Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Институт информационных технологий
математики и механики

Теория вероятностей и математическая статистика

специальность: Программная инженерия

Лектор:

Пройдакова Екатерина Вадимовна,

доцент кафедры ПРИН ИИТММ

Лекция 11.

Дискретные и непрерывные одномерные случайные величины

11.2. Дискретная одномерная случайная величина и ее законы распределения

11.2. Дискретная одномерная случайная величина

***Определение* 1.** Случайная величина $\xi(\omega)$ **называется дискретной**, если из множества ее значений $\boldsymbol{X} = \{\xi(\omega)\colon \omega \in \Omega\}$ можно выделить такое счётное подмножество $\boldsymbol{X_1} = \{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots\}$ возможных её значений, что:

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x_1\}) = p_1 > 0,\ \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x_2\}) = p_2 > 0,\ \ldots \quad \text{и} \quad p_1 + p_2 + \ldots = 1.$$

Совокупность вероятностей $\{p_i\colon i = 1, 2, \ldots\}$ называется **распределением дискретной случайной величины $\xi(\omega)$.**

В простейшем варианте, подмножество $\boldsymbol{X_1}$ может содержать лишь конечное число $\boldsymbol{m}$ элементов, т. е. $\boldsymbol{X_1} = \{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_m}\}$.

11.2. Дискретная одномерная случайная величина

При этом определение 1 не исключает ситуацию, когда дискретная случайная величина ξ может принимать несчётное число различных значений из некоторого множества $\boldsymbol{X_2}$ с **нулевой вероятностью**.

В таком случае: $\boldsymbol{X = X_1 \cup X_2}$, $\boldsymbol{X_1 \cap X_2 = \varnothing}$ и $\mathbf{P(\{\omega: \xi(\omega) \in X_2\}) = 0}$.

На практике, как правило, $\boldsymbol{X = X_1}$ и $\boldsymbol{X_2 = \varnothing}$.

11.2. Законы распределения одномерной дискретной случайной величины

Первый закон распределения одномерной дискретной случайной величины - интегральная функция распределения $\boldsymbol{F(x)}$,

Определение 2. Интегральная функция распределения $\boldsymbol{F(x)}$ одномерной дискретной случайной величины ξ вычисляется по следующей формуле:

$$F(x) = \mathrm{P}(\{\omega : \xi(\omega) < x\}) = \sum_{i : x_i < x} \mathrm{P}(\xi(\omega) = x_i) = \sum_{i :\, x_i < x} p_i$$

11.2. Законы распределения одномерной дискретной случайной величины

Общие свойства $\boldsymbol{F(x)}$ **1) - 4)**, рассмотренные на лекции 9, сохраняются, но возникают некоторые особенности, характерные именно для дискретных случайных величин.

График такой интегральной функции распределения $\boldsymbol{F(x)}$ **имеет ступенчатый или кусочно-постоянный** вид (рис. 2).

