

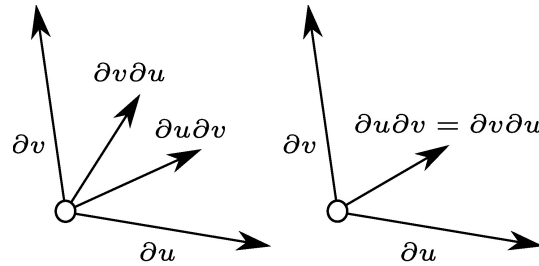
Gregoryjeve krpe
seminarska naloga pri predmetu RPGO

Klara Kresnik in Meta Trdin
Fakulteta za matematiko in fiziko

1 Uvod

Za začetek najprej predstavimo problem. Krpe oziroma ploskve v prostoru želimo zlepit tako, da bo vzdolž skupnega roba dosežena geometrijska zveznost reda 1. To bomo lahko dosegli lokalno. Zaradi lokalne G^1 zveznosti se Gregoryjeve krpe uporablja pri geometrijskem modeliranju in v računalniški grafiki. S predavanj vemo, da nam G^1 zveznost zagotavlja zveznost enotskih tangent, kar v našem primeru pomeni, da se morata tangentni ravnini ene in druge krpe ujemati.

Ko združujemo dve krpi, naletimo na problem. Reče se mu twist compatibility problem ali tudi vertex inconsistency problem in sicer ni nujno, da bodo mešani odvodi enaki. Kot vemo se pri polinomski konstrukciji mešani odvodi ujemajo, v primeru Gregoryjevih krp pa niti ni treba, da se (glej sliko 1). To je tudi ena izmed prednosti. Pokaže se pri računanju notranjih kontrolnih točk, kjer bo posamezna točka postala racionalna funkcija, zato bo ploskev sama po sebi racionalna.



Slika 1: Levo: mešani odvodi v primeru Gregoryjeve krpe; Desno: mešani odvodi pri polinomski konstrukciji

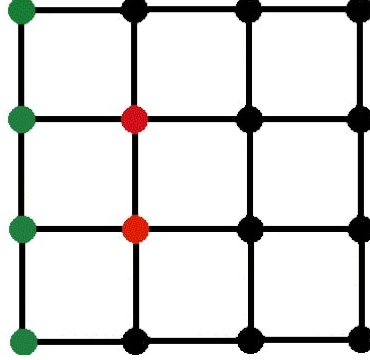
Podane bomo imeli robne krivulje, ki bodo kar bezierjeve krivulje stopnje 3. Računali bomo notranje kontrolne točke. Pri tem bomo potrebovali tudi podatke s tangentne ravnine na robu, da bomo lahko zagotovili G^1 zveznost. To nas pripelje do metode Chiyokura in Kimura.

2 Metoda Chiyokura in Kimura

Metoda združi dve Bézierjevi ploski, tako da imamo na skupnem robu G^1 zveznost. Kot vhodne podatke bomo imeli na voljo samo podatke o skupnem robu in vektorjih iz tangentne ravnine. V izhodu nam metoda poda notranje točke ploskve. Zaradi lokalnosti podatkov bo zlepek zgolj lokalno G^1 zvezen.

Za primer bomo metodo aplicirali na dveh Bézierjevih ploskvah iz tenzorskega produkta stopnje 3, Φ_a in Φ_b . Metoda nam vrne notranji točki na

ploskvi Φ_a (slika 2). To ploskev poimenujemo osnovna ploskev in ploskev Φ_b pridružena ploskev. Da dobimo G^1 zveznost na robu, moramo izračunati tudi notranji točki na ploskvi Φ_b . To naredimo tako, da ploskev Φ_b vzamemo za osnovno ploskev in ploskev Φ_a za pridruženo.



