



Konferencia Slovenskej matematickej spoločnosti
Jasná, 23. novembra 2002

Derivácie neceločíselného rádu: história, teória, aplikácie

Igor Podlubný
Katedra informatizácie a riadenia procesov
Fakulta BERG
Technická univerzita v Košiciach



Obsah

1. Trochu histórie
2. Súčasné definície
3. Aproximácia a princíp „krátkej pamäti“
4. Diferenciálne rovnice neceločíselného rádu (DRNR)
5. Maticový prístup k diskretizácii DRNR
6. Niektoré oblasti aplikácie
7. Sústavy a regulátory neceločíselného rádu
8. Geometrická interpretácia
9. Fyzikálna interpretácia
10. Záverečné poznámky

Začiatok

◀◀ ▶▶

◀ ▶▶

2 / 90

Späť

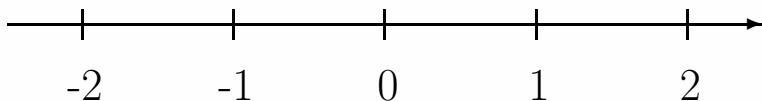
Obrazovka

Zavrieť

Koniec



... od celého k necelému ...



$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_n$$

$$x^n = e^{n \ln x}$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n,$$

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0,$$

$$\Gamma(n+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$$

Začiatok
◀◀
◀
3 / 90
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



Interpolácia operácií

$$f, \quad \frac{df}{dt}, \quad \frac{d^2f}{dt^2}, \quad \frac{d^3f}{dt^3}, \quad \dots$$

$$f, \quad \int f(t)dt, \quad \int dt \int f(t)dt, \quad \int dt \int dt \int f(t)dt, \quad \dots$$

$$\dots, \quad \frac{d^{-2}f}{dt^{-2}}, \quad \frac{d^{-1}f}{dt^{-1}}, \quad f, \quad \frac{df}{dt}, \quad \frac{d^2f}{dt^2}, \quad \dots$$

Začiatok
4 / 90
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



Začiatok – rok 1695



G.F.A. de L'Hospital
(1661–1704)

Ale čo bude
v prípade
 $n = \frac{1}{2}$?

Privedie to
k paradoxu...
Jedného dňa však od
tohto zdanlivého
paradoxu budú
odvodené užitočné
dôsledky.

$$\frac{d^n f}{dt^n}$$



G.W. Leibniz
(1646–1716)

Začiatok

◀◀ ▶▶

◀ ▶▶

5 / 90

Späť

Obrazovka

Zavrieť

Koniec



G. W. Leibniz (1695–1697)

V listoch J. Wallisovi a J. Bernullimu sa Leibniz tiež zmieňuje o možnosti derivovania neceločíselného rádu v tom zmysle, že je možné priať za definíciu vzťah

$$\frac{d^n e^{mx}}{dx^n} = m^n e^{mx},$$

v ktorom rád derivovania n môže byť necelý (1697).

Začiatok

◀◀ ▶▶

◀ ▶▶

6 / 90

Späť

Obrazovka

Zavrieť

Koniec



L. Euler (1730)

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = m(m-1) \dots (m-n+1)x^{m-n}$$

$$\Gamma(m+1) = m(m-1) \dots (m-n+1)\Gamma(m-n+1)$$

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}x^{m-n}.$$

Euler navrhol považovať tento vzorec za platný aj pre záporné alebo racionálne hodnoty n . Po dosadení $m = 1$ a $n = \frac{1}{2}$ Euler odvodil vzťah

$$\frac{d^{1/2}x}{dx^{1/2}} = \sqrt{\frac{4x}{\pi}} \quad \left(= \frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{1/2} \right)$$

Eulerove výpočty neskôr prevzal S. F. Lacroix do svojej úspešnej učebnice (*Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral*, Courcier, Paris, t. 3, 1819; str. 409–410).

Začiatok
◀◀
◀
7 / 90
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



J. B. J. Fourier (1820–1822)

Prvý krok ku zovšeobecneniu pojmu derivovania pre **ľubovoľné funkcie** urobil J. B. J. Fourier (*Théorie Analytique de la Chaleur*, Didot, Paris, 1822; str. 499–508).

Po uvedení svojho známeho vzorca

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz \int_{-\infty}^{\infty} \cos(px - pz) dp$$

Fourier poznamenáva, že

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz \int_{-\infty}^{\infty} \cos(px - pz + n\frac{\pi}{2}) dp,$$

pričom tento vzťah môže slúžiť ako definícia derivácie rádu n aj pre necelé n .

Začiatok
◀◀
◀
8 / 90
▶
▶▶
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



N. H. Abel (1823–1826)

N. H. Abel: Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies (1823). *Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel*, vol. 1, Grondahl, Christiania, 1881, pp. 11–18.

V skutočnosti Abel získal riešenie rovnice

$$\int_0^x \frac{s'(\eta)d\eta}{(x-\eta)^\alpha} = \psi(x),$$

pre ľubovoľné α (nie iba pre $\alpha = \frac{1}{2}$):

$$s(x) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} x^\alpha \int_0^1 \frac{\psi(xt)dt}{(1-t)^{1-\alpha}}.$$

Ďalej Abel *vyjadril* získané riešenie pomocou integrálu nece-
ločíselného rádu α :

$$s(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d^{-\alpha}\psi(x)}{dx^{-\alpha}}$$

Začiatok
◀◀
◀
9 / 90
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



J. Liouville (1832–1855)

Tri prístupy:

I. Nasledujúc Leibniza:

$$\frac{d^m e^{ax}}{dx^n} = a^m e^{ax},$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x},$$

$$\frac{d^\nu f(x)}{dx^\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^\nu e^{a_n x}$$

Začiatok
◀◀
◀
▶
▶▶
10 / 90
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



J. Liouville (1832–1855)

Tri prístupy:

II. *Integrály* neceločíselného rádu:

$$\int^{\mu} \Phi(x) dx^{\mu} = \frac{1}{(-1)^{\mu} \Gamma(\mu)} \int_0^{\infty} \Phi(x + \alpha) \alpha^{\mu-1} d\alpha$$

$$\int^{\mu} \Phi(x) dx^{\mu} = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^{\infty} \Phi(x - \alpha) \alpha^{\mu-1} d\alpha$$

alebo (po substitúcii $\tau = x + \alpha$, $\tau = x - \alpha$)

$$\int^{\mu} \Phi(x) dx^{\mu} = \frac{1}{(-1)^{\mu} \Gamma(\mu)} \int_x^{\infty} (\tau - x)^{\mu-1} \Phi(\tau) d\tau$$

$$\int^{\mu} \Phi(x) dx^{\mu} = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_{-\infty}^x (x - \tau)^{\mu-1} \Phi(\tau) d\tau.$$

Začiatok
◀◀
◀
▶▶
▶
11 / 90
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



J. Liouville (1832–1855)

Tri prístupy:

III. *Derivácie* neceločíselného rádu:

$$\begin{aligned}\frac{d^\mu F(x)}{dx^\mu} = & \frac{(-1)^\mu}{h^\mu} \left(F(x) - \frac{\mu}{1} F(x+h) + \right. \\ & \left. + \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2} F(x+2h) - \dots \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^\mu F(x)}{dx^\mu} = & \frac{1}{h^\mu} \left(F(x) - \frac{\mu}{1} F(x-h) + \right. \\ & \left. + \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2} F(x-2h) - \dots \right).\end{aligned}$$

(Rovnosť v zmysle $\lim_{h \rightarrow 0}$).

Liouville bol prvý, kto si uvedomil možnosť prístupu k definovaniu derivácií a integrálov neceločíselného rádu *zľava a sprava*.

Začiatok

◀◀ ▶▶

◀ ▶▶

12 / 90

Späť

Obrazovka

Zavrieť

Koniec



G. F. B. Riemann (1847; 1876)

Riemann využil zovšeobecnenie Taylorovho radu pre odvodenie vzorca pre integrovanie neceločíselného rádu, ktorý uvádzame v súčasných označeniach (pôvodné Riemannove označenia sú príliš ťažkopádne):

$$D^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt + \psi(t)$$

Ľubovoľnú (komplementárnu) funkciu $\psi(x)$ Riemann zaviedol v dôsledku neurčitosti dolnej hranice integrovania c — nedostatok, ktorý sa v rámci jeho prístupu odstrániť nedal.

Začiatok
◀◀
◀
13 / 90
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



N. Ya. Sonin (1869)
A. V. Letnikov (1872)
H. Laurent (1884)
N. Nekrasov (1888)
K. Nishimoto (1987–)

Cauchyho vzorec:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt$$

Pre necelé $n = \nu$ máme namiesto pólu bod vetvenia funkcie $(t-z)^{-\nu-1}$:

$$D^\nu f(z) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i} \int_c^{x^+} \frac{f(t)}{(t-z)^{\nu+1}} dt$$

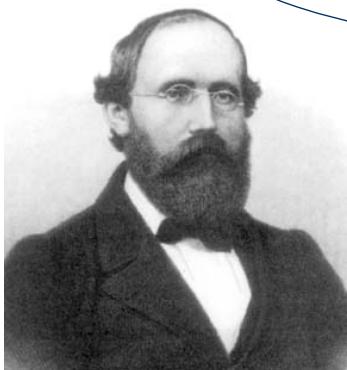
Začiatok
◀◀
◀
14 / 90
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



Riemannova–Liouvilleova definícia

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}$$

$(n-1 \leq \alpha < n)$



G.F.B. Riemann J. Liouville
(1826–1866) (1809–1882)

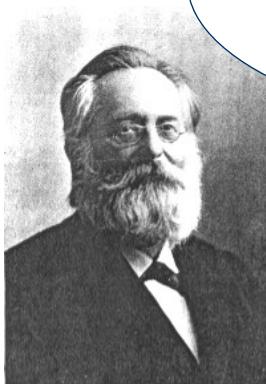




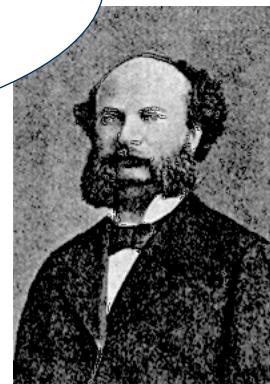
Grünwaldova–Letnikovova definícia

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\left[\frac{t-a}{h} \right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh)$$

