



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY  
INSTITUTE OF MATHEMATICS

# ZLOMKOVÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE CAPUTOVA TYPU - NUMERICKÁ ANALÝZA

CAPUTO TYPE FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS - NUMERICAL ANALYSIS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE  
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

Ondřej Havelka

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

doc. Ing. Petr Tomášek, Ph.D.

BRNO 2024



## Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky  
Student: **Ondřej Havelka**  
Studijní program: Matematické inženýrství  
Studijní obor: bez specializace  
Vedoucí práce: **doc. Ing. Petr Tomášek, Ph.D.**  
Akademický rok: 2022/23

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

### **Zlomkové diferenciální rovnice Caputova typu – numerická analýza**

#### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

Teorie zlomkových diferenciálních rovnic je v současné době jednou z nejstudovanějších oblastí matematické analýzy. Zavedení neceločíselných derivací otevřelo celou řadu nových problémů a výzev. Numerické řešení a analýza počátečních problémů zlomkových diferenciálních rovnic je pak jednou z nich.

#### **Cíle bakalářské práce:**

- Nastudování problematiky numerických metod pro zlomkové diferenciální rovnice.
- Realizace vybraných numerických metod ve vhodném programovacím prostředí.
- Diskuze vlastností numerických metod při řešení testovacích úloh.

#### **Seznam doporučené literatury:**

DIETHELM, K. The analysis of fractional differential equations: an application-oriented exposition using differential operators of Caputo type. Berlin: Springer, 2010, viii, 247 s. ISBN 978-3-642-14573-5.

LI, C., ZENG, F. Numerical methods for fractional calculus. Boca Raton: CRC Press, 2015, 281 s. ISBN-13: 978-1-4822-5380-1.

## **Abstrakt**

Bakalářská práce se zabývá zlomkovými diferenciálními rovnicemi Caputova typu. Jsou uvedeny některé základní pojmy zlomkového kalkulu. Následně jsou představeny zlomkové derivace a integrál, no což navazuje formulace počáteční úlohy pro neceločíselné diferenciální rovnice. V oblasti numerických metod je práce zaměřena na Eulerovy metody, které jsou otestovány na několika vybraných úlohách.

## **Abstract**

Bachelor's thesis deals with Caputo fractional differential equations. There are introduced some basic concepts of fractional calculus. Then fractional derivatives and integral is introduced, followed by initial problem for fractional ordinary differential equations. In the area of numerical methods, thesis is focused on fractional Euler methods, which are tested on several examples.

## **Klíčová slova**

Zlomkové diferenciální rovnice, Caputova derivace, Eulerovy metody pro zlomkové diferenciální rovnice, Mittag-Lefflerova funkce.

## **Keywords**

Fractional differential equations, Caputo derivative, Fractional Euler methods, Mittag-Leffler function.



Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Zlomkové diferenciální rovnice Caputova typu - Numerická analýza* vypracoval samostatně pod vedením doc. Ing. Petra Tomáška Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Ondřej Havelka



Chtěl bych poděkovat svému školiteli docentu Tomáškoví za odborné vedení a za pomoc při zpracovávání této práce, která byla často vysoko nad rámec povinností či domluvy. Dále bych rád poděkoval všem kamarádům, spolužákům a spolubydlícím za podporu v těžkých chvílích. A v poslední řadě děkuji sobě, že jsem se tohoto dožil.

Ondřej Havelka





## Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>11</b>
1.1	Motivační úloha . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Základní pojmy</b>	<b>12</b>
2.1	Speciální funkce . . . . .	12
2.2	Zlomková derivace a integrál . . . . .	16
2.3	Zlomkové diferenciální rovnice . . . . .	18
2.4	Využití zlomkových diferenciálních rovnic . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Numerické metody pro zlomkové diferenciální rovnice</b>	<b>21</b>
3.1	Základní pojmy numerického počtu . . . . .	21
3.2	Algoritmy pro výpočet Caputovy derivace . . . . .	22
3.3	Algoritmy pro řešení diferenciálních rovnic Caputova typu . . . . .	22
3.4	Testovací úlohy . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Závěr</b>	<b>29</b>

# 1 Úvod

Problematika neceločíselných derivací je stará téměř jako běžných celočíselných derivací a ukazuje touhu matematiků zobecňovat problémy. Jak se ale v této práci později naznačí, nejedná se o pravé zobecnění, jelikož lze zlomkovou derivaci zadefinovat vícero neekvivalentními způsoby.

Poprvé se s neceločíselné derivaci dostaneme nedlouho po roce 1676, kdy Gottfried Wilhelm Leibniz představil svoji teorii diferenciálního počtu. Již v roce 1695 se Guillaume de L'Hospital ve své korespondenci s G. W. Leibnizem táže na interpretaci půlté derivace funkce  $y(x)$ , neboli  $n = 1/2$  ve výrazu  $d^n y(x)/dx^n$ . G. W. Leibniz tehdy odpověděl, že " $dx^{\frac{1}{2}} = x \cdot \sqrt{dx : x}$ ", což se později ukázalo jako nepřesné. O paradoxu, který svým tvrzením způsobil pojednává například A. Hilfer ve druhé kapitole [11]. V následujících staletích se svými definicemi neceločíselných derivací či integrálů přicházeli postupně Leonhard Paul Euler (1730), Jean Baptiste Joseph Fourier (1820-1822), Niels Henrik Abel (1823-1826), Joseph Liouville (1832-1855), Georg Friedrich Bernhard Riemann (1847-1876), Michele Caputo (1967) a další. V dnešní době se pak nejčastěji využívají Riemann-Liouvillova derivace a Caputova derivace, na kterou bude práce zaměřena a to zejména na řešení počátečních úloh zlomkových diferenciálních rovnic. Cílem práce je zpracovat základní přístupy numerického řešení těchto problémů a ověřit jejich přesnost a řád konvergence na testovacích úlohách.

V druhé kapitole jsou zadefinovány gama a Mittag-Lefflerova funkce, zároveň je i krátce pojednáno o možnosti výpočtu funkční hodnoty Mittag-Lefflerovy funkce. Ve třetí kapitole se zavádí pojmy Riemann-Liouvillov integrál a je krátce pojednáno o některých vlastnostech Caputovy derivace. Ve 4. kapitole je zavedena počáteční úloha zlomkových diferenciálních rovnic a věty o existenci a jednoznačnosti řešení této rovnice. V páté kapitole se ukáže využití zlomkových diferenciálních rovnic pro modelování mechanického oscilátoru. V šesté kapitole se nejprve zavedou některé pojmy numerického počtu a následně se představí numerické algoritmy pro výpočet Caputovy derivace a počátečních úloh zlomkových diferenciálních rovnic pomocí Eulerových metod. Jejich implementace v prostředí Matlab je součástí přílohy této bakalářské práce. V sedmé kapitole budou algoritmy zpracované v programu Matlab otestovány na vybraných úlohách a numerické řešení bude porovnáno s analytickým řešením.

## 1.1 Motivační úloha

Zlomkové diferenciální úlohy plní svou úlohu v řadě technických a vědních oborů. Jako jedna z historicky prvních úloh spojená se zlomkovou derivací se dá považovat úloha tautochrony, tedy křivky po které je doba "klouzání" hmotného bodu  $T$  v homogenním tíhovém poli nezávislá na počáteční poloze. Touto úlohou se zabýval již výše zmíněný N. H. Abel, který popsal tento problém integrální rovnicí:

$$\sqrt{2g}T = \int_0^\eta (\eta - y)^{-\frac{1}{2}} f'(y) dy, \quad (1.1)$$

kde  $g$  je gravitační zrychlení  $\eta$  je počáteční poloha tělesa na ose  $y$  a  $f(y)$  je rovnicí křivky. V následujících letech se ukázalo, že tato integrální rovnice (1.1) odpovídá zlomkové diferenciální rovnici:

$$\sqrt{2g}T = \Gamma(0.5) \cdot {}_0D_\eta^{-\frac{1}{2}} f'(\eta),$$

kde operátor zlomkové derivace  ${}_0D_\eta^{-\frac{1}{2}}$  je zadefinován níže (viz vztah (2.8)).

## 2 Základní pojmy

Ve druhé kapitole budou představeny definice, se kterými se bude v práci pracovat. V první podkapitole to budou dvě speciální funkce, gama funkce a následně Mittag-Lefflerova funkce. Věty uvádějící vztahy speciálních funkcí budou zde udány bez důkazu. Ty je možné najít v [5] a v literatuře tam uvedené. Ve druhé podkapitole budou představeny stěžejní definice Riemann-Liouvillova integrálu i derivace a poté i Caputovy derivace, společně s některými důležitými vlastnostmi. Třetí podkapitola představí zlomkové diferenciální rovnice a uvede větu o jednoznačnosti řešení počátečních úloh. V poslední části této podkapitoly se ukáže příklad využití zlomkových diferenciálních rovnic při modelování kmitání tlumeného mechanického oscilátoru.

### 2.1 Speciální funkce

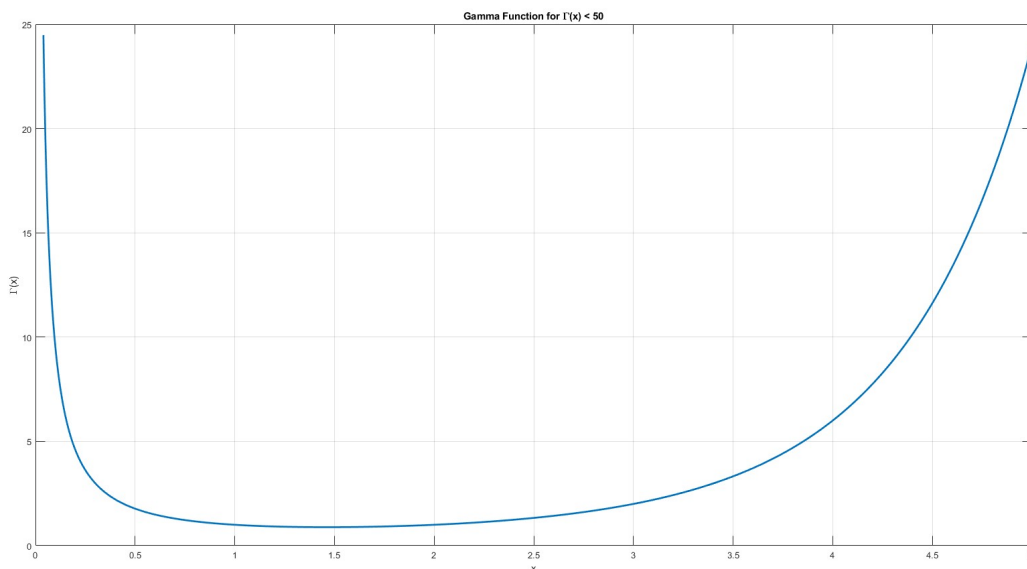
#### Gama funkce

Jako první ze speciálních funkcí nutnou pro vstup do zlomkového kalkulu je gama funkce, která je funkcí zobecňující faktoriál. Tímto zobecněním myslíme zbavení se pout přirozených čísel a vstup do čísel kladných reálných. Gama funkci je sice možné definovat obecněji a to na oboru komplexních čísel, avšak pro účely této práce je zobecnění na kladná reálná čísla více než dostatečné. Při shrnutí poznatků o Gama funkci je užito literatury [4]

**Definice 2.1.** *Gama funkce* Nechť  $z \in \mathbb{R}^+$ , pak hodnota *gama funkce* v bodě  $z$  je dána vztahem

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} \cdot e^{-t} dt, \quad z > 0$$

**Obrázek 2.1:** Graf gama funkce na intervalu (0,1, 5)



Z vlastností gama funkce budou zmíněny dva nejdůležitější vztahy.

