Gregoryjeve krpe

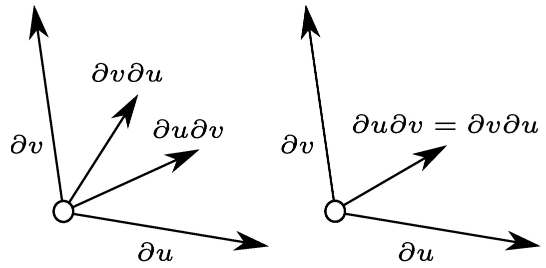
seminarska naloga

Klara Kresnik in Meta Trdin
2. letnik
Fakulteta za matematiko in fiziko

1 Uvod

Za začetek najprej predstavimo problem. Krpe oziroma ploskve v prostoru želimo zlepiti tako, da bo vzdolž skupnega roba dosežena geometrijska zveznost reda 1. To bomo lahko dosegli lokalno. Zaradi lokalne G^1 zveznosti se Gregoryjeve krpe uporablja pri geometrijskem modeliranju in v računalniški grafiki. S predavanj vemo, da nam G^1 zveznost zagotavlja zveznost enotskih tangent, kar v našem primeru pomeni, da se morata tangentni ravnini ene in druge krpe ujemati.

Ko združujemo dve krpi, naletimo na problem. Reče se mu twist compatibility problem ali tudi vertex inconsistency problem in sicer ni nujno, da bodo mešani odvodi enaki. Kot vemo se pri polinomski konstrukciji mešani odvodi ujemajo, v primeru Gregoryjevih krp pa niti ni treba, da se (glej sliko 1). To je tudi ena izmed prednosti. Pokaže se pri računanju notranjih kontrolnih točk, kjer bo posamezna točka postala racionalna funkcija, zato bo ploskev sama po sebi racionalna.



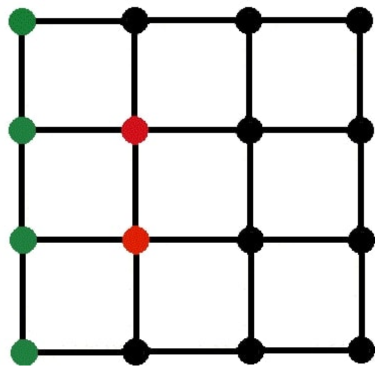
Slika 1: Levo: mešani odvodi v primeru Gregoryjeve krpe; Desno: mešani odvodi pri polinomski konstrukciji

Podane bomo imeli robne krivulje, ki bodo kar bezierjeve krivulje stopnje 3. Računali bomo notranje kontrolne točke. Pri tem bomo potrebovali tudi podatke s tangentne ravnine na robu, da bomo lahko zagotovili G^1 zveznost. To nas pripelje do metode Chiyokura in Kimura.

2 Metoda Chiyokura in Kimura

Metoda združi dve Bézierjevi ploski, tako da imamo na skupnem robu G^1 zveznost. Kot vhodne podatke bomo imeli na voljo samo podatke o skupnem robu in vektorjih iz tangentne ravnine. V izhodu nam metoda poda notranje točke ploskve. Zaradi lokalnosti podatkov bo zlepek zgolj lokalno G^1 zvezen.

Za primer bomo metodo aplicirali na dveh Bézierjevih ploskvah iz tenzorskega produkta stopnje 3, Φ_a in Φ_b. Metoda nam vrne notranji točki na ploskvi Φ_a (slika 2). To ploskev poimenujemo osnovna ploskev in ploskev Φ_b pridružena ploskev. Da dobimo G^1 zveznost na robu, moramo izračunati tudi notranji točki na ploskvi Φ_b. To naredimo tako, da ploskev Φ_b vzamemo za osnonvo ploskev in ploskev Φ_a za pridruženo.



Slika 2: Kontrolne točke Bézierjeve ploskve iz tenzorskega produkta stopnje 3. Zelene točke so kontrolne točke krivulje na skupnem robu. Rdeči točki sta kontrolni točki, ki ju dobimo z izvedbo metode Chiyokura in Kimura.