$[x]$ – celá časť x



A.K. Grünwald



A.V. Letnikov

Začiatok

◀◀ ▶▶

◀ ▶▶

16 / 90

Späť

Obrazovka

Zavrieť

Koniec



Ďalšie definície

M. Caputo (1967):

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}, \quad (n-1 \leq \alpha < n)$$

K.S. Miller, B. Ross (1993):

$$D^{\vec{\alpha}} f(t) = D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} \dots D^{\alpha_n} f(t), \quad \vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

Začiatok
◀◀
◀
17 / 90
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



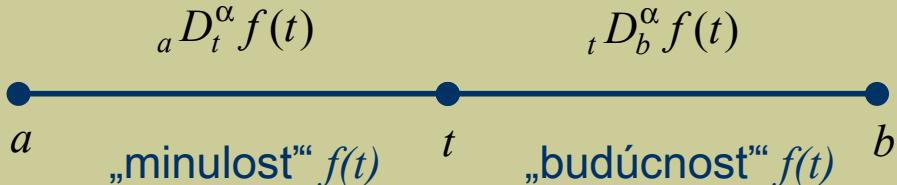
„Ľavá“ a „pravá“ derivácia (R-L)

„Ľavá“:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}$$

„Pravá“:

$${}_t D_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dt} \right)^n \int_t^b \frac{f(\tau) d\tau}{(\tau-t)^{\alpha-n+1}}$$



Začiatok

◀◀ ▶▶

◀ ▶▶

18 / 90

Späť

Obrazovka

Zavrieť

Koniec



Aproximácia

Na ekvidistantnej sieti s krokom h používame approximáciu pomocou *konečných diferencií neceločíselného rádu*, ktorá pochádza z definície Grünwalda-Letnikova:

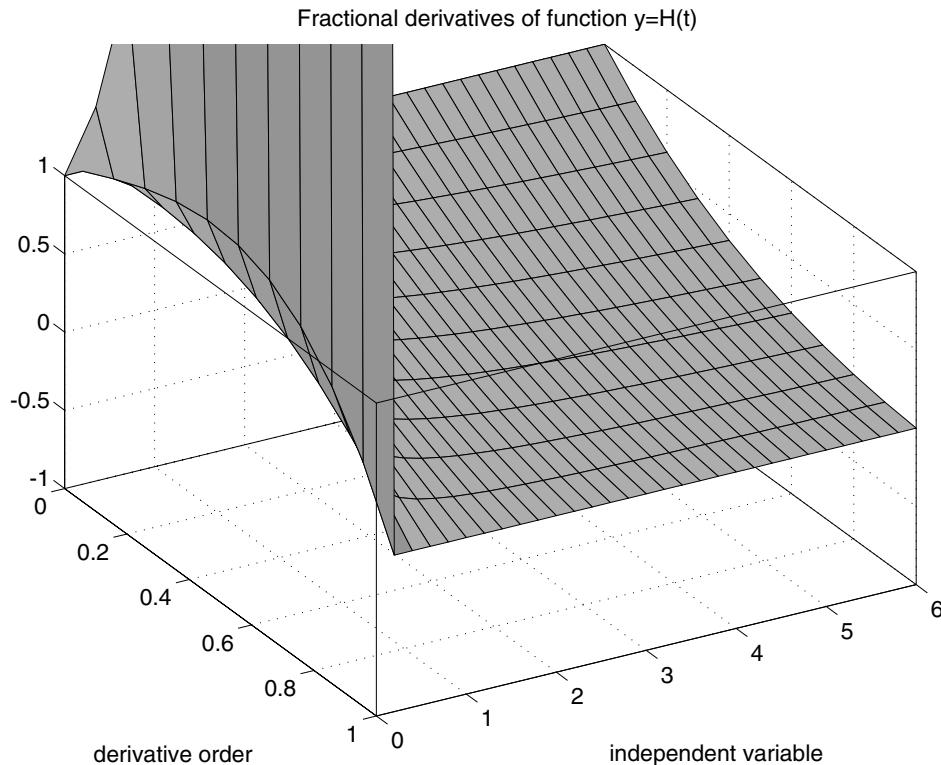
$${}_aD_t^\alpha f(t) \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\left[\frac{t-a}{h}\right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh),$$

[x]- celá časť x

Začiatok
◀◀
◀
▶
▶▶
19 / 90
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



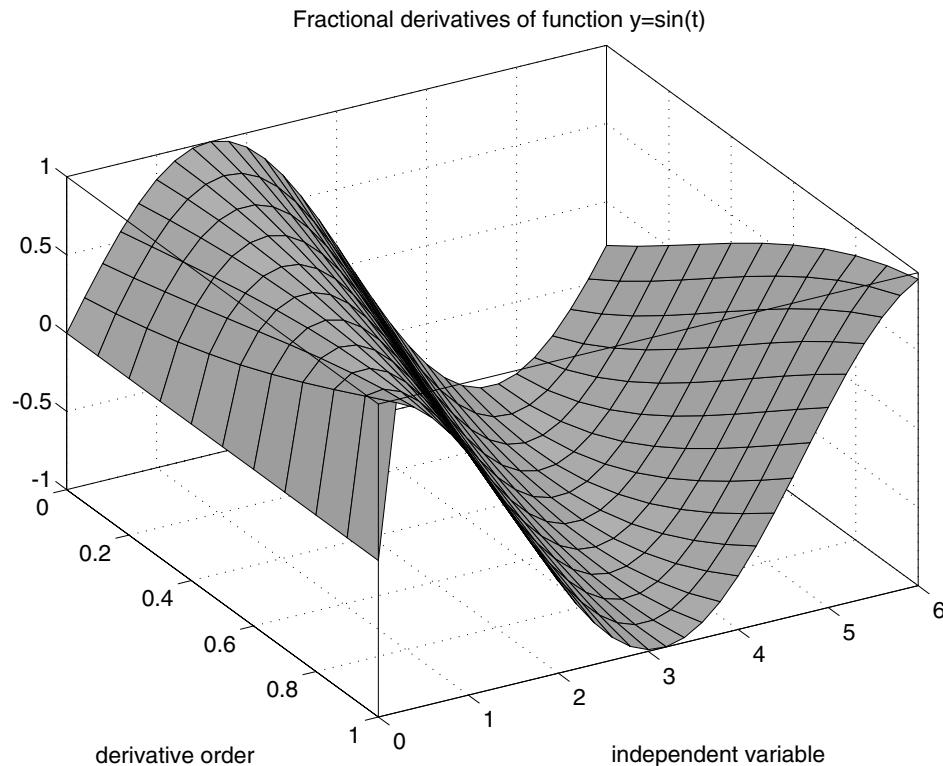
Príklad: Heavisideova funkcia



Začiatok	
◀◀	▶▶
◀	▶
20 / 90	
Späť	
Obrazovka	
Zavrieť	
Koniec	



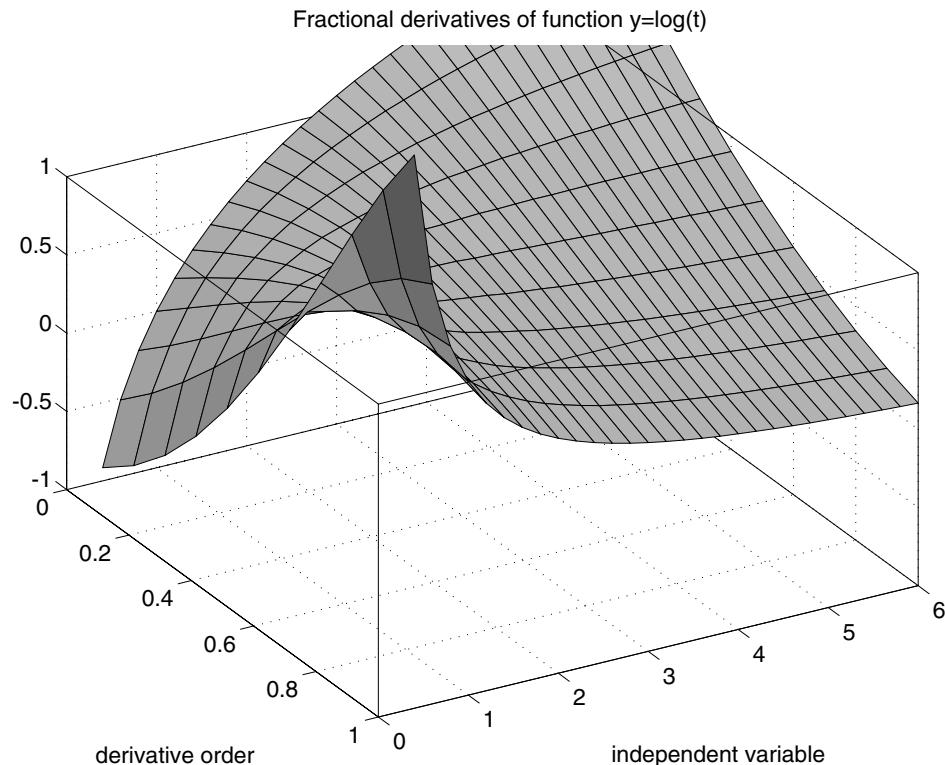
Príklad: $\sin(t)$



Začiatok	
◀◀	▶▶
◀	▶
21 / 90	
Späť	
Obrazovka	
Zavrieť	
Koniec	



Príklad: $\ln(t)$

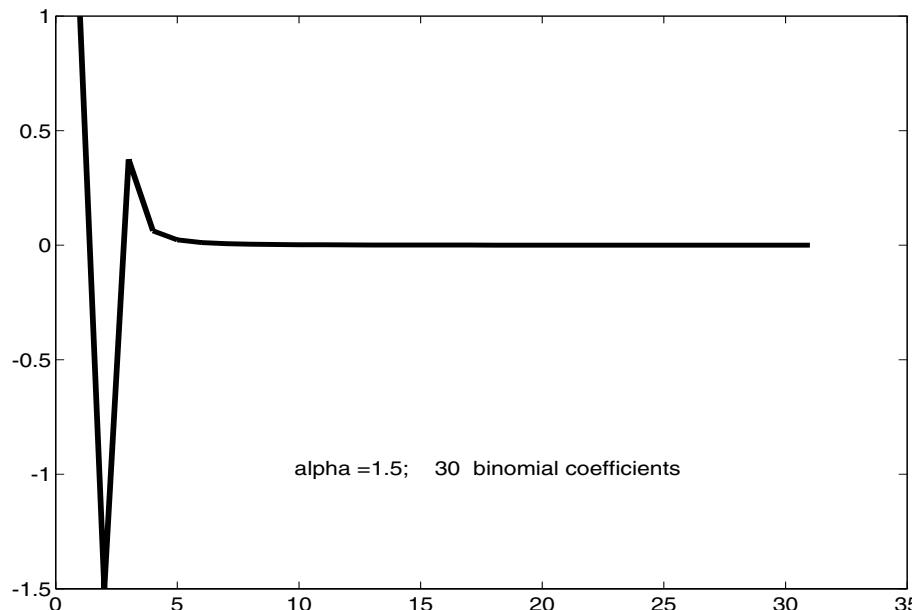


Začiatok	
◀◀	▶▶
◀	▶
22 / 90	
Späť	
Obrazovka	
Zavrieť	
Koniec	



Princíp „krátkej pamäti“

Koeficienty vo vzorci Grünwalda-Letnikova:



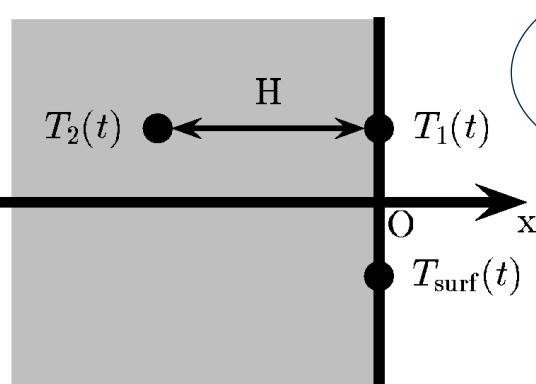
$${}_a D_t^\alpha f(t) \approx {}_{t-L} D_t^\alpha f(t), \quad (t > a + L)$$

Dĺžka „pamäti“ L závisí od požadovanej presnosti výpočtu.

Začiatok
◀◀
◀
23 / 90
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



Princíp „krátkej pamäti“ v praxi: tepelný tok cez stenu vysokej pece



$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$



$$q(t) = \sqrt{c\rho\lambda} {}_0D_t^{1/2} f(t) \approx \sqrt{c\rho\lambda} {}_{t-L}D_t^{1/2} f(t),$$

$$f(t) = T_{surf}(t) - T_0$$

J.B.J. Fourier
(1768–1830)

Začiatok

◀◀ ▶▶

◀ ▶▶

24 / 90

Späť

Obrazovka

Zavrieť

Koniec



Diferenciálne rovnice neceločíselného rádu

$$y^{(\alpha_n)}(t) = F(t, y^{(\alpha_1)}(t), y^{(\alpha_2)}(t), \dots, y^{(\alpha_{n-1})}(t)), \quad a < t < b \\ (0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1} < \alpha_n, \quad n-1 < \alpha \leq n)$$

$$y^{(k)}(a) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Začiatok

◀◀ ▶▶

◀ ▶

25 / 90

Späť

Obrazovka

Zavrieť

Koniec



G. M. Mittag-Leffler



Začiatok

◀◀ ▶▶

◀ ▶

26 / 90

Späť

Obrazovka

Zavrieť

Koniec



Funkcia Mittag-Lefflera: definícia

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \quad \beta > 0)$$

$$E_{1,1}(z) = e^z,$$

$$E_{2,1}(z^2) = \cosh(z), \quad E_{2,2}(z^2) = \frac{\sinh(z)}{z}.$$

$$E_{1/2,1}(z) = e^{z^2} \operatorname{erfc}(-z);$$

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Začiatok
◀◀ ▶▶
◀ ▶▶
27 / 90
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



Funkcia Mittag-Lefflera: najdôležitejšie vlastnosti

Laplaceova transformácia funkcie M-L:

$$\int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(\pm at^\alpha) dt = \frac{k! s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha \mp a)^{k+1}},$$

$$(Re(s) > |a|^{1/\alpha}).$$

Derivácia neceločíselného rádu:

$${}_0D_t^\gamma (t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(\lambda t^\alpha)) = t^{\alpha k + \beta - \gamma - 1} E_{\alpha, \beta - \gamma}^{(k)}(\lambda t^\alpha)$$

Začiatok
◀◀
◀
28 / 90
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



Analytické metódy riešenia DRNR

- Integrálne transformácie
(Laplace, Fourier, Mellin)
- Metóda radov
- Babenkova symbolická metóda
- Metóda ortogonálnych mnohočlenov
- „Neceločíselná“ funkcia Greena



Metóda Laplaceovej transformácie

LT derivácie Riemanna-Liouvillea:

$$L\{ {}_0D_t^\alpha f(t); s \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[{}_0D_t^{\alpha-k-1} f(t) \right]_{t=0} (n-1 < \alpha \leq n).$$

Príklad LT-1:

$${}_0D_t^{1/2} f(t) + af(t) = 0, \quad (t > 0);$$

$$\left[{}_0D_t^{-1/2} f(t) \right]_{t=0} = f_0$$

Riešenie LT-1:

$$F(s) = \frac{f_0}{s^{1/2} + a},$$

$$f(t) = f_0 t^{-1/2} E_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(-a\sqrt{t}).$$

Začiatok
◀◀
◀
30 / 90
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



Príklad LT-2:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^\alpha y(t) - \lambda y(t) &= h(t), \quad (t > 0); \\ \left[{}_0D_t^{\alpha-k} y(t) \right]_{t=0} &= b_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \\ (n-1 < \alpha < n) \end{aligned}$$

Riešenie LT-2:

$$s^\alpha Y(s) - \lambda Y(s) = H(s) + \sum_{k=1}^n b_k s^{k-1}$$

$$Y(s) = \frac{H(s)}{s^\alpha - \lambda} + \sum_{k=1}^n b_k \frac{s^{k-1}}{s^\alpha - \lambda}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=1}^n b_k t^{\alpha-k} E_{\alpha,\alpha-k+1}(\lambda t^\alpha) + \\ &\quad + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\tau)^\alpha) h(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Začiatok
31 / 90
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



Funkcia Greena: definícia

$${}_0\mathcal{L}_t y(t) = f(t); \quad {}_0\mathcal{D}_t^{\sigma_k-1} y(t)\Big|_{t=0} = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

$${}_a\mathcal{L}_t y(t) \equiv {}_a\mathcal{D}_t^{\sigma_n} y(t) + \sum_{k=1}^{n-1} p_k(t) {}_a\mathcal{D}_t^{\sigma_{n-k}} y(t) + p_n(t)y(t),$$

$${}_a\mathcal{D}_t^{\sigma_k} \equiv {}_aD_t^{\alpha_k} {}_aD_t^{\alpha_{k-1}} \cdots {}_aD_t^{\alpha_1}; \quad {}_a\mathcal{D}_t^{\sigma_k-1} \equiv {}_aD_t^{\alpha_k-1} {}_aD_t^{\alpha_{k-1}} \cdots {}_aD_t^{\alpha_1};$$

$$\sigma_k = \sum_{j=1}^k \alpha_j, \quad (k = 1, 2, \dots, n); \quad 0 \leq \alpha_j \leq 1, \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Definition. Function $G(t, \tau)$ satisfying the following conditions

- a) ${}_\tau\mathcal{L}_t G(t, \tau) = 0$ for every $\tau \in (0, t)$;
- b) $\lim_{\tau \rightarrow t-0} ({}_\tau\mathcal{D}_t^{\sigma_k-1} G(t, \tau)) = \delta_{k,n}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$
($\delta_{k,n}$ is Kronecker's delta);
- c) $\lim_{\tau, t \rightarrow +0} ({}_\tau\mathcal{D}_t^{\sigma_k} G(t, \tau)) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$
 $\tau < t$

is called **Green's function of equation (4.1)**.

Začiatok
◀◀
◀
32 / 90
▶▶
▶
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



Funkcia Greena: použitie

$$y(t) = \sum_{k=1}^n b_k \psi_k(t) + \int_0^t G(t-\tau) f(\tau) d\tau,$$

$$b_k = {}_0D_t^{\sigma_k-1} y(t) \Big|_{t=0}$$

$$\psi_k(t) = {}_0D_t^{\sigma_n-\sigma_k} G(t), \quad {}_0D_t^{\sigma_n-\sigma_k} \equiv {}_aD_t^{\alpha_n} {}_aD_t^{\alpha_{n-1}} \cdots {}_aD_t^{\alpha_{k+1}}$$

Začiatok

◀◀ ▶▶

◀ ▶

33 / 90

Späť

Obrazovka

Zavrieť

Koniec



Funkcia Greena: príklady

Jednočlenná rovnica:

$$a {}_0D_t^\alpha y(t) = f(t)$$

$$G_1(t) = \frac{1}{a} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

Dvojčlenná rovnica:

$$a {}_0D_t^\alpha y(t) + by(t) = f(t)$$

$$G_2(t) = \frac{1}{a} t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\frac{b}{a} t^\alpha \right)$$

Začiatok
◀◀ ▶▶
◀ ▶▶
34 / 90
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



Funkcia Greena

Trojčlenná rovnica:

$$a {}_0D_t^\beta y(t) + b {}_0D_t^\alpha y(t) + c y(t) = f(t)$$

$$\begin{aligned} G_3(t) &= \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{c}{a}\right)^k \times \\ &\quad \times t^{\beta(k+1)-1} E_{\beta-\alpha, \beta+\alpha k}^{(k)}\left(-\frac{b}{a}t^{\beta-\alpha}\right) \end{aligned}$$

Začiatok
◀◀
◀▶
◀▶
35 / 90
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



Maticový prístup k diskretizácii derivácií a integrálov neceločíselného rádu

Začiatok
◀◀
◀
36 / 90
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



Trojuholníkovité pruhované matice

Dolné TP matice:

$$L_N = \begin{bmatrix} \omega_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \omega_1 & \omega_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \omega_2 & \omega_1 & \omega_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots \\ \omega_{N-1} & \ddots & \omega_2 & \omega_1 & \omega_0 & 0 \\ \omega_N & \omega_{N-1} & \ddots & \omega_2 & \omega_1 & \omega_0 \end{bmatrix},$$

Horné TP matice:

$$U_N = \begin{bmatrix} \omega_0 & \omega_1 & \omega_2 & \ddots & \omega_{N-1} & \omega_N \\ 0 & \omega_0 & \omega_1 & \ddots & \ddots & \omega_{N-1} \\ 0 & 0 & \omega_0 & \ddots & \omega_2 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \omega_1 & \omega_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \omega_0 & \omega_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \omega_0 \end{bmatrix},$$

Pre TP matice rovnakého typu platí: $CD = DC$.

