Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Институт информационных технологий
математики и механики

Теория вероятностей и математическая статистика

специальность: Программная инженерия

Лектор:

Пройдакова Екатерина Вадимовна,

доцент кафедры ПРИН ИИТММ

Лекция 12.

Сингулярные и смешанные одномерные случайные величины

12.1. Сингулярная случайная величина

12.1. Сингулярная случайная величина

Кроме класса дискретных и класса непрерывных случайных величин, существует еще класс **сингулярных случайных величин**.

Сингулярные случайные величины в реальных экспериментах не встречаются.

Однако **класс сингулярных случайных величин** имеет **большое теоретическое значение**, так как позволяет провести полную классификацию одномерных случайных величин.

12.1. Сингулярная случайная величина

Для выделения этого класса предварительно рассмотрим понятие точки роста для интегральной функции распределения.

Определение 1. Точка $\{a_0\} \in R$ называется **точкой роста** для интегральной функции $F(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство:

$$F(a_0 + \varepsilon) - F(a_0 - \varepsilon) > 0.$$

12.1. Сингулярная случайная величина

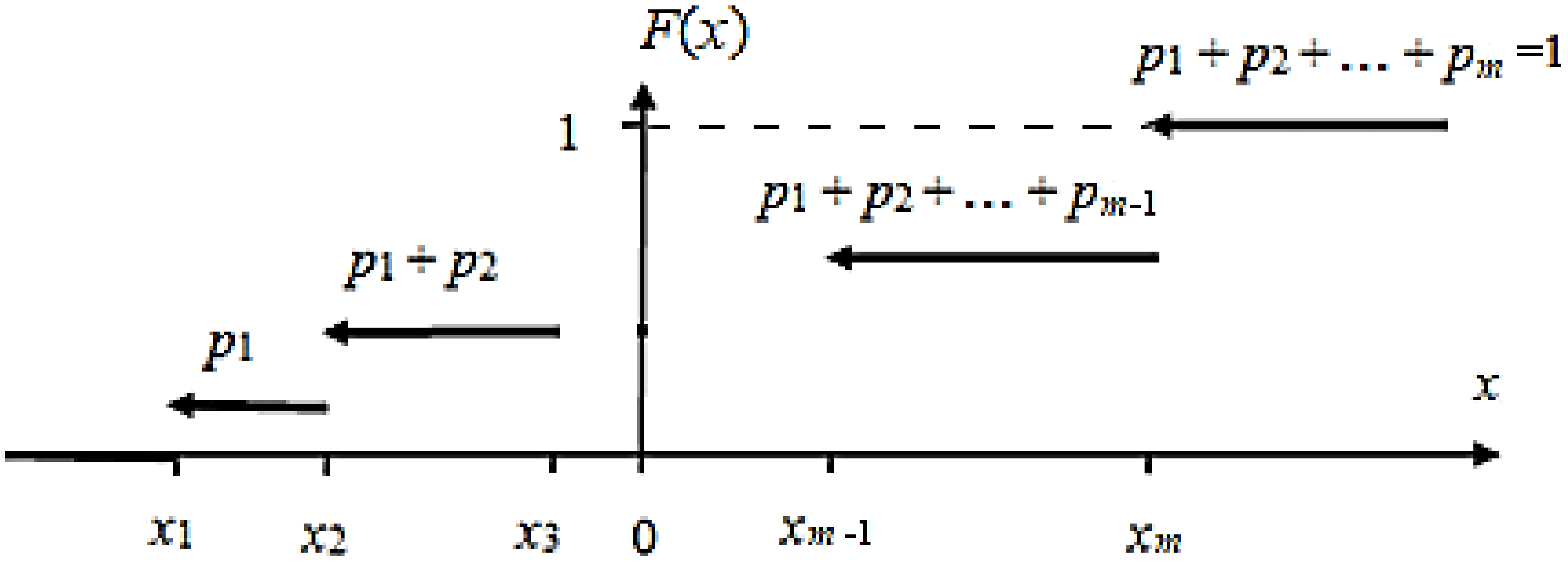


Рис. 1

Изображенная на рис. 1 интегральная функция распределения **дискретной** случайной величины имеет конечное **(*m*)** число точек роста **{x_1}, {x_2}, …, {x_m}**.