11.2. Законы распределения одномерной дискретной случайной величины

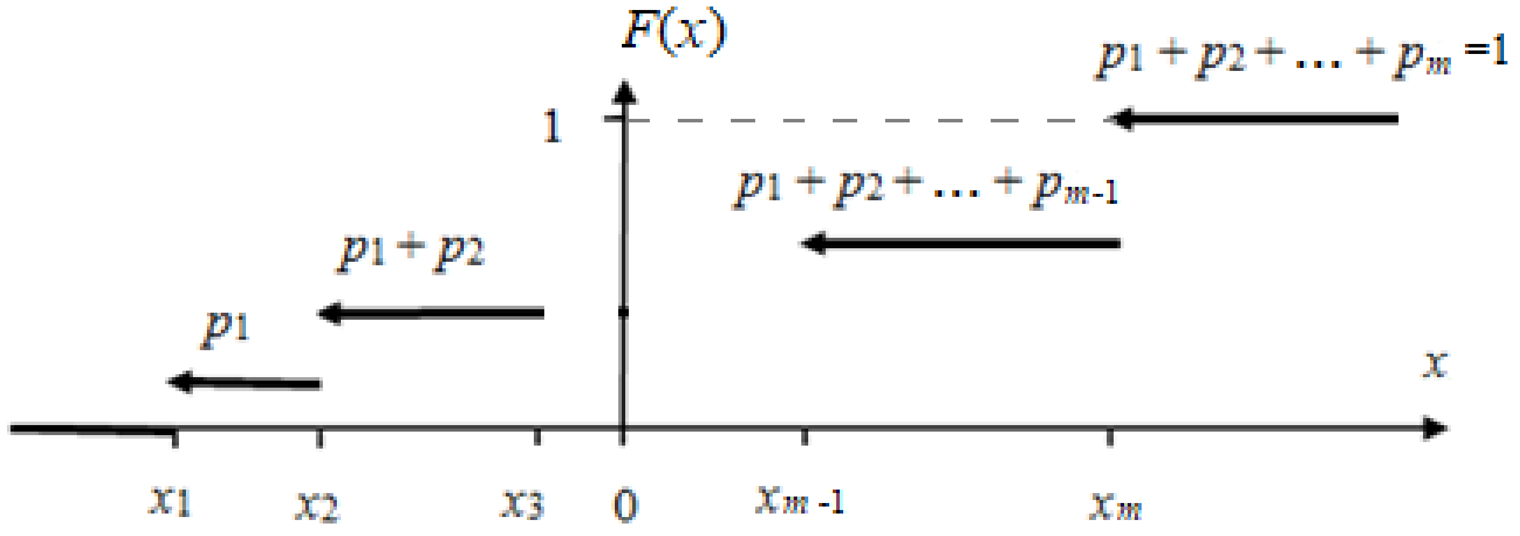


Рис. 2

Из рис.2 легко видеть, что производная интегральной функции распределения дискретной случайной величины всюду равна нулю, исключая точки из $\boldsymbol{X}$, в которых $\boldsymbol{F(x)}$ терпит разрывы и $\boldsymbol{F(x_i + 0) - F(x_i) = p_i,\ i = 1, 2, \ldots}$

11.2. Законы распределения одномерной дискретной случайной величины

Второй закон распределения одномерной дискретной случайной величины - это ряд распределения.

Рядом распределения дискретной случайной величины ξ при счетном множестве $\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots\}$ называется таблица вида:

$\xi(\omega)$	x_1	x_2	$\ldots$	x_i	$\ldots$
$\mathbf{P}(\bullet)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_i	$\ldots$

Здесь $\boldsymbol{x}_1 < \boldsymbol{x}_2 < \boldsymbol{x}_3 < \ldots,$ $\quad \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \ldots = \mathbf{1},$

11.2. Законы распределения одномерной дискретной случайной величины

Третий закон распределения одномерной дискретной случайной величины - многоугольник или **полигон распределения** вероятностей

Вероятностные характеристики случайной величины дискретного типа и её численные значения представляются наглядно в прямоугольной системе координат.

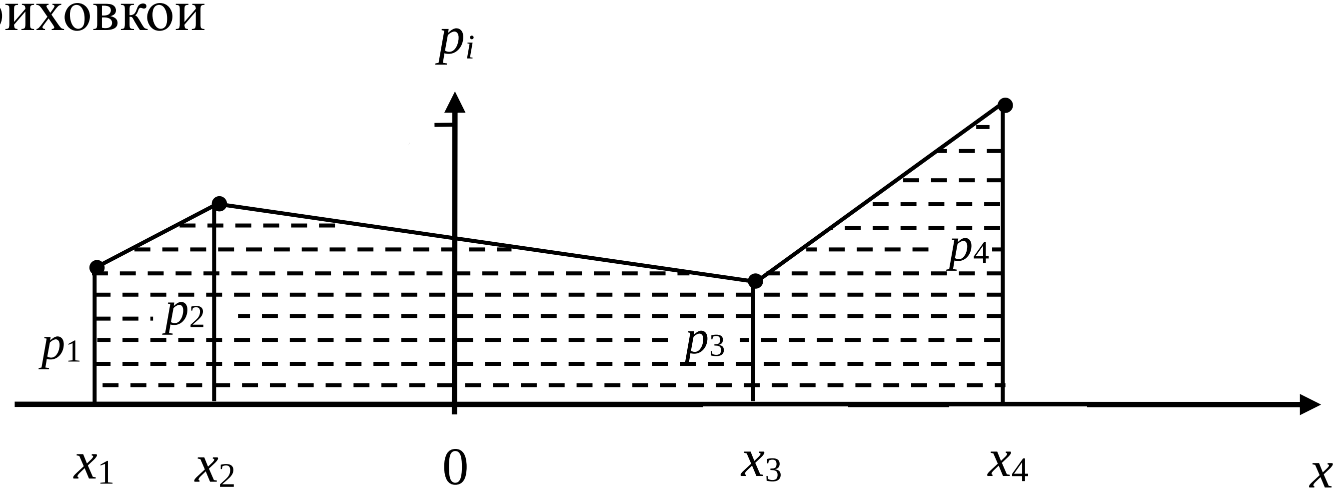
Для этого на плоскости для поставим **точку с абсциссой x_i и ординатой p_i, $i = 1, 2, \ldots$**