Začiatok
◀◀
◀
37 / 90
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



Operácia orezávania

$$\varrho(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k z^k \quad \longrightarrow \quad \text{trunc}_N(\varrho(z)) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^N \omega_k z^k = \varrho_N(z)$$

Funkcia $\varrho(z)$ generuje postupnosť dolných TP matíc:

$$L_N, \quad N = 1, 2, \dots$$

alebo horných TP matíc

$$U_N, \quad N = 1, 2, \dots$$

Vlastnosti:

$$\text{trunc}_N(\gamma \lambda(z)) = \gamma \text{ trunc}_N(\lambda(z))$$

$$\text{trunc}_N(\lambda(z) + \mu(z)) = \text{trunc}_N(\lambda(z)) + \text{trunc}_N(\mu(z))$$

$$\text{trunc}_N(\lambda(z)\mu(z)) = \text{trunc}_N(\text{trunc}_N(\lambda(z)) \text{ trunc}_N(\mu(z)))$$

Začiatok
38 / 90
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



Operácie s TP maticami

$$A_N = \sum_{k=0}^N a_k (E_1^-)^k = \lambda_N(E_1^-), \quad B_N = \sum_{k=0}^N b_k (E_1^-)^k = \mu_N(E_1^-),$$

$$\lambda_N(z) = \text{trunc}_N(\lambda(z)), \quad \mu_N = \text{trunc}_N(\mu(z))$$

Sčítovanie a odčítovanie:

$$A_N \pm B_N \longleftrightarrow \text{trunc}_N(\lambda(z) \pm \mu(z))$$

Násobenie konštantou:

$$\gamma A_N \longleftrightarrow \text{trunc}_N(\gamma \lambda(z))$$

Násobenie TP matíc:

$$A_N B_N \longleftrightarrow \text{trunc}_N(\lambda(z)\mu(z))$$

Inverzná matica:

$$(A_N)^{-1} \longleftrightarrow \text{trunc}_N(\lambda^{-1}(z))$$

Začiatok
◀◀
◀
39 / 90
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



Spätné diferencie 1. rádu

$$f'(t_k) \approx \frac{1}{h} \nabla f(t_k) = \frac{1}{h} (f_k - f_{k-1}), \quad k = 1, \dots, N.$$

$$\begin{bmatrix} h^{-1} f_0 \\ h^{-1} \nabla f(t_1) \\ h^{-1} \nabla f(t_2) \\ \vdots \\ h^{-1} \nabla f(t_{N-1}) \\ h^{-1} \nabla f(t_N) \end{bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{bmatrix}$$

$$B_N^1 = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \beta_1(z) = h^{-1}(1 - z)$$

Začiatok
◀◀
◀
40 / 90
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



Spätné diferencie 2. rádu

$$B_N^2 = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta_2(z) = h^{-2}(1 - 2z + z^2) = h^{-2}(1 - z)^2$$

Začiatok
◀◀ ▶▶
◀ ▶▶
41 / 90
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



Spätné diferencie p -tého rádu

$$B_N^p = \frac{1}{h^p} \begin{bmatrix} \omega_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_1 & \omega_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_2 & \omega_1 & \omega_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \omega_p & \omega_{p-1} & \dots & \omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \omega_p & \omega_{p-1} & \dots & \omega_0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_j = (-1)^j \binom{p}{j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, p.$$

$$\beta_p(z) = h^{-p}(1-z)^p$$

Začiatok

◀◀ ▶▶

◀ ▶▶

42 / 90

Späť

Obrazovka

Zavrieť

Koniec



Vlastnosti matíc B_N^p

Pre funkcie $\beta_p(z)$ platí:

$$\begin{aligned}\beta_2(z) &= \beta_1(z)\beta_1(z) \\ \beta_p(z) &= \underbrace{\beta_1(z) \dots \beta_1(z)}_p \\ \beta_{p+q}(z) &= \beta_p(z)\beta_q(z) = \beta_q(z)\beta_p(z), \quad (p, q \in N)\end{aligned}$$

odkiaľ vyplýva, že

$$\begin{aligned}B_N^2 &= B_N^1 B_N^1, \\ B_N^p &= \underbrace{B_N^1 B_N^1 \dots B_N^1}_p, \\ B_N^{p+q} &= B_N^p B_N^q = B_N^q B_N^p, \quad (p, q \in N)\end{aligned}$$

Začiatok
◀◀
◀
43 / 90
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



Dopredné diferencie p -tého rádu

$$F_N^p = \frac{1}{h^p} \begin{bmatrix} \omega_0 & \dots & \omega_{p-1} & \omega_p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \omega_0 & \dots & \omega_{p-1} & \omega_p & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \omega_0 & \omega_1 & \omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \omega_0 & \omega_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \omega_0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_j = (-1)^j \binom{p}{j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, p.$$

Generujúca funkcia pre F_N^p je taka istá ako pre B_N^p :

$$\beta_p(z) = h^{-p}(1 - z)^p$$



Vlastnosti matíc F_N^p

$$\begin{aligned} F_N^2 &= F_N^1 F_N^1, \\ F_N^p &= \underbrace{F_N^1 F_N^1 \dots F_N^1}_p, \end{aligned}$$

$$F_N^{p+q} = F_N^p F_N^q = F_N^q F_N^p,$$

$$(B_N^p) = F_N^p, \quad (F_N^p) = B_N^p.$$

Začiatok

◀◀ ▶▶

◀ ▶▶

45 / 90

Späť

Obrazovka

Zavrieť

Koniec



Integrovanie (1-krát)

$$g_1(t) = \int_a^t f(t)dt,$$

$$g_1(t_k) \approx h \sum_{i=0}^{k-1} f_i, \quad k = 1, \dots, N.$$

$$t_k = kh, \quad (k = 0, \dots, N)$$

Začiatok

◀◀ ▶▶

◀ ▶▶

46 / 90

Späť

Obrazovka

Zavrieť

Koniec



$$\begin{bmatrix} g_1(t_1) \\ g_1(t_2) \\ g_1(t_3) \\ \vdots \\ g_1(t_N) \\ g_1(t_N + h) \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{bmatrix}$$

$$I_N^1 = h \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\varphi_1(z) = h(1 - z)^{-1}.$$

$$B_N^1 I_N^1 = I_N^1 B_N^1 \longleftrightarrow \text{trunc}_N(\beta_1(z) \varphi_1(z)) = 1 \longleftrightarrow E.$$



Integrovanie (2-krát)

$$g_2(t) = \int_a^t dt \int_a^t f(t) dt,$$

$$g_2''(t) = g_1'(t) = f(t) \text{ in } (a, b)$$

$$\begin{aligned} g_2(t_k) &= h \sum_{i=0}^{k-1} g_1(t_i) = h \sum_{i=1}^{k-1} g_1(t_i) = h \sum_{i=1}^{k-1} h \sum_{j=0}^{i-1} f_j = \\ &= h^2 \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=0}^{i-1} f_j = h^2 \sum_{j=0}^{k-2} (k-j-1) f_j = \\ &= h^2((k-1)f_0 + (k-2)f_1 + \dots + 2f_{k-3} + f_{k-2}), \\ &\quad k = 2, 3, \dots, N. \end{aligned}$$

Začiatok

◀◀ ▶▶

◀ ▶▶

48 / 90

Späť

Obrazovka

Zavrieť

Koniec



$$\begin{bmatrix} g_2(t_2) \\ g_2(t_3) \\ \vdots \\ g_2(t_N) \\ g_2(t_N + h) \\ g_2(t_N + 2h) \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ N & \cdots & 3 & 2 & 1 & 0 \\ N+1 & N & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \\ f_N \end{bmatrix}$$

$$I_N^2 = h^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ N & \cdots & 3 & 2 & 1 & 0 \\ N+1 & N & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\varphi_2(z) = h^2(1 - z)^{-2}.$$

$$B_N^2 I_N^2 = I_N^2 B_N^2 \longleftrightarrow \text{trunc}_N(\beta_2(z) \varphi_2(z)) = 1 \longleftrightarrow E. \quad (1)$$

Začiatok

◀◀ ▶▶

◀ ▶▶

49 / 90

Späť

Obrazovka

Zavrieť

Koniec



Integrovanie (p-krát)

$$g_p(t) = \int_a^t d\tau_p \int_a^{\tau_p} d\tau_{p-1} \dots \int_a^{\tau_2} f(\tau_1) d\tau_1,$$

$$I_N^p = h \begin{bmatrix} \gamma_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{N-1} & \cdots & \cdots & \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & 0 \\ \gamma_N & \gamma_{N-1} & \cdots & \cdots & \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 \end{bmatrix},$$

$$B_N^p I_N^p = I_N^p B_N^p \longleftrightarrow \text{trunc}_N (\beta_p(z) \varphi_p(z)) = 1 \longleftrightarrow E.$$



Ľavé R-L derivácie

$${}_aD_{t_k}^\alpha f(t) \approx \frac{\nabla^\alpha f(t_k)}{h^\alpha} = h^{-\alpha} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} f_{k-j}, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

$$\begin{bmatrix} h^{-\alpha} \nabla^\alpha f(t_0) \\ h^{-\alpha} \nabla^\alpha f(t_1) \\ h^{-\alpha} \nabla^\alpha f(t_2) \\ \vdots \\ h^{-\alpha} \nabla^\alpha f(t_{N-1}) \\ h^{-\alpha} \nabla^\alpha f(t_N) \end{bmatrix} = \frac{1}{h^\alpha} \begin{bmatrix} \omega_0^{(\alpha)} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \omega_1^{(\alpha)} & \omega_0^{(\alpha)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \omega_2^{(\alpha)} & \omega_1^{(\alpha)} & \omega_0^{(\alpha)} & 0 & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots \\ \omega_{N-1}^{(\alpha)} & \ddots & \omega_2^{(\alpha)} & \omega_1^{(\alpha)} & \omega_0^{(\alpha)} & 0 \\ \omega_N^{(\alpha)} & \omega_{N-1}^{(\alpha)} & \ddots & \omega_2^{(\alpha)} & \omega_1^{(\alpha)} & \omega_0^{(\alpha)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{bmatrix}$$

$$\omega_j^{(\alpha)} = (-1)^j \binom{\alpha}{j}, \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

