دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

پروژه کنترل غیرخطی

استاد: آقای دکتر ازگلی

استادیار: آقای مهندس طیبی

چارچوب کلی برای کنترل مود لغزشی مرتبه بالاتر با تغییر وضعیت و بهره متغیر

دانشجو: مهسا کلام جوقان (۴۰۳۶۱۶۶۱۰۰۵)

زمستان ۱۴۰۳

فهرست مطالب

چکیده

کنترل مود لغزشی یک روش پرکاربرد در حوزه‌های مختلف کاربردی است که به دلیل تطبیق‌پذیری و سادگی پیاده‌سازی مورد توجه قرار گرفته است. یکی از جدی‌ترین معایب این روش، وجود **پدیده وز وز** است. برای کاهش این مشکل، روش‌های کنترل مود لغزشی مرتبه بالاتر پیشنهاد شده‌اند که امکان کنترل سیستم‌هایی با درجه نسبی بالا را نیز فراهم می‌کنند. برای افزایش انعطاف‌پذیری در طراحی کنترل‌کننده و بهبود عملکرد، رویکردهای **تغییر وضعیت** و **بهره متغیر** برای کنترل‌کننده‌های مود لغزشی مرتبه اول و دوم در حال توسعه هستند.

این یادداشت فنی یک چارچوب مفهومی را برای ادغام این دو جنبه معرفی می‌کند و یک روش کلی برای طراحی و تنظیم کنترل‌کننده‌های مود لغزشی مرتبه بالا ارائه می‌دهد. مزیت اصلی این روش در کلیت آن نهفته است، به طوری که یک کنترل‌کننده مود لغزشی با مرتبه عمومی r را در بر می‌گیرد و شامل تغییرات پیوسته و گسسته پارامترهای کنترل‌کننده می‌شود که دومی منجر به استراتژی‌های تغییر وضعیت می‌شود.

مقدمه

رویکردهای کنترل ساختار متغیر، به‌ویژه کنترل مود لغزشی(SM) ، به عنوان روش‌های موفقی برای کنترل طیف وسیعی از سیستم‌های غیرخطی تحت تأثیر **عدم قطعیت‌ها** شناخته می‌شوند. این عدم قطعیت‌ها معمولاً در ساختار خود ناشناخته هستند، اما کران‌های مشخصی دارند. توانایی این روش‌ها در ارائه راه‌حل‌های کارآمد در بسیاری از کاربردهای عملی، همراه با سادگی پیاده‌سازی حتی در سیستم‌هایی با توان محاسباتی محدود، باعث شده است که این روش‌ها در جامعه کنترل گسترش یابند.

البته، این رویکردها دارای برخی محدودیت‌ها نیز هستند که منجر به توسعه شاخه‌های مختلف تحقیقاتی برای کاهش این مشکلات شده است. مهم‌ترین این مشکلات **پدیده وز وز** است که منجر به توسعه روش‌های مود لغزشی مرتبه بالاتر (HOSM) شده و الگوریتم‌های متعددی در این حوزه پیشنهاد شده‌اند. از جمله این روش‌ها، الگوریتمی است که به عنوان راه‌حل مسئله فولر (Fuller’s Problem) معرفی شده است. در این تحقیق، الگوریتم‌های مختلف HOSM بررسی شده‌اند که همگی زمان بهینه‌ای را برای رسیدن به **خمینه لغزشی** تضمین می‌کنند.

چالش دیگر در کنترل مود لغزشی، **میزان بالای فرمان کنترلی** است که معمولاً از این روش ناشی می‌شود. این امر عمدتاً به این دلیل است که طراحی کنترل‌کننده معمولاً نه بر اساس سطح واقعی عدم قطعیت، بلکه بر اساس یک تخمین (که ممکن است نسبتاً محافظه‌کارانه باشد) از کران بالای آن انجام می‌شود. تنظیم ثابت پارامترهای

کنترل‌کننده بر اساس چنین تخمینی معمولاً منجر به اعمال نیروی کنترلی بیش از حد، به‌ویژه در نزدیکی خمینه لغزشی، می‌شود. برای رفع این مشکل، رویکردهای مختلفی پیشنهاد شده‌اند.