Slika 2: Kontrolne točke Bézierjeve ploskve iz tenzorskega produkta stopnje 3. Zelene točke so kontrolne točke krivulje na skupnem robu. Rdeči točki sta kontrolni točki, ki ju dobimo z izvedbo metode Chiyokura in Kimura.

G^1 zveznost lahko karakteriziramo s tangentnimi vektorji. Definirajmo krivuljo $\Gamma(u)$, ki za parametre $u \in [0, 1]$, parametrizira krivuljo na skupnem robu zlepk. Tangentni vektor te krivulje označimo z $\partial\Gamma(u)$. Tangentni vektor ploskve Φ_a , ki je pravokoten na vektor $\partial\Gamma(u)$ označimo z $\partial\Gamma_a(u)$ in na podoben način definiramo vektor $\partial\Gamma_b(u)$. Zlepek bo G^1 zvezen natanko takrat, ko bodo vektorji $\partial\Gamma(u)$, $\partial\Gamma_a(u)$ in $\partial\Gamma_b(u)$ koplanarni, oziroma, ko velja

$$\det(\partial\Gamma(u), \partial\Gamma_a(u), \partial\Gamma_b(u)) = 0, \quad u \in [0, 1] \quad (1)$$

Na sliki 3 so z modro obarvani vhodni podatki. Točke obarvane z zeleno in rdečo se ujemajo z obarvanimi točkami na sliki 2, torej je naš cilj izračunati vektorja \mathbf{a}_1 in \mathbf{a}_2 . Namesto kontrolnih točk imamo podane vektorje. Vektorji $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1$ in \mathbf{c}_2 definirajo kontrolne točke za krivuljo na skupnem robu. Vektorja \mathbf{a}_0 in \mathbf{a}_3 sta tangenta na ploskev Φ_a in podobno sta vektorja \mathbf{b}_0 in \mathbf{b}_3 tangenta na ploskev Φ_b . Poleg tega morata slednja biti enotska, vsak posebej pravokoten na \mathbf{c}_0 in \mathbf{c}_2 in ležati v ravnini katere normala je določena v ogljiščih v_i in v_{i+1} .

Da bomo lahko izračunali vektorja \mathbf{a}_1 in \mathbf{a}_2 zapišimo enačbo, ekvivalentno enačbi 1, s pomočjo skalarnih funkcij $k(u)$ in $h(u)$:

$$\partial\Gamma_a(u) = k(u)\partial\Gamma_b(u) + h(u)\partial\Gamma(u) \quad (2)$$

Da rešimo enačbo 2, izrazimo a_0 in a_3

$$\mathbf{a}_0 = k_0 \mathbf{b}_0 + h_0 \mathbf{c}_0 \quad \mathbf{a}_3 = k_1 \mathbf{b}_3 + h_1 \mathbf{c}_2$$

, kjer so $k_0, k_1, h_0, h_1 \in \mathbb{R}$. Sledi, da sta iskani funkciji

$$k(u) = (1 - u)k_0 + uk_1 \quad h(u) = (1 - u)h_0 + uh_1$$

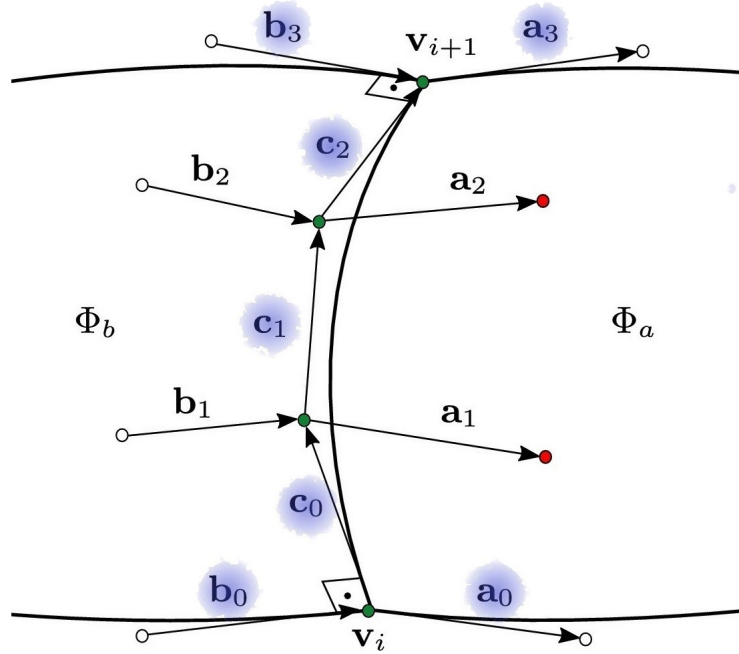
Vektorja \mathbf{b}_1 in \mathbf{b}_2 določimo z linearno interpolacijo vektorjev \mathbf{b}_0 in \mathbf{b}_3 .

