnoty faktoriálu v 0, tak i hodnotu gama funkce s kladným argumentem lze díky větě (2.2) rekurzivně spočítat, pokud známe jeho hodnotu na intervalu  $(0, 1)$ .

**Tabulka 2.1:** Hodnoty funkce  $\Gamma$  ve vybraných bodech

$z$	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$\Gamma(z)$	$\sqrt{\pi}$	1	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}$	1	$\frac{3}{4} \cdot \sqrt{\pi}$	2	$\frac{15}{8} \cdot \sqrt{\pi}$	6

### Mittag-Lefflerova funkce

Mittag-Lefflerova funkce v oblasti zlomkových diferenciálních rovnic představuje podobnou roli, jako exponenciální funkce se základem  $e$  pro obyčejné diferenciální rovnice a v mnoha zdrojích se o ní vznešeně mluví jako o zlaté funkci zlomkového kalkulu.

I přes velký význam se však jedná o funkci opominutou ve většině běžně dostupného softwaru. Výjimkou v tomto není ani Matlab R2022b, který je v této práci využit.

**Definice 2.2.** Mittag-Lefflerova funkce s parametry  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$  v bodě  $z$  je značena  $E_{\alpha, \beta}(z)$  a je definována součtem nekonečné mocninné řady

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Při položení parametru  $\beta = 1$  se taková funkce nazývá jednoparametrická Mittag-Lefflerova funkce.

Pro případ, kdy  $\alpha = 0$  není Mittag-Lefflerova funkce výše definovaná, jelikož v takovém případě není zaručena konvergence řady. Dodefinování při  $|z| < 1$  již není problematické, jelikož se tento případ zjednoduší na geometrickou řadu, jejíž součet známe. Mittag-Lefflerovu funkci v bodě  $z$  s parametry  $\alpha = 0, \beta > 0$  definujeme jako:

$$E_{0, \beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta) \cdot (1 - z)}, \quad \forall z \in \mathbb{R} : |z| < 1. \quad (2.3)$$

### Definiční obor Mittag-Lefflerovy funkce

Přirozenou otázku u sumární definice Mittag-Lefflerovy funkce vyvolává její definiční obor, respektive obor konvergence mocninné řady. Pro stanovení oboru konvergence lze použít známé limitní podílové kritérium. Parametr  $\rho$  lze vypočítat jako podíl po sobě jdoucích členů  $a_k$  nekonečné řady v limitě, kdy  $k \rightarrow \infty$ .

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{z^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1) + \beta)}}{\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}} = z \cdot \frac{\Gamma(\alpha k + \beta)}{\Gamma(\alpha(k+1) + \beta)} = \dots = 0.$$

Pro poloměr konvergence  $R$  platí, že se jedná o inverzní hodnotu k parametru  $\rho$ . V případě hodnoty parametru  $\rho = 0$  se pokládá  $R = \infty$ .

Nekonečný poloměr konvergence okolo 0 říká, že řada konverguje na celé reálné ose a tedy pro parametry  $\alpha > 0$  a  $\beta > 0$  je Mittag-Lefflerova funkce definovaná na celé reálné ose.

### Výpočet funkčních hodnot Mittag-Lefflerovy funkce

V této části bude blíže rozebrána možnost výpočtu hodnot Mittag-Lefflerovy funkce. Jelikož je samotná funkce zadefinovaná jako mocninná řada (2.3), nabízí se tuto řadu sečíst.

Označme  $Err$  chybu  $n$ -tého částečného součtu Mittag-Lefflerovy funkce, tj.

$$Err_{n+1}(E_{\alpha,\beta}(z)) = \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^L \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \quad (2.4)$$

Mocninnou řadu (2.4) se tedy pokusíme shora omezit pomocí podobné geometrické řady, na jejíž součet postačí středoškolský vzoreček:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} a_0 \cdot q^k = \frac{a_0}{1-q}, \quad (2.5)$$

kde značíme součet geometrické řady  $S$ , řadu  $A [a]_0^{\infty}$  s kvocieniem  $q$  a prvním čleem řady  $a_0$ . Přičemž  $|q| < 1$ .

Jelikož gama funkce na celém svém definičním oboru není prostá, budeme uvažovat chybu částečných součtů pouze pro  $N \in \mathbb{N}$  takové, že platí:  $\alpha N + \beta > 2$ . Jelikož v předchozí kapitole 2.1 bylo ukázáno, že řada pro Mittag-Lefflerovu funkci je konvergentní na celém reálném oboru, od určitého členu řady  $a_j$  musí platit:

$$1 > \frac{a_{j+1}}{a_j} = \frac{\frac{z^{j+1}}{\Gamma(\alpha(j+1)+\beta)}}{\frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)}} = z \cdot \frac{\Gamma(\alpha j + \beta)}{\Gamma(\alpha(j+1) + \beta)} = q.$$

V daném případě je tedy možné chybu součtu mocninné řady (2.4) rozdělit na součet konečné a geometrické řady (2.5)

$$Err_N(E_{\alpha,\beta}(z)) = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = \sum_{k=N}^{j-1} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} + \sum_{i=j}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha i + \beta)} \leq \sum_{k=N}^{j-1} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} + \frac{a_j}{1-q}$$

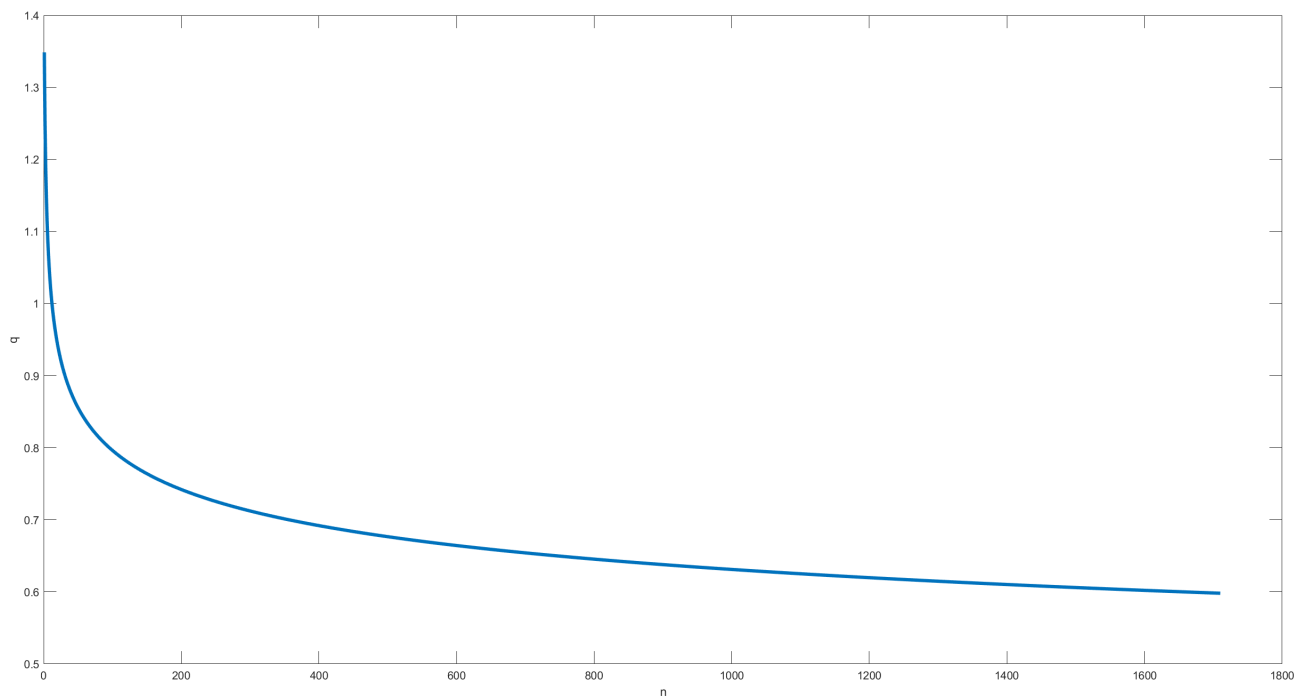
Získaná nerovnice vypadá užitečně. V praxi však naráží na problém. Totiž podíl:  $\frac{\Gamma(\alpha j + \beta)}{\Gamma(\alpha(j+1) + \beta)}$  pro malý parametr  $\alpha$  klesá pod hodnotu 1 jen velmi pomalu, a je tedy potřeba počítat hodnotu gama funkce ve vysokých hodnotách. Použitý software, Matlab, ale umí efektivně počítat pouze s hodnotou  $\Gamma(i)$  pro  $i < 171$ .

Na grafu 2.2 je vidět, že podíl po sobě jdoucích koeficientů řady  $z \cdot \Gamma(\alpha n + \beta) / \Gamma(\alpha(n+1) + \beta)$  ani pro téměř maximální dosažitelné parametry neklesne pod hodnotu 0,5. To by vedlo k limitaci, že pro Mittag-Lefflerovu funkci s danými parametry bychom funkční hodnotu  $z$  mohli počítat pouze pro  $z < 2$  a efektivně pouze pro  $z < 1/0.7$ .