G^1 zveznost lahko karakteriziramo s tangentnimi vektorji. Definirajmo krivuljo $\Gamma(u)$, ki za parametre $u \in [0,1]$, parametrizira krivuljo na skupnem robu zlekpa. Tangentni vektor te krivulje označimo z $\partial\Gamma(u)$. Tangentni vektor ploskve Φ_a, ki je pravokoten na vektor $\partial\Gamma(u)$ označimo z $\partial\Gamma_a(u)$ in na podoben način definiramo vektor $\partial\Gamma_b(u)$. Zlepek bo G^1 zvezen natanko takrat, ko bodo vektorji $\partial\Gamma(u)$, $\partial\Gamma_a(u)$ in $\partial\Gamma_b(u)$ koplanarni, oziroma, ko velja

$$\det(\partial\Gamma(u), \partial\Gamma_a(u), \partial\Gamma_b(u)) = 0, \; u \in [0,1] \tag{1}$$

Na sliki 3 so z modro obarvani vhodni podatki. Točke obarvane z zeleno in rdečo se ujemajo z obarvanimi točkami na sliki 2, torej je naš cilj izračunati vektorja $\mathbf{a}_1$ in $\mathbf{a}_2$. Namesto kontrolnih točk imamo podane vektorje. Vektorji $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1$ in $\mathbf{c}_2$ definirajo kontrolne točke za krivuljo na skupnem robu. Vektorja $\mathbf{a}_0$ in $\mathbf{a}_3$ sta tangenta na ploskev Φ_a in podobno sta vektorja $\mathbf{b}_0$ in $\mathbf{b}_3$ tangenta na ploskev Φ_b. Poleg tega morata slednja biti enotska, vsak posebej pravokoten na $\mathbf{c}_0$ in $\mathbf{c}_2$ in ležati v ravnini katere normala je določena v ogljiščih v_i in v_{i+1}.

Da bomo lahko izračunali vektorja $\mathbf{a}_1$ in $\mathbf{a}_2$ zapišimo enačbo, ekvivalentno enačbi 1, s pomočjo skalarnih funkcij $k(u)$ in $h(u)$:

$$\partial\Gamma_a(u) = k(u)\partial\Gamma_b(u) + h(u)\partial\Gamma(u) \tag{2}$$

Da rešimo enačbo 2, izrazimo a_0 in a_3

$$\mathbf{a}_0 = k_0\mathbf{b}_0 + h_0\mathbf{c}_0 \qquad \mathbf{a}_3 = k_1\mathbf{b}_3 + h_1\mathbf{c}_2$$

, kjer so $k_0, k_1, h_0, h_1 \in \mathbb{R}$. Sledi, da sta iskani fuknciji

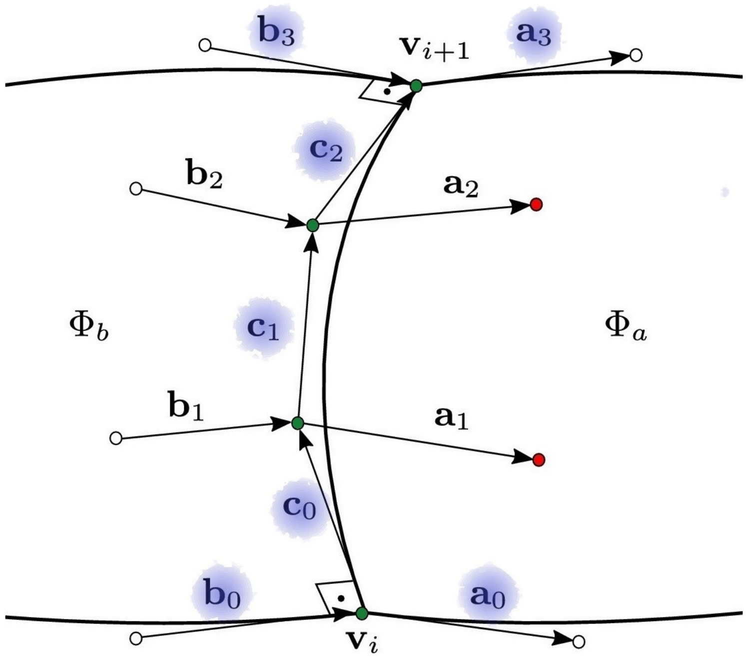
$$k(u) = (1-u)k_0 + uk_1 \qquad h(u) = (1-u)h_0 + uh_1$$

Vektorja $\mathbf{b}_1$ in $\mathbf{b}_2$ določimo z linearno interpolacijo vektorjev $\mathbf{b}_0$ in $\mathbf{b}_3$.

$$\mathbf{b}_1 = \frac{2}{3}\mathbf{b}_0 + \frac{1}{3}\mathbf{b}_3 \qquad \mathbf{b}_2 = \frac{1}{3}\mathbf{b}_0 + \frac{2}{3}\mathbf{b}_3$$

Sedaj imamo vse podatke, da lahko zapišemo enačbi za $\mathbf{a}_1$ in $\mathbf{a}_2$.

$$\mathbf{a}_1 = (k_1 - k_0)\frac{\mathbf{b}_0}{3} + k_0\mathbf{b}_1 + 2h_0\frac{\mathbf{c}_1}{3} + h_1\frac{\mathbf{c}_0}{3}$$
$$\mathbf{a}_2 = k_1\mathbf{b}_2 - (k_1 - k_0)\frac{\mathbf{b}_3}{3} + h_0\frac{\mathbf{c}_2}{3} + 2h_1\frac{\mathbf{c}_1}{3}$$



Slika 3: Prikaz podatkov pri metodi Chiyokura in Kimura.