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \Gamma(n+1) = n!. \quad (2.1)$$

$$\forall z \in \mathbb{R}^+ : \quad \Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z). \quad (2.2)$$

Z těchto vztahů vyplývá následující. Faktoriál je tedy pouhým zjednodušením gama funkce a zároveň je možné gama funkci na oboru přirozených čísel uvažovat jako faktoriál. A stejně jako hodnotu faktoriálu lze spočítat pomocí rekurzivní funkce, která využívá pouze zadefinování hodnoty faktoriálu v 0, tak i hodnotu gama funkce s kladným argumentem lze díky následující větě rekurzivně spočítat, pokud známe jeho hodnotu na intervalu  $(0, 1)$ .

**Tabulka 2.1:** Hodnoty funkce  $\Gamma$  ve vybraných bodech

$z$	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$\Gamma(z)$	$\sqrt{\pi}$	1	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}$	1	$\frac{3}{4} \cdot \sqrt{\pi}$	2	$\frac{15}{8} \cdot \sqrt{\pi}$	6

### Mittag-Lefflerova funkce

Mittag-Lefflerova funkce v oblasti zlomkových diferenciálních rovnic představuje podobnou roli, jako exponenciální funkce se základem  $e$  pro obyčejné diferenciální rovnice a v mnoha zdrojích se o ní vznešeně mluví jako o zlaté funkci zlomkového kalkulu.

I přes velký význam se však jedná o funkci opominutou ve většině běžně dostupného softwaru. Výjimkou v tomto není ani Matlab R2022b, který je v této práci využit.

**Definice 2.2.** Mittag-Lefflerova funkce s parametry  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$  v bodě  $z$  je značena  $E_{\alpha, \beta}(z)$  a je definována součtem nekonečné mocninné řady

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Existuje také jednoparametrická Mittag-Lefflerova funkce je možné také zjednodušit. Při položení parametru  $\beta = 1$  se taková funkce nazývá jednoparametrická Mittag-Lefflerova funkce.

Pro případ, kdy se  $\alpha = 0$  není Mittag-Lefflerova funkce výše definovaná, jelikož v takovém případě není zaručena konvergence řady. Dodefinování při  $|z| < 1$  již není problematické, jelikož se tento případ zjednoduší na geometrickou řadu, pro kterou explicitně známe řešení. Mittag-Lefflerovu funkci v bodě  $z$  s parametry  $\alpha = 0, \beta > 0$  definujeme jako:

$$E_{0, \beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta) \cdot (1 - z)}, \quad \forall z \in \mathbb{R} : |z| < 1 \quad (2.3)$$

### Definiční obor Mittag-Lefflerovy funkce

Přirozenou otázkou u sumární definice Mittag-Lefflerovy funkce vyvolává její definiční obor, respektive obor konvergence mocninné řady. K ukázání definičního oboru lze použít známé limitní podílové kritérium. Parametr  $\rho$  lze vypočítat jako podíl po sobě jdoucích členů nekonečné řady v limitě, kdy pro člen  $a_k, k \rightarrow \infty$ .

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{z^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1) + \beta)}}{\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}} = z \cdot \frac{\Gamma(\alpha k + \beta)}{\Gamma(\alpha(k+1) + \beta)} = \dots = 0$$

Pro poloměr konvergence okolo bodu 0 potom platí, že se jedná o inverzní hodnotu k parametru  $\rho$ , tedy

$$R = \frac{1}{\rho} = \infty$$

Nekonečný poloměr konvergence okolo 0 říká, že řada konverguje na celé reálné ose a tedy pro parametry  $\alpha > 0$  a  $\beta > 0$  je Mittag-Lefflerova funkce definovaná na celé reálné ose.

### Výpočet funkčních hodnot Mittag-Lefflerovy funkce

V této části bude blíže rozebrána možnost výpočtu hodnot Mittag-Lefflerovy funkce. Jelikož je samotná funkce zadefinovaná jako mocninná řada (2.2), nabízí se tuto řadu sečíst.

Chybou  $n$ -tého částečného součtu  $Err$  řady Mittag-Lefflerovy funkce pak myslíme

$$Err(E_{\alpha,\beta}(z)) = \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^L \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \quad (2.4)$$

Mocninou řadu se tedy pokusíme shora omezit pomocí podobné geometrické řady, na kterou postačí středoškolský vzoreček:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \frac{a_0}{1-q} \quad (2.5)$$

Kde značíme součet  $S$ , řadu  $A [a]_0^{\infty}$  s kvocientem  $q$  a prvním členem řady  $a_0$ . Přičemž  $|q| < 1$ .

Jelikož gama funkce na celém svém definičním oboru není prostá, budeme uvažovat chybu částečných součtů pouze pro  $N \in \mathbb{N}$  takové, že platí:  $\alpha N + \beta > 2$ . Jelikož v předchozí kapitole 2.1 bylo ukázáno, že řada pro ML funkci je konvergentní na celém reálném oboru, od určitého členu řady  $a_j$  musí platit:

$$1 > \frac{a_{j+1}}{a_j} = \frac{\frac{z^{j+1}}{\Gamma(\alpha(j+1)+\beta)}}{\frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)}} = z \cdot \frac{\Gamma(\alpha j + \beta)}{\Gamma(\alpha(j+1) + \beta)} = q$$

V daném případě je tedy možné chybu součtu mocninné řady (2.4), rozdělit na součet konečné a geometrické řady (2.5)

$$Err_N(E_{\alpha,\beta}(z)) = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = \sum_{k=N}^{j-1} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} + \sum_{i=j}^{\infty} \frac{z^i}{\Gamma(\alpha i + \beta)} \leq \sum_{k=N}^{j-1} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} + \frac{a_j}{1-q}$$

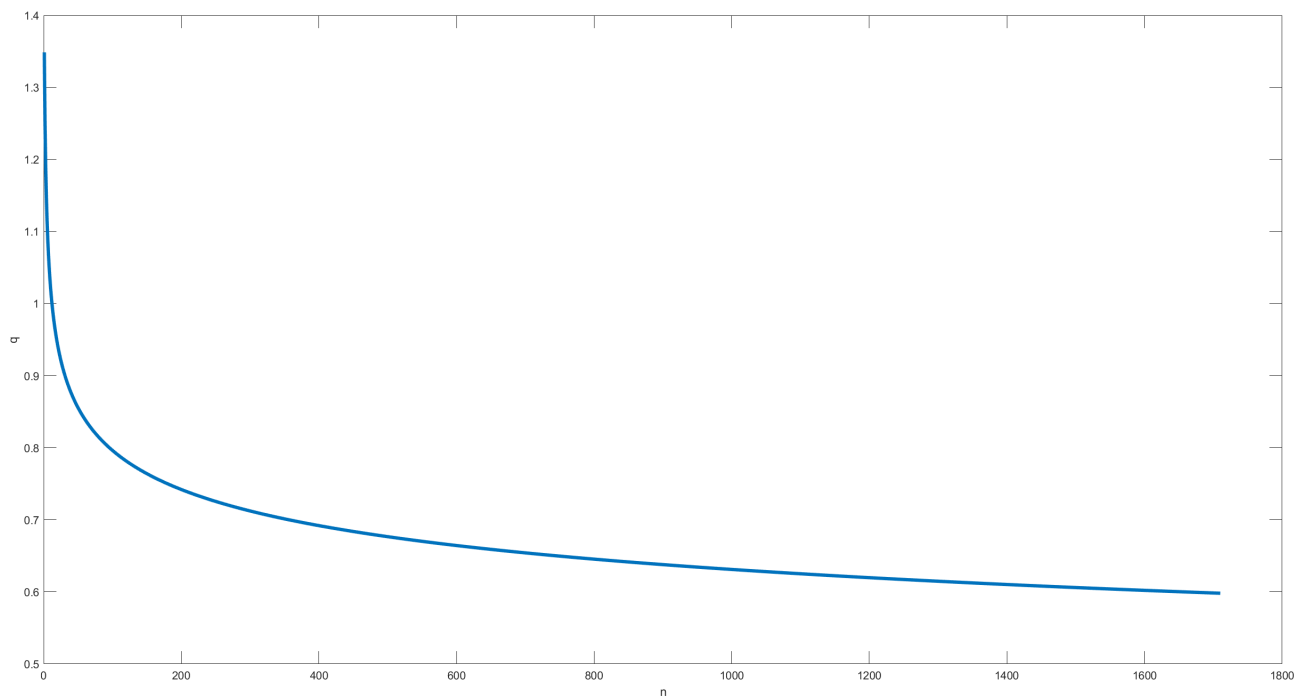
Získaná nerovnice vypadá užitečně. V praxi však naráží na problém. Totiž, podíl:  $\frac{\Gamma(\alpha j + \beta)}{\Gamma(\alpha(j+1) + \beta)}$ , pro malý parametr  $\alpha$  klesá pod hodnotou 1 jen velmi pomalu a je tedy potřeba počítat hodnotu gama funkce ve vysokých hodnotách. Použitý software, Matlab, ale umí efektivně počítat pouze s hodnotou  $\Gamma(i)$ , pro  $i < 171$

Na grafu 2.2 jde vidět, že podíl po sobě jdoucích koeficientů řady  $z \cdot \Gamma(\alpha n + \beta) / \Gamma(\alpha(n+1) + \beta)$  ani pro téměř maximální dosažitelné parametry neklesne pod hodnotu 0,5. To by vedlo k limitaci, že pro Mittag-Lefflerovu funkci s danými parametry bychom funkční hodnotu  $z$  mohli počítat pouze pro  $z < 2$  a efektivně pouze pro  $z < 1/0.7$ .