Laskavý čtenář by mohl poukázat na větu 2.2, díky které by mohlo být možné upravit problém změnou pořadí operací násobení a dělení, konkrétně: Nechť  $z - \alpha = u$

$$\frac{\Gamma(z - \alpha)}{\Gamma(z)} = \frac{\Gamma(u - \lfloor u \rfloor)}{\Gamma(z - \lfloor u \rfloor)} \cdot \frac{\prod_{n=0}^{\lfloor u \rfloor} (u - n)}{\prod_{n=0}^{\lfloor u \rfloor} (z - n)} = \frac{\Gamma(u - \lfloor u \rfloor)}{\Gamma(z - \lfloor u \rfloor)} \cdot \prod_{n=0}^{\lfloor u \rfloor} \left( \frac{u - n}{z - n} \right)$$

Tato idea však funguje pouze teoreticky. Během výpočtu se provádí velké množství násobení čísel blízkých 1. Při výpočtu takového problému počítačem s omezeným počtem desetinných míst

Obrázek 2.2:  $\Gamma(\alpha n + \beta) / \Gamma(\alpha(n+1) + \beta)$ ,  $\alpha = 0.1, \beta = 0.2$ 

vznikají zaokrouhlovací chyby, které můžeme ilustrovat na následujícím příkladě: Výpočet podílu dvou funkcí, jejichž funkční hodnota je vypočtena softwarem Matlab

$$\frac{\Gamma(170.4)}{\Gamma(170.5)} = 0.598367257579446.$$

Výpočet pomocí for-cyklu a upravením pořadí násobení a dělení

$$\frac{\Gamma(170.4)}{\Gamma(170.5)} = 0.598016309041192.$$

Je zřejmé, že při tomto výpočtu se dvě metody řešení neshodují. Absolutní hodnota rozdílu těchto hodnot je  $3.509485382540145 \cdot 10^{-3}$ , a výsledky obou metod se tedy neshodují.

Tento rozpor nám ukazuje, že tato forma výpočtu pro tento problém není vhodná. V dnešní době se pro vyčíslení Mittag-Lefflerovy funkce nejčastěji využívá inverzní Laplaceovy transformace. Ve zbytku této kapitoly bude nastíněna myšlenka z článku R. Garrapy [6], kde se zvědavý čtenář může o této metodě také dozvědět více.

První krok pro tento výpočet je zavedení zobecnění Mittag-Lefflerovy funkce.

**Definice 2.3.** *Zobecněnou Mittag-Lefflerovou funkci s parametry  $\alpha, \beta > 0$  v bodě  $[t, \lambda]$  značíme  $e_{\alpha, \beta}(t, \lambda)$ . A její funkční hodnotu udává vztah:*

$$e_{\alpha, \beta}(t, \lambda) = t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(t^\alpha \lambda), t \in \mathbb{R}^+, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Na tuto funkci se aplikuje Laplaceova transformace

$$\mathcal{L}\{e_{\alpha, \beta}(t, \lambda)\} = \varepsilon_{\alpha, \beta}(s, \lambda) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - \lambda}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0, |\lambda s^{-\alpha}| < 1. \quad (2.6)$$

A zpětná Laplaceova transformace

$$\mathcal{L}^{-1} \{ \varepsilon_{\alpha, \beta} (t, \lambda) \} = e_{\alpha, \beta} (t, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{st} \varepsilon_{\alpha, \beta} (s, \lambda) ds. \quad (2.7)$$

Vztahy (2.6), (2.7) definují integrální problém, který je nutné následně řešit pokročilými numerickými metodami.

## 2.2 Zlomková derivace a integrál

V této části budou postupně definovány nejrozšířenější definice zlomkové derivace a integrálu. Následně budou diskutovány některé jejich důležité vlastnosti. V této části byla použita zejména kniha [1], ze které jsou definice také převzaty.

### Definice zlomkové derivace a integrálu

**Definice 2.4.** Levý a pravý Riemann-Liouvilleův integrál řádu  $\alpha > 0$  funkce  $y(t)$ , pro  $t \in (a, b)$  je definován jako

$$\begin{aligned} {}^RL_t^{-\alpha} y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (s-t)^{\alpha-1} y(s) ds, \\ {}^RL_b^{-\alpha} y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} y(s) ds. \end{aligned} \quad (2.8)$$

**Definice 2.5.** Levá a pravá Riemann-Liouvilleova derivace řádu  $\alpha > 0$  funkce  $y(t)$ , pro  $t \in (a, b)$ , je definována jako

$$\begin{aligned} {}^RL_t^{-\alpha} y(t) &= \frac{d^m}{dt^m} \left[ {}_aD_t^{-(m-\alpha)} y(t) \right] = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-s)^{m-\alpha-1} y(s) ds, \\ {}^RL_b^{-\alpha} y(t) &= \frac{d^m}{dt^m} \left[ {}_tD_b^{-(m-\alpha)} y(t) \right] = \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_t^b (t-s)^{m-\alpha-1} y(s) ds, \end{aligned}$$

kde  $m$  je kladné celé číslo splňující podmínku  $m-1 \leq \alpha \leq m$ .

**Definice 2.6.** Levou a pravou Caputovu derivaci řádu  $\alpha > 0$  funkce  $y(t)$ , pro  $t \in (a, b)$  definujeme jako:

$$\begin{aligned} {}^CD_t^\alpha y(t) &= {}_aD_t^{-(m-\alpha)} [y^{(m)}(t)] = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (s-t)^{m-\alpha-1} y^{(m)}(s) ds, \\ {}^CD_b^\alpha y(t) &= {}_tD_b^{-(m-\alpha)} [y^{(m)}(t)] = \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)} \int_t^b (s-t)^{m-\alpha-1} y^{(m)}(s) ds, \end{aligned} \quad (2.9)$$

kde  $m$  je přirozené číslo takové, že:  $m-1 < \alpha \leq m$ .

Tato práce je téměř výhradně omezena na levou Caputovu derivaci definovanou na intervalu  $(a, t)$ . Ve všech případech, kdy bude dále zmíněna Caputova derivace, bude tím myšlena první rovnice z derivací, pokud nebude výslovně řečeno jinak.

Caputova a Riemann-Liouvilleova neceločíselná derivace se liší pořadím operací celočíselné derivace a neceločíselného integrálu. Jak by se tedy na první pohled mohlo zdát téměř zanedbatelné, pouhé formální přehození pořadí integrace a derivace, v případě neceločíselného kalkulu, vytváří velký rozdíl.

Ačkoli tedy mohou jak Caputova, tak Riemann-Liouvilleova derivace existovat, nemusejí se rovnat. Ve zlomkovém kalkulu totiž hraje velkou roli i to, na jakém intervalu je funkce definovaná



a na kterém intervalu ji derivujeme. To zároveň znamená, že neceločíselná derivace funkce v bodě  $t$  závisí nejen na jejím  $\delta$  okolí, ale na hodnotách na celém intervalu  $(a, t)$ .

Existuje však přepočít mezi Caputovou a Riemann-Liouvillovou derivací.

$${}^{RL}_a D_t^\alpha y(t) = {}^C_a D_t^\alpha y(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{y^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}, \quad (2.10)$$

kde  ${}^{RL}_a D_t^\alpha y(t)$  značí Riemann-Liouvillovu derivaci řádu  $\alpha$  a  ${}^C_a D_t^\alpha y(t)$  značí Caputovu derivaci řádu  $\alpha$ . Dále platí, že  $m \in \mathbb{N} : m-1 < \alpha < m$  a  $y \in C^{m-1}(a, t)$  a funkce  $y^{(m)}$  je integrovatelná na  $(a, t)$ .

Při splnění tvrdší podmínky  $y \in C^m(a, t)$  a s pomocí (2.10) nebo pomocí Taylorovy řady lze dospět také ke vztahu:

$${}^{RL}_a D_t^\alpha [f(t) - \Phi(t)] = {}^C_a D_t^\alpha f(t), \quad (2.11)$$

kde  $\Phi(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)} (t-a)^k$ .

### Vztahy mezi neceločíselnou a celočíselnou derivací

Přirozenou otázkou u definice neceločíselné derivace je, co se stane, když se řád derivace limitně blíží celému číslu.

Budeme předpokládat, že funkce  $y(t)$  je dostatečně hladká a pro stupeň derivace  $\alpha$  takový, že  $m-1 < \alpha < m$ , kde  $m \in \mathbb{N}^+$ . Pak platí, že:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow m^-} {}^{RL}_a D_t^\alpha y(t) &= y^{(m)}(t), \quad \lim_{\alpha \rightarrow m-1^+} {}^{RL}_a D_t^\alpha y(t) = y^{(m-1)}(t), \\ \lim_{\alpha \rightarrow m^-} {}^C_a D_t^\alpha y(t) &= y^{(m)}(t), \quad \lim_{\alpha \rightarrow m-1^+} {}^C_a D_t^\alpha y(t) = y^{(m-1)}(t) - y^{(m-1)}(a), \end{aligned} \quad (2.12)$$

viz [1]. Ze vztahů (2.12) vyplývá, že Riemann-Liouvillova derivace se v limitním případě rovná celočíselné derivaci. Toto však v obecnosti neplatí pro Caputovu derivaci.

Jako příklad lze uvést funkci  $y(t) = \cos(t)$  na intervalu  $(0, 2\pi)$ . Pro levou a pravou Riemann-Liouvillovu nultou derivaci platí:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^-} {}^{RL}_0 D_t^\alpha \cos(t) = \cos(t), \\ R &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} {}^{RL}_0 D_t^\alpha \cos(t) = \cos(t), \\ L &= R. \end{aligned}$$

Avšak pro levou a pravou nultou Caputovu derivaci stejné funkce platí:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^-} {}^C_0 D_t^\alpha \cos(t) = \cos(t), \\ R &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} {}^C_0 D_t^\alpha \cos(t) = \cos(t) - \cos(0) = \cos(t) - 1 \\ L &\neq R. \end{aligned}$$

### Další vlastnosti zlomkové derivace

Zlomková derivace má řadu vlastností, o kterých by se dalo diskutovat, zde uvedeme pouze některé z nich.