12.1. Сингулярная случайная величина

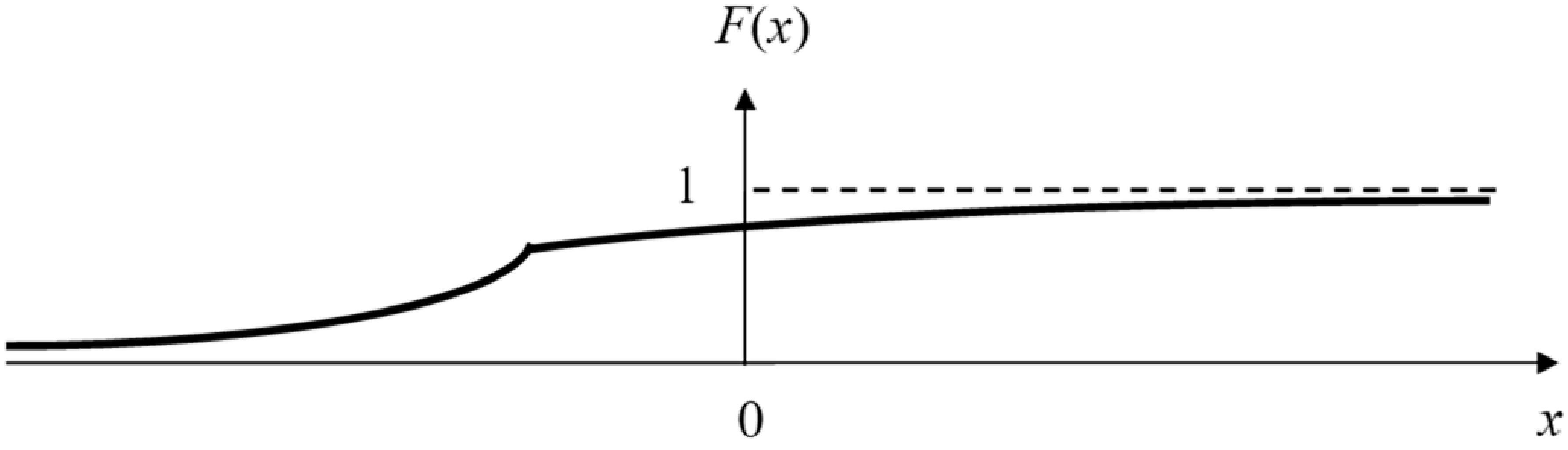


Рис. 2

Множество точек роста для приведенной на рис. 2 интегральной функции распределения **непрерывной** случайной величины **совпадает с $\boldsymbol{R}$**.

12.1. Сингулярная случайная величина

Определение 2. Одномерная случайная величина $\boldsymbol{\xi(\omega)}$**:** $\boldsymbol{\Omega \to X}$ **называется сингулярной**, если её интегральная функция распределения $\boldsymbol{F(x)}$ непрерывна, и точки роста функции $\boldsymbol{F(x)}$ образуют промежуток на $\boldsymbol{R}$, длина которого равна нулю.

12.1. Сингулярная случайная величина

Пример построения сингулярной случайной величины.

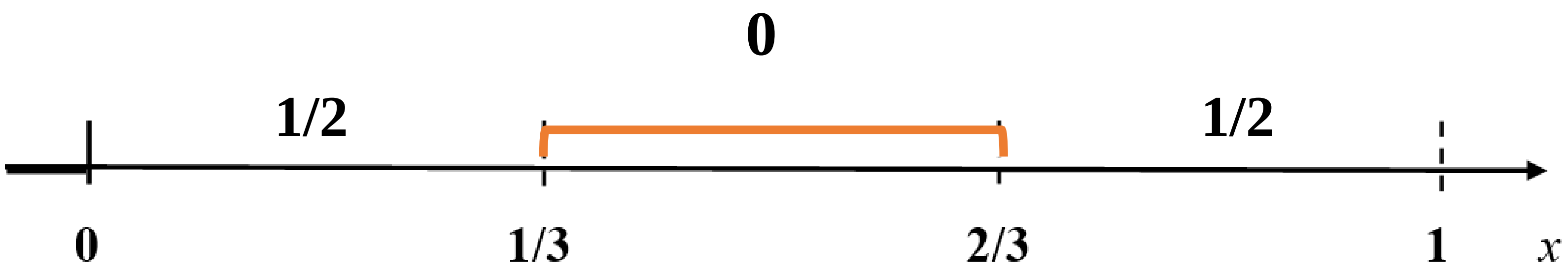
Рассмотрим модельный эксперимент *E*, который заключается в случайном бросании точки на отрезок **[0, 1]** с помощью следующего механизма.

<u>На **первом шаге**</u> делим отрезок **[0, 1]** на **3 равные по длине части**. При этом **внутренняя часть обязательно является интервалом**.

Точка может находиться:

в одном из полученных отрезков **[0, 1/3], [2/3, 1]** с вероятностью **1/2,**

или в интервале **(1/3, 2/3)** с вероятностью **0**.