Затем каждые две соседние точки соединим отрезком.

Полученный график в виде ломанной кривой определяет так называемый многоугольник или **полигон распределения** вероятностей.

11.2. Законы распределения одномерной дискретной случайной величины

На рисунке ниже изображён пример, когда дискретная случайная величина ξ принимает значения $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{x_3}$ **и** $\boldsymbol{x_4}$ с вероятностями $\boldsymbol{p_1}$, $\boldsymbol{p_2}$, $\boldsymbol{p_3}$, **и** $\boldsymbol{p_4}$. Многоугольник распределения помечен штриховкой



Этот график даёт наглядное представление о вероятностных свойствах случайной величины ξ. Например, вероятность того, что ξ примет значения строго меньше нуля, равна сумме $\boldsymbol{p_1 + p_2}$ длин вертикальных отрезков, расположенных левее прямой $\boldsymbol{x = 0}$.

11.2. Законы распределения одномерной дискретной случайной величины

Пример 2. В ящике 3 бракованных и 5 качественных деталей. Детали извлекаются из ящика по одной без возвращения до появления первой качественной детали. Пусть случайная величина ξ - число произведенных извлечений. Построить для случайной величины ξ:

а) ряд распределения,

б) многоугольник распределения,

в) интегральную функцию распределения,

г) график интегральной функции распределения.

11.2. Законы распределения одномерной дискретной случайной величины

Решение: Случайная величина ξ соответствует числу произведенных извлечений деталей, возможными значениями ξ являются $\boldsymbol{x_1 = 1}$, $\boldsymbol{x_2 = 2}$, $\boldsymbol{x_3 = 3}$, $\boldsymbol{x_4 = 4}$.

Далее найдем вероятность для каждого из возможных значений.

$$p_1 = \mathrm{P}(\xi = x_1) = \mathrm{P}(\xi = 1) = \frac{5}{8} = 0,625;$$

$$p_2 = \mathrm{P}(\xi = x_2) = \mathrm{P}(\xi = 2) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56} \approx 0,268;$$

$$p_3 = \mathrm{P}(\xi = x_3) = \mathrm{P}(\xi = 3) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{5}{6} = \frac{30}{336} \approx 0,089;$$

$$p_4 = \mathrm{P}(\xi = x_4) = \mathrm{P}(\xi = 4) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{5} = \frac{30}{1680} \approx 0,018.$$

11.2. Законы распределения одномерной дискретной случайной величины

Для распределения дискретной случайной величины должно выполняться условие нормировки, т.е. в нашем случае для ξ :

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0,625 + 0,268 + 0,089 + 0,018 = 1$$

Условие нормировки выполнено.