Jedna z velmi důležitých vlastností zlomkové derivace pro její výpočet je věta o komutativitě Caputovy derivace:

**Věta 2.7.** *Nechť funkce  $y(t)$  je dostatečně hladká, pak pro stupně derivací  $m, \beta$ , pro které platí  $m \in \mathbb{N}$  a  $n - 1 < \beta < n$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ :*

$${}_a^C D_t^\beta [{}_a^C D_t^m y(t)] = {}_a^C D_t^{m+\beta} y(t).$$

$${}_a^C D_t^m [{}_a^C D_t^\beta y(t)] = {}_a^C D_t^{m+\beta} y(t) + \sum_{j=n}^{m+n-1} \frac{y^{(j)}(a)}{\Gamma(1+j-m-\beta)} (t-a)^{j-m-\beta}.$$

Odvození věty 2.7 vychází ze vztahu mezi neceločíselnou a celočíselnou Riemann-Liouvillovou a Caputovou derivací (2.12) a přepočtem mezi Riemann-Liouvillovou a Caputovou derivací z (2.10), kompletní odvození si lze přečíst na 9. straně v [1].

## 2.3 Zlomkové diferenciální rovnice

V této kapitole bude představena počáteční úloha zlomkových diferenciálních rovnic [1]. Následně se pro tuto úlohu zavede podmínka existence řešení a zároveň i podmínka jednoznačnosti řešení.

### Existence a jednoznačnost řešení

Uvažujme počáteční úlohu:

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha y(t) &= f(t, y(t)), m-1 < \alpha < m, m \in \mathbb{N}, \\ y^{(j)}(0) &= y_0^j, j = 0, 1, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (2.13)$$

kde  ${}_0^C D_t^\alpha y(t)$  je Caputova derivace stupně  $\alpha$  funkce  $y$  proměnné  $t \in I$  na intervalu  $I = \langle 0, b \rangle$  a  $y^{(j)}(0) = y_0^j$  jsou počáteční podmínky zadané v celočíselných derivacích všech stupňů až do nejvyššího celočíselného stupně, který je ale stále menší než stupeň derivace  $\alpha$ .

**Věta 2.8** (Existence řešení počáteční úlohy zlomkové diferenciální rovnice). *Mějme okolí  $\mathcal{D}$  takové, že  $\mathcal{D} := \langle 0, X^* \rangle \times \langle u_0^0 - \delta, u_0^0 + \delta \rangle$ , přičemž  $X^* > 0$  a  $\delta > 0$ . A nechť je funkce  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá.*

*Pak existuje funkce  $u : \langle 0, X \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , která je řešením počáteční úlohy (2.13).*

**Definice 2.9.** Funkce  $y(t)$  se na intervalu  $I = \langle A, B \rangle$  nazývá lipschitzovsky spojitá, jestliže existuje konstanta  $L$  taková, že:

$$|y(b) - y(a)| \leq L \cdot |b - a| \quad \forall a, b \in I.$$

Jak je zmíněno v [2], spojitá funkce  $y(t, x)$  na okolí  $\mathcal{D}$  bodu  $[a, \eta]$  splňuje Lipschitzovu podmínku vzhledem k proměnné  $x$ , jestliže

$$|y(t, b) - y(t, a)| \leq L \cdot |b - a| \quad \forall [t, b], [t, a] \in \mathcal{D}.$$

**Věta 2.10** (Jednoznačnost řešení počáteční úlohy zlomkové diferenciální rovnice). *Mějme okolí  $\mathcal{D}$  takové, že  $\mathcal{D} := \langle 0, X^* \rangle \times \langle y_0^0 - \delta, y_0^0 + \delta \rangle$  přičemž  $X^* > 0$  a  $\delta > 0$ . A nechť je funkce  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  ohraničená na  $\mathcal{D}$  a splňuje výše zmíněnou Lipschitzovu podmínku vzhledem k druhé proměnné. A pokud předpoklad věty 2.8 platí, pak existuje právě jedna funkce  $y : \langle 0, X \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , která je řešením počátečního problému (2.13).*

## 2.4 Využití zlomkových diferenciálních rovnic

Z mnohého využití zlomkových diferenciálních rovnic je tato kapitola zaměřena na uplatnění v oblasti mechanického kmitání. Analytické řešení takovýchto rovnic v obecnosti není jednoduché. Ve zjednodušených příkladech této kapitoly bude nastíněna možnost řešení pomocí Laplaceovy transformace.

### Tlumený harmonický oscilátor

V klasické mechanice se za harmonický oscilátor považuje těleso, jehož těžiště se pohybuje podle diferenciální rovnice:

$$m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + k \cdot y = 0, \quad (2.14)$$

kde  $y(0) = c_0$ ,  $y'(0) = c_1$  jsou počáteční podmínky. Dále  $m$  je hmotnost tělesa,  $y(t)$  je výchylka z rovnovážné polohy v čase  $t$ ,  $y'(t)$  je rychlost tělesa vzhledem k počáteční poloze v čase  $t$  a  $k$  je tuhost oscilátoru. Řešením této diferenciální rovnice potom je:

$$y(t) = y_{\max} \cdot \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.15)$$

kde  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  je úhlová frekvence kmitání a  $\varphi = \arctan \frac{c_0}{c_1}$ . Viz [8] [9].

V praxi se však stěráváme s vnitřním a vnějším třením, mezi které lze zařadit například odpor vzduchu. Vlivem těchto se pohyb harmonického oscilátoru utlumuje. Zlomkové diferenciální rovnice umožňují tyto tlumené kmity dobře modelovat modifikací druhé derivace v diferenciální rovnici:

$$m \cdot \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} + k \cdot y = 0, \quad 1 < \alpha < 2. \quad (2.16)$$

Vydělením celé rovnice parametrem  $m$  a aplikací Laplaceovy transformace na rovnici (2.16):

$$\mathcal{L}\{ {}_0 D_t^\alpha y(t) \} + \frac{k}{m} \cdot \mathcal{L}\{ y(t) \} = 0, \quad (2.17)$$

kde Laplaceova transformace neceločíselné derivace funkce  $y(t)$  se vypočítá ze vztahu:

$$\mathcal{L}\{ {}_0 D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha Y(s) - \sum_{j=0}^{[\alpha]-1} s^j \cdot {}_0 D_t^{\alpha-j-1}(0). \quad (2.18)$$

Pro rovnici (2.16) máme  $[\alpha] = 2$ , tedy (2.18) je tvaru:

$$\mathcal{L}\{ {}_0 D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1} y(0) - s^{\alpha-2} y'(0) = s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1} c_0 - s^{\alpha-2} c_1. \quad (2.19)$$

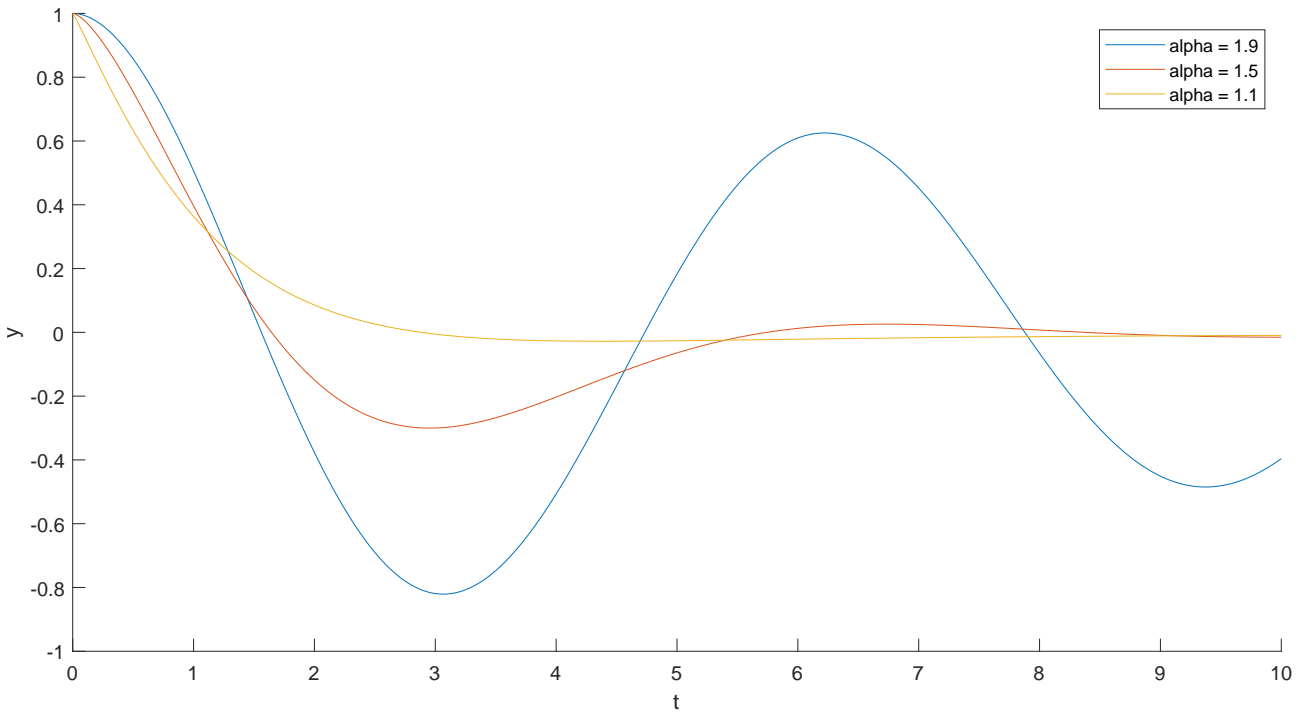
Dosazením (2.18) do (2.17) a následným vyjádřením  $Y(s)$ :

$$Y(s) = \frac{c_0 s^{\alpha-1} + c_1 s^{\alpha-2}}{s^\alpha + \frac{k}{m}}. \quad (2.20)$$