علاوه بر این، در بسیاری از کاربردها، سیستم ممکن است با **سطوح مختلفی** از **عدم قطعیت** و/یا **اهداف کنترلی** متفاوتی مواجه باشد که بسته به ناحیه‌ای از فضای حالت که سیستم در آن قرار دارد، تغییر می‌کنند. در چنین شرایطی، استفاده از فرمول‌بندی‌های سوئیچ‌شونده (Switched) روشی مؤثر برای بهبود عملکرد بوده است. در ادبیات کنترل مود لغزشی، رویکردهای مختلفی برای به‌کارگیری بهره‌های کنترلی متغیر با زمان ارائه شده‌اند که برای شرایط و محدودیت‌های خاص طراحی شده‌اند.

یکی از گزینه‌ها استفاده از قوانین کنترلی تطبیقی مود لغزشی است. این روش‌ها معمولاً بر اساس روش تطبیق σ یا تطبیق دینامیکی طراحی شده‌اند. رویکرد دیگری که ارائه شده، یک الگوریتم کنترل مود لغزشی مرتبه دوم (SOSM) را معرفی می‌کند که برای مقابله با عدم قطعیت‌های وابسته به وضعیت و تضمین همگرایی سراسری، دامنه بهره کنترلی را در هر بازه زمانی بین دو نقطه اکسترمم متوالی تغییر می‌دهد و در نتیجه، یک قانون کنترلی مبتنی بر سوئیچینگ ایجاد می‌کند.

چارچوب کلی

- سیستم‌های غیرخطی نامعین **SISO** **پیوسته زمان** با ساختار خروجی مشخص؛

$$\dot{x}(t) = a(x,t) + b(x,t)u(t)$$

$$y(t) = f(x(t))$$

- **درجه نسبی سیستم** r در نظر گرفته می‌شود؛

$$y^{(r)}(t) = h(x,t) + g(x,t)u(t)$$

- توابع h و g **نامعین**، اما **کراندار** می‌باشند؛

$$|h(x,t)| \leq C(x,t)$$

$$g(x,t) \in [K_m(x,t), K_M(x,t)] \subseteq [\bar{K}_m, \bar{K}_M]$$

- هدف قانون کنترلی مود لغزشی مرتبه بالاتر رسیدن به خمینه مشخص‌شده در **زمان محدود**؛

$$y^{(0)}(t) = y^{(1)}(t) = \ldots = y^{(r-1)}(t) = 0$$

$$\sigma_{i+1}(t) \triangleq y^{(i)}(t) \rightarrow \begin{cases} \dot{\sigma}_1(t) & = \sigma_2(t) \\ & \vdots \\ \dot{\sigma}_{r-1}(t) & = \sigma_r(t) \\ \dot{\sigma}_r(t) & = h(x,t) + g(x,t)u(t) \end{cases}$$

- دینامیک داخلی سیستم پدیده **زمان فرار محدود** را نشان نمی‌دهد؛

$$\begin{gathered} \dot{\zeta}(t) = \psi(\sigma(t), \zeta(t)) \\ \lim_{t \to t_e} \|\zeta(t)\| = \infty \\ t_0 < t_e < \infty \end{gathered}$$

- **قانون کنترلی** به عنوان یک **تابع ناپیوسته** از **متغیرهای سامانه** تعریف می‌شود؛

$$\sigma \triangleq \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \ldots & \sigma_r \end{bmatrix}'$$

- شرط روی **کران‌ها**؛

$$\begin{gathered} K_m(x,t)U(x,t) - C(x,t) \geq \epsilon, \\ U(x,t) \leq \bar{U}, \\ \bar{U} \in \mathbb{R}_{>0} \ \epsilon \in \mathbb{R}_{>0} \end{gathered}$$