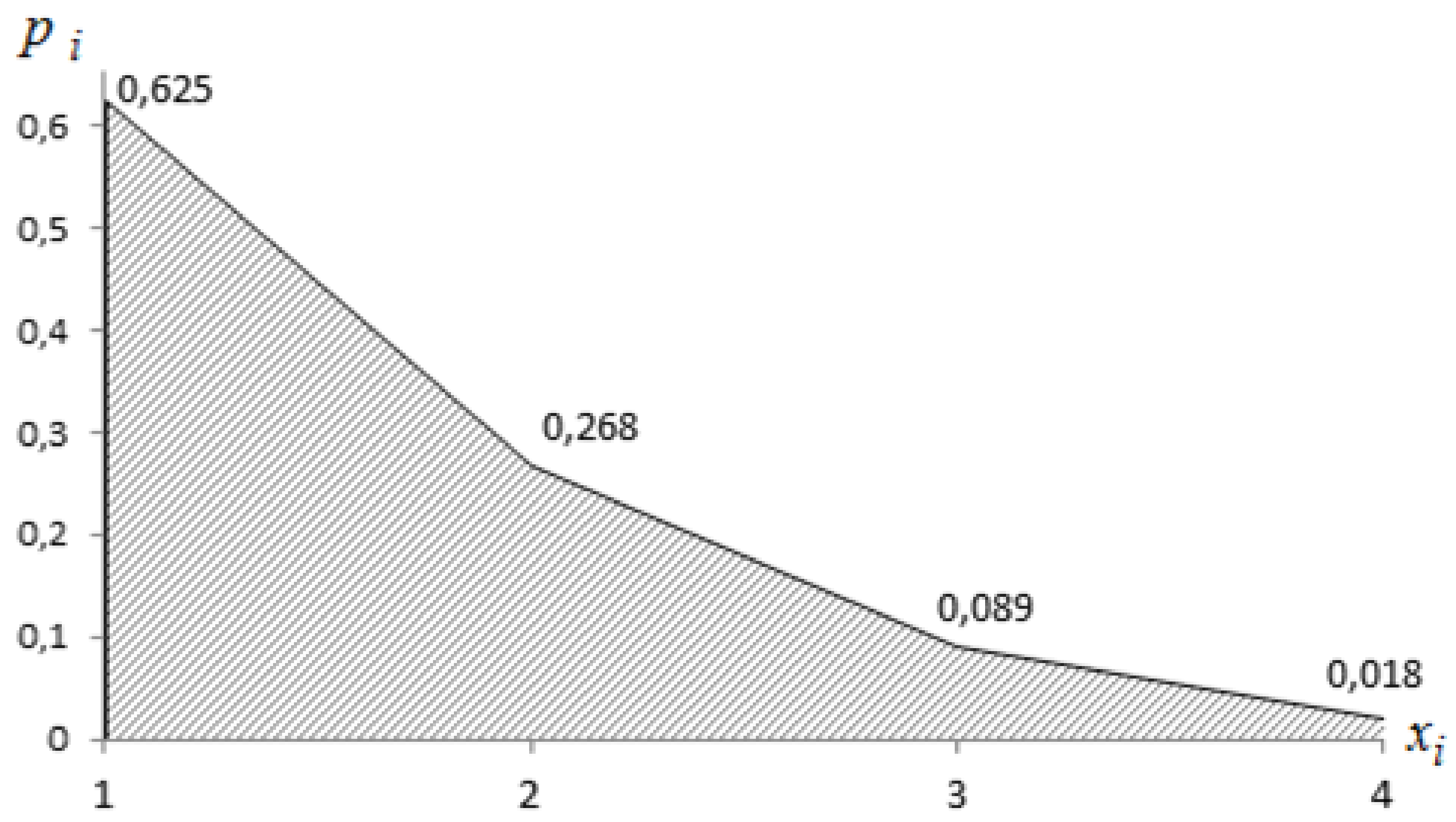
В ряде распределения значения должны быть упорядочены по возрастанию, в нашем случае $x_1 = 1 < x_2 = 2 < x_3 = 3 < x_4 = 4$.

С учетом полученных результатов можем записать **ряд распределения** для ξ**:**

$\xi = x_i$	1	2	3	4
$P(\xi = x_i)$	0,625	0,268	0,089	0,018

11.2. Законы распределения одномерной дискретной случайной величины

б) По полученному ряду строим многоугольник распределения:



11.2. Законы распределения одномерной дискретной случайной величины

Интегральная функция распределения $F_\xi(x)$ одномерной дискретной случайной величины ξ вычисляется по формуле: $F_\xi(x) = \sum\limits_{i:x_i<x} \mathrm{P}(\xi = x_i) = \sum\limits_{i:x_i<x} p_i$