Tato rovnice se následně řeší zpětnou Laplaceovou transformací. Využití zde nalezne Laplaceova transformace zobecněné Mittag-Lefflerovy funkce, která je:

$$\int_0^\infty e^{-st} \cdot t^{\alpha j + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(j)}(\pm a t^\alpha) dt = \frac{j! s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha \mp a)^{k+1}}. \quad (2.21)$$

Obrázek 2.3: Tlumené kmitání harmonického oscilátoru



Aplikací rovnice (2.21) na (2.20) dostáváme analytické řešení zlomkové diferenciální rovnice (2.16)

$$y(t) = \left[ c_0 E_{\alpha,1} \left( -\frac{k}{m} \cdot t^\alpha \right) + c_1 \cdot t \cdot E_{\alpha,2} \left( -\frac{k}{m} \cdot t^\alpha \right) \right]. \quad (2.22)$$

Pro volby  $\alpha = 1.1, 1.5, 1.9$  v grafu vidíme, jak při nižším stupni derivace je tlumení výraznější, naopak při derivaci blízké  $\alpha = 2$  se řešení velmi podobá netlumeným kmitům.

Při studování této problematiky bylo použito knihy [3], která ale v této úloze obsahuje několik chyb. A to v rovnici harmonického oscilátoru, chybu při dělení rovnice hmotností  $m$  i při zápisu výsledného analytického řešení. Řešení autor dále testuje volbou počátečních podmínek  $c_1 = 0$  a parametrů  $m = k = 1$ , při kterých se chyby neprojeví.

### Nucené kmity

Nucenými kmity je v obecnosti myšleno kmitání, které je způsobeno vnějším silovým působením, a vynucují tedy kmitání o jiné frekvenci. Tento vnější vliv lze vymodelovat pomocí přidání funkce rychlosti neboli první derivace polohy hmotného bodu  $c \cdot y'(t)$  do rovnice (2.14) z předchozí kapitoly.

$$m \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + c \cdot \frac{dy(t)}{dt} + k \cdot y(t) = f(t).$$

Jako praktický příklad této rovnice si lze představit hraní dětí na houpačce, kde děti představují hmotný bod a jejich pohyby nohou vyvolávají vnější silové působení na oscilátor.

Přístup k problému přes zlomkové diferenciální rovnice představuje Bagley-Torvikova rovnice

$$m \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + c \cdot {}_0 D_t^\alpha y(t) + k \cdot y(t) = f(t), \quad t > 0,$$

kde  $m$  je hmotnost tělesa,  $m \cdot d^2 y(t)/dt^2$  je setrvačná síla tělesa,  $c \cdot {}_0 D_t^\alpha y(t)$  je tlumící síla představující ztráty třením,  $k$  je tuhost systému,  $ky(t)$  je pružná síla a  $f(t)$  je funkce vnější síly

působící na těleso a systém, viz [3]. Numerické řešení takovéto rovnice je však nad rámec této práce a je nutné pro řešení využít pokročilejších numerických metod.

### 3 Numerické metody pro zlomkové diferenciální rovnice

Jak je možné vidět výše, zlomkové diferenciální rovnice je náročné řešit analyticky, proto je vcelku logické, že pro jejich výpočet se v praxi často využívají numerické výpočty. V první podkapitole budou ještě představeny pojmy využívané v numerické matematice. Zadefinuje se numerická úloha zlomkových diferenciálních rovnic, provede se diskretizace a představí se pojmy chyb výpočtu a konvergence numerické metody. Ve druhé podkapitole budou ukázány dvě metody k výpočtu Caputovy derivace dané funkce, na což naváže třetí podkapitola, ve které budou ukázány tři metody, které řeší počáteční úlohy zlomkových diferenciálních rovnic Caputova typu. S metodami pro výpočet řešení těchto úloh souvisí také problematika konvergence a chyb, což je ověřeno v čtvrté podkapitole na testovacích příkladech.

V celé následující části této práce bude využívána definice Caputovy derivace jakožto modernějšího pojetí problému. V této kapitole byly přejaty pojmy a definice z [2] a [1].

#### 3.1 Základní pojmy numerického počtu

Nejprve připomeneme formulaci počáteční úlohy (2.13), kterou budeme numericky řešit:

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha y(t) &= f(t, y(t)), m-1 < \alpha < m, m \in \mathbb{N}, \\ y^{(j)}(0) &= y_0^j, j = 0, 1, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Hledaná funkce  $y(t)$ , kde  $t \in I = \langle 0, b \rangle$ , označuje přesné řešení počáteční úlohy. Úlohou numerického počtu v počáteční úloze zlomkových diferenciálních rovnic je najít aproximaci řešení v konečně mnoha bodech na intervalu  $(0, b)$ .

Body, ve kterých řešení aproximujeme, značíme  $t_n$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < n \leq N$  a  $t_N = b$ . Přičemž vždy platí, že  $t_n < t_{n+1}$ , a pro účely této práce budeme navíc uvažovat, že  $t_{n+1} - t_n = \tau = \text{konst}$ ,  $0 \leq n \leq N$ . Takovému dělení intervalu  $I$  se říká ekvidistantní. V některých aplikacích je výhodné zavést i neekvidistantní dělení intervalu  $I$ , tomuto se ale v této práci nebudeme věnovat. Speciální případ je bod  $t_0 = 0$ , ve kterém platí počáteční podmínka  $y^{(j)}(0) = y_0^j$ ,  $j = 0, 1, \dots, m-1$ .

Aproximaci řešení zlomkové diferenciální rovnice v bodě  $t_n$  označíme  $y_n$ , zatímco přesné řešení značíme  $y(t_n)$ .

Řešení počátečního problému pro diferenciální rovnice se v numerickém počtu zpravidla převádí na problém diferenčních rovnic. Tato přibližná náhrada je ovšem zatížena chybou. Chyb numerických metod existuje celá řada, zde budou uvedeny některé z nich.

**Definice 3.1.** Globální diskretizační chybu v kroku  $n$  (zn.  $\varepsilon_n$ ) je dána vztahem:

$$\varepsilon_n = y(t_n) - y_n.$$

**Definice 3.2.** Lokální chybu v kroku  $n$  (zn.  $le_n$ , anglicky "local error") je dána vztahem:

$$le_n = y(t_{n+1}) - y_{n+1}.$$

Existuje také lokální diskretizační chyba, která značí chybu v daném kroku výpočtu, za předpokladu, že všechny předchozí kroky jsou přesné. Tuto chybu budeme definovat samostatně u některých metod.

**Definice 3.3** (Řád numerické metody). Mějme konvergentní numerickou metodu pro libovolný počet kroků  $n = 0, 1, 2, \dots, N$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Uvažujeme, že velikost jednoho kroku  $\tau$  je konstantní a vypočítá se  $\tau = \frac{b-a}{N}$ . Pokud existuje konstanta  $C$  nezávislá na  $\tau$  taková, že chybu  $\varepsilon_n$  ohraničíme shora  $\varepsilon_n \leq C \cdot \tau^k$ . Pak takováto numerická metoda je řádu  $k$ , značíme  $O(\tau^k)$ .

**Definice 3.4** (EOC). Výrazem EOC ("Estimated Order of Convergence") označíme tzv. odhad řádu numerické metody, který je dán vztahem:

$$EOC = \log_2 \left( \frac{\varepsilon_h}{\varepsilon_{h/2}} \right),$$

kde  $\varepsilon_h$  je globální chyba při velikosti kroku  $h$ . (Viz [7])

### 3.2 Algoritmy pro výpočet Caputovy derivace

Nejjednodušší algoritmy pro výpočet Caputovy derivace jsou L1 metoda, která počítá Caputovu derivaci stupně  $0 < \alpha < 1$ , a L2 metoda, která počítá Caputovu derivaci stupně  $1 < \alpha < 2$ . V případech, kdy je potřeba vypočítat Caputovu derivaci vyššího řádu, poslouží věta 2.7, díky které lze problém rozložit na výpočet celočíselné derivace stupně  $m$  a Caputovy derivace, která je stupně  $0 < \alpha < 1$  v případě použití L1 metody nebo  $1 < \alpha < 2$  při použití L2 metody.