- قانون کنترلی کلی؛

$$u(t) = -U(x,t) \cdot \operatorname{sgn}(s(\sigma))$$

- بررسی **سطوح لغزش** متناسب با **درجه نسبی**؛

$$\begin{aligned} &\sigma \in \mathbb{R}^1 \Rightarrow s(\sigma) = \ \sigma_1 \\ &\sigma \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow s(\sigma) = \ \sigma_1 + \tfrac{\sigma_2|\sigma_2|}{2\epsilon} \\ &\sigma \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow s(\sigma) = \ \sigma_1 + \tfrac{\sigma_3^3}{3\epsilon^2} + \operatorname{sgn}\left(\sigma_2 + \tfrac{\sigma_3^2 \operatorname{sgn}(\sigma_3)}{2\epsilon}\right) \\ &\times \left[\tfrac{1}{\sqrt{\epsilon}}\left(\operatorname{sgn}\left(\sigma_2 + \tfrac{\sigma_3^2 \operatorname{sgn}(\sigma_3)}{2\epsilon}\right)\sigma_2 + \tfrac{\sigma_3^2}{2\epsilon}\right)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{\sigma_2\sigma_3}{\epsilon}\right]. \end{aligned}$$

- در صورت اضافه شدن **تابع مشخص** دیگر، معادلات صادق هستند.

$$\dot{\sigma}_r(t) = \bar{h}(x,t) + h(x,t) + g(x,t)u(t)$$

مثال عددی

سامانه زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + e^{2x_2}(u+d)\\ \dot{x}_2 &= 2x_1x_2 + \sin x_2 + \frac{1}{2}(u+d)\\ \dot{x}_3 &= x_2\end{aligned}$$

در این سامانه، u سیگنال کنترلی و d اغتشاش است.

آن را به صورت فضای حالت بازنویسی می‌کنیم.

$$a(x,t) = \begin{bmatrix} -x_1 + e^{2x_2}d \\ 2x_1x_2 + \sin(x_2) + \frac{1}{2}d \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad b(x,t) = \begin{bmatrix} e^{2x_2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

درجه نسبی آن را با استفاده از مشتق‌های پی در پی (خطی‌سازی ورودی-خروجی) تا ظاهر شدن سیگنال کنترلی محاسبه می‌کنیم.

$$y = \sigma_1 = x_3, \;\color{red}{\rightarrow}\; \begin{aligned}\dot{\sigma}_1 =& \sigma_2 = 2x_2\\ \dot{\sigma}_2 =& \bar{h} + h + gu = 2(2x_1x_2 + \sin(x_2)) + d + u\end{aligned}$$

درجه نسبی سامانه ما ۲ است.

سطح لغزش را نیز به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\mathcal{S} = \{(\sigma_1, \sigma_2) \;:\; |\sigma_1| \leq 1, \;|\sigma_2| \leq 1\}$$

بردار ϕ را تشکیل می‌دهیم. (البته در درس از آن به عنوان بردار z یاد شده است)

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} x_3 \\ 2x_2 \\ 1 + x_1 - e^{2x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \zeta \end{pmatrix}$$

کنترل مود لغزشی مرتبه بالاتر با بهره متغیر

با در نظر گرفتن شرایط زیر، کنترل مود لغزشی مرتبه بالا با بهره متغیر را پیاده سازی می‌کنیم.