Laskavý čtenář by mohl poukázat na větu 2.2, díky které by mohlo být možné upravit problém změnou pořadí operací násobení a dělení, konkrétně: Necht'  $z - \alpha = u$

$$\frac{\Gamma(z - \alpha)}{\Gamma(z)} = \frac{\Gamma(u - \lfloor u \rfloor)}{\Gamma(z - \lfloor u \rfloor)} \cdot \frac{\prod_{n=0}^{\lfloor u \rfloor} (u - n)}{\prod_{n=0}^{\lfloor u \rfloor} (z - n)} = \frac{\Gamma(u - \lfloor u \rfloor)}{\Gamma(z - \lfloor u \rfloor)} \cdot \prod_{n=0}^{\lfloor u \rfloor} \left( \frac{u - n}{z - n} \right)$$

Tato idea však funguje pouze teoreticky. Během výpočtu se provádí velké množství násobení čísel blízkých 1. Při výpočtu takového problému počítačem s omezeným počtem desetinných míst

Obrázek 2.2:  $\Gamma(\alpha n + \beta) / \Gamma(\alpha(n+1) + \beta)$ ,  $\alpha = 0.1, \beta = 0.2$ 

vznikají zaokrouhlovací chyby, které můžeme ilustrovat na následujícím příkladě: Výpočet podílu 2 funkcí jejichž funkční hodnota je vypočtena softwarem Matlab

$$\frac{\Gamma(170, 4)}{\Gamma(170, 5)} = 0,598367257579446.$$

Výpočet pomocí for-cyklu a upravením pořadí násobení a dělení

$$\frac{\Gamma(170, 4)}{\Gamma(170, 5)} = 0.598016309041192.$$

Je zřejmé, že v při tomto výpočtu se naše 2 metody řešení neshodují. Absolutní rozdíl těchto hodnot je  $3.509485382540145 \cdot 10^{-3}$  a relativní rozdíl těchto vypočtených hodnot je  $\approx 5.865102640704210 \cdot 10^{-3}$ .

Tento rozpor nám ukazuje, že tato forma výpočtu pro tento problém není vhodná. V dnešní době se pro vyčíslení Mittag-Lefflerovy funkce nejčastěji využívá inverzní Laplaceovy transformace. Ve zbytku této kapitoly bude nastíněna myšlenka z článku R. Garrapy [6], kde se zvědavý čtenář může o této metodě také dozvědět více.

První krok pro tento výpočet je zavedení zobecnění Mittag-Lefflerovy funkce

**Definice 2.3.** Zobecněnou Mittag-Lefflerovou funkci s parametry  $\alpha, \beta > 0$  v bodě  $[t, \lambda]$  značíme  $e_{\alpha, \beta}(t, \lambda)$ . A její funkční hodnotu udává vztah:

$$e_{\alpha, \beta}(t, \lambda) = t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(t^\alpha \lambda), t \in \mathbb{R}^+, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Na tuto funkci se aplikuje Laplaceova transformace

$$\mathcal{L}\{e_{\alpha, \beta}(t, \lambda)\} = \varepsilon_{\alpha, \beta}(s, \lambda) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - \lambda}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0, |\lambda s^{-\alpha}| < 1. \quad (2.6)$$

A zpětná Laplaceova transformace

$$\mathcal{L}^{-1} \{ \varepsilon_{\alpha, \beta} (t, \lambda) \} = e_{\alpha, \beta} (t, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{st} \varepsilon_{\alpha, \beta} (s, \lambda) ds. \quad (2.7)$$

Tyto vztahy definují integrální problém, který je nutné následně řešit pokročilými numerickými metodami.

## 2.2 Zlomková derivace a integrál

V této části budou postupně definovány nejrozšířenější definice zlomkové derivace a integrálu. Následně budou diskutovány některé jejich důležité vlastnosti. V této části byla užita zejména kniha [1], ze které jsou definice také převzaty. **Definice zlomkové derivace a integrálu**

**Definice 2.4.** Levý a pravý *Riemann-Liouvilleův integrál* řádu  $\alpha > 0$  funkce  $y(t)$ , pro  $t \in (a, b)$  je definován jako

$$\begin{aligned} {}^RL D_t^{-\alpha} y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (s-t)^{\alpha-1} y(s) ds, \\ {}^RL D_b^{-\alpha} y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} y(s) ds. \end{aligned} \quad (2.8)$$

**Definice 2.5.** Levá a pravá *Riemann-Liouvillova derivace* řádu  $\alpha > 0$  funkce  $y(t)$ , pro  $t \in (a, b)$ , je definována jako

$$\begin{aligned} {}^RL D_t^{-\alpha} y(t) &= \frac{d^m}{dt^m} \left[ {}^RL D_t^{-(m-\alpha)} y(t) \right] = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-s)^{m-\alpha-1} y(s) ds, \\ {}^RL D_b^{-\alpha} y(t) &= \frac{d^m}{dt^m} \left[ {}^RL D_b^{-(m-\alpha)} y(t) \right] = \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_t^b (t-s)^{m-\alpha-1} y(s) ds, \end{aligned}$$

kde  $m$  je kladné celé číslo splňující podmínku  $m-1 \leq \alpha \leq m$ .

**Definice 2.6.** Levou a pravou *Caputovu derivaci* řádu  $\alpha > 0$  funkce  $y(t)$ , pro  $t \in (a, b)$  definujeme jako:

$$\begin{aligned} {}^C D_t^{\alpha} y(t) &= {}^RL D_t^{-(m-\alpha)} [y^{(m)}(t)] = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (s-t)^{m-\alpha-1} y^{(m)}(s) ds, \\ {}^C D_b^{\alpha} y(t) &= {}^RL D_b^{-(m-\alpha)} [y^{(m)}(t)] = \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)} \int_t^b (s-t)^{m-\alpha-1} y^{(m)}(s) ds, \end{aligned} \quad (2.9)$$

kde  $m$  je přirozené číslo takové, že:  $m-1 < \alpha \leq m$ .

Tato práce je téměř výhradně omezena na levou Caputovu derivaci definovanou na intervalu  $(a, t)$ . Vždy když tedy bude dále zmíněna Caputova derivace, bude tím myšlena první rovnice z derivace, pokud nebude výslovně řečeno jinak.

Caputova a Riemann-Liouvillova neceločíselná derivace se liší pořadím operací celočíselné derivace a neceločíselného integrálu. Jak by se tedy na první pohled mohlo zdát, nejedná se o pouhé formální přehození pořadí integrace a derivace. V případě neceločíselného kalkulu se ale jedná o velký rozdíl.

Ačkoli tedy mohou jak Caputova, tak Riemann-Liouvillova derivace existovat, nemusejí se rovnat. Ve zlomkovém kalkulu totiž hraje velkou roli i to, na jakém intervalu je funkce definovaná



a na kterém intervalu ji derivujeme. To zároveň znamená, že neceločíselná derivace funkce v bodě  $t$  závisí nejen na jejím  $\delta$  okolí, ale na hodnotách na celém intervalu  $(a, t)$ .

Existuje však přepočít mezi jak Caputovou a Riemann-Liouvillovou derivací

$${}^{RL}_a D_t^\alpha y(t) = {}^C_a D_t^\alpha y(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{y^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}, \quad (2.10)$$

kde  ${}^{RL}_a D_t^\alpha y(t)$  značí Riemann-Liouvillovu derivaci řádu  $\alpha$  a  ${}^C_a D_t^\alpha y(t)$  značí Caputovu derivaci řádu  $\alpha$ . Dále platí, že  $m \in \mathbb{N} : m-1 < \alpha < m$  a  $y \in C^{m-1} \langle a, t \rangle$  a funkce  $y^{(m)}$  je integrovatelná na  $\langle a, t \rangle$ .

Při splnění tvrdší podmínky  $y \in C^m \langle a, t \rangle$  a s pomocí (2.10) nebo pomocí Taylorovy řady lze dospět také ke vztahu:

$${}^{RL}_a D_t^\alpha [f(t) - \Phi(t)] = {}^C_a D_t^\alpha f(t), \quad (2.11)$$

kde  $\Phi(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)} (t-a)^k$ .

**Vztahy mezi neceločíselnou a celočíselnou derivací** Přirozenou otázkou u definice neceločíselné derivace je, co se stane v, když se řád derivace limitně blíží celému číslu.

Budeme předpokládat, že funkce  $y(t)$  je dostatečně hladká a pro stupeň derivace  $\alpha$ , takový že  $m-1 < \alpha < m$ , kde  $m \in \mathbb{N}^+$ . Pak platí, že:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow m^-} {}^{RL}_a D_t^\alpha y(t) &= y^{(m)}(t), \quad \lim_{\alpha \rightarrow m-1^+} {}^{RL}_a D_t^\alpha y(t) = y^{(m-1)}(t), \\ \lim_{\alpha \rightarrow m^-} {}^C_a D_t^\alpha y(t) &= y^{(m)}(t), \quad \lim_{\alpha \rightarrow m-1^+} {}^C_a D_t^\alpha y(t) = y^{(m-1)}(t) - y^{(m-1)}(a). \end{aligned} \quad (2.12)$$

[1] Ze vztahů 2.12 vyplývá, že Riemann-Liouvillova derivace se v limitním případě rovná celočíselné derivaci. Toto však v obecnosti neplatí pro Caputovu derivaci.

Jako příklad lze uvést funkci  $y(t) = \cos(t)$  na intervalu  $\langle 0, 2\pi \rangle$  Pro levou a pravou Riemann-Liouvillovu nultou derivaci platí:

$$L = \lim_{\alpha \rightarrow 0^-} {}^{RL}_0 D_t^\alpha \cos(t) = \cos(t), \quad (2.13)$$

$$R = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} {}^{RL}_0 D_t^\alpha \cos(t) = \cos(t), \quad (2.14)$$

$$L = R. \quad (2.15)$$

Avšak pro levou a pravou nultou Caputovu derivaci stejné funkce platí:

$$L = \lim_{\alpha \rightarrow 0^-} {}^C_0 D_t^\alpha \cos(t) = \cos(t), \quad (2.16)$$

$$R = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} {}^C_0 D_t^\alpha \cos(t) = \cos(t) - \cos(0) = \cos(t) - 1 \quad (2.17)$$

$$L \neq R. \quad (2.18)$$

### Další vlastnosti zlomkové derivace

Zlomková derivace má řadu vlastností, o kterých by se dalo diskutovat, zde uvedu pouze některé.