#### (1) L1 metoda

$$\left[ {}^C D_t^\alpha y(t) \right]_{t=t_n} = \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k-1} (y(t_{k+1}) - y(t_k)) + O(\tau^{2-\alpha}), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (3.1)$$

kde  $b_k$  je definované vztahem

$$b_k = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left[ (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha} \right]. \quad (3.2)$$

#### (2) L2 metoda

$$\left[ {}^C D_t^\alpha y(t) \right]_{t=t_n} = \sum_{k=-1}^n W_k y(t_{n-k}) + O(\tau^{3-\alpha}), \quad 1 < \alpha < 2, \quad (3.3)$$

kde člen  $W_k$  je určen pro dané  $k$  vztahem

$$W_k = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \begin{cases} 1, & k = -1, \\ 2^{2-\alpha} - 3, & k = 0, \\ (k+2)^{2-\alpha} - 3(k+1)^{2-\alpha} + 3k^{2-\alpha} - (k-1)^{2-\alpha}, & 1 \leq k \leq n-2, \\ -2n^{2-\alpha} + 3(n-1)^{2-\alpha} - (n-2)^{2-\alpha}, & k = n-1, \\ n^{2-\alpha} - (n-1)^{2-\alpha}, & k = n. \end{cases} \quad (3.4)$$

### 3.3 Algoritmy pro řešení diferenciálních rovnic Caputova typu

Mezi nejzákladnější metody řešení počátečních úloh diferenciálních rovnic patří Eulerovy metody. Stejně je tomu i u zlomkového kalkulu, pouze s malými rozdíly. Při zavedení těchto numerických

metod je čerpáno z monografie [1]. Pro níže uvedené Eulerovy metody využíváme dvouparametrický člen:

$$b_{j,n+1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} [(n-j+1)^\alpha - (n-j)^\alpha]. \quad (3.5)$$

Uvažujme počáteční úlohu zlomkových diferenciálních rovnic (2.13). Pak

(1) **Explicitní Eulerova metoda:**  $[{}_0D_t^{-\alpha} f(t, y(t))]_{t=t_{n+1}}$  je aproximována levými obdélníkovými formullemi:

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t_{n+1}^j}{j!} y_0^{(j)} + \tau^\alpha \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_j, y_j), \quad (3.6)$$

kde  $b_{j,n+1}$  je definováno vztahem (3.5).

Pro tuto metodu lze zavést lokální diskretizační chybu v bodě  $t_{n+1}$ , tak že:

$$lte_{n+1} = u(t_{n+1}) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t_{n+1}^j}{j!} y_0^{(j)} - \tau^\alpha \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_j, y(t_j)).$$

(2) **Implicitní Eulerova metoda:**  $[{}_0D_t^{-\alpha} f(t, y(t))]_{t=t_{n+1}}$  je aproximována pravými obdélníkovými formullemi:

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t_{n+1}^j}{j!} y_0^{(j)} + \tau^\alpha \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_{j+1}, y_{j+1}), \quad (3.7)$$

kde  $b_{j,n+1}$  je definováno vztahem (3.5).

(3) **Theta metoda:**  $[{}_0D_t^{-\alpha} f(t, y(t))]_{t=t_{n+1}}$  je aproximována váženou zlomkovou obdélníkovou formulí:

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t_{n+1}^j}{j!} y_0^{(j)} + \tau^\alpha \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} [\theta f(t_j, y_j) + (1-\theta) f(t_{j+1}, y_{j+1})], \quad (3.8)$$

kde  $b_{j,n+1}$  je definováno vztahem (3.5).

Pokud bychom v metodách (3.6) (3.6) a (3.8) uvažovali  $\alpha = 1$  a  $\theta = 0,5$ , pak by se dané metody pro zlomkový kalkulus redukovaly na Explicitní Eulerovu metodu, Implicitní Eulerovu metodu a Theta metodu pro klasické obecné diferenciální rovnice.

**Lemma 3.5.** Uvažujme počáteční úlohu (2.13) a numerické metody (3.6) (3.6) a (3.8). Nechť  $\alpha$  je řád derivace,  $\tau$  je krok na ekvidistantní síti,  $k \in N : k\tau \leq b$ , viz 3.1,  $M > 0$  je konstanta a  $b$  je koncový bod intervalu pro hledání řešení.

$$b_{j,n} = \begin{cases} (n-j)^{\alpha-1}, & j = 1, 2, \dots, n-1, \\ 0, & j \geq n. \end{cases}$$

A nechť  $\sum_{j=m}^n b_{j,n} |\varepsilon_j| = 0$ , pro  $m \geq n \geq 1$ . Pokud pro chybové členy  $\varepsilon_n$

$$|\varepsilon_n| \leq M\tau^\alpha \sum_{j=1}^{n-1} b_{j,n} |\varepsilon_j| + |\eta_0|, \quad n = 1, 2, \dots, k,$$

pak platí také

$$|\varepsilon_k| \leq C|\eta_0|.$$

**Věta 3.6.** Necht' funkce  $y(t)$ , která je řešením počátečního problému (2.13), je lipschitzovská na celém intervalu  $I$  a také  $y(t) \in C^1 \langle 0, T \rangle$ , tedy, má spojité derivace. A  $y_n$ , ( $1 \leq n \leq N$ ) jsou numerická řešení theta metody pro diferenciální rovnice (3.8). Pak platí:

$$|y(t_{n+1}) - y_{n+1}| \leq C \cdot \tau, \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

kde  $C > 0$  je nezávislá na velikosti kroku  $\tau$  a  $k$ . Pak řekneme, že theta metoda (3.8) je tedy metoda prvního řádu  $O(\tau)$ . Viz [1].

*Důkaz.* Necht' velikost globální chyby  $|\varepsilon_n| = |y(t_n) - y_n|$ . Z (3.8) dostáváme

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) - y_{n+1} = & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \\ & - \tau^\alpha \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} [\theta f(t_j, y_j) + (1 - \theta) f(t_{j+1}, y_{j+1})]. \end{aligned}$$

Dosazením do definice globální chyby a postupnými úpravami

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1} = & \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \right. \\ & \left. - \tau^\alpha \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} [\theta f(t_j, y_j) + (1 - \theta) f(t_{j+1}, y_{j+1})] \right| \\ \leq & \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \right. \\ & \left. - \tau^\alpha \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} [\theta f(t_j, y(t_j)) + (1 - \theta) f(t_{j+1}, y(t_{j+1}))] \right| + \\ & + \tau^\alpha \sum_{j=1}^n b_{j,n+1} |\theta (f(t_j, y_j) - f(t_j, y(t_j))) + (1 - \theta) (f(t_{j+1}, y_{j+1}) - f(t_{j+1}, y(t_{j+1})))| \\ \leq & \left| \frac{\theta}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt + \frac{1 - \theta}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \right. \\ & \left. - \tau^\alpha \theta \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_j, y(t_j)) - \tau^\alpha (1 - \theta) \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_{j+1}, y(t_{j+1})) \right| + \\ & + L_1 \tau^\alpha \sum_{j=1}^n b_{j,n+1} |\theta \varepsilon_j| + L_2 \tau^\alpha \sum_{j=1}^n b_{j,n+1} |(1 - \theta) \varepsilon_{j+1}| \\ \leq & \theta C_1 \tau + (1 - \theta) C_2 \tau + L \tau^\alpha \theta \sum_{j=1}^n b_{j,n+1} |\varepsilon_j| + L \tau^\alpha (1 - \theta) \sum_{j=1}^n b_{j,n+1} |\varepsilon_{j+1}| \\ = & \theta C_1 \tau + (1 - \theta) C_2 \tau + L_1 \tau^\alpha \theta \sum_{j=1}^n b_{j,n+1} |\varepsilon_j| + L_2 \tau^\alpha (1 - \theta) \sum_{j=1}^{n-1} b_{j,n+1} |\varepsilon_{j+1}| + \frac{L_2 \tau^\alpha (1 - \theta)}{\Gamma(\alpha + 1)} |\varepsilon_{n+1}| \\ \leq & K \tau + K \tau^\alpha \theta \sum_{j=1}^n (n + 1 - j)^{\alpha-1} |\varepsilon_j| + K \tau^\alpha (1 - \theta) \sum_{j=1}^{n-1} (n + 1 - j)^{\alpha-1} |\varepsilon_{j+1}| + \frac{L_2 \tau^\alpha (1 - \theta)}{\Gamma(\alpha + 1)} |\varepsilon_{n+1}|. \end{aligned}$$

Pro dostatečně malý krok  $\tau$ , pro který platí

$$\frac{L_2 \tau^\alpha (1 - \theta)}{\Gamma(\alpha + 1)} < 1.$$



(To lze zvolit protože  $L_2$  je konstanta nezávislá na kroku  $\tau$ ,  $\alpha$  závisí pouze na počáteční úloze a  $\theta$  je volený parametr Theta metody.) Lze zavést

$$C = \frac{K}{1 - \frac{L_2 \tau^\alpha (1-\theta)}{\Gamma(\alpha+1)}},$$

$$\varepsilon_{n+1} \leq C\tau + C\tau^\alpha \theta \sum_{j=1}^n (n+1-j)^{\alpha-1} |\varepsilon_j| + C\tau^\alpha (1-\theta) \sum_{j=1}^{n-1} (n+1-j)^{\alpha-1} |\varepsilon_{j+1}|$$

Aplikací Lemma 3.5 je pak tvrzení dokázáno.  $\square$

Jelikož parametr  $\theta$  v theta metodě (3.8) zobecňuje explicitní Eulerovu metodu (3.6) i implicitní Eulerovu metodu (3.7) díky volbě  $\theta = 1$  a  $\theta = 0$ . Pak také platí, že explicitní Eulerova metoda (3.6) a implicitní Eulerova metoda (3.7) jsou také metody prvního řádu  $O(\tau)$ .

Důležité téma numerického počtu je stabilita metody. Numerickou metodu nazveme stabilní, jestliže malé změny v počátečních podmínkách nevyvolají velké změny v řešení rovnic. Pro tuto problematiku zmíníme jednu z vět uvedenou v [1], kde se laskavý čtenář může o stabilitě numerických metod pro zlomkové diferenciální rovnice dozvědět více.