$$d = \nu(1+\sin(t)+|x_3+4x_2^2|) \quad \nu \subseteq [-1,\ 1]$$

$$|h(x,t)| \leq 1+\sin(t)+|x_3+4x_2^2| = C(x,t) \leq \bar{C} = 4,$$

$$g(x,t) = 1 = K_m$$

$$U(x,t) = 1+\sin(t)+|x_3+4x_2^2|+1$$

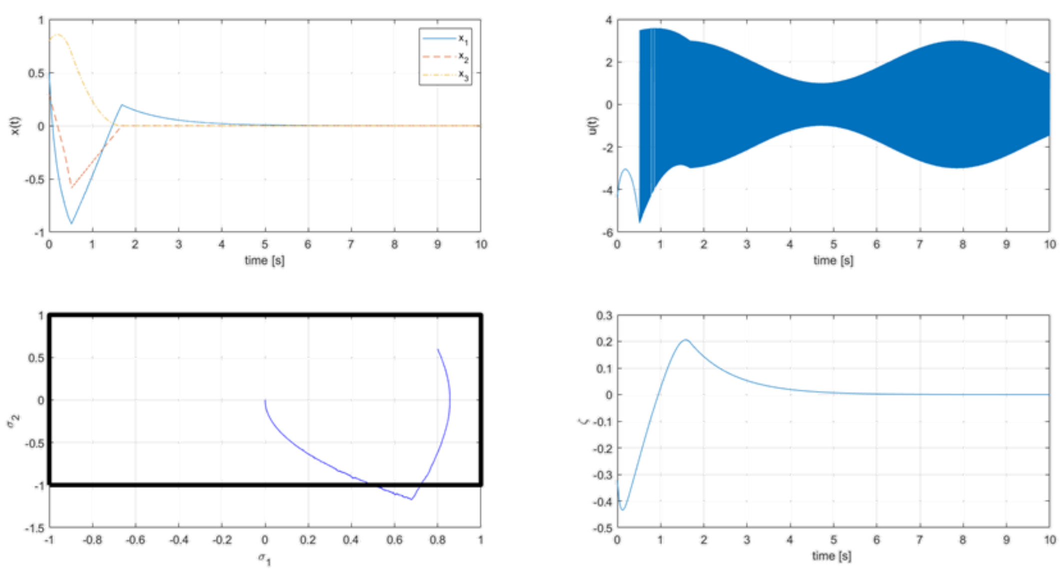
$$u = -2(2x_1x_2+\sin(x_2)) - U(x,t)\,\mathrm{sgn}\left(\sigma_1 + \frac{\sigma_2|\sigma_2|}{2\epsilon}\right)$$

پیاده‌سازی **متلب** آن به شرح زیر است.

```
function dx = vgsmc(t, x)
    s1 = x(3);
    s2 = 2 * x(2);
    e = 1;
    U = 2 + sin(t) + abs(x(3) + 4 * x(2)^2);
    u = -2 * (2 * x(1) * x(2) + sin(x(2))) - U * sign(s1 + s2 * abs(s2) / (2 * e));
    v = rand(1) - rand(1);
    % dlmwrite('h.txt', d, '-append');
    d = v * (1 + sin(t) + abs(x(3) + 4 * x(2)^2));
    a = [-x(1) + exp(2 * x(2)) * d;
          2 * x(1) * x(2) + sin(x(2)) + 0.5 * d;
          2 * x(2)];
    b = [exp(2 * x(2)); 0.5; 0];
    dx = a + b * u;


clc; clear all;

opts = odeset('RelTol', 1e-3);

[t, x] = ode45(@vgsmc, [0, 10], [0.5 0.3 0.8], opts);

s1 = x(:, 3);
s2 = 2 * x(:, 2);

e = 1;
U = 2 + sin(t) + abs(x(:, 3) + 4 * x(:, 2).^2);
u = -2 * (2 * x(:, 1) .* x(:, 2) + sin(x(:, 2))) - U .* sign(s1 + s2 .* abs(s2) / (2
* e));

% h = dlmread('h.txt')

h = t;
for i = 1:length(t)
    v = rand(1) - rand(1);
    h(i) = v * (1 + sin(t(i)) + abs(x(i, 3) + 4 * x(i, 2)^2));
```

```
end

figure(1)
subplot(221)
plot(t, x(:,1), '-', t, x(:,2), '--', t, x(:,3), '-.')
legend('x_1', 'x_2', 'x_3')
xlabel('time [s]'); ylabel('x(t)');
grid on

subplot(222)
plot(t, u)
xlabel('time [s]'); ylabel('u(t)');
grid on

subplot(223)
plot(s1, s2, 'b')
hold on

X = [-1 -1 1 1 -1];
Y = [-1 1 1 -1 -1];
plot(X, Y, 'k', 'LineWidth', 4)
xlabel('\sigma_1'); ylabel('\sigma_2');
grid on

subplot (224)
plot (t, 1+x(:,1)-exp (2*x(:,2)))
xlabel ('time [s] ' ) ;ylabel ('\zeta');
grid on

figure(2)
plot(t, h, 'k')
xlabel ('time [s] ' ) ;ylabel ('h(x,t)');
grid on
```

خروجی شبیه‌سازی نیز به شرح زیر است.