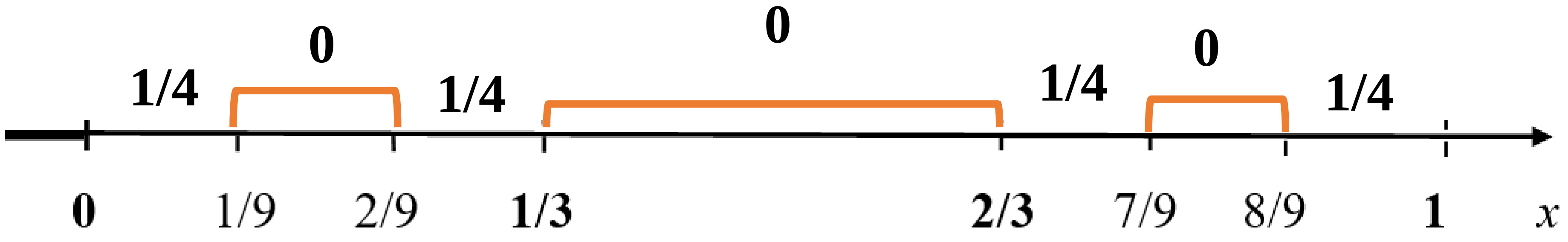
12.1. Сингулярная случайная величина

<u>На **втором шаге**</u> этот процесс деления на три части применяем к каждому из вновь полученных **двух отрезков [0, 1/3], [2/3, 1].**

Точка может оказаться

в одном из отрезков **[0, 1/9], [2/9, 3/9], [6/9, 7/9], [8/9, 1]** с вероятностью **1/4**

или в одном из интервалов **(1/9, 2/9), (7/9, 8/9)** с вероятностью **0**.



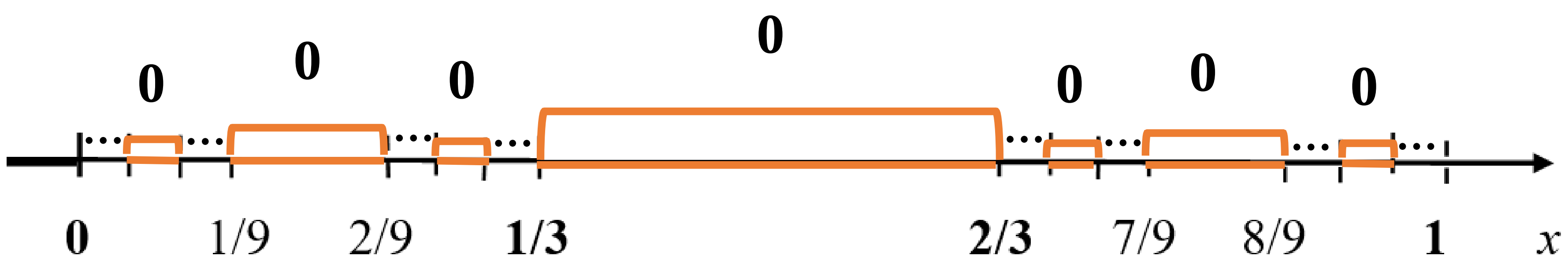
12.1. Сингулярная случайная величина

….

<u>На ***k*-м шаге** </u>точка может оказаться

в одном из $\mathbf{2}^{k}$ **отрезков** с вероятностью $\mathbf{1/2}^{k}$ или

в одном из $\mathbf{2}^{k-1}$ **интервалов** с вероятностью **0**.



12.1. Сингулярная случайная величина

Таким образом **исход рассматриваемого эксперимента** может заключаться в том, что **точка появится в некотором стандартном промежутке отрезка [0, 1]**, например, в интервале (7/9, 8/9) или в отрезке [2/27, 25/27] и т. п.

Обозначим через символ **ω абсциссу** случайным образом (*с помощью описанного выше механизма*) **поставленной точки** на отрезке **[0, 1].**

Множество описаний всех элементарных исходов $\mathbf{\Omega = \{\omega\colon 0 \le \omega \le 1\}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ **- σ-алгебра борелевских подмножеств на отрезке [0, 1] образуют** теоретико-множественную модель $\mathbf{(\Omega, \mathcal{F})}$ эксперимента *E*.

12.1. Сингулярная случайная величина

В качестве **числовой характеристики $\xi(\omega)$ эксперимента** E рассмотрим **абсциссу места положения точки на отрезке [0, 1],** выбранной с помощью описанного выше механизма. Следовательно $\boldsymbol{\xi(\omega) \equiv \omega}$.

Для $\xi(\omega) \equiv \omega$ легко проверим свойство **измеримости**:

при $\boldsymbol{x \le 0}$ множество $\{\omega\colon \xi(\omega) < x\}$ равно $\varnothing \in \mathcal{F}$,

при $\boldsymbol{0 < x \le 1}$ множество $\{\omega\colon \xi(\omega) < x\}$ равно промежутку $\boldsymbol{[0, x)} \in \mathcal{F}$

при $\boldsymbol{x > 1}$ множество $\{\omega\colon \xi(\omega) < x\}$ равно отрезку $\boldsymbol{[0, 1] = \Omega} \in \mathcal{F}$.