Jedna z velmi důležitých vlastností zlomkové derivace pro její výpočet je věta o komutativitě Caputovy derivace:

**Věta 2.7.** *Nechť funkce  $y(t)$  je dostatečně hladká, pak pro stupně derivací  $m, \beta$ , pro které platí  $m \in \mathbb{N}$  a  $n-1 < \beta < n$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ :*

$${}^C_a D_t^\beta [{}^C_a D_t^m y(t)] = {}^C_a D_t^{m+\beta} y(t).$$

$${}_a^C D_t^m \left[ {}_a^C D_t^\beta y(t) \right] = {}_a^C D_t^{m+\beta} y(t) + \sum_{j=n}^{m+n-1} \frac{y^{(j)}(a)}{\Gamma(1+j-m-\beta)} (t-a)^{j-m-\beta}.$$

Odvození věty 2.7 vychází z vztahu mezi neceločíselnou a celočíselnou Riemann-Liouvillovou a Caputovou derivací (2.12) a přepočtem z Riemann-Liouvillovou a Caputovou derivací z (2.10), kompletní odvození si lze přečíst na 9. straně [1].

## 2.3 Zlomkové diferenciální rovnice

V této kapitole bude představena počáteční úloha Zlomkových diferenciálních rovnic [1]. Následně se pro tuto úlohu zavede podmínka existence řešení a zároveň i podmínka jednoznačnosti řešení.

### Existence a jednoznačnost řešení

Uvažujme počáteční úlohu:

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha y(t) &= f(t, y(t)), \quad m-1 < \alpha < m, \quad m \in \mathbb{N}, \\ y^{(j)}(0) &= y_0^j, \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (2.19)$$

kde  ${}_0^C D_t^\alpha y(t)$  je Caputova derivace stupně  $\alpha$  funkce  $y$  proměnné  $t \in I$  na intervalu  $I = \langle 0, b \rangle$  a  $y^{(j)}(0) = y_0^j$  jsou počáteční podmínky zadané v celočíselných derivacích všech stupňů až do nejvyššího celočíselného stupně, který je ale stále menší než stupeň derivace  $\alpha$ .

**Věta 2.8** (Existence řešení počáteční úlohy zlomkové diferenciální rovnice). *Mějme okolí  $\mathcal{D}$  je takové, že  $\mathcal{D} := [0, X^*] \times [y_0^0 - \delta, y_0^0 + \delta]$ , přičemž  $X^* > 0$  a  $\delta > 0$ . A nechť je funkce  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá.*

*Pak existuje funkce  $u : [0, X] \rightarrow \mathbb{R}$ , která je řešením počáteční úlohy (2.19).*

**Definice 2.9** (Lipschitzovská funkce). Funkce  $y(t)$  se na intervalu  $I = \langle A, B \rangle$  nazývá lipschitzovsky spojitá, jestliže existuje konstanta  $L$ , taková že:

$$|y(b) - y(a)| \leq L \cdot |b - a| \quad \forall a, b \in I.$$

Spojitá funkce  $y(t, x)$  na okolí  $\mathcal{D}$  bodu  $[a, \eta]$  splňuje Lipschitzovu podmínku vzhledem k proměnné  $x \Leftrightarrow$

$$|y(t, b) - y(t, a)| \leq L \cdot |b - a| \quad \forall [t, b], [t, a] \in \mathcal{D}. [2]$$

**Věta 2.10** (Jednoznačnost řešení počáteční úlohy zlomkové diferenciální rovnice). *Mějme okolí  $\mathcal{D}$ , takové že  $\mathcal{D} := [0, X^*] \times [y_0^0 - \delta, y_0^0 + \delta]$  přičemž  $X^* > 0$  a  $\delta > 0$  A nechť je funkce  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  ohraničená na  $\mathcal{D}$  a splňuje výše zmíněnou Lipschitzovu podmínku, vzhledem k druhé proměnné. A pokud věta 2.8 platí, pak existuje právě jedna funkce  $y : [0, X] \rightarrow \mathbb{R}$ , která je řešením počátečního problému (2.19).*

## 2.4 Využití zlomkových diferenciálních rovnic

Z mnohého využití zlomkových diferenciálních rovnic je tato kapitola zaměřena na uplatnění v oblasti mechanického kmitání. Analytické řešení takovýchto rovnic v obecnosti není jednoduché. Ve zjednodušených příkladech této kapitoly bude nastíněna možnost řešení pomocí Laplaceovy transformace.

### Tlumený harmonický oscilátor

V klasické mechanice se za harmonický oscilátor považuje těleso, jehož těžiště se pohybuje podle diferenciální rovnice:

$$m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + k \cdot y = 0, \quad (2.20)$$

kde  $y(0) = c_0$ ,  $y'(0) = c_1$  jsou počáteční podmínky.

Kde  $m$  je hmotnost tělesa,  $y(t)$  je výchylka z rovnovážné polohy v čase  $t$ ,  $y'(t)$  je rychlost tělesa vzhledem k počáteční poloze v čase  $t$  a  $k$  je tuhost oscilátoru. Řešením této diferenciální rovnice potom je:

$$y(t) = y_{\max} \cdot \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.21)$$

Kde  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  je úhlová frekvence kmitání a  $\varphi = \arctan \frac{c_0}{c_1}$ . [8] [9]

V praxi se však střetáváme s vnitřním a vnějším třením, mezi které lze zařadit například odpor vzduch. Vlivem těchto se harmonický oscilátor utlumuje. Zlomkové diferenciální rovnice umožňují tyto tlumené kmity dobře modelovat modifikací druhé derivace v diferenciální rovnici:

$$m \cdot \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} + k \cdot y = 0, \quad 1 < \alpha < 2, \quad (2.22)$$

Vydělením celé rovnice parametrem  $m$  a aplikací Laplaceovy transformace na rovnici (2.22):

$$\mathcal{L}\{ {}_0 D_t^\alpha y(t) \} + \frac{k}{m} \cdot \mathcal{L}\{ y(t) \} = 0, \quad (2.23)$$

kde Laplaceova transformace neceločíselné derivace funkce  $y(t)$  se vypočítá ze vztahu:

$$\mathcal{L}\{ {}_0 D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha Y(s) - \sum_{j=0}^{[\alpha]-1} s^j \cdot {}_0 D_t^{\alpha-j-1}(0), \quad (2.24)$$

pro rovnici (2.22) lze dosadit  $[\alpha] = 2$

$$\mathcal{L}\{ {}_0 D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1} y(0) - s^{\alpha-2} y'(0) = s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1} c_0 - s^{\alpha-2} c_1. \quad (2.25)$$

Dosazením (2.24) do (2.23) a následným vyjádřením  $Y(s)$ :

$$Y(s) = \frac{c_0 s^{\alpha-1} + c_1 s^{\alpha-2}}{s^\alpha + \frac{k}{m}}. \quad (2.26)$$

Tato rovnice se následně řeší zpětnou Laplaceovou transformací. Využití zde nalezne Laplaceova transformace zobecněné Mittag-Lefflerovy funkce, která je:

$$\int_0^\infty e^{-st} \cdot t^{\alpha j + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(j)}(\pm a t^\alpha) dt = \frac{j! s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha \mp a)^{k+1}}. \quad (2.27)$$

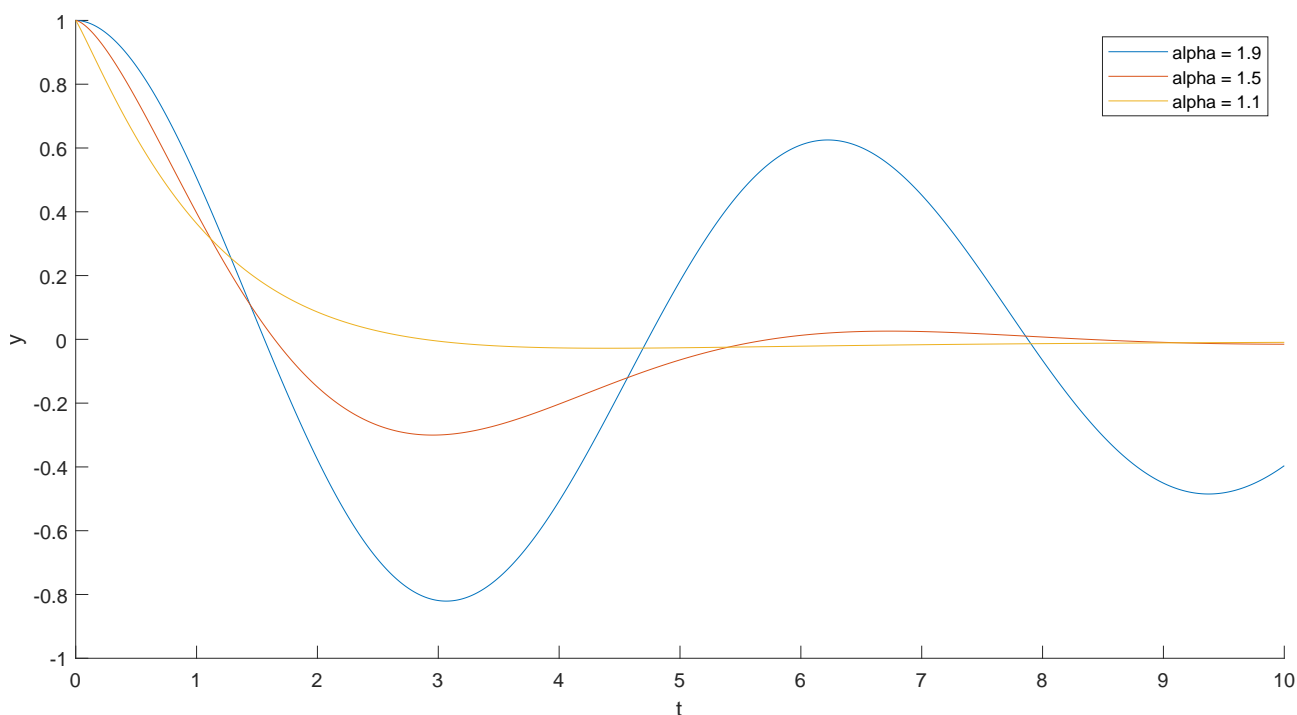
Aplikací rovnice (2.27) na (2.26) dostáváme analytické řešení zlomkové diferenciální rovnice (2.22)

$$y(t) = \left[ c_0 E_{\alpha, 1} \left( -\frac{k}{m} \cdot t^\alpha \right) + c_1 \cdot t \cdot E_{\alpha, 2} \left( -\frac{k}{m} \cdot t^\alpha \right) \right]. \quad (2.28)$$

Pro volby  $\alpha = 1.1, 1.5, 1.9$  v grafu vidíme, jak při nižším stupni derivace je tlumení výraznější, naopak při derivaci blízké  $\alpha = 2$  se řešení velmi podobá netlumeným kmitům.

Při studování této problematiky bylo použito knihy [3], která ale v této úloze obsahuje několik chyb. A to v rovnici harmonického oscilátoru, chybě při dělení rovnice hmotností  $m$  i při zápisu

Obrázek 2.3: Tlumené kmitání harmonického oscilátoru



výsledného analytického řešení. Řešení autor dále testuje volbou počátečních podmínek  $c_1 = 0$  a parametrů  $m = k = 1$ , při kterých se chyby neprojeví.