شکل ۱: خروجی کنترل مود لغزشی مرتبه بالاتر با بهره متغیر

کنترل مود لغزشی مرتبه بالاتر با تغییر وضعیت

با در نظر گرفتن شرایط زیر، کنترل مود لغزشی مرتبه بالا با تغییر وضعیت را پیاده سازی می‌کنیم.

$$\mathcal{S}_1 \triangleq \{(\sigma_1, \sigma_2)\ : 0.3 \le \sigma' M \sigma \le 0.7\}$$
$$\mathcal{S}_2 \triangleq \{(\sigma_1, \sigma_2)\ : \sigma' M \sigma \le 0.3\}\ ,$$

$$M = \mathrm{diag}\{1,\ 2\}$$

$$|h(x,t)| \le \begin{cases} 1 & \text{if } \sigma \in \mathcal{S}_2 \\ 2 & \text{if } \sigma \in \mathcal{S}_1 \\ 4 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\delta = 1$$

$$U(x,t) = \begin{cases} 2 & \text{if } \sigma \in \mathcal{S}_2 \\ 3 & \text{if } \sigma \in \mathcal{S}_1 \\ 5 & \text{otherwise} \end{cases}$$

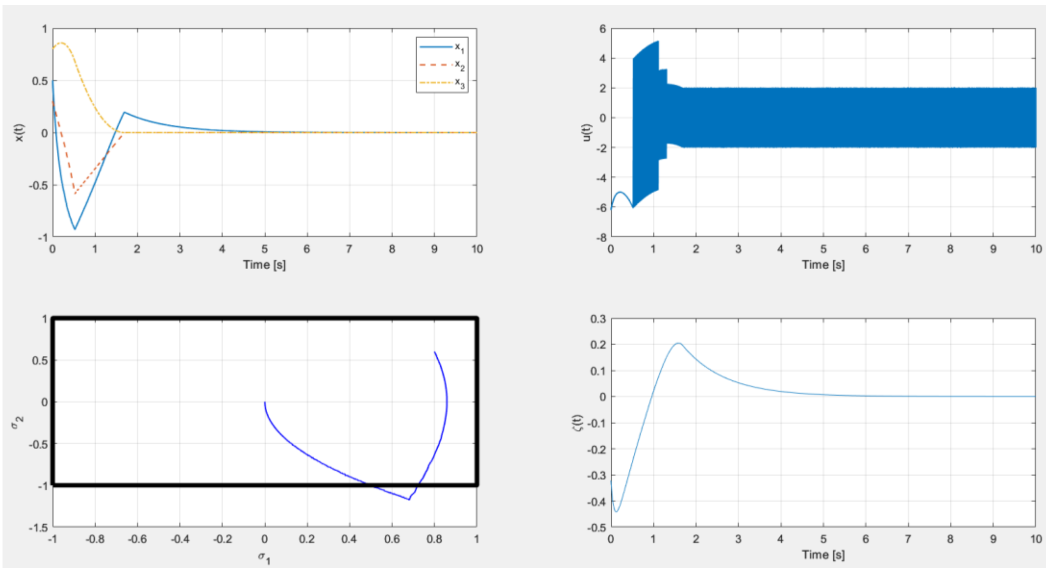
پیاده‌سازی **متلب** آن به شرح زیر است.

```
function dx = swsmc(t, x)
    s1 = x(3);
    s2 = 2 * x(2);
    e = 1;
    M = diag([1, 2]);

    sigma = [s1; s2];
    c = sigma' * M * sigma;

    if c <= 0.3
        U = 2;
    elseif c <= 0.7
        U = 3;
    else
        U = 5;
    end

    u = -2 * (2 * x(1) * x(2) + sin(x(2))) - U * sign(s1 + s2 * abs(s2) / (2 * e));
    v = rand(1) - rand(1);
    d = v * (1 + sin(t) + abs(x(3) + 4 * x(2)^2));
    a = [-x(1) + exp(2 * x(2)) * d;
         2 * x(1) * x(2) + sin(x(2)) + 0.5 * d;
         2 * x(2)];