**Věta 3.7** (O stabilitě Eulerových numerických metod). *Uvažujme  $y_n$ , kde  $n = 1, 2, \dots, N+1$  řešení počátečního problému (2.13), získané theta metodou pro zlomkové diferenciální rovnice (3.8). Nechť funkce  $f(t, y)$  splňuje Lipschitzovu podmínku vzhledem k druhému argumentu  $y$  a s konstantní Lipschitzovou konstantou  $L$  na celém intervalu  $I$ , na kterém je hledáno řešení. Pak theta metoda pro zlomkové diferenciální rovnice je stabilní.*

Předpokládejme splnění předpokladů věty 3.6 pro parametr  $\theta = 0$  nebo  $\theta = 1$ . Pak řešení počátečního problému (2.13) implicitní nebo explicitní Eulerovou metodou je stabilní.

### 3.4 Testovací úlohy

Výše uvedené testovací úlohy budeme aplikovat na několik počátečních úloh. Ověříme, zda výše zmíněné metody skutečně aproximují řešení zlomkových diferenciálních rovnic, jestli výpočet na jemnější síti má pozitivní vliv na velikost chyby, jak se chová výpočet theta metody pro různé velikosti  $\theta$ , a v závěru i ověřit pomocí EOC řád konvergence numerické metody. Analytické řešení testovacích úloh bylo ověřeno pomocí softwaru Maple.

**Příklad 3.8.** Uvažujme počáteční úlohu na intervalu  $t \in \langle 0, 10 \rangle$

$${}_a^C D_t^{0.5} y(t) = \frac{2}{\Gamma(2.5)} t^{1.5} - y(t) + t^2,$$

$$y(0) = 0.$$

Analytické řešení této diferenciální rovnice je

$$y(t) = t^2.$$

Viz [10]. Získané numerické řešení pro příklad 3.8 je zapsané v tabulce 3.1. Z tabulky je zřejmé, že pro tuto úlohu je nejvhodnější implicitní Eulerova metoda, která dosahuje pro menší počet kroků výrazně přesnějšího řešení, přestože jsou všechny metody stejného řádu.

**Tabulka 3.1:** Numerické řešení  $y(t)$  a globální chyby  $\varepsilon_t$  příkladu 3.8 v bodech  $t = 1, 5$  a  $10$ , pro rovnoměrné dělení na  $N$  kroků

	analyticky	N=10	N=100	N=1000	N=10000	N=100000
Explicitní Eulerova metoda pro zlomkový kalkulus						
$y(1)$	1	2.8260	1.3269	1.0800	1.0230	1.0071
$\varepsilon_{(t=1)}$		$1.83 \cdot 10^0$	$3.27 \cdot 10^{-1}$	$8.00 \cdot 10^{-2}$	$2.3 \cdot 10^{-2}$	$7.06 \cdot 10^{-3}$
$y(5)$	25	45.1179	29.4261	26.2370	25.3757	25.1173
$\varepsilon_{(t=5)}$		$2.01 \cdot 10^1$	$4.43 \cdot 10^0$	$8.00 \cdot 10^{-2}$	$2.3 \cdot 10^{-2}$	$7.06 \cdot 10^{-3}$
$y(10)$	100	156.1706	113.4729	103.8919	101.1955	100.3746
$\varepsilon_{(t=10)}$		$5.62 \cdot 10^1$	$1.35 \cdot 10^1$	$3.89 \cdot 10^0$	$1.1955 \cdot 10^0$	$3.75 \cdot 10^{-1}$
Implicitní Eulerova metoda pro zlomkový kalkulus						
$y(1)$	1	1.3278	1.0473	1.0053	1.0005	1.0001
$\varepsilon_{(t=1)}$		$3.28 \cdot 10^{-1}$	$4.73 \cdot 10^{-2}$	$5.29 \cdot 10^{-3}$	$5.47 \cdot 10^{-4}$	$5.53 \cdot 10^{-5}$
$y(5)$	25	26.3862	25.1640	25.0172	25.0017	25.0002
$\varepsilon_{(t=5)}$		$1.39 \cdot 10^0$	$1.64 \cdot 10^{-1}$	$1.72 \cdot 10^{-2}$	$1.74 \cdot 10^{-3}$	$1.75 \cdot 10^{-4}$
$y(10)$	100	102.3342	100.2614	100.0270	100.0027	100.0003
$\varepsilon_{(t=10)}$		$2.33 \cdot 10^0$	$2.61 \cdot 10^{-1}$	$2.70 \cdot 10^{-2}$	$2.73 \cdot 10^{-3}$	$2.74 \cdot 10^{-4}$
Theta Eulerova metoda pro zlomkový kalkulus s parametrem $\theta = 0.5$						
$y(1)$	1	1.867	1.1709	1.0413	1.0117	1.0035
$\varepsilon_{(t=1)}$		$8.07 \cdot 10^{-1}$	$1.71 \cdot 10^{-1}$	$4.13 \cdot 10^{-2}$	$1.17 \cdot 10^{-2}$	$3.55 \cdot 10^{-3}$
$y(5)$	25	33.3885	27.1355	25.6131	25.1874	25.0586
$\varepsilon_{(t=5)}$		$8.39 \cdot 10^0$	$2.14 \cdot 10^0$	$6.13 \cdot 10^{-1}$	$1.87 \cdot 10^{-1}$	$5.86 \cdot 10^{-2}$
$y(10)$	100	123.9709	106.4812	101.9247	100.5958	100.1871
$\varepsilon_{(t=10)}$		$2.40 \cdot 10^1$	$6.48 \cdot 10^0$	$1.92 \cdot 10^0$	$5.96 \cdot 10^{-1}$	$1.87 \cdot 10^{-1}$

**Příklad 3.9.** Uvažujme počáteční úlohu (2.16) z kapitoly 2.4.

$$m \cdot \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} + k \cdot y = 0, \quad t \in \langle 0, 10 \rangle \quad 1 < \alpha < 2,$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 0,$$

$$m = 1, k = 1.$$

Jak bylo ukázáno výše, rovnice má analytické řešení (2.22), konkrétně pro tuto úlohu:

$$y(t) = E_{\alpha,1}(-t^\alpha).$$

Konstanty  $c_0, c_1$  jsou dány počátečními podmínkami  $c_0 = y(0) = 1, c_1 = y'(0) = 0$ .

Na intervalu  $t \in \langle 0, 10 \rangle$  vypočítáme odhad řádu konvergence EOC (3.4) Eulerových numerických metod (3.6), (3.7) a (3.8) pro řešení počáteční úlohy zlomkové diferenciální rovnice.

Výsledky jsou uvedeny v tabulce 3.2 pro řád derivace  $\alpha = 1.1$ , v tabulce 3.3 pro řád derivace  $\alpha = 1.5$  a v tabulce 3.4 pro řád derivace  $\alpha = 1.9$ .

V tabulkách 3.3 a 3.4 pro příklad 3.9 pro řád po řadě  $\alpha = 1.5$  a  $\alpha = 1.9$  je vidět přesný odhad pro řád numerických metod (připomeňme, že theta metoda pro  $\theta = 0$  je shodná s implicitní metodou a  $\theta = 1$  je shodná s explicitní Eulerovou metodou). Pro výpočet s derivací  $\alpha = 1.1$  a parametrem  $\theta = 0.7$  a  $\theta = 1$  vychází vyšší odhad řádu konvergence EOC, což může být způsobeno specifikem příkladu a zvolených parametrů, nedostatečnou přesností výpočtu přesného řešení nebo pro vyšší počet kroků  $N$  i zaokrouhlovacími chybami.

**Tabulka 3.2:** Numerické řešení příkladu 3.9 pro  $\alpha = 1.1$  a rovnoměrné dělení na  $N$  kroků

$\alpha = 1.1$									
N	$\theta = 0$		$\theta = 0.4$		$\theta = 0.7$		$\theta = 1$		
	$\varepsilon_n$	EOC	$\varepsilon_n$	EOC	$\varepsilon_n$	EOC	$\varepsilon_n$	EOC	
50	$2.12 \cdot 10^{-4}$		$4.21 \cdot 10^{-5}$		$7.84 \cdot 10^{-5}$		$1.93 \cdot 10^{-4}$		
100	$1.05 \cdot 10^{-4}$	1.0130	$2.56 \cdot 10^{-5}$	0.7150	$3.24 \cdot 10^{-5}$	1.2747	$8.90 \cdot 10^{-5}$	1.1146	
200	$5.24 \cdot 10^{-5}$	1.0071	$1.47 \cdot 10^{-5}$	0.8005	$1.31 \cdot 10^{-5}$	1.3024	$4.07 \cdot 10^{-5}$	1.1303	
400	$2.61 \cdot 10^{-5}$	1.0036	$8.19 \cdot 10^{-6}$	0.8460	$5.17 \cdot 10^{-6}$	1.3446	$1.85 \cdot 10^{-5}$	1.1395	
800	$1.30 \cdot 10^{-5}$	1.0018	$4.47 \cdot 10^{-6}$	0.8742	$1.95 \cdot 10^{-6}$	1.4111	$8.34 \cdot 10^{-6}$	1.1462	
1600	$6.52 \cdot 10^{-6}$	1.0009	$2.40 \cdot 10^{-6}$	0.8937	$6.76 \cdot 10^{-7}$	1.5247	$3.75 \cdot 10^{-6}$	1.1523	
3200	$3.26 \cdot 10^{-6}$	1.0005	$1.28 \cdot 10^{-6}$	0.9083	$2.00 \cdot 10^{-7}$	1.7544	$1.68 \cdot 10^{-6}$	1.1586	
6400	$1.63 \cdot 10^{-6}$	1.0002	$6.77 \cdot 10^{-7}$	0.9197	$3.62 \cdot 10^{-8}$	2.4704	$7.49 \cdot 10^{-7}$	1.1657	
12800	$8.14 \cdot 10^{-7}$	1.0001	$3.56 \cdot 10^{-7}$	0.9291	$1.17 \cdot 10^{-8}$	1.6219	$3.32 \cdot 10^{-7}$	1.1739	