Для нашего случая последовательно получаем:

$$F_\xi(x) = 0 \text{ при } x \le x_1 = 1.$$

$$F_\xi(x) = \sum_{i:x_i<x} p_i = p_1 = 0{,}625 \text{ при } 1 = x_1 < x \le x_2 = 2.$$

$$F_\xi(x) = \sum_{i:x_i<x} p_i = p_1 + p_2 = 0{,}893 \text{ при } 2 = x_2 < x \le x_3 = 3.$$

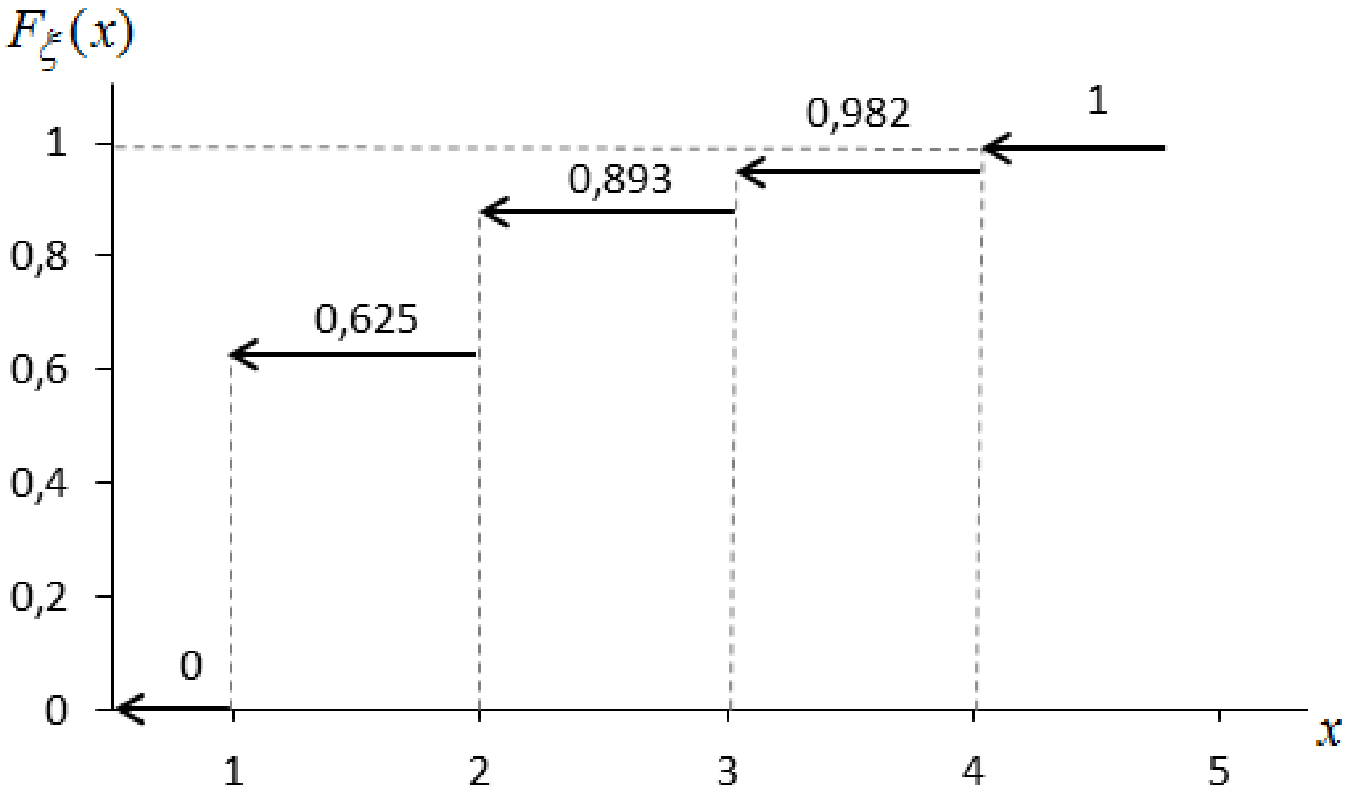
$$F_\xi(x) = \sum_{i:x_i<x} p_i = p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}982 \text{ при } 3 = x_3 < x \le x_4 = 4.$$

$$F_\xi(x) = \sum_{i:x_i<x} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \text{ при } 4 = x_4 < x.$$

11.2. Законы распределения одномерной дискретной случайной величины

График интегральной функции распределения $F_\xi(x)$:

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ 0,625, & 1<x\le 2;\\ 0,893, & 2<x\le 3;\\ 0,982, & 3<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$$



11.3. Непрерывная одномерная случайная величина и ее законы распределения

11.3. Непрерывная одномерная случайная величина и ее законы распределения

Определение 3. Случайная величина $\boldsymbol{\xi(\omega)}$: $\boldsymbol{\Omega \to X}$ называется непрерывной, если существует такая неотрицательная функция $\boldsymbol{f(x)}$ с областью определения $\boldsymbol{R}$, что для любого действительного числа $\boldsymbol{x}$ имеет место равенство:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$$

Функция $\boldsymbol{f(x)}$ или $\boldsymbol{f_\xi(x)}$ называется **плотностью распределения случайной величины** $\boldsymbol{\xi(\omega)}$.

11.3. Непрерывная одномерная случайная величина и ее законы распределения

Первым законом распределения для непрерывной случайной величины по прежнему является **интегральная функция распределения** $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(u)\,du$

График $\boldsymbol{F(x)}$ **не имеет скачков,** его качественный вид представлен на рис. 3.

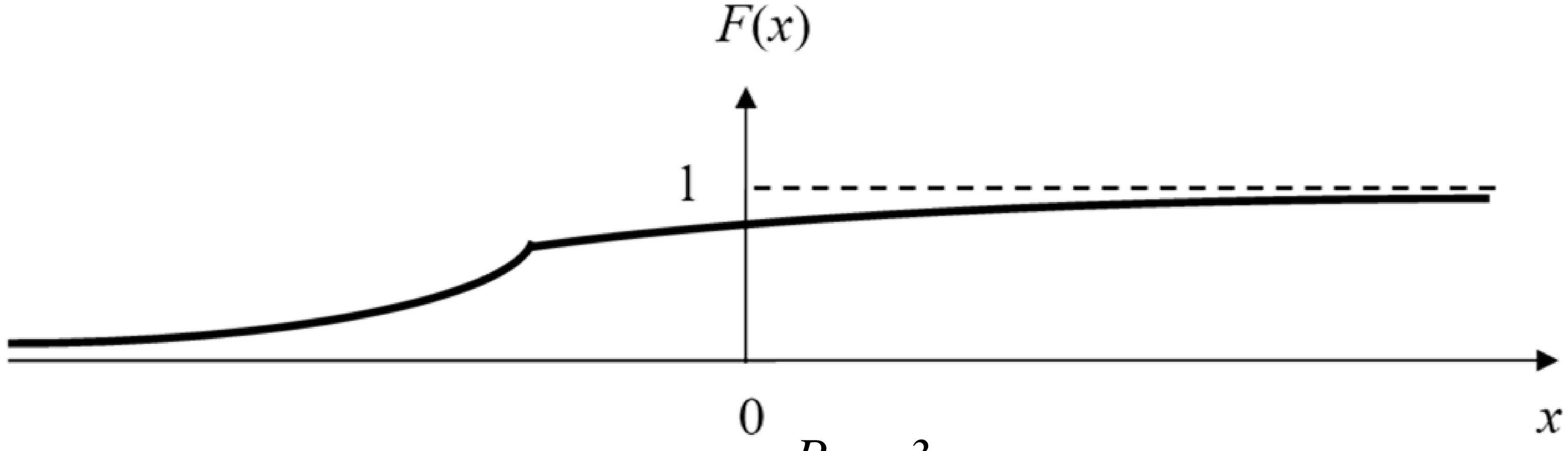


Рис. 3

Так как $\boldsymbol{F(x)}$ является непрерывной функцией, то $\mathbf{P(\{\omega: \xi(\omega) = x\}) = F(x + 0) - F(x) = 0.}$

11.3. Непрерывная одномерная случайная величина и ее законы распределения

Вторым законом распределения непрерывной случайной величины **$\xi(\omega)$** является **плотность распределения $f(x)$.**

На практике $f(x)$ **имеет не более счётного числа точек разрыва на R,** причём на конечном промежутке таких точек может быть лишь конечное число.