Итак, отображение $\boldsymbol{\xi(\omega)\colon \Omega \to [0, 1]}$ является случайной величиной на $\boldsymbol{(\Omega, \mathcal{F})}$.

12.1. Сингулярная случайная величина

Перейдём к **построению интегральной функции распределения** $\boldsymbol{F(x)} = \mathrm{P}\{\boldsymbol{\omega: \xi(\omega)} < \boldsymbol{x}\}$ для случайной величины $\boldsymbol{\xi(\omega): \Omega \to [0, 1]}$.

Так как $\{\boldsymbol{\omega: \xi(\omega)} < \boldsymbol{x}\} = \varnothing$ при $\boldsymbol{x \leq 0}$ и

$\{\boldsymbol{\omega: \xi(\omega)} < \boldsymbol{x}\} = \boldsymbol{\Omega}$ при $\boldsymbol{x > 1}$,

то $\boldsymbol{F(x)} = \mathrm{P}(\{\varnothing\}) = \boldsymbol{0}$ при $\boldsymbol{x \leq 0}$ и

$\boldsymbol{F(x)} = \mathrm{P}(\{\boldsymbol{\Omega}\}) = \boldsymbol{1}$ при $\boldsymbol{x > 1}$.

12.1. Сингулярная случайная величина

при 1/3 < *x* < 2/3 интегральная функция

$\boldsymbol{F(x)} = \mathrm{P}\{\omega\colon \xi(\omega) < x\} = 1 - \mathrm{P}\{\omega\colon \xi(\omega) \geq x\} = 1 - 1/2 = \mathbf{1/2}.$

Так как точка выбирается на отрезке **[2/3, 1]**

с вероятностью $\mathrm{P}\{\omega\colon 2/3 \leq \xi(\omega) \leq 1\} = \mathbf{1/2}.$

12.1. Сингулярная случайная величина

при 1/9 < *x* < 2/9 интегральная функция

$\boldsymbol{F(x) = P\{\omega: \xi(\omega) < x\}} = 1 - P\{\omega: \xi(\omega) \geq x\} = 1 - 3/4 = \mathbf{1/4}.$

Так как точка выбирается на отрезке **[2/9, 1] = [2/9, 3/9]∪ (1/3, 2/3) ∪ [2/3, 1]**

с вероятностью: $\mathbf{P\{\omega: 2/9 \leq \xi(\omega) \leq 1\}} =$

$= P(\{\omega: 2/9 \leq \xi(\omega) \leq 3/9\} \cup \{\omega: 1/3 < \xi(\omega) < 2/3\} \cup \{\omega: 2/3 \leq \xi(\omega) \leq 1\}) =$

$= P\{\omega: 2/9 \leq \xi(\omega) \leq 3/9\} + P\{\omega: 1/3 < \xi(\omega) < 2/3\} + P\{\omega: 2/3 \leq \xi(\omega) \leq 1\} =$

$= 1/4 + 0 + 1/2 = \mathbf{3/4}$

12.1. Сингулярная случайная величина

при 7/9 < *x* < 8/9 интегральная функция

$\boldsymbol{F(x)} = P\{\omega\colon \xi(\omega) < x\} = 1 - P\{\omega\colon \xi(\omega) \geq x\} = 1 - 1/4 = \mathbf{3/4}.$