**Tabulka 3.3:** Numerické řešení testovací úlohy (2) pro  $\alpha = 1.5$  a rovnoměrné dělení na  $N$  kroků

$\alpha = 1.5$									
N	$\theta = 0$		$\theta = 0.4$		$\theta = 0.7$		$\theta = 1$		
	$\varepsilon_n$	EOC	$\varepsilon_n$	EOC	$\varepsilon_n$	EOC	$\varepsilon_n$	EOC	
50	$2.58 \cdot 10^{-3}$		$2.26 \cdot 10^{-3}$		$2.06 \cdot 10^{-3}$		$1.88 \cdot 10^{-3}$		
100	$1.34 \cdot 10^{-3}$	0.9460	$1.23 \cdot 10^{-3}$	0.8780	$1.16 \cdot 10^{-3}$	0.8334	$1.08 \cdot 10^{-3}$	0.7977	
200	$6.84 \cdot 10^{-4}$	0.9732	$6.45 \cdot 10^{-4}$	0.9344	$6.17 \cdot 10^{-4}$	0.9068	$5.90 \cdot 10^{-4}$	0.8810	
400	$3.45 \cdot 10^{-4}$	0.9866	$3.31 \cdot 10^{-4}$	0.9636	$3.20 \cdot 10^{-4}$	0.9464	$3.10 \cdot 10^{-4}$	0.9294	
800	$1.73 \cdot 10^{-4}$	0.9933	$1.68 \cdot 10^{-4}$	0.9790	$1.64 \cdot 10^{-4}$	0.9681	$1.60 \cdot 10^{-4}$	0.9570	
1600	$8.69 \cdot 10^{-5}$	0.9967	$8.46 \cdot 10^{-5}$	0.9874	$8.30 \cdot 10^{-5}$	0.9803	$8.13 \cdot 10^{-5}$	0.9730	
3200	$4.35 \cdot 10^{-5}$	0.9983	$4.25 \cdot 10^{-5}$	0.9922	$4.18 \cdot 10^{-5}$	0.9874	$4.11 \cdot 10^{-5}$	0.9825	
6400	$2.18 \cdot 10^{-5}$	0.9992	$2.13 \cdot 10^{-5}$	0.9950	$2.10 \cdot 10^{-5}$	0.9918	$2.07 \cdot 10^{-5}$	0.9884	
12800	$1.09 \cdot 10^{-5}$	0.9996	$1.07 \cdot 10^{-5}$	0.9967	$1.06 \cdot 10^{-5}$	0.9945	$1.05 \cdot 10^{-5}$	0.9922	

**Tabulka 3.4:** Numerické řešení testovací úlohy (2) pro  $\alpha = 1.9$  a rovnoměrné dělení na  $N$  kroků

$\alpha = 1.9$									
N	$\theta = 0$		$\theta = 0.4$		$\theta = 0.7$		$\theta = 1$		
	$\varepsilon_n$	EOC	$\varepsilon_n$	EOC	$\varepsilon_n$	EOC	$\varepsilon_n$	EOC	
50	$7.49 \cdot 10^{-2}$		$8.55 \cdot 10^{-2}$		$9.36 \cdot 10^{-2}$		$1.02 \cdot 10^{-1}$		
100	$4.00 \cdot 10^{-2}$	0.9044	$4.54 \cdot 10^{-2}$	0.9109	$4.95 \cdot 10^{-2}$	0.9179	$5.37 \cdot 10^{-2}$	0.9261	
200	$2.07 \cdot 10^{-2}$	0.9502	$2.34 \cdot 10^{-2}$	0.9552	$2.55 \cdot 10^{-2}$	0.9591	$2.75 \cdot 10^{-2}$	0.9629	
400	$1.05 \cdot 10^{-2}$	0.9746	$1.19 \cdot 10^{-2}$	0.9777	$1.29 \cdot 10^{-2}$	0.9799	$1.39 \cdot 10^{-2}$	0.9819	
800	$5.32 \cdot 10^{-3}$	0.9872	$6.00 \cdot 10^{-3}$	0.9890	$6.50 \cdot 10^{-3}$	0.9902	$7.01 \cdot 10^{-3}$	0.9913	
1600	$2.67 \cdot 10^{-3}$	0.9936	$3.01 \cdot 10^{-3}$	0.9946	$3.26 \cdot 10^{-3}$	0.9953	$3.52 \cdot 10^{-3}$	0.9958	
3200	$1.34 \cdot 10^{-3}$	0.9968	$1.51 \cdot 10^{-3}$	0.9974	$1.63 \cdot 10^{-3}$	0.9977	$1.76 \cdot 10^{-3}$	0.9980	
6400	$6.70 \cdot 10^{-4}$	0.9984	$7.54 \cdot 10^{-4}$	0.9987	$8.18 \cdot 10^{-4}$	0.9989	$8.81 \cdot 10^{-4}$	0.9991	
12800	$3.35 \cdot 10^{-4}$	0.9992	$3.77 \cdot 10^{-4}$	0.9994	$4.09 \cdot 10^{-4}$	0.9995	$4.41 \cdot 10^{-4}$	0.9996	

**Příklad 3.10.** Uvažujme funkci

$$y(t) = t^3 - 3t^3 + 2t, \quad t \in \langle 0, 2 \rangle. \quad (3.9)$$

Úlohou je určit Caputovu derivaci funkce (3.9) řádu 0.3, 0.5 a 0.8 v bodě  $t = 2$ .

K nalezení analytického řešení pro tuto úlohu byl použit software Maple. Hodnota funkce v bodě  $t = 2$  byla vyčíslena na 20 platných dekadických cifer. Označme  $Y_{0.3}(t)$ ,  $Y_{0.5}(t)$ ,  $Y_{0.8}(t)$  po řadě derivaci řádu 0.3, 0.5 a 0.8.

$$Y_{0.3}(t) = {}_0^C D_t^{0.3} y(t) = \frac{\frac{2000}{1071} t^{\frac{27}{10}} - \frac{600}{119} t^{\frac{17}{10}} + \frac{20}{7} t^{\frac{7}{10}}}{\Gamma(\frac{7}{10})},$$

$$Y_{0.3}(2) = \frac{260 \cdot 2^{\frac{7}{10}}}{1071 \cdot \Gamma(\frac{7}{10})} \doteq 0.30381671834570084887,$$

$$Y_{0.5}(t) = {}_0^C D_t^{0.5} y(t) \approx \frac{\frac{16}{5} t^{\frac{5}{2}} - 8 t^{\frac{3}{2}} + 4 \sqrt{t}}{\sqrt{\pi}},$$

$$Y_{0.5}(2) = \frac{4\sqrt{2}}{5\sqrt{\pi}} \doteq 0.63830764864229228470,$$

$$Y_{0.8}(t) = {}_0^C D_t^{0.8} y(t) = \frac{\Gamma(\frac{4}{5}) \left( \frac{125}{11} t^{\frac{11}{5}} - 25 t^{\frac{6}{5}} + 10 t^{\frac{1}{5}} \right)}{\pi \csc(\frac{\pi}{5})},$$

$$Y_{0.8}(2) = \frac{60 \cdot \Gamma(\frac{4}{5}) \cdot 2^{\frac{1}{5}} \sin(\frac{\pi}{5})}{11\pi} \doteq 1.3648095609347007592.$$

Numerické řešení příkladu 3.10 je uvedeno v tabulce 3.5. Lze pozorovat poměrně dobré aproximace řešení i pro nízký počet kroků. Pro všechny tři hodnoty  $\alpha$  a pro počet kroků  $N = 1600$  je globální chyba řešení menší než  $\varepsilon < 10^{-3}$ . Pro všechny hodnoty parametrů je vidět vcelku přesný odhad řádu konvergence, jelikož L1 metoda je řádu  $2 - \alpha$ .