Začiatok

◀◀ ▶▶

◀ ▶▶

51 / 90

Späť

Obrazovka

Zavrieť

Koniec



$$B_N^\alpha = \frac{1}{h^\alpha} \begin{bmatrix} \omega_0^{(\alpha)} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \omega_1^{(\alpha)} & \omega_0^{(\alpha)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \omega_2^{(\alpha)} & \omega_1^{(\alpha)} & \omega_0^{(\alpha)} & 0 & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots \\ \omega_{N-1}^{(\alpha)} & \ddots & \omega_2^{(\alpha)} & \omega_1^{(\alpha)} & \omega_0^{(\alpha)} & 0 \\ \omega_N^{(\alpha)} & \omega_{N-1}^{(\alpha)} & \ddots & \omega_2^{(\alpha)} & \omega_1^{(\alpha)} & \omega_0^{(\alpha)} \end{bmatrix}$$

$$\beta_\alpha(z) = h^{-\alpha}(1-z)^\alpha.$$

$$B_N^\alpha B_N^\beta = B_N^\beta B_N^\alpha = B_N^{\alpha+\beta},$$

$${}_aD_t^\alpha ({}_aD_t^\beta f(t)) = {}_aD_t^\beta ({}_aD_t^\alpha f(t)) = {}_aD_t^{\alpha+\beta} f(t),$$

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, r-1,$$

$$r = \max\{n, m\}$$

Začiatok

◀◀ ▶▶

◀ ▶▶

52 / 90

Späť

Obrazovka

Zavrieť

Koniec



Lavý R-L integrál

$${}_aD_t^{-\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (a < t < b),$$

$$I_N^\alpha = (B_N^\alpha)^{-1}.$$

$$I_N^\alpha \longleftrightarrow \varphi_N(z) = \text{trunc}_N(\beta_\alpha^{-1}(z)) = \text{trunc}_N(h^\alpha(1-z)^{-\alpha}).$$

$$I_N^\alpha = h^\alpha \begin{bmatrix} \omega_0^{(-\alpha)} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \omega_1^{(-\alpha)} & \omega_0^{(-\alpha)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \omega_2^{(-\alpha)} & \omega_1^{(-\alpha)} & \omega_0^{(-\alpha)} & 0 & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \dots \\ \omega_{N-1}^{(-\alpha)} & \ddots & \omega_2^{(-\alpha)} & \omega_1^{(-\alpha)} & \omega_0^{(-\alpha)} & 0 \\ \omega_N^{(-\alpha)} & \omega_{N-1}^{(-\alpha)} & \ddots & \omega_2^{(-\alpha)} & \omega_1^{(-\alpha)} & \omega_0^{(-\alpha)} \end{bmatrix}$$

Začiatok
53 / 90
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



Príklad: Riesz-ovo jadro

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-1}^1 \frac{y(\tau) d\tau}{|t-\tau|^\alpha} = 1, \quad (-1 < t < 1),$$

Exaktné riešenie:

$$y(t) = \pi^{-1} \Gamma(1 - \alpha) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) (1 - t^2)^{(\alpha-1)/2}.$$

Numerické riešenie:

$${}_{-1}D_t^{-(1-\alpha)} y(t) + {}_tD_1^{-(1-\alpha)} y(t) = 1,$$

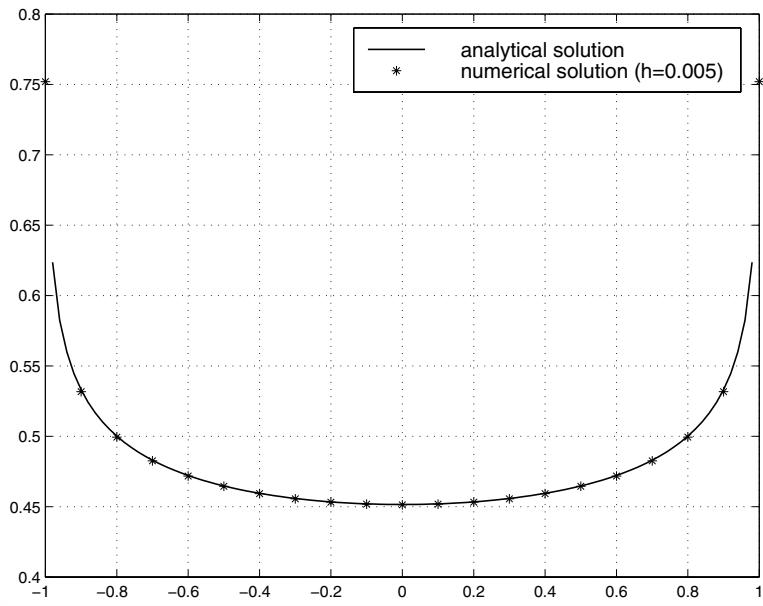
$$(B_N^{-(1-\alpha)} + F_N^{-(1-\alpha)}) Y_N = F_N$$

Začiatok
◀◀ ▶▶
◀ ▶▶
54 / 90
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



Príklad: Riesz-ovo jadro

$$\alpha = 0.8$$





Príklad (Caputove derivácie)

$$y^{(\alpha)}(t) + y(t) = 1, \quad (2)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad (3)$$

Exaktné riešenie:

$$y(t) = t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-t^\alpha). \quad (4)$$

Numerické riešenie:

$$\{B_{N-2}^\alpha + E_{N-2}\} \{S_{0,1} Y_N\} = S_{0,1} F_N. \quad (5)$$

pričom zo začiatočných podmienok máme:

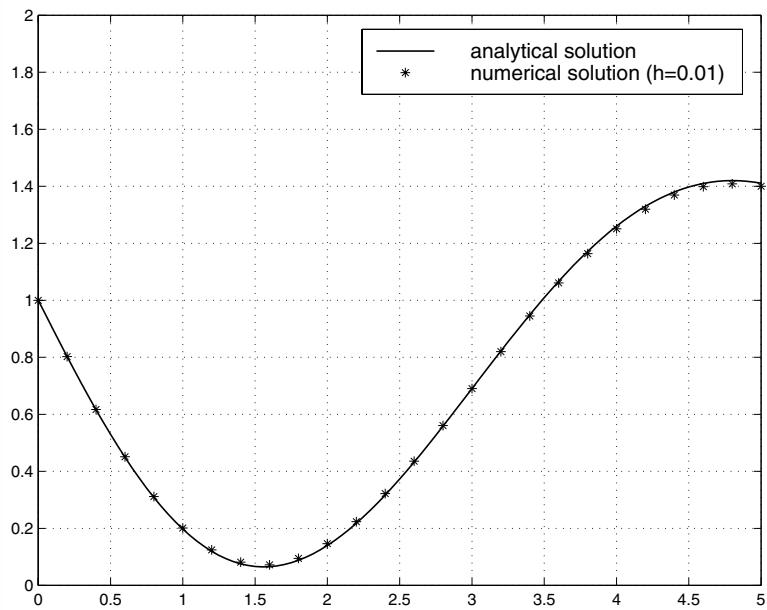
$$y_0 = y_1 = 0$$

Začiatok	
56 / 90	
Späť	
Obrazovka	
Zavrieť	
Koniec	



Príklad (Caputove derivácie)

$$\alpha = 1.8$$





Aplikácie?

Začiatok

◀◀ ▶▶

◀ ▶

58 / 90

Späť

Obrazovka

Zavrieť

Koniec



Hlavné oblasti aplikácie (1)

Nové reologické modely.

Nové matematické modely (zákony)
deformovania väzkopružných materiálov.

Začiatok

◀◀ ▶▶

◀ ▶

59 / 90

Späť

Obrazovka

Zavrieť

Koniec



Hlavné oblasti aplikácie (2)

Vplyv histórie procesu na jeho stav.
Modelovanie „pamäti“ procesu.

Derivácia ${}_0D_t^\alpha f(\tau)$ slúži pre modelovanie vplyvu histórie procesu $f(\tau)$
(t.j. množiny hodnôt $f(\tau)$ pre $\tau < t$)
na jeho stav v čase t .

Starnutie materiálov, opotrebovanie, atď'.

Začiatok
◀◀
◀
▶
▶▶
60 / 90
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



Hlavné oblasti aplikácie (3)

Dynamické procesy vo fraktáloch.

Matematické modely *dynamických* procesov vo fraktáloch (samopodobných štruktúrach alebo materiáloch) vedú k DRNR, pričom rámce rovnice závisí od fraktálnej dimenzie.

Pórovité materiály, chemické reakcie, difúzia, nové typy elektrických obvodov, fyziológia, chaotické procesy, ekonofyzika atď.

Začiatok
◀◀
◀
61 / 90
▶
▶▶
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



Hlavné oblasti aplikácie (4)

Teória riadenia procesov.

Dynamické sústavy neceločíselného rádu
ako adekvátnejšie modely reálnych
dynamických objektov a procesov.
Regulátory neceločíselného rádu.
Robustné riadenie.

Začiatok
◀◀
◀
▶
▶▶
62 / 90
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



Hlavné oblasti aplikácie (5)

Fyzika „neceločíselného rádu“?