3 Gregoryjeve krpe

- Z gregoryjevimi krpami posplošimo gregoryjeve ideje za tenzorski produkt bezierjevih krp(mogoče se tuki kej dodaš)
- skonstruirati želimo ploskev, ki bo imela geometrjsko zv reda 1 ko jo bomo zlepili še z drugimi ploskvami
- podane imamo le robne krivulje
- povej tudi da jih lahko delamo nad večkotniki ampak da sva se medve ukvarjali le s trikotnimi in 4kotnimi.

Poglejmo si kontrukciji štirikotne in trikotne Gregoryjeve krpe.

3.1 Kvadratne Gregoryjeve krpe

- Domena $u, v \in [0,1] \times [0,1]$
- Imamo štiri kubične bezierjeve krivulje, vsaka bredstavlja rob gregorijeve krpe.
- na vsakem robu nato uporabimo metodo Chiyokura in Kimura: na vsakem robu dobimo 2 točki, torej skupaj 8. tako zagotovimo G1 zveznost.
- tukaj nastopi twist compatibility problem-točke se ne ujemajo
- zato bomo uporabili racionalne funkcije (pomagali si bomo z rac funkcijami)
- za vsako vozliošče ena funkcija torej 4 funkcije
- formule
- te funkcije so definirane tako zato, da dobimo če vstavimo $\mathbf{b}_{11}(0, v) = \mathbf{b}_{11,u_0}$ itd

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b}_{11(u,v)} &= \frac{v\mathbf{b}_{11,u_0} + u\mathbf{b}_{11,v_0}}{u+v} \\
\mathbf{b}_{21}(u,v) &= \frac{(1-v)\mathbf{b}_{21,u_0} + u\mathbf{b}_{21,v_1}}{(1-v)+u} \\
\mathbf{b}_{12}(u,v) &= \frac{v\mathbf{b}_{12,u_1} + (1-u)\mathbf{b}_{12,v_0}}{v+(1-u)} \\
\mathbf{b}_{22}(u,v) &= \frac{(1-v)\mathbf{b}_{22,u_1} + (1-u)\mathbf{b}_{22,v_1}}{(1-u)+(1-v)}
\end{aligned}
$$

3.2 Trikotne Gregoryjeve krpe

- trikotna domena
- tokrat imamo 3 kubicne bezierjeve krivulje na robu
- spet uporabimo metodo in dobimo 6 točk (3 pare točk)
- na posameznem paru uporabim racionalno funkcijo da dobimo 3 notranje točke kvadratične bezierjeve krpe. kubična bezierjeva krpa ima le eno kontrolno točko ki ni robna, kvadratna pa ima 3 kar nam v tem primeru bolj ustreza. Zato moramo še robnim krivuljam zvišati stopnjo.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b}_{211} &= \frac{(1-w)v\mathbf{b}_{211,uv} + (1-v)w\mathbf{b}_{211,v_1}}{(1-w)v + (1-v)w} \\
\mathbf{b}_{121} &= \frac{(1-w)u\mathbf{b}_{121,uv} + (1-u)v\mathbf{b}_{121,vw}}{(1-w)u + (1-u)w} \\
\mathbf{b}_{112} &= \frac{(1-u)v\mathbf{b}_{112,vw} + (1-v)u\mathbf{b}_{112,uw}}{(1-u)v + (1-v)u}
\end{aligned}
$$

4 Zaključek

Literatura

[1] R. Akhtar, T. Jackson-Henderson, R. Karpman, M. Boggess, I. Jimenez, A. Kinzel, D. Pritikin, *On the unitary Cayley graph of a finite ring*, Electron. J. Combin. **16** (2009), no. 1, Research Paper 117, 13 pp.

[2] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald. *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley-Longman, 1969

[3] K. Schäcke, *On the Kronecker product*, 2013

[4] M. E. Watkins, *Connectivity of transitive graphs*, J. Combin. Theory **8** (1970), 23-29.

[5] D. B. West. *Graph Theory*, Second Edition. Prentice-Hall, (2000).