    b = [exp(2 * x(2)); 0.5; 0];
    dx = a + b * u;



clc; clear; close all;
```

```
opts = odeset('RelTol', 1e-3);

[t, x] = ode45(@vgsmc, [0, 10], [0.5, 0.3, 0.8], opts);

s1 = x(:, 3);
s2 = 2 * x(:, 2);
e = 1;
M = diag([1, 2]);

c = s1.^2 + 2 * s2.^2;

U = zeros(size(t));
h = zeros(size(t));

for i = 1:length(t)
    if c(i) <= 0.3
        U(i) = 2;
    elseif c(i) <= 0.7
        U(i) = 3;
    else
        U(i) = 5;
    end

    v = rand(1) - rand(1);
    h(i) = v * (1 + sin(t(i)) + abs(x(i, 3) + 4 * x(i, 2)^2));
end

u = -2 * (2 * x(:, 1) .* x(:, 2) + sin(x(:, 2))) - U .* sign(s1 + s2 .* abs(s2) / (2
* e));

figure(1)
subplot(221)
plot(t, x(:, 1), '-', 'LineWidth', 1.2); hold on;
plot(t, x(:, 2), '--', 'LineWidth', 1.2);
plot(t, x(:, 3), '-.', 'LineWidth', 1.2);
xlabel('Time [s]'); ylabel('x(t)');
legend('x_1', 'x_2', 'x_3');
grid on;

subplot(222)
plot(t, u, 'LineWidth', 1.2);
xlabel('Time [s]'); ylabel('u(t)');
grid on;

subplot(223)
plot(s1, s2, 'b', 'LineWidth', 1.2);
hold on;

X = [-1 -1 1 1 -1]; Y = [-1 1 1 -1 -1];
plot(X, Y, 'k', 'LineWidth', 4);
xlabel('\sigma_1'); ylabel('\sigma_2');
grid on;

subplot(224)
```

```
plot (t, 1+x(:,1)-exp (2*x(:,2)))
xlabel('Time [s]'); ylabel('\zeta(t)');
grid on;

% figure(2)
% plot(t, h, 'k', 'LineWidth', 1.2);
% xlabel('Time [s]'); ylabel('h(x,t)'); grid on;
```