### Nucené kmity

Nucenými kmity je v obecnosti myšleno kmitání, které je způsobeno vnějším silovým působením a vynucují tedy kmitání o jiné frekvenci. Tento vnější vliv lze vymodelovat pomocí přidání funkce rychlosti, neboli první derivace polohy hmotného bodu  $c \cdot y'(t)$  do rovnice 2.20 z předchozí kapitoly.

$$m \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + c \cdot \frac{dy(t)}{dt} + k \cdot y(t) = f(t). \quad (2.29)$$

Jako praktický příklad této rovnice si lze představit hraní dětí na houpačce. Kde děti představují hmotný bod a jejich pohyby nohou vyvolávají vnější silové působení na oscilátor.

Přístup k problému přes zlomkové diferenciální rovnice představuje Bagley-Torvikova rovnice

$$m \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + c \cdot {}_0 D_t^\alpha y(t) + k \cdot y(t) = f(t), \quad t > 0, \quad (2.30)$$

kde  $m$  je hmotnost tělesa,  $m \cdot d^2 y(t)/dt^2$  je setrvačná síla tělesa,  $c \cdot {}_0 D_t^\alpha y(t)$  je tlumící síla představující ztráty třením,  $k$  je tuhost systému,  $ky(t)$  je pružná síla a  $f(t)$  je funkce vnější síly působící na těleso a systém. [3] Tato rovnice by ale vyžadovala k jejímu modelování složitějšího algoritmu.

### 3 Numerické metody pro zlomkové diferenciální rovnice

Jak je možné vidět výše, zlomkové diferenciální rovnice jsou náročné řešit analyticky, proto je vcelku logické, že pro jejich výpočet se v praxi často využívají numerické výpočty. V první podkapitole budou ještě představeny pojmy využívané v numerické matematice. Zadefinuje se numerická úloha zlomkových diferenciálních rovnic, provede se diskretizace a představí se pojmy chyb výpočtu a konvergence numerické metody. Ve druhé podkapitole budou ukázány 2 metody k výpočtu Caputovy derivace dané funkce, na což naváže třetí podkapitola, ve které budou ukázány tři metody které řeší počáteční úlohy zlomkových diferenciálních rovnic Caputova typu. S metodami pro výpočet řešení těchto úloh souvisí také

V celé následující části této práce bude využívána definice Caputovy derivace, jakožto modernějšího pojetí problému. V této kapitole byly přejaty pojmy a definice z [2] a [1]

V této kapitole budou nejprve uvedeny základní pojmy pro numerická řešení zlomkových diferenciálních rovnic a poté budou představeny L1 a L2 metody výpočtu Caputovy derivace a Eulerovy metody pro řešení počátečních úloh zlomkových diferenciálních rovnic.

#### 3.1 Základní pojmy numerického počtu

Nejprve připomeneme počáteční úlohu 2.19, která byla již dříve důkladně rozebrána.

$${}_0^C D_t^\alpha y(t) = f(t, y(t)), m-1 < \alpha < m, m \in \mathbb{N},$$

$$y^{(j)}(0) = y_0^j, j = 0, 1, \dots, m-1.$$

Zatímco  $y(t)$ , kde  $t \in I = \langle 0, b \rangle$  označuje přesné řešení počáteční úlohy. Úlohou numerického počtu v počáteční úloze zlomkových diferenciálních rovnic je najít co nejlepší řešení v konečně mnoha bodech intervalu  $(0, B)$ .

Body ve kterých řešení aproximujeme značíme  $t_n$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < n \leq N$  a  $t_N = B$ . Přičemž vždy platí, že  $t_n < t_{n+1}$  a pro účely této práce budeme navíc uvažovat, že  $t_{n+1} - t_n = \tau = konst$ ,  $0 \leq n \leq N$ . Takovému dělení intervalu  $I$  se říká ekvidistantní. V některých aplikacích je výhodné zavést i neekvidistantní dělení intervalu  $I$ , tomuto se ale v této práci nebudeme věnovat. Speciální případ je bod  $t_0 = 0$ , ve kterém platí počáteční podmínka  $y^{(j)}(0) = y_0^j$ ,  $j = 0, 1, \dots, m-1$ .

Aproximaci řešení zlomkové diferenciální rovnice v bodě  $t_n$  značíme  $y_n$ , zatímco přesné řešení značíme  $y(t_n)$ . Pokud bychom chtěli najít řešení mimo naši síť  $t_n$ , lze buď zhustit síť  $t_n$ , aby pokrývala více bodů nebo je nutné použít vhodnou interpolaci, pomocí okolních bodů.

Řešení počátečního problému pro diferenciální rovnice se v numerickém počtu zjednodušuje na problém diferenčních rovnic. V každém kroku  $n$  o velikosti  $\tau$  tohoto zjednodušení dochází k chybě. V numerické matematice zavádíme několik druhů chyb.

**Definice 3.1.** Globální diskretizační chybu v kroku  $n$  (zn.  $\varepsilon_n$ ) vypočítáme jako:

$$\varepsilon_n = y(t_n) - y_n,$$

**Definice 3.2.** Lokální diskretizační chybu v kroku  $n$  (zn.  $lte_n$ , anglicky "local truncation error") se vypočítá jako:

$$lte_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - \tau f(t_n, y(t_n)),$$

kde  $y(t_n)$  a  $y(t_{n+1})$  je přesná analytická hodnota řešení diferenciální rovnice v bodě  $t_n$  a  $t_{n+1}$  a  $\tau f(t_n, y(t_n)) = y_{n+1} - y_n$ .

**Definice 3.3.** Lokální chyba v kroku  $n$  (zn.  $le_n$ , anglicky "local error") se vypočítá ze vztahu

$$le_n = y(t_{n+1}) - y_{n+1},$$

**Definice 3.4** (*Řád numerické metody*). Mějme konvergentní numerickou metodu, pro libovolný počet kroků  $n = 0, 1, 2, \dots, N$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Uvažujeme, že velikost jednoho kroku  $\tau$  je konstantní a vypočítá se  $\tau = \frac{b-a}{N}$ . Pokud existuje konstanta  $C$  nezávislá na  $\tau$ , taková, že chybu  $\varepsilon_n$  ohraničíme shora  $\varepsilon_n \leq C \cdot \tau^k$ . Pak takováto numerická metoda je řádu  $k$ , značíme  $O(\tau^k)$ .

**Definice 3.5** (*EOC*). Odhad řádu numerické metody EOC ("Estimated Order of Convergence"), se získá jako:

$$EOC = \log_2 \left( \frac{\varepsilon_h}{\varepsilon_{h/2}} \right),$$

kde  $\varepsilon_h$  je globální chyba při velikosti kroku  $h$ . (Viz [7])

### 3.2 Algoritmy pro výpočet Caputovy derivace

Nejjednodušší algoritmy pro výpočet Caputovy derivace jsou L1 metoda, která počítá Caputovu derivaci stupně  $0 < \alpha < 1$  a L2 metoda, která počítá Caputovu derivaci stupně  $1 < \alpha < 2$ . V případech kdy je potřeba vypočítat Caputovu derivaci vyššího řádu poslouží věta 2.7, díky které lze problém rozložit na výpočet celočíselné derivace stupně  $m$  a Caputovy derivace, která je stupně  $0 < \alpha < 1$  v případě použití L1 metody nebo  $1 < \alpha < 2$  při použití L2 metody.

#### (1) L1 metoda

$$\left[ {}^C_0 D_t^\alpha y(t) \right]_{t=t_n} = \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k-1} (y(t_{k+1}) - y(t_k)) + O(\tau^{2-\alpha}), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (3.1)$$

kde  $b_k$  je definované v (3.2)

$$b_k = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} [(k+1)^{1-\alpha} - k^{1+\alpha}]. \quad (3.2)$$

#### (2) L2 metoda

$$\left[ {}^C_0 D_t^\alpha f(t) \right]_{t=t_n} = \sum_{k=-1}^n W_k f(t_{n-k}) + O(\tau^{3-\alpha}), \quad 1 < \alpha < 2, \quad (3.3)$$

kde člen  $W_k$  je definovaný v (3.4)

$$W_k = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \begin{cases} 1, & k = -1, \\ 2^{2-\alpha} - 3, & k = 0, \\ (k+2)^{2-\alpha} - 3(k+1)^{2-\alpha} + 3k^{2-\alpha} - (k-1)^{2-\alpha}, & 1 \leq k \leq n-2, \\ -2n^{2-\alpha} + 3(n-1)^{2-\alpha} - (n-2)^{2-\alpha}, & k = n-1, \\ n^{2-\alpha} - (n-1)^{2-\alpha}, & k = n. \end{cases} \quad (3.4)$$

### 3.3 Algoritmy pro řešení diferenciálních rovnic Caputova typu

Mezi nejzákladnější metody řešení počátečních úloh diferenciálních rovnic patří Eulerovy metody. Stejně je tomu i u zlomkového kalkulu, pouze s malými rozdíly. Pro všechny Eulerovy metody využíváme dvouparametrický člen:

$$b_{j,n+1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} [(n-j+1)^\alpha - (n-j)^\alpha]. \quad (3.5)$$

- (1) **Explicitní Eulerova metoda pro zlomkové diferenciální rovnice:**  $[{}_0D_t^{-\alpha} f(t, y(t))]_{t=t_{n+1}}$  je aproximována vztahem levými obdélníkovými formullemi:

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t_{n+1}^j}{j!} y_0^{(j)} + \tau^\alpha \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_j, y_j), \quad (3.6)$$

kde  $b_{j,n+1}$  je definováno vztahem (3.5) [1]

- (2) **Implicitní Eulerova metoda pro zlomkové diferenciální rovnice:**  $[{}_0D_t^{-\alpha} f(t, y(t))]_{t=t_{n+1}}$  je aproximována vztahem pravými obdélníkovými formullemi:

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t_{n+1}^j}{j!} y_0^{(j)} + \tau^\alpha \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_{j+1}, y_{j+1}), \quad (3.7)$$

kde  $b_{j,n+1}$  je definováno vztahem (3.5) [1]

- (3) **Theta metoda pro zlomkové diferenciální rovnice**  $[{}_0D_t^{-\alpha} f(t, y(t))]_{t=t_{n+1}}$  je aproximován váženou zlomkovou obdélníkovou formulí:

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t_{n+1}^j}{j!} y_0^{(j)} + \tau^\alpha \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} [\theta f(t_j, y_j) + (1 - \theta) f(t_{j+1}, y_{j+1})], \quad (3.8)$$

kde  $b_{j,n+1}$  je definováno vztahem (3.5) [1]

Pokud bychom v metodách (3.6) a (3.8) uvažovali  $\alpha = 1$  a  $\theta = 0, 5$ , pak by se dané metody pro zlomkový kalkulus redukovaly na Explicitní Eulerovu metodu, Implicitní Eulerovu metodu a Theta metodu pro klasické obecné diferenciální rovnice.