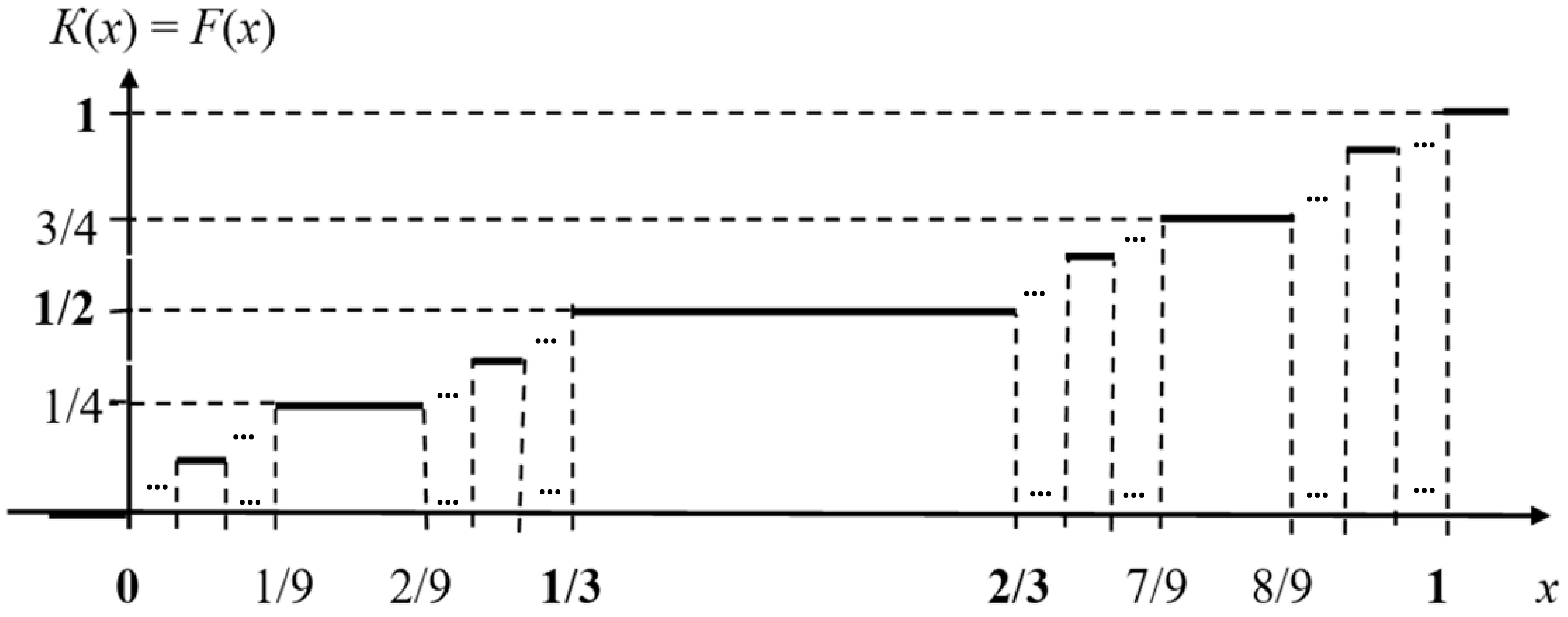
Так как точка выбирается на отрезке **[8/9, 1]**

с вероятностью $\mathbf{P\{\omega\colon 8/9 \leq \xi(\omega) \leq 1\} = 1/4}$.

Продолжая аналогичным образом, определим интегральную функцию распределения ***F*(*x*)** на всей последовательности интервалов:

(1/3, 2/3), (1/9, 2/9), (7/9, 8/9), (1/27, 2/27), (7/27, 8/27), (19/27, 20/27), (25/27, 26/27), … .

12.1. Сингулярная случайная величина



12.1. Сингулярная случайная величина

В результате построения интегральная функция постоянна на последовательности интервалов:

(1/3, 2/3), (1/9, 2/9), (7/9, 8/9), (1/27, 2/27), (7/27, 8/27), (19/27, 20/27), (25/27, 26/27), …

Сумма длин всех этих интервалов постоянства функции $F(x)$, очевидно, равна 1.

$$\mathbf{1/3 + 2 \times (1/9) + 4 \times (1/27) + \ldots = 1.}$$

(бесконечно убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем 2/3 и первым членом 1/3).

12.1. Сингулярная случайная величина

Интегральная функция распределения $\boldsymbol{F(x)}$ случайной величины $\boldsymbol{\xi(\omega) \equiv \omega}$ определена на R почти всюду по мере Лебега.

В остальных точках отрезка **[0, 1]** функцию $F(x)$ **определим по непрерывности**.

Построенная таким способом функция распределения $\boldsymbol{F(x)}$ является непрерывной и называется **кривой Кантора $\boldsymbol{K(x)}$ или канторовой лестницей**.

12.1. Сингулярная случайная величина

Функция $K(x)$ (канторова лестница) удовлетворяет условию $0 \le K(x) \le 1$, является неубывающей, непрерывна на R и, наконец, удовлетворяет предельным соотношениям $\lim\limits_{x\to+\infty} K(x) = K(+\infty) = 1$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} K(x) = F(-\infty) = 0$.

Случайная величина **ξ(ω) называется сингулярной,** если её **интегральная функция распределения** является **функцией Кантора.**

12.1. Сингулярная случайная величина

Случайная величина с интегральной функцией $K(x)$ (сингулярная):

не является дискретной, так как у нее несчетное число значений и

не является непрерывной, так как кривая Кантора $K(x)$ почти всюду по мере Лебега имеет нулевую производную и поэтому функция $K(x)$ не может быть представлена интегралом от своей производной (*у нее нет плотности*).

напоминает непрерывную случайную величину тем, что она принимает несчётное число значений и

напоминает дискретную случайную величину тем, что у интегральной функции распределения $K(x)$ есть интервалы постоянства.

