

Gregoryjeve krpe

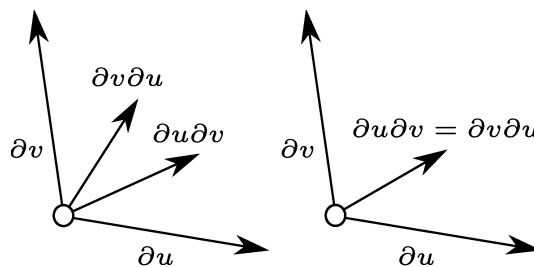
seminarska naloga

Klara Kresnik in Meta Trdin
2. letnik
Fakulteta za matematiko in fiziko

1 Uvod

Za začetek najprej predstavimo problem. Krpe oziroma ploskve v prostoru želimo zlepiti tako, da bo vzdolž skupnega roba dosežena geometrijska zveznost reda 1. To bomo lahko dosegli lokalno. Zaradi lokalne G^1 zveznosti se Gregoryjeve krpe uporablja pri geometrijskem modeliranju in v računalniški grafiki. S predavanj vemo, da nam G^1 zveznost zagotavlja zveznost enotskih tangent, kar v našem primeru pomeni, da se morata tangentni ravnini ene in druge krpe ujemati.

Ko združujemo dve krpi, naletimo na problem. Reče se mu twist compatibility problem ali tudi vertex inconsistency problem in sicer ni nujno, da bodo mešani odvodi enaki. Kot vemo se pri polinomski konstrukciji mešani odvodi ujemajo, v primeru Gregoryjevih krp pa niti ni treba, da se (glej sliko 1). To je tudi ena izmed prednosti. Pokaže se pri računanju notranjih kontrolnih točk, kjer bo posamezna točka postala racionalna funkcija, zato bo ploskev sama po sebi racionalna.



Slika 1: Levo: mešani odvodi v primeru Gregoryjeve krpe; Desno: mešani odvodi pri polinomski konstrukciji

Podane bomo imeli robne krivulje, ki bodo kar bezierjeve krivulje stopnje 3. Računali bomo notranje kontrolne točke. Pri tem bomo potrebovali tudi podatke s tangentne ravnine na robu, da bomo lahko zagotovili G^1 zveznost. To nas pripelje do metode Chiyokura in Kimura.

2 metoda Chiyokura in Kimura

- metoda združi dve Bezierjevi krpi tako, da zagotavlja geometrijsko zvreda 1
- upošteva le robne krivulje in

3 Gregorijeve krpe

- Z gregoryjevimi krpami posplošimo gregorijeve ideje za tenzorski produkt bezierjevih krp (mogoče se tuki kej dodaš)
- skonstruirati želimo ploskev, ki bo imela geometrijsko zv reda 1 ko jo bomo zlepili še z drugimi ploskvami
- podane imamo le robne krivulje
- povej tudi da jih lahko delamo nad večkotniki ampak da sva se medve ukvarjali le s trikotnimi in 4kotnimi.

Poglejmo si konstrukciji štirikotne in trikotne Gregoryjeve krpe.

3.1 Kvadratne Gregoryjeve krpe

- Domena $u, v \in [0, 1] \times [0, 1]$
- Imamo štiri kubične bezierjeve krivulje, vsaka predstavlja rob gregorijeve krpe.
- na vsakem robu nato uporabimo metodo Chiyokura in Kimura: na vsakem robu dobimo 2 točki, torej skupaj 8. tako zagotovimo G1 zveznost.
- tukaj nastopi twist compatibility problem-točke se ne ujemajo
- zato bomo uporabili racionalne funkcije (pomagali si bomo z racionalnimi funkcijami)
- za vsako vozlišče ena funkcija torej 4 funkcije
- formule
- te funkcije so definirane tako zato, da dobimo če vstavimo $\mathbf{b}_{11}(0, v) = \mathbf{b}_{11, u_0}$ itd

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_{11}(u, v) &= \frac{v\mathbf{b}_{11, u_0} + u\mathbf{b}_{11, v_0}}{u + v} \\ \mathbf{b}_{21}(u, v) &= \frac{(1 - v)\mathbf{b}_{21, u_0} + u\mathbf{b}_{21, v_1}}{(1 - v) + u} \\ \mathbf{b}_{12}(u, v) &= \frac{v\mathbf{b}_{12, u_1} + (1 - u)\mathbf{b}_{12, v_0}}{v + (1 - u)} \\ \mathbf{b}_{22}(u, v) &= \frac{(1 - v)\mathbf{b}_{22, u_1} + (1 - u)\mathbf{b}_{22, v_1}}{(1 - u) + (1 - v)}\end{aligned}$$

3.2 Trikotne Gregoryjeve krpe

- trikotna domena
- tokrat imamo 3 kubične bezierjeve krivulje na robu
- spet uporabimo metodo in dobimo 6 točk (3 pare točk)
- na posameznem paru uporabim racionalno funkcijo da dobimo 3 notranje točke kvadratične bezierjeve krpe. kubična bezierjeva krpa ima le eno kontrolno točko ki ni robna, kvadratna pa ima 3 kar nam v tem primeru bolj ustreza. Zato moramo še robnim krivuljam zvišati stopnjo.

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{211} &= \frac{(1-w)v\mathbf{b}_{211,uv} + (1-v)w\mathbf{b}_{211,v_1}}{(1-w)v + (1-v)w} \\ \mathbf{b}_{121} &= \frac{(1-w)u\mathbf{b}_{121,uv} + (1-u)v\mathbf{b}_{121,vw}}{(1-w)u + (1-u)w} \\ \mathbf{b}_{112} &= \frac{(1-u)v\mathbf{b}_{112,vw} + (1-v)u\mathbf{b}_{112,uw}}{(1-u)v + (1-v)u} \end{aligned}$$

4 Zaključek

Literatura

- [1] R. Akhtar, T. Jackson-Henderson, R. Karpman, M. Boggess, I. Jimenez, A. Kinzel, D. Pritikin, *On the unitary Cayley graph of a finite ring*, Electron. J. Combin. **16** (2009), no. 1, Research Paper 117, 13 pp.
- [2] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald. *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley-Longman, 1969
- [3] K. Schäcke, *On the Kronecker product*, 2013
- [4] M. E. Watkins, *Connectivity of transitive graphs*, J. Combin. Theory **8** (1970), 23-29.
- [5] D. B. West. *Graph Theory*, Second Edition. Prentice-Hall, (2000).