V další části bude pojednáno o řádu chyby výše zmíněných numerických metod

**Lemma 3.6.** *Nechť  $\alpha, \tau, M, T > 0, k \in \mathbb{N} : k\tau \leq T$*

$$b_{j,n} = \begin{cases} (n-j)^{\alpha-1}, & j = 1, 2, \dots, n-1, \\ 0, & j \geq n. \end{cases} \quad (3.9)$$

*A nechť  $\sum_{j=m}^n b_{j,n} |\varepsilon_j| = 0$ , pro  $m \geq n \geq 1$ . Pokud platí*

$$|\varepsilon_n| \leq M\tau^\alpha \sum_{j=1}^{n-1} b_{j,n} |\varepsilon_j| + |\eta_0|, \quad n = 1, 2, \dots, k, \quad (3.10)$$

*pak platí také*

$$\varepsilon_k \leq C|\eta_0| \quad (3.11)$$

**Věta 3.7.** *Nechť funkce  $y(t)$ , která je řešením počátečního problému (2.19), je lipschitzovská na celém intervalu  $I$  problému a  $f(t, y(t))$ , kde  $y(t) \in C^1 \langle 0, T \rangle$  je řešení počátečního problému které má spojité derivace,  $y_n$ , ( $1 \leq n \leq N$ ) jsou řešení Theta metody pro diferenciální rovnice (3.8). Pak platí*

$$|y(t_{n+1}) - y_{n+1}| \leq C \cdot \tau, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.12)$$

*kde  $C$  je pozitivní konstanta nezávislá od velikosti kroku  $\tau$  a  $k$ . Pak řekneme že Theta metoda (3.8) je tedy metoda prvního řádu  $O(\tau)$ . [1]*

Provedeme důkaz věty 3.7 pro dostatečně malý krok  $\tau$

Důkaz. Velikost globální chyby  $|\varepsilon_n| = |y(t_n) - y_n|$ . Z (3.8) dostáváme

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) - y_{n+1} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \\ &\quad - \tau^\alpha \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} [\theta f(t_j, y_j) + (1 - \theta) f(t_{j+1}, y_{j+1})]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Dosazením do definice globální chyby a postupnými úpravami

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1} &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \right. \\ &\quad \left. - \tau^\alpha \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} [\theta f(t_j, y_j) + (1 - \theta) f(t_{j+1}, y_{j+1})] \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \right. \\ &\quad \left. - \tau^\alpha \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} [\theta f(t_j, y(t_j)) + (1 - \theta) f(t_{j+1}, y(t_{j+1}))] \right| + \\ &\quad + \tau^\alpha \sum_{j=1}^n b_{j,n+1} |\theta (f(t_j, y_j) - f(t_j, y(t_j))) + (1 - \theta) (f(t_{j+1}, y_{j+1}) - f(t_{j+1}, y(t_{j+1})))| \\ &\leq \left| \frac{\theta}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt + \frac{1 - \theta}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \right. \\ &\quad \left. - \tau^\alpha \theta \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_j, y(t_j)) - \tau^\alpha (1 - \theta) \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_{j+1}, y(t_{j+1})) \right| + \\ &\quad + L_1 \tau^\alpha \sum_{j=1}^n b_{j,n+1} |\theta \varepsilon_j| + L_2 \tau^\alpha \sum_{j=1}^n b_{j,n+1} |(1 - \theta) \varepsilon_{j+1}| \\ &\leq \theta C_1 \tau + (1 - \theta) C_2 \tau + L_1 \tau^\alpha \theta \sum_{j=1}^n b_{j,n+1} |\varepsilon_j| + L_2 \tau^\alpha (1 - \theta) \sum_{j=1}^n b_{j,n+1} |\varepsilon_{j+1}| \\ &= \theta C_1 \tau + (1 - \theta) C_2 \tau + L_1 \tau^\alpha \theta \sum_{j=1}^n b_{j,n+1} |\varepsilon_j| + L_2 \tau^\alpha (1 - \theta) \sum_{j=1}^{n-1} b_{j,n+1} |\varepsilon_{j+1}| + \frac{L_2 \tau^\alpha (1 - \theta)}{\Gamma(\alpha + 1)} |\varepsilon_{n+1}| \\ &\leq K \tau + K \tau^\alpha \theta \sum_{j=1}^n (n + 1 - j)^{\alpha-1} |\varepsilon_j| + K \tau^\alpha (1 - \theta) \sum_{j=1}^{n-1} (n + 1 - j)^{\alpha-1} |\varepsilon_{j+1}| + \frac{L_2 \tau^\alpha (1 - \theta)}{\Gamma(\alpha + 1)} |\varepsilon_{n+1}|. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Pro dostatečně malý krok  $\tau$ , pro který platí

$$\frac{L_2 \tau^\alpha (1 - \theta)}{\Gamma(\alpha + 1)} < 1 \quad (3.15)$$

(To můžeme zvolit protože  $L_2$  je konstanta nezávislá na kroku  $\tau$ ,  $\alpha$  závisí pouze na počáteční úloze a  $\theta$  je volený parametr Theta metody.) Lze zavést

$$C = \frac{K}{1 - \frac{L_2 \tau^\alpha (1 - \theta)}{\Gamma(\alpha + 1)}}$$



$$\varepsilon_{n+1} \leq C\tau + C\tau^\alpha \theta \sum_{j=1}^n (n+1-j)^{\alpha-1} |\varepsilon_j| + C\tau^\alpha (1-\theta) \sum_{j=1}^{n-1} (n+1-j)^{\alpha-1} |\varepsilon_{j+1}| \quad (3.16)$$

Aplikací Lemma 3.6 dospíváme k dokazovanému výsledku.  $\square$

Jelikož parametr  $\theta$  v Theta metodě (3.8) zobecňuje explicitní eulerovu metodu (3.6) i implicitní eulerovu metodu (3.7) díky volbě  $\theta = 1$  a  $\theta = 0$ , pak také platí, že explicitní Eulerova metoda (3.6) a implicitní Eulerova metoda (3.7) jsou z 3.7 také metody prvního řádu  $O(\tau)$ .

**Věta 3.8** (O stabilitě Eulerových numerických metod). *Uvažujme  $y_n$ , kde  $n = 1, 2, \dots, N+1$  řešení počátečního problému (2.19), získané Theta metodou pro zlomkové diferenciální rovnice (3.8). Nechť funkce  $f(t, y)$  splňuje Lipschitzovu podmínku vzhledem k druhému argumentu  $y$  a s konstantní Lipschitzovou konstantou  $L$  na celém intervalu  $I$ , na kterém je hledáno řešení. Pak Theta metoda pro zlomkové diferenciální rovnice je stabilní.*

Stabilitou v tomto smyslu myslíme, že malé změny v počátečních podmínkách nevyvolají velké změny v řešení rovnic.

Předpokládejme splnění předpokladů věty 3.8 pro parametr  $\theta = 0$  nebo  $\theta = 1$ . Pak řešení počátečního problému (2.19) implicitní nebo explicitní Eulerovou metodou je stabilní.

### 3.4 Testovací úlohy

Výše uvedené testovací úlohy budeme testovat na testovacích úlohách. Cílem tohoto testování je ověřit jestli výše zmíněné metody skutečně aproximují řešení zlomkových diferenciálních rovnic, jestli výpočet na hustší síti má pozitivní vliv na velikost chyby, jak se chová výpočet Theta metody pro různé velikosti  $\theta$  a v závěru i ověřit pomocí EOC řád konvergence numerické metody. Řešení testovacích úloh bylo ověřeno pomocí softwaru Maple.

**Příklad 3.9.** Uvažujme počáteční úlohu na intervalu  $t \in \langle 0, 10 \rangle$

$$\begin{aligned} {}^C D_t^{0.5} y(t) &= \frac{2}{\Gamma(2.5)} t^{1.5} - y(t) + t^2, \\ y(0) &= 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

kde  $y(0)$  je počáteční podmínka.

Analytické řešení této diferenciální rovnice je [10]

$$y(t) = t^2 \quad (3.18)$$

Získané numerické řešení pro příklad 3.9 je zapsané v tabulce 3.1. Z tabulky je zřejmé, že pro tuto úlohu je nejvhodnější implicitní Eulerova metoda, která dosahuje pro menší počet kroků výrazně přesnějšího řešení, přestože všechny metody jsou stejného řádu.

**Tabulka 3.1:** Numerické řešení  $y(t)$  a globální chyby  $\varepsilon_t$  příkladu 3.9 v bodech  $t = 1, 5$  a  $10$ , pro rovnoměrné dělení na  $N$  kroků

	analyticky	N=10	N=100	N=1000	N=10000	N=100000
Explicitní Eulerova metoda pro zlomkový kalkulus						
$y(1)$	1	2.8260	1.3269	1.0800	1.0230	1.0071
$\varepsilon_{(t=1)}$		$1.83 \cdot 10^0$	$3.27 \cdot 10^{-1}$	$8.00 \cdot 10^{-2}$	$2.3 \cdot 10^{-2}$	$7.06 \cdot 10^{-3}$
$y(5)$	25	45.1179	29.4261	26.2370	25.3757	25.1173
$\varepsilon_{(t=5)}$		$2.01 \cdot 10^1$	$4.43 \cdot 10^0$	$8.00 \cdot 10^{-2}$	$2.3 \cdot 10^{-2}$	$7.06 \cdot 10^{-3}$
$y(10)$	100	156.1706	113.4729	103.8919	101.1955	100.3746
$\varepsilon_{(t=10)}$		$5.62 \cdot 10^1$	$1.35 \cdot 10^1$	$3.89 \cdot 10^0$	$1.1955 \cdot 10^0$	$3.75 \cdot 10^{-1}$
Implicitní Eulerova metoda pro zlomkový kalkulus						
$y(1)$	1	1.3278	1.0473	1.0053	1.0005	1.0001
$\varepsilon_{(t=1)}$		$3.28 \cdot 10^{-1}$	$4.73 \cdot 10^{-2}$	$5.29 \cdot 10^{-3}$	$5.47 \cdot 10^{-4}$	$5.53 \cdot 10^{-5}$
$y(5)$	25	26.3862	25.1640	25.0172	25.0017	25.0002
$\varepsilon_{(t=5)}$		$1.39 \cdot 10^0$	$1.64 \cdot 10^{-1}$	$1.72 \cdot 10^{-2}$	$1.74 \cdot 10^{-3}$	$1.75 \cdot 10^{-4}$
$y(10)$	100	102.3342	100.2614	100.0270	100.0027	100.0003
$\varepsilon_{(t=10)}$		$2.33 \cdot 10^0$	$2.61 \cdot 10^{-1}$	$2.70 \cdot 10^{-2}$	$2.73 \cdot 10^{-3}$	$2.74 \cdot 10^{-4}$
Theta Eulerova metoda pro zlomkový kalkulus s parametrem $\theta = 0.5$						
$y(1)$	1	1.867	1.1709	1.0413	1.0117	1.0035
$\varepsilon_{(t=1)}$		$8.07 \cdot 10^{-1}$	$1.71 \cdot 10^{-1}$	$4.13 \cdot 10^{-2}$	$1.17 \cdot 10^{-2}$	$3.55 \cdot 10^{-3}$
$y(5)$	25	33.3885	27.1355	25.6131	25.1874	25.0586
$\varepsilon_{(t=5)}$		$8.39 \cdot 10^0$	$2.14 \cdot 10^0$	$6.13 \cdot 10^{-1}$	$1.87 \cdot 10^{-1}$	$5.86 \cdot 10^{-2}$
$y(10)$	100	123.9709	106.4812	101.9247	100.5958	100.1871
$\varepsilon_{(t=10)}$		$2.40 \cdot 10^1$	$6.48 \cdot 10^0$	$1.92 \cdot 10^0$	$5.96 \cdot 10^{-1}$	$1.87 \cdot 10^{-1}$