12.2. Смешанная случайная величина

12.2. Смешанная случайная величина

Теорема Лебега. Любая интегральная функция распределения $\boldsymbol{F(x)}$ может быть представлена в виде суммы $\boldsymbol{F(x) = q_1F_{д}(x) + q_2F_{ан}(x) + q_3F_{с}(x)}$, где

числа $\boldsymbol{q_i \geq 0, i = 1, 2, 3}$ **и** $\boldsymbol{q_1 + q_2 + q_3 = 1}$, а функции $\boldsymbol{F_{д}(x), F_{ан}(x)}$ и $\boldsymbol{F_{с}(x)}$ являются интегральными функциями распределения соответственно дискретной, непрерывной и сингулярной случайной величины.

Теорема Лебега позволяет утверждать, что существует **замкнутая классификация множества всех одномерных случайных величин**.

12.2. Смешанная случайная величина

Из этой теоремы Лебега следует, что если случайная величина ξ

является **дискретной**, то имеем $\boldsymbol{q_1 = 1, q_2 = q_3 = 0}$;

для **непрерывной** случайной величины $\boldsymbol{q_2 = 1, q_1 = q_3 = 0}$;

для **сингулярной** случайной величины получим $\boldsymbol{q_3 = 1, q_1 = q_2 = 0}$.

Если, **по крайней мере, два из чисел** $\boldsymbol{q_1}$, $\boldsymbol{q_2}$ и $\boldsymbol{q_3}$ в разложении Лебега интегральной функции отличны от нуля, то соответствующая ей величина ξ называется **смешанной или произвольной**.

12.2. Смешанная случайная величина

Интегральная функция распределения смешанных случайных величин имеет, например, качественный вид, представленный например на рис. 3. Здесь точки $\{\boldsymbol{a_0}\}$ и $\{\boldsymbol{a_1}\}$ являются точками разрыва.

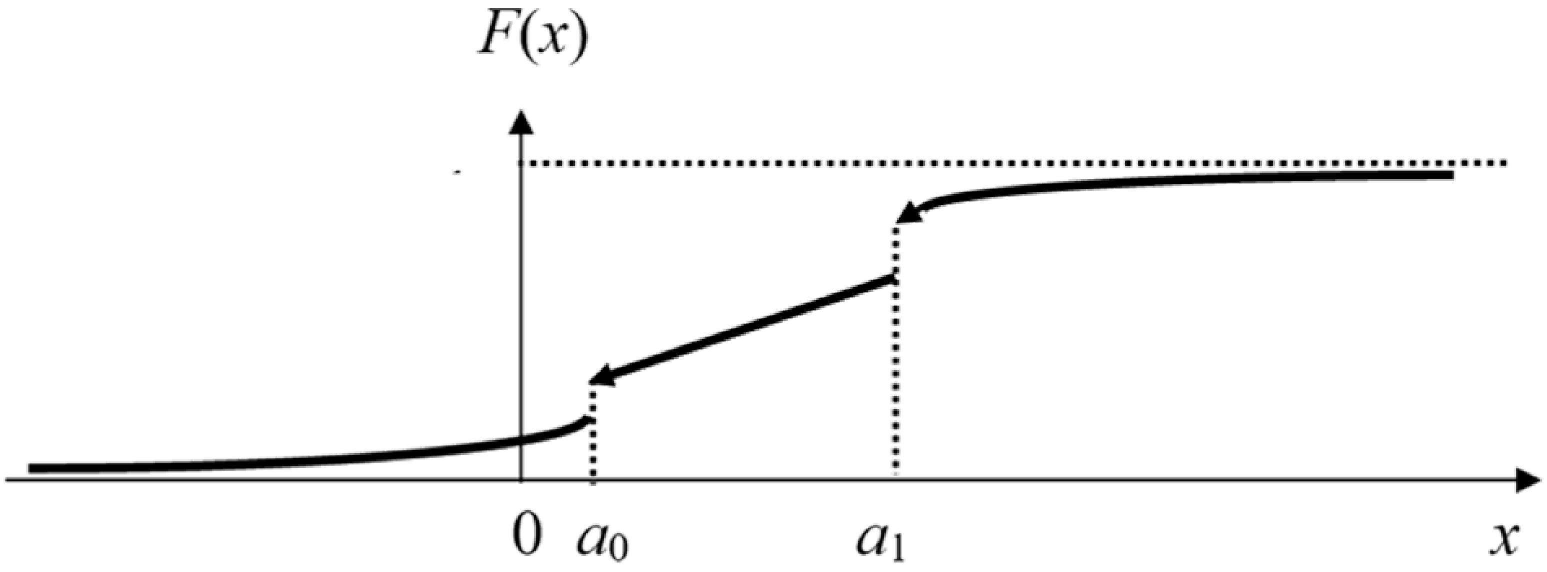


Рис. 3

12.2. Смешанная случайная величина

Пример смешанной случайной величины.