خروجی شبیه‌سازی نیز به شرح زیر است.



شکل ۲: خروجی کنترل مود لغزشی مرتبه بالاتر با تغییر وضعیت

کنترل مود لغزشی مرتبه بالاتر با بهره ثابت

در این حالت با در نظر گرفتن شرط زیر شبیه‌سازی را انجام می‌دهیم.

$$\bar{U} = 5$$

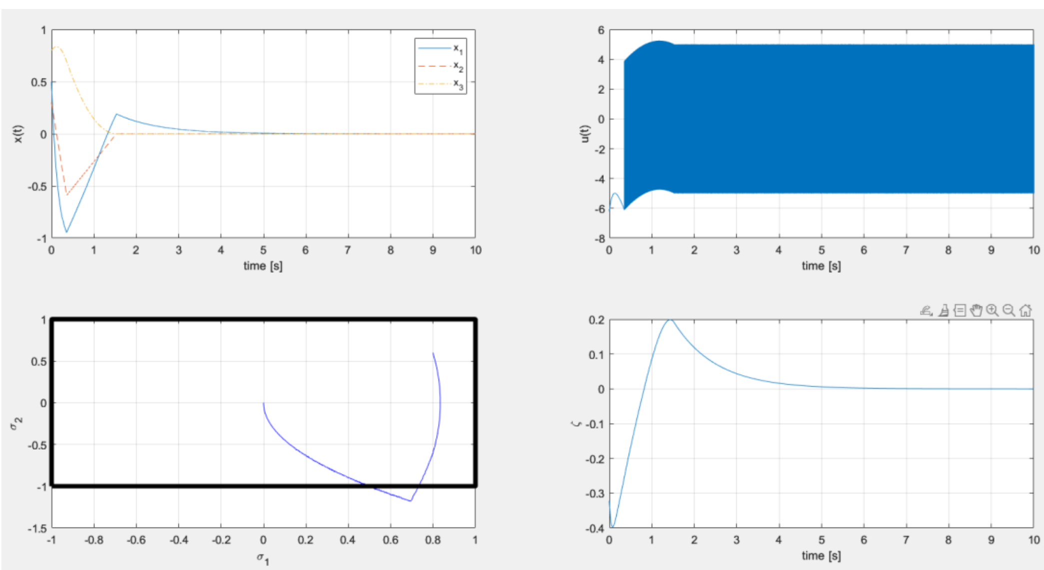
پیاده‌سازی **متلب** آن به شرح زیر است.

```
function dx = hosmc(t, x)
    s1 = x(3);
    s2 = 2 * x(2);
    e = 1;
    U = 5;
    u = -2 * (2 * x(1) * x(2) + sin(x(2))) - U * sign(s1 + s2 * abs(s2) / (2 * e));
    v = rand(1) - rand(1);
    d = v * (1 + sin(t) + abs(x(3) + 4 * x(2)^2));

    a = [-x(1) + exp(2 * x(2)) * d;
          2 * x(1) * x(2) + sin(x(2)) + 0.5 * d;
          2 * x(2)];
    b = [exp(2 * x(2)); 0.5; 0];
    dx = a + b * u;
```

```
clc; clear all;

opts = odeset('RelTol', 1e-3);

[t, x] = ode45(@hosmc, [0, 10], [0.5 0.3 0.8], opts);

s1 = x(:, 3);
s2 = 2 * x(:, 2);

e = 1;
U = 5;
u = -2 * (2 * x(:, 1) .* x(:, 2) + sin(x(:, 2))) - U .* sign(s1 + s2 .* abs(s2) / (2
* e));

h = t;
for i = 1:length(t)
    v = rand(1) - rand(1);
    h(i) = v * (1 + sin(t(i)) + abs(x(i, 3) + 4 * x(i, 2)^2));
end

figure(1)
subplot(221)
plot(t, x(:,1), '-', t, x(:,2), '--', t, x(:,3), '-.')
legend('x_1', 'x_2', 'x_3')
xlabel('time [s]'); ylabel('x(t)');
grid on
```

```
subplot(222)
plot(t, u)
xlabel('time [s]'); ylabel('u(t)');
grid on

subplot(223)
plot(s1, s2, 'b')
hold on

X = [-1 -1 1 1 -1];
Y = [-1 1 1 -1 -1];
plot(X, Y, 'k', 'LineWidth', 4)
xlabel('\sigma_1'); ylabel('\sigma_2');
grid on

subplot(224)
plot(t, 1 + x(:,1) - exp(2 * x(:,2)))
xlabel('time [s]'); ylabel('\zeta');
grid on

% figure(2)
% plot(t, h, 'k')
% xlabel('time [s]'); ylabel('h(x,t)');
% grid on
```

خروجی شبیه‌سازی نیز به شرح زیر است.



شکل۳ : خروجی کنترل مود لغزشی مرتبه بالاتر با بهره ثابت

نتیجه‌گیری

مثال‌های شبیه‌سازی ارائه‌شده، توانایی این روش را در کاهش هم‌زمان وز وز، کاهش قدرت کنترلی، و بهبود سطح عملکرد تأیید می‌کنند.

منابع

[۱] G. P. Incremona, M. Rubagotti, M. Tanelli and A. Ferrara, "A General Framework for Switched and Variable Gain Higher Order Sliding Mode Control," in IEEE Transactions on Automatic Control, vol. ٦٦, no. ٤, pp. ١٧١٨-١٧٢٤, April ٢٠٢١, doi: ١٠,١١٠٩/TAC.٢٠٢٠,٢٩٩٦٤٢٣.