$$\mathbf{b}_1 = \frac{2}{3}\mathbf{b}_0 + \frac{1}{3}\mathbf{b}_3 \quad \mathbf{b}_2 = \frac{1}{3}\mathbf{b}_0 + \frac{2}{3}\mathbf{b}_3$$

Sedaj imamo vse podatke, da lahko zapišemo enačbi za \mathbf{a}_1 in \mathbf{a}_2 .

$$\mathbf{a}_1 = (k_1 - k_0)\frac{\mathbf{b}_0}{3} + k_0\mathbf{b}_1 + 2h_0\frac{\mathbf{c}_1}{3} + h_1\frac{\mathbf{c}_0}{3}$$

$$\mathbf{a}_2 = k_1\mathbf{b}_2 - (k_1 - k_0)\frac{\mathbf{b}_3}{3} + h_0\frac{\mathbf{c}_2}{3} + 2h_1\frac{\mathbf{c}_1}{3}$$



Slika 3: Prikaz podatkov pri metodi Chiyokura in Kimura.

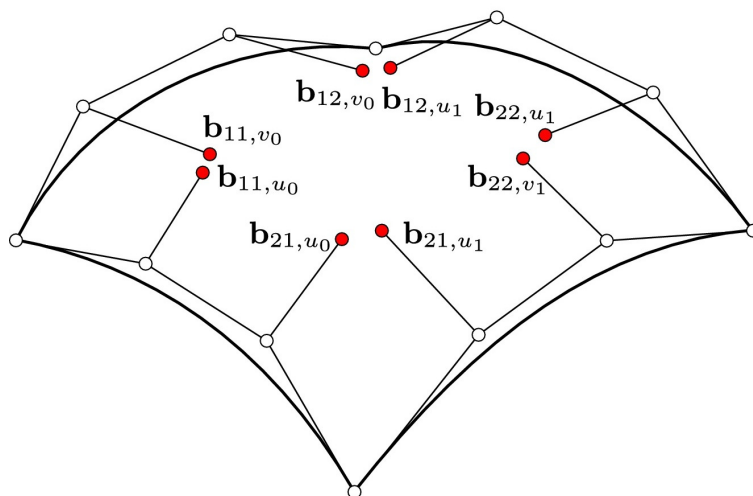
3 Gregoryjeve krpe

Z Gregoryjevimi krpami posplošimo Gregoryjeve ideje za tenzorski produkt bezierjevih krp. Skonstruirati želimo ploskev, ki bo imela na robu geometrijsko zveznost reda 1, ko jo bomo zlepili še z drugimi ploskvami, pri tem pa bomo imeli podane le robne krivulje. V nadaljevanju bomo obravnavali trikotne in štirikotne ploskve. Gregoryjeve krpe delamo tudi nad večkotniki višje stopnje, vendar se pri nas s tem ne bomo ukvarjali.

Poglejmo si konstrukcijo štirikotne in trikotne Gregoryjeve krpe.