Известно, что **интеграл с переменным верхним пределом является абсолютно непрерывной функцией**, и, более того, у нее существует производная почти всюду. Значит можем записать:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Поэтому **плотность распределения** вероятностей для случайной величины $\xi(\omega)$ часто называют **дифференциальной функцией распределения.**

11.3. Непрерывная одномерная случайная величина и ее законы распределения

На рис. 4 приведён пример **графика функции** $f(x)$**,** который еще называется **кривой распределения вероятностей** случайной величины $\xi(\omega)$.

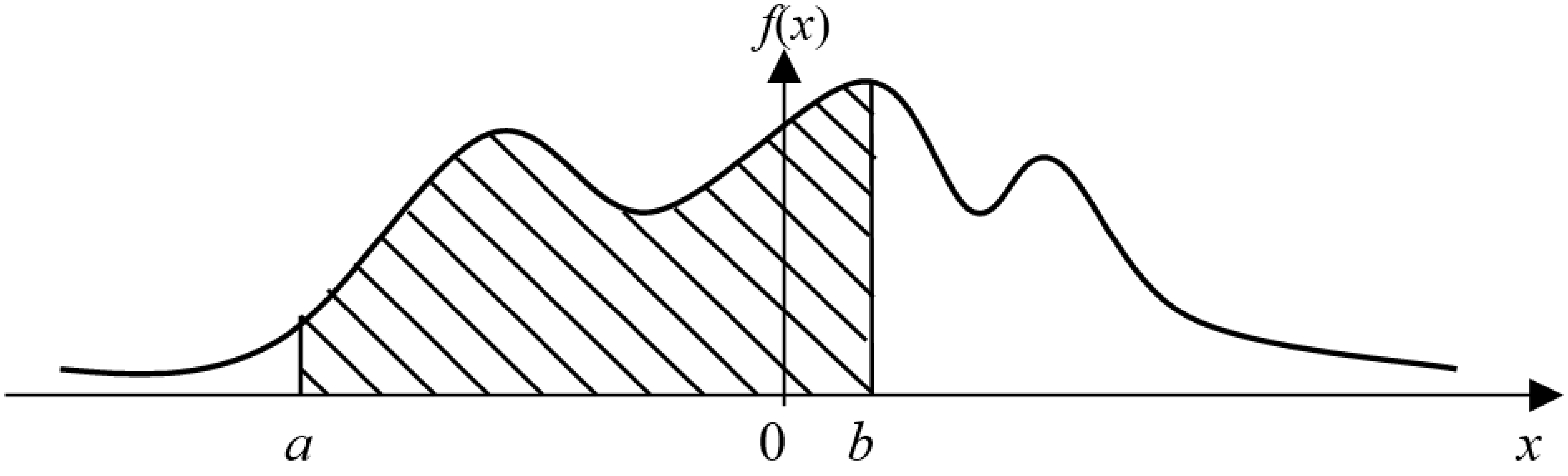


Рис. 4

11.3. Непрерывная одномерная случайная величина и ее законы распределения

Так как для непрерывной случайной величины **ξ(ω)** выполняется **P({ω: ξ(ω) =** ***x*****}) = 0**, то можем записать соотношения:

$$\mathrm{P}(\{\omega: a \le \xi(\omega) < b\}) = \mathrm{P}(\{\omega: a \le \xi(\omega) \le b\}) = \mathrm{P}(\{\omega: a < \xi(\omega) < b\}) =$$

$$= \mathrm{P}(\{\omega: a < \xi(\omega) \le b\}) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(u)\,du\,.$$

Значит, вероятность попадания случайной величины ξ(ω) в каждый из указанных промежутков равна площади заштрихованной криволинейной трапеции на рис. 4.

11.3. Непрерывная одномерная случайная величина и ее законы распределения

Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$, то получаем **известное условие нормировки для плотности распределения $f(x)$:**

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du = 1$$

То есть площадь фигуры между кривой распределения и осью абсцисс всегда **равна единице**.

Заключение

1. На данной лекции мы познакомились с **дискретной** одномерной случайной величиной.

2. Определили три ее закона распределения: интегральная функция, ряд распределения и многоугольник распределения. Проиллюстрировали новые понятия на числовом примере.

3. Дали определение **непрерывной** одномерной случайной величине.

4. Узнали законы распределения непрерывной одномерной случайной величины: интегральную функцию и плотность.