**Příklad 3.10.** Uvažujme počáteční úlohu (2.22) z kapitoly 2.4.

$$m \cdot \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} + k \cdot y = 0, \quad t \in \langle 0, 10 \rangle \quad 1 < \alpha < 2,$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 0,$$

$$m = 1, k = 1,$$

Jak bylo ukázáno výše, rovnice má analytické řešení (2.28)

$$y(t) = \left[ c_0 E_{\alpha,1} \left( -\frac{k}{m} \cdot t^\alpha \right) + c_1 \cdot t \cdot E_{\alpha,2} \left( -\frac{k}{m} \cdot t^\alpha \right) \right].$$

Kde  $E_{\alpha,\beta}(z)$  je Mittag-Lefflerova funkce. A konstanty  $c_0, c_1$  jsou dány počátečními podmínkami  $c_0 = y(0) = 1, c_1 = y'(0) = 0$  a parametry  $m, k$  definovanými výše.

Na intervalu  $t \in \langle 0, 10 \rangle$  vypočítáme odhad řádu konvergence EOC (3.5) Eulerových numerických metod (3.6), (3.7) a (3.8) pro řešení počáteční úlohy zlomkové diferenciální rovnice.

Výsledky jsou zapsané v tabulce 3.2 pro stupeň derivace  $\alpha = 1.1$ , v tabulce 3.3 pro stupeň derivace  $\alpha = 1.5$  a v tabulce 3.4 pro stupeň derivace  $\alpha = 1.9$ .

V tabulkách 3.3 a 3.4 pro příklad po řadě  $\alpha = 1.5$  a  $\alpha 1.9$  je vidět přesný odhad pro řád numerických metod (připomeňme, že Theta metoda s parametrem  $\theta$ , pro  $\theta = 0$  a  $\theta = 1$  je shodná s implicitní Eulerovou metodou a explicitní Eulerovou metodou). Pro tabulku s derivací  $\alpha = 1.1$  a parametrem  $\theta = 0.7$  a  $\theta = 1$  vychází vyšší odhad řádu konvergence EOC, což může být způsobenou specifikem příkladu a zvolených parametrů nebo pro vyšší počet kroků  $N$  i zaokrouhlovacími chybami.

**Tabulka 3.2:** Numerické řešení příkladu 3.10 pro  $\alpha = 1.1$  a rovnoměrné dělení na  $N$  kroků

$\alpha = 1.1$								
N	$\theta = 0$		$\theta = 0.4$		$\theta = 0.7$		$\theta = 1$	
	$\varepsilon_n$	EOC	$\varepsilon_n$	EOC	$\varepsilon_n$	EOC	$\varepsilon_n$	EOC
50	$2.12 \cdot 10^{-4}$		$4.21 \cdot 10^{-5}$		$7.84 \cdot 10^{-5}$		$1.93 \cdot 10^{-4}$	
100	$1.05 \cdot 10^{-4}$	1.0130	$2.56 \cdot 10^{-5}$	0.7150	$3.24 \cdot 10^{-5}$	1.2747	$8.90 \cdot 10^{-5}$	1.1146
200	$5.24 \cdot 10^{-5}$	1.0071	$1.47 \cdot 10^{-5}$	0.8005	$1.32 \cdot 10^{-5}$	1.3024	$4.07 \cdot 10^{-5}$	1.1303
400	$2.61 \cdot 10^{-5}$	1.0036	$8.19 \cdot 10^{-6}$	0.8460	$5.17 \cdot 10^{-6}$	1.3446	$1.85 \cdot 10^{-5}$	1.1395
800	$1.30 \cdot 10^{-5}$	1.0018	$4.47 \cdot 10^{-6}$	0.8742	$1.95 \cdot 10^{-6}$	1.4111	$8.34 \cdot 10^{-6}$	1.1462
1600	$6.52 \cdot 10^{-6}$	1.0009	$2.40 \cdot 10^{-6}$	0.8937	$6.76 \cdot 10^{-7}$	1.5247	$3.75 \cdot 10^{-6}$	1.1523
3200	$3.26 \cdot 10^{-6}$	1.0005	$1.28 \cdot 10^{-6}$	0.9083	$2.00 \cdot 10^{-7}$	1.7544	$1.68 \cdot 10^{-6}$	1.1586
6400	$1.63 \cdot 10^{-6}$	1.0002	$6.77 \cdot 10^{-7}$	0.9197	$3.62 \cdot 10^{-8}$	2.4704	$7.49 \cdot 10^{-7}$	1.1657
12800	$8.14 \cdot 10^{-7}$	1.0001	$3.56 \cdot 10^{-7}$	0.9291	$1.17 \cdot 10^{-8}$	1.6219	$3.32 \cdot 10^{-7}$	1.1739

**Tabulka 3.3:** Numerické řešení testovací úlohy (2) pro  $\alpha = 1.5$ a rovnoměrné dělení na  $N$  kroků

$\alpha = 1.5$								
N	$\theta = 0$		$\theta = 0.4$		$\theta = 0.7$		$\theta = 1$	
	$\varepsilon_n$	EOC	$\varepsilon_n$	EOC	$\varepsilon_n$	EOC	$\varepsilon_n$	EOC
50	$2.58 \cdot 10^{-3}$		$2.26 \cdot 10^{-3}$		$2.06 \cdot 10^{-3}$		$1.88 \cdot 10^{-3}$	
100	$1.34 \cdot 10^{-3}$	0.9460	$1.23 \cdot 10^{-3}$	0.8780	$1.16 \cdot 10^{-3}$	0.8334	$1.08 \cdot 10^{-3}$	0.7977
200	$6.84 \cdot 10^{-4}$	0.9732	$6.45 \cdot 10^{-4}$	0.9344	$6.17 \cdot 10^{-4}$	0.9068	$5.90 \cdot 10^{-4}$	0.8810
400	$3.45 \cdot 10^{-4}$	0.9866	$3.31 \cdot 10^{-4}$	0.9636	$3.20 \cdot 10^{-4}$	0.9464	$3.10 \cdot 10^{-4}$	0.9294
800	$1.73 \cdot 10^{-4}$	0.9933	$1.68 \cdot 10^{-4}$	0.9790	$1.64 \cdot 10^{-4}$	0.9681	$1.60 \cdot 10^{-4}$	0.9570
1600	$8.69 \cdot 10^{-5}$	0.9967	$8.46 \cdot 10^{-5}$	0.9874	$8.30 \cdot 10^{-5}$	0.9803	$8.13 \cdot 10^{-5}$	0.9730
3200	$4.35 \cdot 10^{-5}$	0.9983	$4.25 \cdot 10^{-5}$	0.9922	$4.18 \cdot 10^{-5}$	0.9874	$4.11 \cdot 10^{-5}$	0.9825
6400	$2.18 \cdot 10^{-5}$	0.9992	$2.13 \cdot 10^{-5}$	0.9950	$2.10 \cdot 10^{-5}$	0.9918	$2.07 \cdot 10^{-5}$	0.9884
12800	$1.09 \cdot 10^{-5}$	0.9996	$1.07 \cdot 10^{-5}$	0.9967	$1.06 \cdot 10^{-5}$	0.9945	$1.05 \cdot 10^{-5}$	0.9922

**Tabulka 3.4:** Numerické řešení testovací úlohy (2) pro  $\alpha = 1.9$  a rovnoměrné dělení na  $N$  kroků

$\alpha = 1.9$								
N	$\theta = 0$		$\theta = 0.4$		$\theta = 0.7$		$\theta = 1$	
	$\varepsilon_n$	EOC	$\varepsilon_n$	EOC	$\varepsilon_n$	EOC	$\varepsilon_n$	EOC
50	$7.49 \cdot 10^{-2}$		$8.55 \cdot 10^{-2}$		$9.36 \cdot 10^{-2}$		$1.02 \cdot 10^{-1}$	
100	$4.00 \cdot 10^{-2}$	0.9044	$4.54 \cdot 10^{-2}$	0.9109	$4.95 \cdot 10^{-2}$	0.9179	$5.37 \cdot 10^{-2}$	0.9261
200	$2.07 \cdot 10^{-2}$	0.9502	$2.34 \cdot 10^{-2}$	0.9552	$2.55 \cdot 10^{-2}$	0.9591	$2.75 \cdot 10^{-2}$	0.9629
400	$1.05 \cdot 10^{-2}$	0.9746	$1.19 \cdot 10^{-2}$	0.9777	$1.29 \cdot 10^{-2}$	0.9799	$1.39 \cdot 10^{-2}$	0.9819
800	$5.32 \cdot 10^{-3}$	0.9872	$6.00 \cdot 10^{-3}$	0.9890	$6.50 \cdot 10^{-3}$	0.9902	$7.01 \cdot 10^{-3}$	0.9913
1600	$2.67 \cdot 10^{-3}$	0.9936	$3.01 \cdot 10^{-3}$	0.9946	$3.26 \cdot 10^{-3}$	0.9953	$3.52 \cdot 10^{-3}$	0.9958
3200	$1.34 \cdot 10^{-3}$	0.9968	$1.51 \cdot 10^{-3}$	0.9974	$1.63 \cdot 10^{-3}$	0.9977	$1.76 \cdot 10^{-3}$	0.9980
6400	$6.70 \cdot 10^{-4}$	0.9984	$7.54 \cdot 10^{-4}$	0.9987	$8.18 \cdot 10^{-4}$	0.9989	$8.81 \cdot 10^{-4}$	0.9991
12800	$3.35 \cdot 10^{-4}$	0.9992	$3.77 \cdot 10^{-4}$	0.9994	$4.09 \cdot 10^{-4}$	0.9995	$4.41 \cdot 10^{-4}$	0.9996