3.1 Kvadratne Gregoryjeve krpe

Imamo štiri kubične Bezierjeve krivulje, kjer vsaka predstavlja rob Gregoryjeve krpe. Na vsakem robu uporabimo metodo Chiyokura in Kimura in tako pridemo po 2 točki. Tako zagotovimo G^1 zveznost. Tukaj nastopi twist compatibility problem in sicer dobljene točke ne sovpadajo, kot prikazuje slika 4.



Slika 4: Konstrukcija kvadratne Gregoryjeve krpe

Na tem mestu si pomagamo z racionalnimi funkcijami. Točke b_{11} , b_{21} , b_{12} , b_{22} definiramo kot racionalne funkcije odvisne od parametrov u in v z intervala

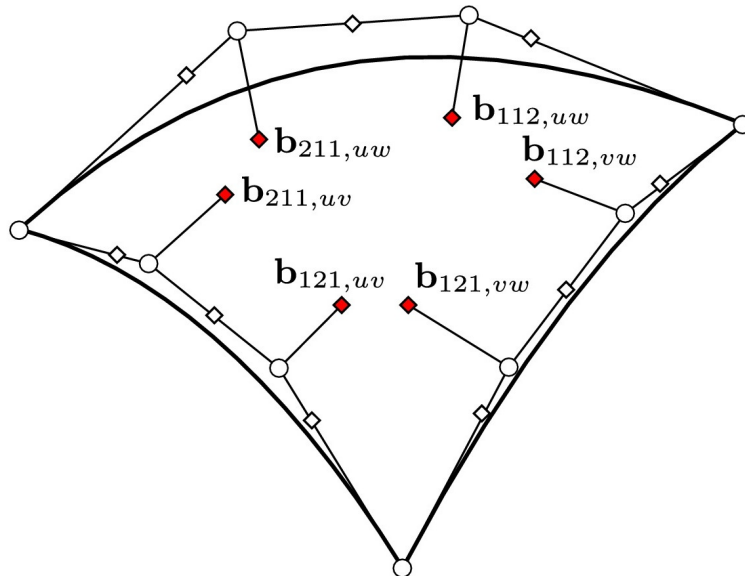
$[0, 1]$:

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_{11}(u, v) &= \frac{v\mathbf{b}_{11,u_0} + u\mathbf{b}_{11,v_0}}{u + v} \\ \mathbf{b}_{21}(u, v) &= \frac{(1 - v)\mathbf{b}_{21,u_0} + u\mathbf{b}_{21,v_1}}{(1 - v) + u} \\ \mathbf{b}_{12}(u, v) &= \frac{v\mathbf{b}_{12,u_1} + (1 - u)\mathbf{b}_{12,v_0}}{v + (1 - u)} \\ \mathbf{b}_{22}(u, v) &= \frac{(1 - v)\mathbf{b}_{22,u_1} + (1 - u)\mathbf{b}_{22,v_1}}{(1 - u) + (1 - v)}\end{aligned}$$

Če v vsako točko vstavimo določen (u, v) iz roba domene dobimo ravno točke, pridobljene iz metode Chiyokura in Kimura. Opazimo, da se singularnosti v imenovalcu pojavijo le v ogliščih domene, te pa se da obladati z analizo vrednosti v parametrih.

3.2 Trikotne Gregoryjeve krpe

Kot že ime pove imamo pri trikotnih Gregoryjevih krpah trikotno domeno, tako da uporabljamo baricentrične koordinate. Imamo 3 kubične Bezierjeve krivulje na robu, mi pa želimo dobiti notranje kontrolne točke za našo ploskev. Enako kot prej najprej po metodi Chiyokura in Kimura pridelamo po 2 točki z vsake stranice.