**Tabulka 3.5:** Chyba numerického řešení příkladu 3.10 pro stupně derivace  $\alpha = 0.3, 0.5$  a  $0.8$

N	$\alpha = 0.3$		$\alpha = 0.5$		$\alpha = 0.8$	
	$\varepsilon_n$	EOC	$\varepsilon_n$	EOC	$\varepsilon_n$	EOC
100	$1.01 \cdot 10^{-3}$		$3.73 \cdot 10^{-3}$		$2.06 \cdot 10^{-2}$	
200	$3.26 \cdot 10^{-4}$	1.6378	$1.35 \cdot 10^{-4}$	1.4713	$9.03 \cdot 10^{-3}$	1.1910
400	$1.04 \cdot 10^{-4}$	1.6518	$4.82 \cdot 10^{-4}$	1.4804	$3.94 \cdot 10^{-3}$	1.1950
800	$3.28 \cdot 10^{-5}$	1.6622	$1.72 \cdot 10^{-4}$	1.4865	$1.72 \cdot 10^{-3}$	1.1972
1600	$1.03 \cdot 10^{-5}$	1.6701	$6.13 \cdot 10^{-5}$	1.4906	$7.49 \cdot 10^{-4}$	1.1985
3200	$3.22 \cdot 10^{-6}$	1.6762	$2.18 \cdot 10^{-5}$	1.4935	$3.26 \cdot 10^{-4}$	1.1991
6400	$1.00 \cdot 10^{-6}$	1.6810	$7.72 \cdot 10^{-6}$	1.4954	$1.42 \cdot 10^{-4}$	1.1995
12800	$3.13 \cdot 10^{-7}$	1.6848	$2.73 \cdot 10^{-6}$	1.4968	$6.19 \cdot 10^{-5}$	1.1997
25600	$9.70 \cdot 10^{-8}$	1.6878	$9.68 \cdot 10^{-7}$	1.4977	$2.69 \cdot 10^{-5}$	1.1998
51200	$3.00 \cdot 10^{-8}$	1.6901	$3.43 \cdot 10^{-7}$	1.4984	$1.17 \cdot 10^{-5}$	1.1999
102400	$9.31 \cdot 10^{-9}$	1.6920	$1.21 \cdot 10^{-7}$	1.4989	$5.10 \cdot 10^{-6}$	1.2000
204800	$2.88 \cdot 10^{-9}$	1.6936	$4.29 \cdot 10^{-8}$	1.4992	$2.22 \cdot 10^{-6}$	1.2000
409600	$8.89 \cdot 10^{-10}$	1.6948	$1.52 \cdot 10^{-8}$	1.4994	$9.67 \cdot 10^{-7}$	1.2000

## 4 Závěr

Cílem této práce bylo nastudovat problematiku zlomkových diferenciálních rovnic, realizovat numerické metody a diskutovat vlastnosti daných numerických metod.

V první části byla představena teorie potřebná k zavedení zlomkových diferenciálních rovnic. Tato část vrcholí ukázkovým výpočtem úlohy mechanického oscilátoru. Zároveň byl diskutován algoritmus pro výpočet funkčních hodnot Mittag-Lefflerovy funkce a pro následnou práci byl vybrán stabilnější postup řešení.

Hlavní část bakalářské práce byla zaměřena na numerické řešení zlomkových diferenciálních rovnic, kdy všechny zmíněné metody byly realizovány v prostředí Matlab, zejména se jedná o Eulerovy implicitní a explicitní metody a theta metodu. Výčet příložených programů je uveden v seznamu příloh, včetně skriptů obsahujících testovací úlohy s analýzou řádu konvergence metod. Některé z daných úloh byly také rozebrány přímo v textu této práce.

Oblast zlomkových diferenciálních rovnic je obsáhlým a stále se rozvíjejícím odvětvím. Nebylo tedy zdaleka možné popsat vše a zůstalo mnoho možností práci rozvinout. Zejména by se mohlo přikročit k upravení kódu v softwaru Matlab pro řešení soustav zlomkových diferenciálních rovnic. Přirozená výpočetní náročnost algoritmů v sobě také obsahuje velký prostor pro větší optimalizaci, paralelizaci výpočtů nebo potlačování zaokrouhlovacích chyb. Dále by bylo možné rozšířit soubor metod o řešení více krokovými metodami nebo o metody vyššího řádu konvergence.

## Reference

- [1] LI, Changpin. *Numerical Methods for Fractional Calculus*. Boca Raton: CRC Press, 2015, xviii, 281 stran : grafy. ISBN 978-1-4822-5380-1.
- [2] ČERMÁK, Libor. Numerické metody [online]. Brno: Vysoké učení technické v Brně, 2020 [cit. 2023-05-19]. Dostupné z: <https://mathonline.fme.vutbr.cz/Numericke-metody-II/sc-1246-sr-1-a-263/default.aspx>
- [3] CHEN, Wen, HongGuang SUN, Xicheng LI a Wen CHEN. Fractional derivative modeling in mechanics and engineering. Singapore: Springer, 2022, xv, 370 stran : grafy. ISBN 978-981-16-8801-0.
- [4] DALIR, Mehdi a Majid BASHOUR. Applications of Fractional Calculus. Applied Mathematical Sciences. [online], 2010, 2010(4), 1021-1032. ISSN 1314-7552.
- [5] PODLUBNÝ, Igor. Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. San Diego: Academic Press, 1999, xxiv, 340 s. : il. ISBN 0-12-558840-2.
- [6] GARRAPPA, Roberto, Numerical evaluation of two and three parameter Mittag-Leffler functions. Society for Industrial and Applied Mathematics
- [7] GARRAPPA, Roberto. Numerical Solution of Fractional Differential Equations: A Survey and a Software Tutorial. Mathematics (Basel) [online]. Basel: MDPI, 2018, 6(2), 16 [cit. 2023-05-23]. ISSN 2227-7390. Dostupné z: [doi:10.3390/math6020016](https://doi.org/10.3390/math6020016)
- [8] HALLIDAY, David, Robert RESNICK, Jearl WALKER, et al. Brno: Vysoké učení technické v Brně - nakladatelství VUTIUM, 2021. Překlady vysokoškolských učebnic. ISBN 978-80-214-4123-1.
- [9] KULHÁNEK, Petr. Harmonický Oscilátor. In: KULHÁNEK, Petr. Fyzika 1: studijní text [online]. Verze: 10.4.2023. Praha: CVUT FEL, 2020, s. 67-83 [cit. 2023-05-19]. Dostupné z: <https://www.aldebaran.cz/studium/f1.pdf>
- [10] LI, Changpin, An CHEN a Junije YE. Numerical approaches to fractional calculus and fractional ordinary differential equation. J. Comput. Physics. 230. 3352-3368. 10.1016/j.jcp.2011.01.030.
- [11] WEISS, George H. R. Klages, G. Radons, I.M. Sokolov (eds.): Anomalous Transport. Online. Journal of statistical physics. 2009, roč. 135, č. 2, s. 389-391. ISSN 0022-4715. Dostupné z: <https://doi.org/10.1007/s10955-009-9713-5>. [cit. 2024-04-09].

## Seznam příloh

1. **L1Caputo.m**
  - MATLAB funkce pro výpočet Caputovy derivace pomocí L1 metody.
2. **L2Caputo.m**
  - MATLAB funkce pro výpočet Caputovy derivace pomocí L2 metody.
3. **FractionalBackwardEuler.m**
  - MATLAB funkce pro řešení zlomkové diferenciální rovnice pomocí Implicitní Eulerovy metody.
4. **FractionalForwardEulerOptimalized.m**
  - MATLAB funkce pro řešení zlomkové diferenciální rovnice Explicitní Eulerovou metodou.
5. **FractionalWeightedEuler.m**
  - MATLAB funkce pro řešení zlomkové diferenciální rovnice theta metodou.
6. **FractionalOscillator.m**
  - MATLAB skript pro simulaci mechanického oscilátoru.
7. **L1MetodTester.m**
  - MATLAB skript pro testování L1 metody pro řád derivace  $\alpha \in (0, 1)$ .
  - $y = 2t - 3t^2 + t^3$ ;
8. **L2MetodTester.m**
  - MATLAB skript pro testování L2 metody pro řád derivace  $\alpha \in (1, 2)$ .
  - $y = 2t - 3t^2 + t^3$ ;
9. **TestUlohyEuler.m**
  - MATLAB skript pro testování úlohy Eulerovy metody pro řád derivace  $\alpha \in (0, 1)$ .
  - ${}_0^C D_t^\alpha y(t) = \frac{2}{\Gamma(2.5)} t^{1.5} - y + t^2, y_0 = 0$
10. **TestUlohyEuler2.m**
  - MATLAB skript pro testování úlohy Eulerovy metody pro řád derivace  $\alpha \in (0, 1)$ .
  - ${}_0^C D_t^\alpha y(t) = -y, y_0 = 0$
11. **TestUlohyEuler3.m**
  - MATLAB skript pro testování úlohy Eulerovy metody pro řád derivace  $\alpha \in (0, 1)$ .
  - ${}_0^C D_t^\alpha y(t) = \frac{2}{\Gamma(3-\alpha)} t^{2-\alpha} - \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} t^{1-\alpha} - y + t^2 - t, y_0 = 0$
12. **TestUlohyEuler5.m**
  - MATLAB skript pro testování úlohy Eulerovy metody pro řád derivace  $\alpha \in (0, 1)$ .
  - ${}_0^C D_t^\alpha y(t) = t^2, y_0 = 0$
13. **TestUlohyEuler6.m**
  - MATLAB skript pro testování úlohy Eulerovy metody pro řád derivace  $\alpha \in (0, 1)$ .
  - ${}_0^C D_t^\alpha y(t) = y^{0.2}, y_0 = 0$
14. **TestUlohyEuler7.m**
  - MATLAB skript pro testování úlohy Eulerovy metody pro řád derivace  $\alpha \in (1, 2)$ .
  - ${}_0^C D_t^\alpha y(t) = -y^2 + \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(6-\alpha)} t^{5-\alpha} - \frac{3\Gamma(5)}{\Gamma(5-\alpha)} t^{4-\alpha} + \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(4-\alpha)} t^{3-\alpha} + (t^5 - 3t^4 + 2t^3)^2,$   
 $y_0 = 0, y'_0 = 0$
15. **TestUlohyGarapa.m**
  - MATLAB skript pro testovací úlohu z práce R. Garrapy
  - ${}_0^C D_t^\alpha y(t) = \frac{40320}{\Gamma(9-\alpha)} t^{8-\alpha} - \frac{3\Gamma(5+\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(5-\frac{\alpha}{2})} t^{4-\frac{\alpha}{2}} + \frac{9}{4}\Gamma(\alpha+1) + \left(\frac{3}{2}t^{\frac{\alpha}{2}} - t^4\right)^3 - y^{\frac{3}{2}}, y_0 = 0$