**Příklad 3.11.** Uvažujme funkci

$$y(t) = t^3 - 3t^3 + 2t, \quad t \in \langle 0, 2 \rangle. \quad (3.19)$$

Pro tuto funkci (3.19) je úkolem vypočítat její Caputovu derivaci stupně 0.3, 0.5 a 0.8 v bodě  $t = 2$

K nalezení analytického řešení pro tuto úlohu byl použit software Maple. Hodnota funkce v bodě  $t = 2$  byla vyčíslena na 20 platných dekadických cifer. Hledanou funkci nazveme funkcí  $Y$ , přičemž spodní index značí stupeň derivace.  $Y_{0.3}(t)$ ,  $Y_{0.5}(t)$ ,  $Y_{0.8}(t)$  tedy po řadě značí derivaci 0.3 stupně, 0.5 stupně a 0,8 stupně.

$$Y_{0.3}(t) = {}^C_0 D_t^{0.3} y(t) = \frac{\frac{2000}{1071} t^{\frac{27}{10}} - \frac{600}{119} t^{\frac{17}{10}} + \frac{20}{7} t^{\frac{7}{10}}}{\Gamma(\frac{7}{10})}, \quad (3.20)$$

$$Y_{0.3}(2) = \frac{260 \cdot 2^{\frac{7}{10}}}{1071 \cdot \Gamma(\frac{7}{10})} \doteq 0.30381671834570084887,$$

$$Y_{0.5}(t) = {}^C_0 D_t^{0.5} y(t) \approx \frac{\frac{16}{5} t^{\frac{5}{2}} - 8 t^{\frac{3}{2}} + 4 \sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}, \quad (3.21)$$

$$Y_{0.5}(2) = \frac{4\sqrt{2}}{5\sqrt{\pi}} \doteq 0.63830764864229228470,$$

$$Y_{0.8}(t) = {}^C_0 D_t^{0.8} y(t) = \frac{\Gamma(\frac{4}{5}) \left( \frac{125}{11} t^{\frac{11}{5}} - 25 t^{\frac{6}{5}} + 10 t^{\frac{1}{5}} \right)}{\pi \csc(\frac{\pi}{5})}, \quad (3.22)$$

$$Y_{0.8}(2) = \frac{60 \cdot \Gamma(\frac{4}{5}) \cdot 2^{\frac{1}{5}} \sin(\frac{\pi}{5})}{11\pi} \doteq 1.3648095609347007592.$$

Řešení příkladu 3.11 je zapsáno v tabulce 3.5. Z vypočtených hodnot řešení je vidět velmi přesné řešení problému i pro nízký počet kroků. Pro všechny tři hodnoty  $\alpha$  a pro počet kroků  $N = 1600$  je globální chyba řešení menší než  $\varepsilon < 10^{-3}$ . Pro všechny úlohy je vidět vcelku přesný odhad řádu konvergence, jelikož L1 metoda je řádu  $2 - \alpha$ .

**Tabulka 3.5:** Chyba numerického řešení příkladu 3.11 pro stupně derivace  $\alpha = 0.3, 0.5$  a  $0.8$

	$\alpha = 0.3$		$\alpha = 0.5$		$\alpha = 0.8$	
N	$\varepsilon_n$	EOC	$\varepsilon_n$	EOC	$\varepsilon_n$	EOC
100	$1.01 \cdot 10^{-3}$		$3.73 \cdot 10^{-3}$		$2.06 \cdot 10^{-2}$	
200	$3.26 \cdot 10^{-4}$	1.6378	$1.35 \cdot 10^{-4}$	1.4713	$9.03 \cdot 10^{-3}$	1.1910
400	$1.04 \cdot 10^{-4}$	1.6518	$4.82 \cdot 10^{-4}$	1.4804	$3.94 \cdot 10^{-3}$	1.1950
800	$3.28 \cdot 10^{-5}$	1.6622	$1.72 \cdot 10^{-4}$	1.4865	$1.72 \cdot 10^{-3}$	1.1972
1600	$1.03 \cdot 10^{-5}$	1.6701	$6.13 \cdot 10^{-5}$	1.4906	$7.49 \cdot 10^{-4}$	1.1985
3200	$3.22 \cdot 10^{-6}$	1.6762	$2.18 \cdot 10^{-5}$	1.4935	$3.26 \cdot 10^{-4}$	1.1991
6400	$1.00 \cdot 10^{-6}$	1.6810	$7.72 \cdot 10^{-6}$	1.4954	$1.42 \cdot 10^{-4}$	1.1995
12800	$3.13 \cdot 10^{-7}$	1.6848	$2.73 \cdot 10^{-6}$	1.4968	$6.19 \cdot 10^{-5}$	1.1997
25600	$9.70 \cdot 10^{-8}$	1.6878	$9.68 \cdot 10^{-7}$	1.4977	$2.69 \cdot 10^{-5}$	1.1998
51200	$3.00 \cdot 10^{-8}$	1.6901	$3.43 \cdot 10^{-7}$	1.4984	$1.17 \cdot 10^{-5}$	1.1999
102400	$9.31 \cdot 10^{-9}$	1.6920	$1.21 \cdot 10^{-7}$	1.4989	$5.10 \cdot 10^{-6}$	1.2000
204800	$2.88 \cdot 10^{-9}$	1.6936	$4.29 \cdot 10^{-8}$	1.4992	$2.22 \cdot 10^{-6}$	1.2000
409600	$8.89 \cdot 10^{-10}$	1.6948	$1.52 \cdot 10^{-8}$	1.4994	$9.67 \cdot 10^{-7}$	1.2000

## 4 Závěr

V této bakalářské práci bylo cílem nastudovat problematiku zlomkových diferenciálních rovnic, nastudovat vlastnosti numerických metod a realizace vybraných numerických metod. Práce je členěna do tří částí.

V kapitolách (2) a (3) jsou zavedeny základní pojmy potřebné pro neceločíselný kalkulus, zaveden neceločíselný Riemann-Liouvilleův integrál a Caputova derivace.

Na tuto část poté navazuje představení počáteční úlohy zlomkových diferenciálních rovnic v kapitole (4) a ukázka využití zlomkových diferenciálních rovnic v kapitole (5).

Ve třetí části jsou představeny Eulerovy metody numerického řešení zlomkových diferenciálních rovnic a jejich vlastností v kapitole (6). V realizaci vybraných metod byly zvoleny metoda L1 pro výpočet Caputovy derivace a Eulerovy metody pro řešení počátečního problému. Správnost kódů na testovacích úlohách bylo následně provedeno v kapitole (7), byl sledován vývoj chyby v závislosti na počtu kroků  $N$  a byl vypočítán odhad řádu konvergence EOC.

Oblast diferenciálních rovnic je obsáhlým a stále se rozvíjejícím odvětvím. Nebylo tedy zdaleka možné popsat vše a zůstalo mnoho možností práci rozvinout. Zejména by se mohlo přikročit k upravení kódu v softwaru Matlab pro řešení soustav diferenciálních rovnic nebo rozšíření souboru metod o řešení více krokovými metodami nebo o metody vyššího řádu konvergence.

## Reference

- [1] LI, Changpin. *Numerical Methods for Fractional Calculus*. Boca Raton: CRC Press, 2015, xviii, 281 stran : grafy. ISBN 978-1-4822-5380-1.
- [2] ČERMÁK, Libor. Numerické metody [online]. Brno: Vysoké učení technické v Brně, 2020 [cit. 2023-05-19]. Dostupné z: <https://mathonline.fme.vutbr.cz/Numericke-metody-II/sc-1246-sr-1-a-263/default.aspx>
- [3] CHEN, Wen, HongGuang SUN, Xicheng LI a Wen CHEN. Fractional derivative modeling in mechanics and engineering. Singapore: Springer, 2022, xv, 370 stran : grafy. ISBN 978-981-16-8801-0.
- [4] DALIR, Mehdi a Majid BASHOUR. Applications of Fractional Calculus. Applied Mathematical Sciences. [online], 2010, 2010(4), 1021-1032. ISSN 1314-7552.
- [5] PODLUBNÝ, Igor. Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. San Diego: Academic Press, 1999, xxiv, 340 s. : il. ISBN 0-12-558840-2.
- [6] GARRAPPA, Roberto, Numerical evaluation of two and three parameter Mittag-Leffler functions. Society for Industrial and Applied Mathematics
- [7] GARRAPPA, Roberto. Numerical Solution of Fractional Differential Equations: A Survey and a Software Tutorial. Mathematics (Basel) [online]. Basel: MDPI, 2018, 6(2), 16 [cit. 2023-05-23]. ISSN 2227-7390. Dostupné z: [doi:10.3390/math6020016](https://doi.org/10.3390/math6020016)
- [8] HALLIDAY, David, Robert RESNICK a Jearl WALKER, DUB, Petr, ed. Fyzika. Druhé, přepracované vydání. Přeložil Miroslav ČERNÝ, přeložil Jiří KOMRSKA, přeložil Michal LENC, přeložil Bohumila LENCOVÁ, přeložil Miroslav LIŠKA, přeložil Jana MUSILOVÁ, přeložil Pavla MUSILOVÁ, přeložil Jan OBDRŽÁLEK, přeložil Jiří PETRÁČEK, přeložil Jiří SPOUSTA, přeložil Marian ŠTRUNC. Brno: Vysoké učení technické v Brně - nakladatelství VUTIUM, 2021. Překlady vysokoškolských učebnic. ISBN 978-80-214-4123-1.
- [9] KULHÁNEK, Petr. Harmonický Oscilátor. In: KULHÁNEK, Petr. Fyzika 1: studijní text [online]. Verze: 10.4.2023. Praha: CVUT FEL, 2020, s. 67-83 [cit. 2023-05-19]. Dostupné z: <https://www.aldebaran.cz/studium/f1.pdf>
- [10] LI, Changpin, An CHEN a Junije YE. Numerical approaches to fractional calculus and fractional ordinary differential equation. J. Comput. Physics. 230. 3352-3368. 10.1016/j.jcp.2011.01.030.
- [11] WEISS, George H. R. Klages, G. Radons, I.M. Sokolov (eds.): Anomalous Transport. Online. Journal of statistical physics. 2009, roč. 135, č. 2, s. 389-391. ISSN 0022-4715. Dostupné z: <https://doi.org/10.1007/s10955-009-9713-5>. [cit. 2024-04-09].