Компьютер выходит из строя в результате транспортировки с вероятностью $\boldsymbol{p_0} > \mathbf{0}$. Если компьютер не вышел из строя при транспортировке, то вероятность того, что он проработает в течение времени $\boldsymbol{t} > \mathbf{0}$, равна $\mathbf{exp\{-\lambda \boldsymbol{t}\}}$ при $\lambda = \mathbf{const} > \mathbf{0}$.

Определить тип случайной величины ξ, которая соответствует времени безотказной работы компьютера.

12.2. Смешанная случайная величина

Решение. Из физических соображений имеем $\boldsymbol{\xi(\omega) \geq 0}$.

Отсюда вероятность $\mathbf{P(\{\omega\text{: } \xi(\omega) < \mathit{t}\}) = P_\xi((-\infty, \mathit{t})) = 0}$ при $\boldsymbol{t \leq 0}$.

По условию задачи вероятность того, что компьютер откажет мгновенно в момент включения, равна $\mathbf{P(\{\omega\text{: } \xi(\omega) = 0\}) = P_\xi(\{0\}) = \boldsymbol{p_0}}$. (*вероятность того, что компьютер пришел в негодность во время транспортировки*).

Из условия задачи находим, что условная вероятность вида:

$\mathbf{P(\{\omega\text{: } \xi(\omega) \geq \mathit{t}\} \mid \{\omega\text{: } \xi(\omega) > 0\}) = P_\xi([\mathit{t}, +\infty) \mid (0, +\infty)) = exp\{-\lambda \mathit{t}\}}$ при $\boldsymbol{t > 0}$.

12.2. Смешанная случайная величина

По теореме умножения для событий имеем:

$\mathrm{P}_\xi((0, +\infty)\cap[t, +\infty)) = \mathbf{P}_\xi((\mathbf{0}, +\boldsymbol{\infty}))\mathbf{P}_\xi([\boldsymbol{t}, +\boldsymbol{\infty})\,|\,(\mathbf{0}, +\boldsymbol{\infty})) = \mathbf{P}_\xi([\boldsymbol{t}, +\boldsymbol{\infty})) \times \mathbf{P}_\xi((\mathbf{0}, +\boldsymbol{\infty})\,|\,[\boldsymbol{t}, +\boldsymbol{\infty}))$,

так как $\mathbf{P}_\xi((\mathbf{0}, +\boldsymbol{\infty})) = \mathrm{P}(\{\omega: \xi(\omega) > 0\}) = 1 - \mathrm{P}(\{\omega: \xi(\omega) = 0\}) = (\mathbf{1} - \boldsymbol{p}_\mathbf{0})$

и $\mathbf{P}_\xi((\mathbf{0}, +\boldsymbol{\infty})\,|\,[\boldsymbol{t}, +\boldsymbol{\infty})) = \mathrm{P}(\{\omega: \xi(\omega) > 0\}|\,\{\omega: \xi(\omega) \geq t\}) = \mathbf{1}$,

получаем равенство: $(\mathbf{1} - \boldsymbol{p}_\mathbf{0})\mathbf{exp}\{-\boldsymbol{\lambda t}\} = \mathbf{P}_\xi([\boldsymbol{t}, +\boldsymbol{\infty})) \times \mathbf{1}$.

Отсюда при $t > 0$ получаем, что вероятность:

$\mathbf{P}_\xi((-\boldsymbol{\infty}, \boldsymbol{t})) = 1 - \mathrm{P}_\xi([t, +\infty)) = 1 - \mathrm{P}(\{\omega: \xi(\omega) \geq t\}) = \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \boldsymbol{p}_\mathbf{0})\mathbf{exp}\{-\boldsymbol{\lambda t}\}$.

12.2. Смешанная случайная величина

Интегральная функция распределения $\boldsymbol{F(t)}$ времени ξ безотказной работы компьютера с учётом транспортировки и эксплуатации равна:

$\boldsymbol{F(t)} = \mathrm{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) < t\}) = \mathrm{P}(\varnothing) = \mathbf{0},$ при $\boldsymbol{t \le 0}$ **;**

$\boldsymbol{F(t)} = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) < t\}) = \mathbf{1 - (1 -} \boldsymbol{p_0}\mathbf{)exp\{-} \boldsymbol{\lambda t}\mathbf{\}},$ при $\boldsymbol{t} > \mathbf{0}$.