Hookeov zákon:

$$F = kx$$

Newtonova kvapalina:

$$F = kx'$$



$$F(t) = kx^{(\alpha)}(t)$$

Newtonov II. zákon:

$$F = kx''$$



Diffusion–wave equation:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Začiatok

◀◀ ▶▶

◀ ▶▶

63 / 90

Späť

Obrazovka

Zavrieť

Koniec



Asereje – The Ketchup Problem

Začiatok

◀◀ ▶▶

◀ ▶

64 / 90

Späť

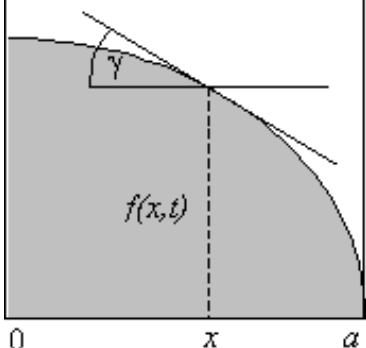
Obrazovka

Zavrieť

Koniec

Vyrovnávanie hladiny taveniny vo vysokej peci (1)

$$\tan \gamma = \frac{\partial f(x, t)}{\partial x}$$



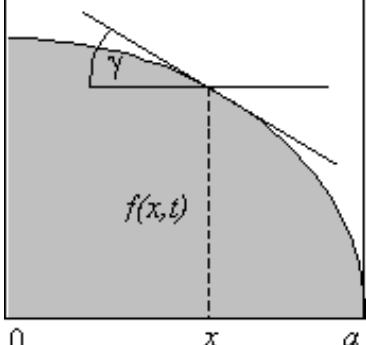
Klasický prístup:
„rýchlosť zmeny lokálneho tvaru povrchu kvapaliny závisí od aktuálneho sklonu tohto povrchu“

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = -k \frac{\partial f(x, t)}{\partial x}$$

$$f(x, t) = \varphi(x) e^{-kt} + \frac{M}{\rho a} \left(1 - e^{-kt} \right)$$

Vyrovnávanie hladiny taveniny vo vysokej peci (2)

$$\tan \gamma = \frac{\partial f(x, t)}{\partial x}$$



Skutočný vzťah príčina–dôsledok:
„geometrické charakteristiky objektu sa menia v dôsledku jeho pohybu“

$${}_0D_t^\alpha \left(\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right) = -k \frac{\partial f(x, t)}{\partial x}$$

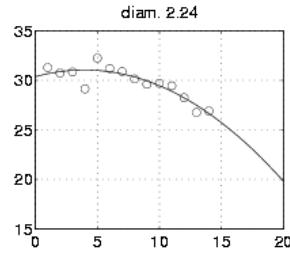
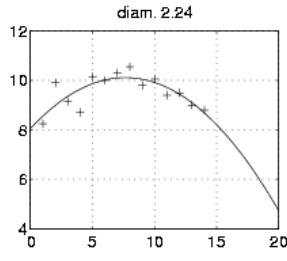
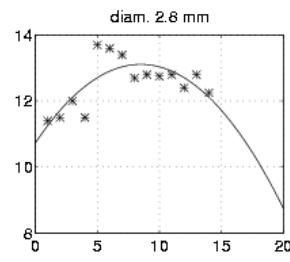
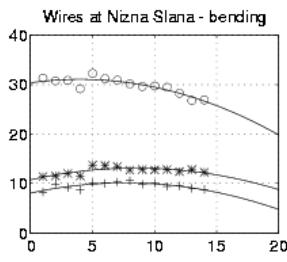
$$f(x, t) = \varphi(x) E_{\alpha, 1}(-kt^\alpha) + \frac{M}{\rho a} (1 - E_{\alpha, 1}(-kt^\alpha))$$

$\alpha = 0.85$

$\alpha = 1.5$

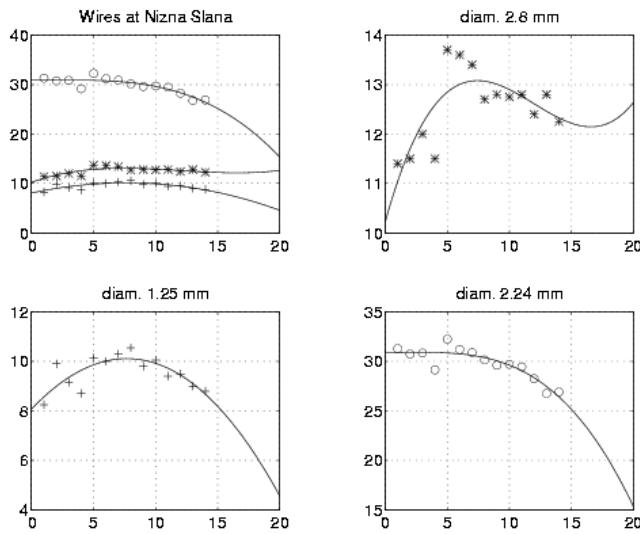


Laná v Nižnej Slanej (regr. 2)

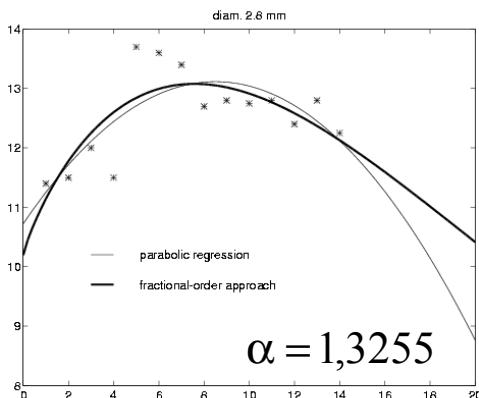




Laná v Nižnej Slanej (regr. 3)



Laná v Nižnej Slanej (model necelého rádu)



y_1, y_2, \dots, y_n

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k t^k - a_m {}_0D_t^{-\alpha} y(t)$$

$$(0 < \alpha \leq m)$$

$$\alpha, a_k (k = \overline{0, m}), m - ?$$

$${}_0D_t^\alpha z(t) + a_m z(t) = -a_m \sum_{k=0}^{m-1} a_k t^k ; \quad z^{(k)}(0) = 0, \quad (k = \overline{0, m-1})$$



Sústavy a regulátory neceločíselného rádu

Začiatok

◀◀ ▶▶

◀ ▶

70 / 90

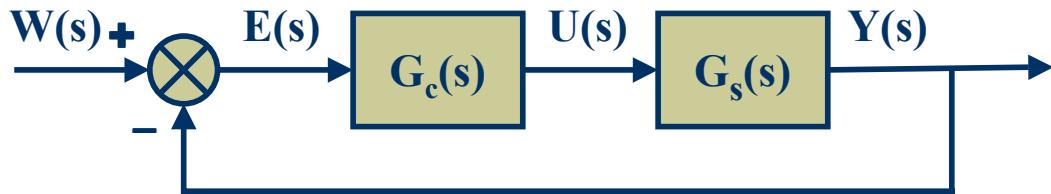
Späť

Obrazovka

Zavrieť

Koniec

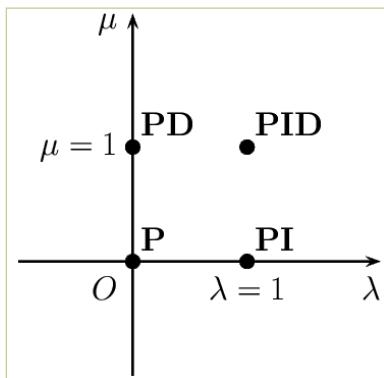
Sústavy a regulátory neceločíselného rádu



$$G_s(s) = \frac{1}{a_n s^{\beta_n} + a_{n-1} s^{\beta_{n-1}} + \dots + a_1 s^{\beta_1} + a_0 s^{\beta_0}}$$

$$a_n D^{\beta_n} y(t) + a_{n-1} D^{\beta_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\beta_0} y(t) = u(t)$$

PI^λD^μ regulátory



$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + K_I s^{-\lambda} + K_D s^{\mu}$$

$$u(t) = K_p e(t) + K_I D^{-\lambda} e(t) + K_D D^{\mu} e(t)$$

Začiatok

72 / 90

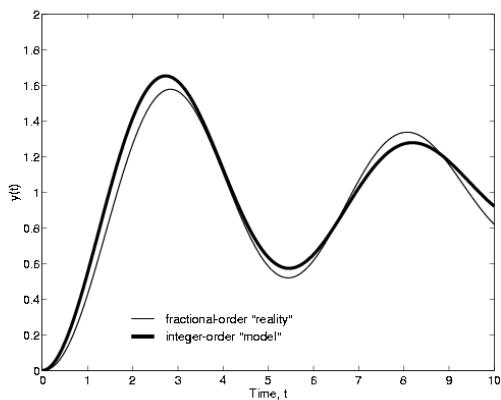
Späť

Obrazovka

Zavrieť

Koniec

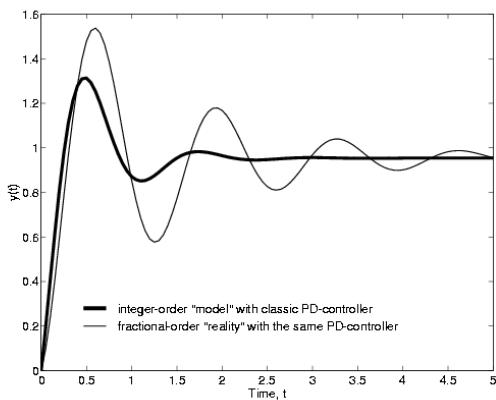
Prednosti $PI^{\lambda}D^{\mu}$ regulátorov – príklad



Porovnanie
prechodových charakteristik
„reality“ a „modelu“.



Prednosti $PI^{\lambda}D^{\mu}$ regulátorov – príklad



Riadenie
„reality“ a „modelu“
pomocou PD regulátora,
optimálneho pre „model“.

Začiatok

◀◀ ▶▶

◀ ▶

74 / 90

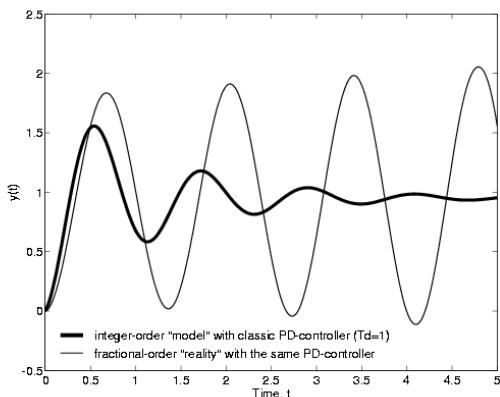
Späť

Obrazovka

Zavrieť

Koniec

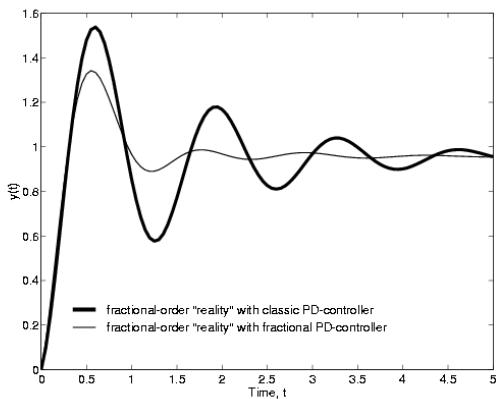
Prednosti $PI^\lambda D^\mu$ regulátorov – príklad



Riadenie „reality“ a „modelu“ pomocou PD regulátora, navrhnutého pre „model“, po jeho „rozladení“ (pri $T_D = 1$).