Slika 5: Konstrukcija trikotne Gregoryjeve krpe

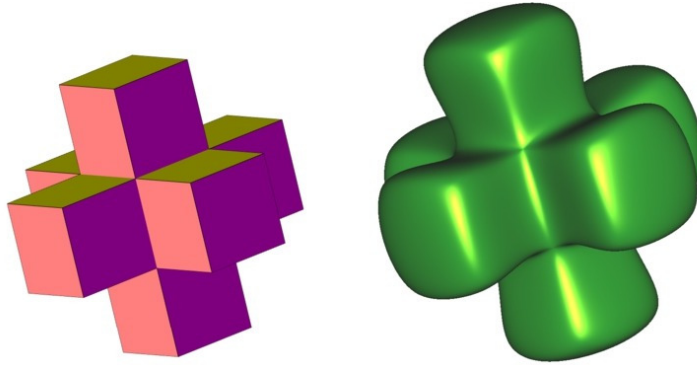
Podobno kot prej spet opazimo, da se te točke ne ujemajo in tako definiramo racionalne funkcije, ki bodo predstavljale kontrolne točke:

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_{211}(u, v, w) &= \frac{(1-w)v\mathbf{b}_{211,uv} + (1-v)w\mathbf{b}_{211,v_1}}{(1-w)v + (1-v)w} \\ \mathbf{b}_{121}(u, v, w) &= \frac{(1-w)u\mathbf{b}_{121,uv} + (1-u)v\mathbf{b}_{121,vw}}{(1-w)u + (1-u)w} \\ \mathbf{b}_{112}(u, v, w) &= \frac{(1-u)v\mathbf{b}_{112,vw} + (1-v)u\mathbf{b}_{112,uw}}{(1-u)v + (1-v)u}\end{aligned}$$

Argumenti o singularnosti so enaki kot prej. Kubična Beziejeva krpa ima le eno notranjo kontrolno točko, za krpo stopnje 4 pa vemo, da jih ima 3. V našem primeru nam zato bolj ustreza slednji primer, saj imamo definirane tri različne funkcije za te točke. Robnim krivuljam tako še zvišamo stopnjo, da dobimo mrežo za krpo stopnje 4. Te točke so na sliki 5 označene kot kare.

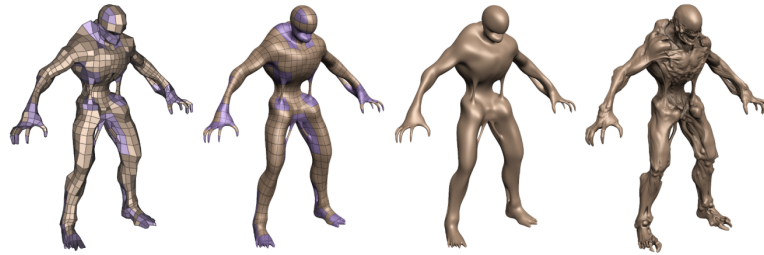
4 Zaključek

Za konec si pogledjmo nekaj primerov. V matlabu sva za osnovo vzeli kocko in na stranicah implementirali G^1 zveznost. Glej sliko ???. Na sliki se vidijo tudi točke $\mathbf{b}_{11}(u, v)$, $\mathbf{b}_{21}(u, v)$, $\mathbf{b}_{12}(u, v)$, $\mathbf{b}_{22}(u, v)$, ki jih dobimo pri različnih parametrih u in v .



Literatura

- [1] R. Akhtar, T. Jackson-Henderson, R. Karpman, M. Boggess, I. Jimenez, A. Kinzel, D. Pritikin, *On the unitary Cayley graph of a finite ring*, Electron. J. Combin. **16** (2009), no. 1, Research Paper 117, 13 pp.



- [2] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald. *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley-Longman, 1969
- [3] K. Schäcke, *On the Kronecker product*, 2013
- [4] M. E. Watkins, *Connectivity of transitive graphs*, J. Combin. Theory **8** (1970), 23-29.
- [5] D. B. West. *Graph Theory*, Second Edition. Prentice-Hall, (2000).