В точке $\boldsymbol{t} = \mathbf{0}$ получаем:

$\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = 0\}) = F(+0) - F(0) = \mathbf{1 - (1 -} \boldsymbol{p_0}\mathbf{)exp\{0\} - 0 =}$

$\mathbf{= 1 - 1 +} \boldsymbol{p_0} \mathbf{=} \boldsymbol{p_0}$.

12.2. Смешанная случайная величина

График интегральной функции распределения $F(t)$ представлен на рис. 4

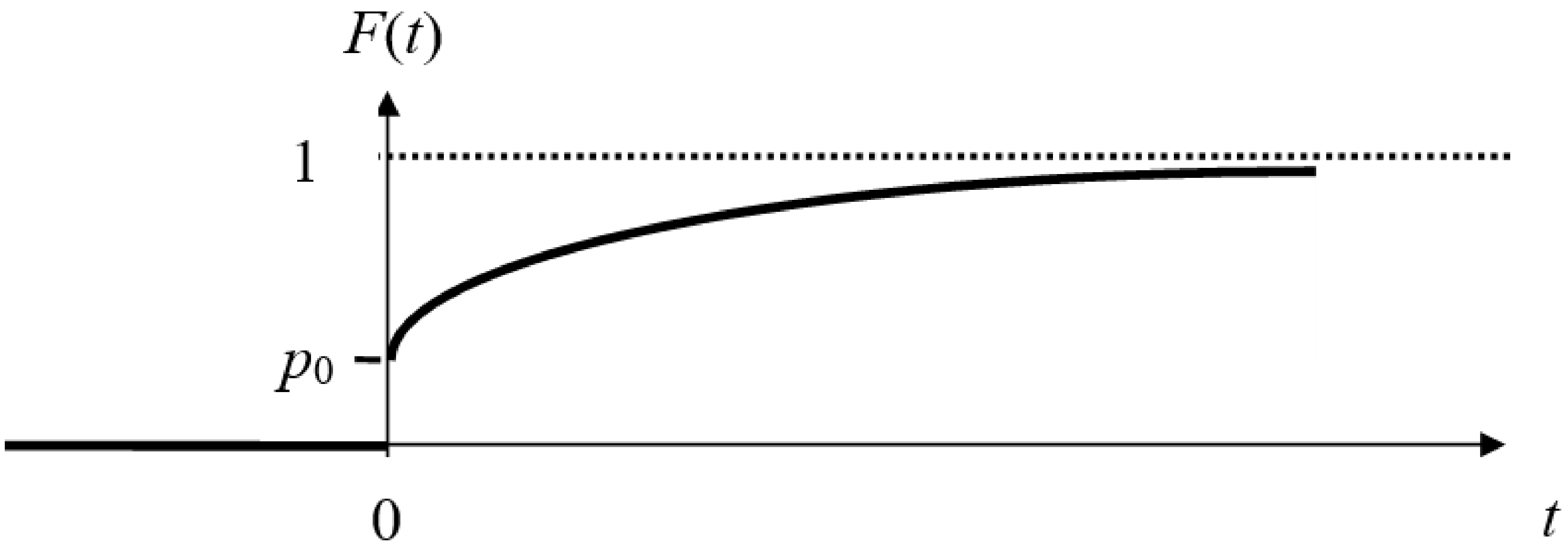


Рис. 4

С помощью стандартных арифметических преобразований и из этого графика можно получить разложение:

$F(t) = 1 - (1 - p_0)\exp\{-\lambda t\} = \boldsymbol{p_0 + (1 - p_0)(1 - \exp\{-\lambda t\})}$ при $\boldsymbol{t > 0}$.

12.2. Смешанная случайная величина

Время ξ безотказной работы компьютера является **смешанной случайной величиной,** и представляет собой смесь дискретной и непрерывной случайной величины. Ее интегральная функция $\boldsymbol{F(t)}$ имеет следующее разложение по теореме Лебега:

$$\boldsymbol{F(t) = q_1\, F_{\text{д}}(t) + q_2\, F_{\text{ан}}(t)} \quad \text{при} \quad \boldsymbol{t > 0},$$

где $\boldsymbol{q_1 = p_0}$, $\boldsymbol{q_2 = 1 - p_0}$, $\boldsymbol{q_3 = 0}$;

$$\boldsymbol{F_{\text{д}}(t) = 1,\ \ F_{\text{ан}}(t) = 1 - \exp\{-\lambda t\}}$$

Эта случайная величина **вообще не имеет сингулярной компоненты**, так как при $t > 0$ существует производная $dF(t)/dt = \lambda(1 - p_0)\exp\{-\lambda t\} > 0$.

Заключение

1. На данной лекции мы узнали об одномерной сингулярной случайной величине.

2. Познакомились с теоремой Лебега, подтверждающей полную замкнутую классификацию одномерных случайных величин.

3. Определили понятие смешанной случайной величины и рассмотрели пример ее построения.