Prednosti $PI^\lambda D^\mu$ regulátorov – príklad



Riadenie „reality“
pomocou PD regulátora,
optimálneho pre „model“,
a pomocou PD^μ regulátora.

Začiatok

◀◀ ▶▶

◀ ▶

76 / 90

Späť

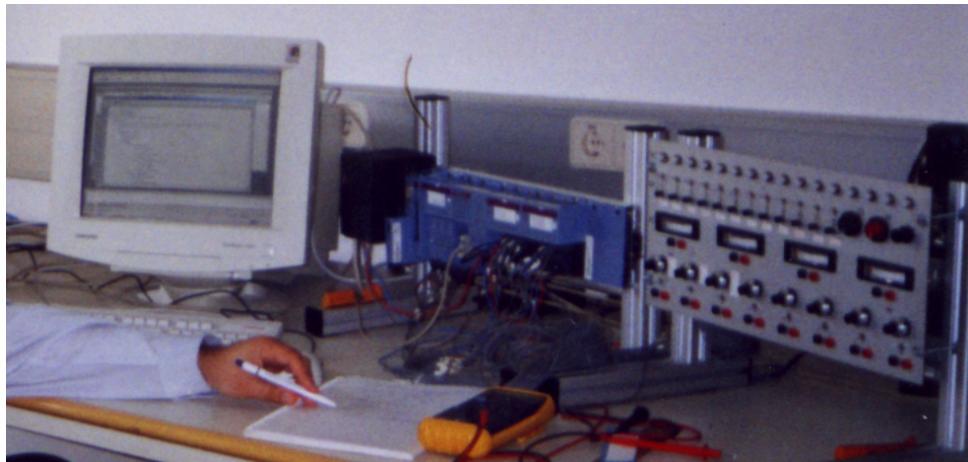
Obrazovka

Zavrieť

Koniec



Digitálna realizácia: PLC B & R 2005



Začiatok

◀◀ ▶▶

◀ ▶

77 / 90

Späť

Obrazovka

Zavrieť

Koniec



Geometrická interpretácia integrovania necelého rádu: tiene na stenách

$${}_0I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau, \quad t \geq 0,$$

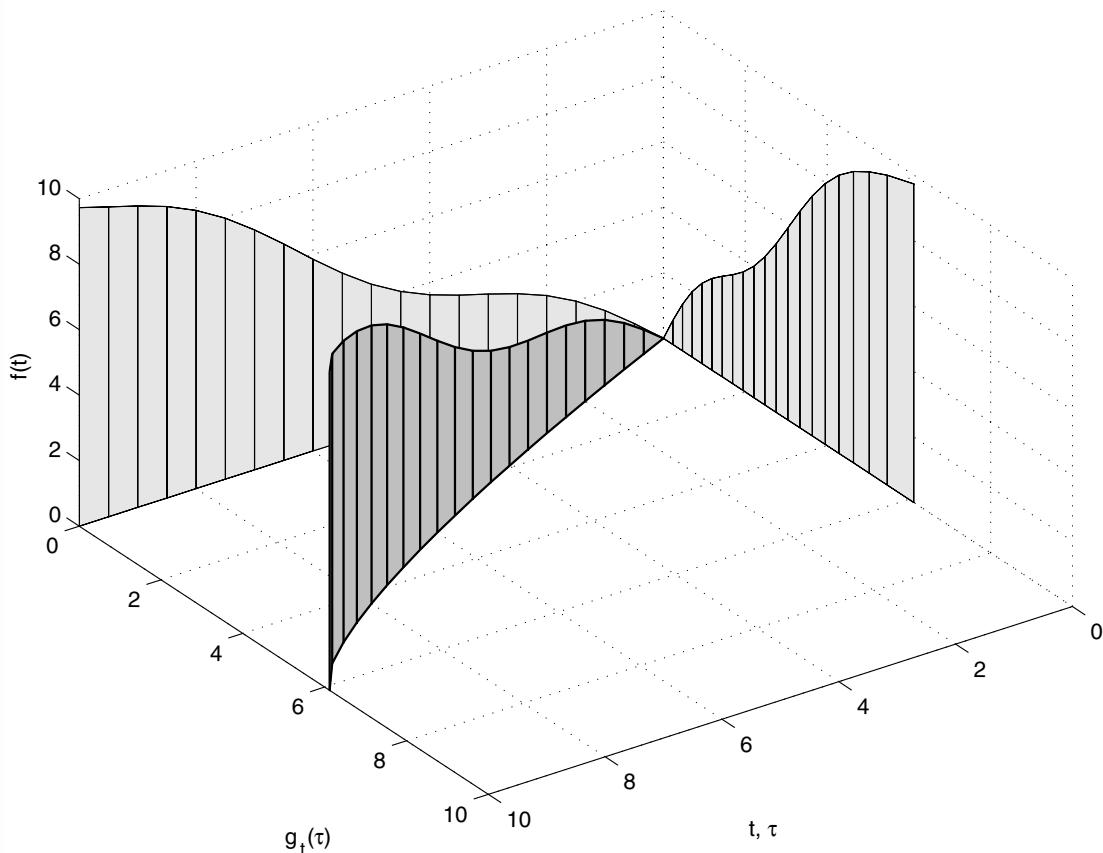
$${}_0I_t^\alpha f(t) = \int_0^t f(\tau) dg_t(\tau),$$

$$g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \{t^\alpha - (t-\tau)^\alpha\}.$$

Pre $t_1 = kt$, $\tau_1 = k\tau$ ($k > 0$) máme:

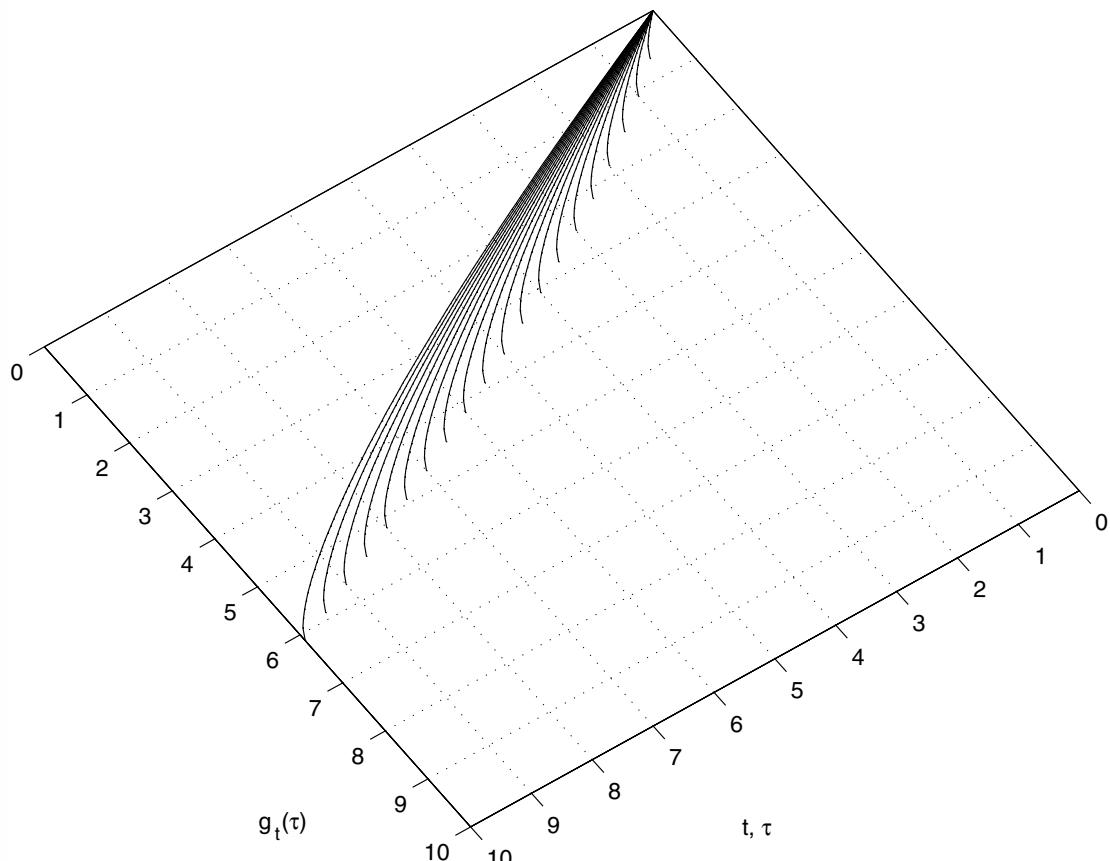
$$g_{t_1}(\tau_1) = g_{kt}(k\tau) = k^\alpha g_t(\tau).$$

Začiatok
◀◀
◀
78 / 90
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec

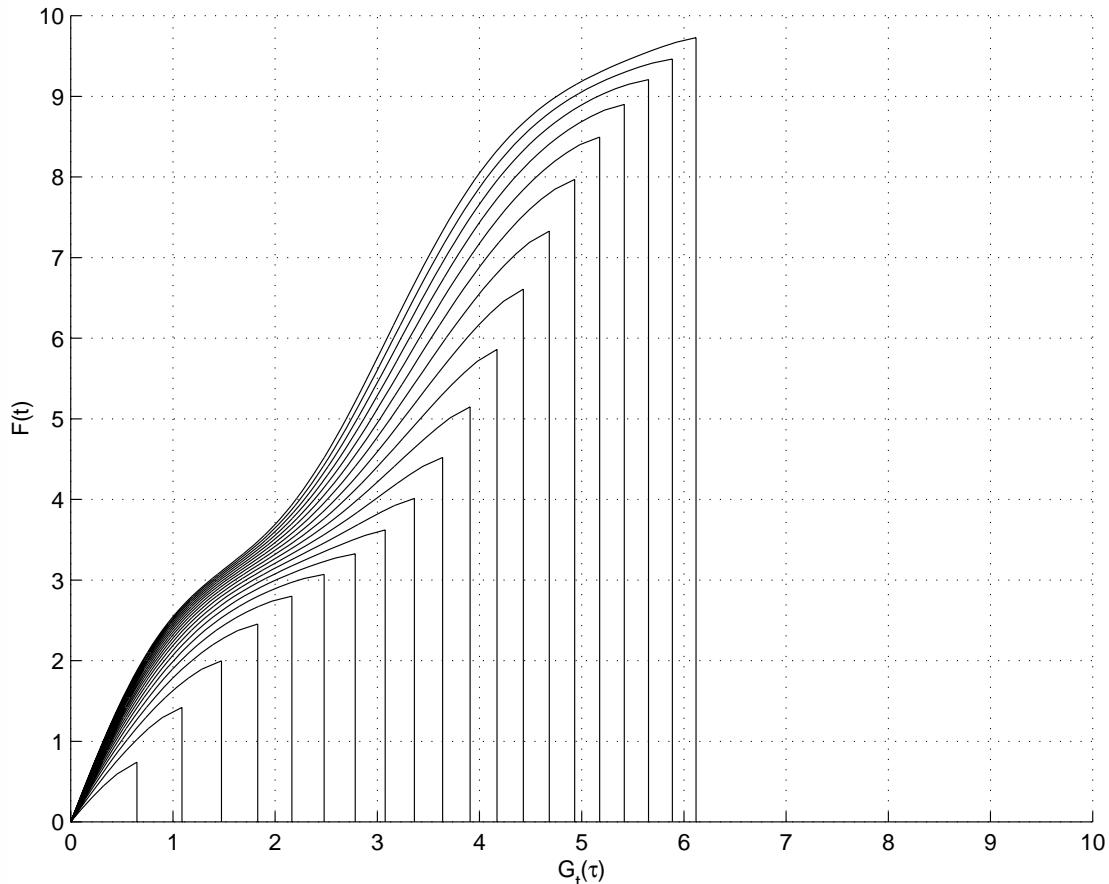


„Živý plot“ a jeho tiene: ${}_0 I_t^1 f(t)$ a ${}_0 I_t^\alpha f(t)$,
pre $\alpha = 0.75$, $f(t) = t + 0.5 \sin(t)$, $0 \leq t \leq 10$.

Začiatok
◀◀
◀
▶
▶▶
79 / 90
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



„Živý plot“: ako sa mení jeho základ pre ${}_0I_t^\alpha f(t)$, $\alpha = 0.75$, $0 \leq t \leq 10$.



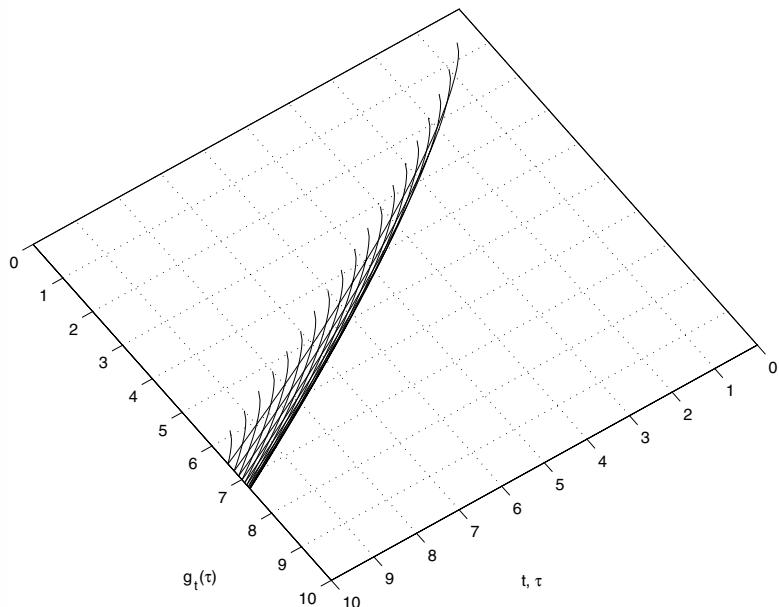
„Živý plot“: najdôležitejší tieň
pre ${}_0I_t^\alpha f(t)$, $\alpha = 0.75$, $f(t) = t + 0.5 \sin(t)$, $0 \leq t \leq 10$.
Interval medzi „zábermi“ $\Delta t = 0.5$.

Začiatok
◀◀
◀
▶
▶▶
81 / 90
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



„Pravý“ R-L integrál

$${}_t I_0^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b f(\tau) (\tau - t)^{\alpha-1} d\tau, \quad t \leq b,$$



$${}_t I_{10}^\alpha f(t), \alpha = 0.75, 0 \leq t \leq 10$$

Začiatok

◀◀ ▶▶

◀ ▶

82 / 90

Späť

Obrazovka

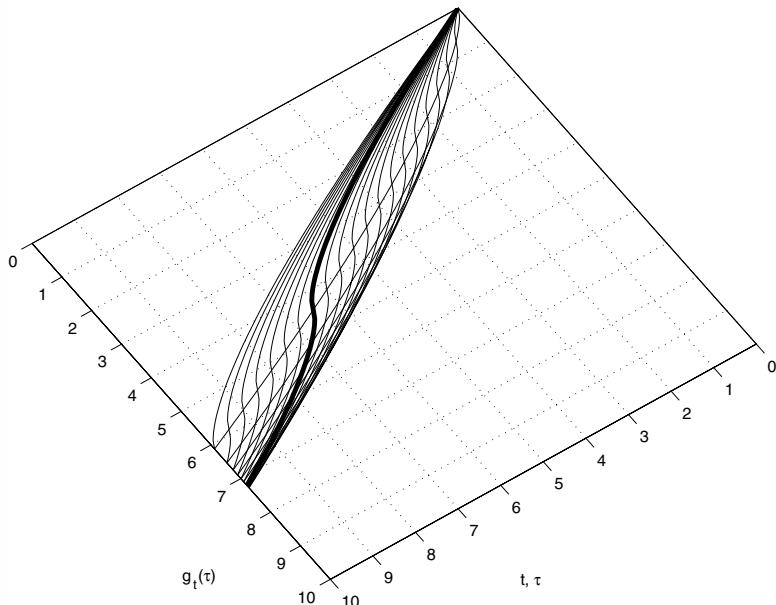
Zavrieť

Koniec



Riesz-ov potenciál

$${}_0R_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^b f(\tau) |\tau - t|^{\alpha-1} d\tau, \quad 0 \leq t \leq b,$$



$${}_0R_{10}^\alpha f(t), \alpha = 0.75, 0 \leq t \leq 10$$

Začiatok

◀◀ ▶▶

◀ ▶

83 / 90

Späť

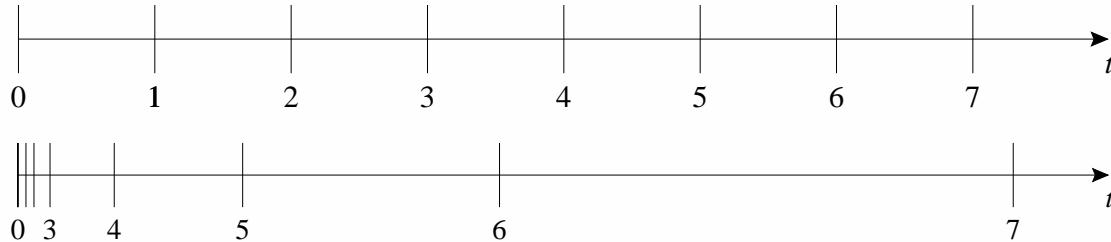
Obrazovka

Zavrieť

Koniec



Ako si predstavujeme čas?



Výpočet drahy pri spomaľujúcich sa hodinách

Subjektívne „sekundy“	Zaznamenaná rýchlosť [m/s]	Objektívne („kozmické“) „sekundy“
0	10	0
1	11	1
2	12	3
3	13	7
4	12	15
5	11	31
6	10	63
7	9	127

$$S_N = 10 \cdot 1 + 11 \cdot 1 + 12 \cdot 1 + 13 \cdot 1 + 12 \cdot 1 + 11 \cdot 1 + 10 \cdot 1 = 79.$$

$$S_O = 10 \cdot 1 + 11 \cdot 2 + 12 \cdot 4 + 13 \cdot 8 + 12 \cdot 16 + 11 \cdot 32 + 10 \cdot 64 = 1368.$$



Fyzikálna interpretácia Stieltjes-ovho integrálu

$$S_O(t) = \int_0^t v(\tau) dg(\tau).$$

Stieltjesov integrál môže byť interpretovaný ako skutočná vzdialenosť, ktorú prešiel pohybujúci sa objekt, pre ktorý boli zaznamenané správne hodnoty rýchlosť a nesprávne hodnoty časových intervalov, pričom závislosť medzi nesprávne zaznamenaným časom τ a správnym časom T je daná známou funkciou $T = g(\tau)$.

Začiatok
◀◀
◀
▶
▶▶
85 / 90
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



Fyzikálna interpretácia

R-L integrálu: tiene minulosti

$$S_O(t) = \int_0^t v(\tau) dg_t(\tau) = {}_0I_t^\alpha v(t),$$

$$g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \{ t^\alpha - (t - \tau)^\alpha \}.$$

R-L integrál $S_O(t)$ funkcie $v(\tau)$ môže byť interpretovaný ako skutočná vzdialenosť, ktorú prešiel pohybujúci sa objekt, pre ktorý boli zaznamenané *lokálne* hodnoty jeho rýchlosťi (subjektívna rýchlosť) a *lokálne* hodnoty času (subjektívny čas), pričom závislosť medzi lokálne zaznamenaným časom τ (po-važovaným za rovnomerný) a kozmickým časom T (plynúcim nerovnomerne) je daná známou funkciou $g_t(\tau)$.

Začiatok
◀◀
◀
86 / 90
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



Záver?

Nie, začiatok!

Začiatok

◀◀ ▶▶

◀ ▶

87 / 90

Späť

Obrazovka

Zavrieť

Koniec



Namiesto záveru (1)

G.W. Scott Blair (1950):

“We may express our concepts in Newtonian terms if we find this convenient but, if we do so, we must realize that we have made a translation into a language which is foreign to the system which we are studying.”

Začiatok

◀◀ ▶▶

◀ ▶▶

88 / 90

Späť

Obrazovka

Zavrieť

Koniec



Namiesto záveru (2)

S. Westerlund (1991):

“Expressed differently, we may say that
Nature works with fractional time derivatives.”

Začiatok
◀◀
◀
▶
▶▶
89 / 90
Späť
Obrazovka
Zavrieť
Koniec



Namiesto záveru (3)

K. Nishimoto (1989):

“The fractional calculus is
the calculus of the XXI century.”

Začiatok

◀◀ ▶▶

◀ ▶

90 / 90

Späť

Obrazovka

Zavrieť

Koniec