Gregoryjeve krpe

Klara Kresnik in Meta Trdin

Fakulteta za matematiko in fiziko

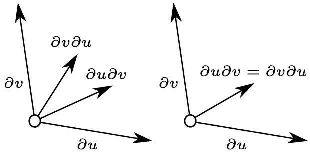
Vsebina

Uvod

- Naloga: Zlepiti krpe oziroma ploskve tako, da bo imel zlepek geometrijsko zveznost reda 1.
- Uporaba: pri geometrijskem modeliranju in v računalniški grafiki
- Vemo: $G^1 \leftrightarrow$ zveznost enotskih tangent
- Ko združujemo dve krpi, nastane problem - twist compatibility problem

Uvod

- Naloga: Zlepiti krpe oziroma ploskve tako, da bo imel zlepek geometrijsko zveznost reda 1.
- Uporaba: pri geometrijskem modeliranju in v računalniški grafiki
- Vemo: $G^1 \leftrightarrow$ zveznost enotskih tangent
- Ko združujemo dve krpi, nastane problem - twist compatibility problem



Mešani odvodi se ne rabijo nuno ujemati. $\rightarrow$ Prednost Gregoryjevih krp. To se pokaže v notranjih kontrolnih točkah, ki bodo kar funkcije. Ploskev bo sama po sebi racionalna.

- Podano: robne krivulje. Dobiti želimo notranje kontrolne točke. Potrebovali bomo tudi podatke iz tangentne ravnine na robu.

Metoda Chiyokura in Kimura

- Metoda združi dve Bézierjevi krpi, tako da je zlepek na robu G^1 zvezen, zgolj s podatki o robni krivulji in pripadajoči tangenti ravnini.
- Vsaka robna krivulja je definirana s kontrolnim poligonom.

Metoda Chiyokura in Kimura

- Metoda združi dve Bézierjevi krpi, tako da je zlepek na robu G^1 zvezen, zgolj s podatki o robni krivulji in pripadajoči tangenti ravnini.
- Vsaka robna krivulja je definirana s kontrolnim poligonom.

$$\det(\partial\Gamma(u), \partial\Gamma_a(u), \partial\Gamma_b(u)) = 0$$

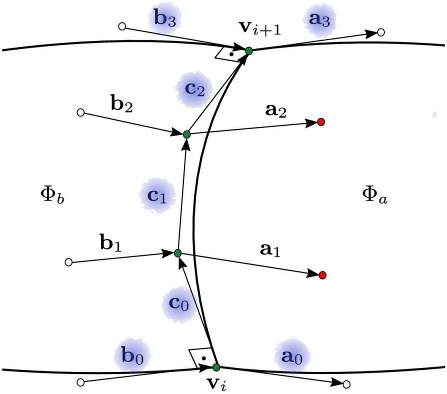
Metoda Chiyokura in Kimura

- Metoda združi dve Bézierjevi krpi, tako da je zlepek na robu G^1 zvezen, zgolj s podatki o robni krivulji in pripadajoči tangenti ravnini.
- Vsaka robna krivulja je definirana s kontrolnim poligonom.

$$\det(\partial\Gamma(u), \partial\Gamma_a(u), \partial\Gamma_b(u)) = 0$$

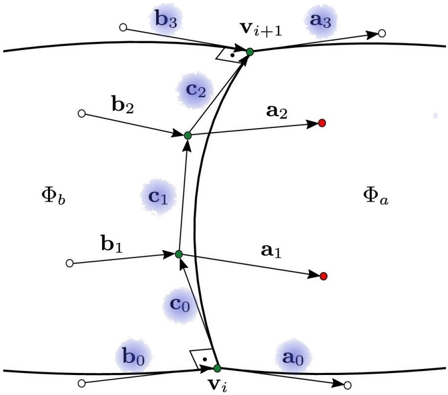
$$\partial\Gamma(u) = k(u)\partial\Gamma_a(u) + h(u)\partial\Gamma_b(u)$$

Metoda Chiyokura in Kimura



Slika: Metoda Chiyokura in Kimura

Metoda Chiyokura in Kimura

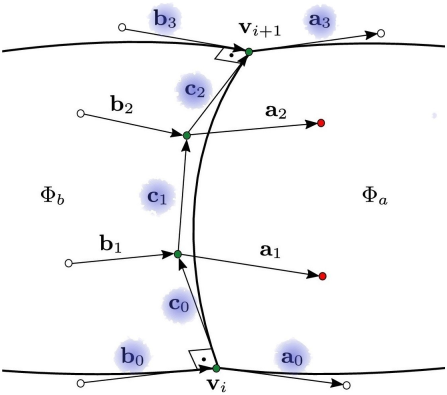


Slika: Metoda Chiyokura in Kimura

$$\mathbf{a}_0 = k_0\mathbf{b}_0 + h_0\mathbf{c}_0 \qquad \mathbf{a}_3 = k_1\mathbf{b}_3 + h_1\mathbf{c}_2$$

$$\mathbf{b}_1 = \frac{2}{3}\mathbf{b}_0 + \frac{1}{3}\mathbf{b}_3 \qquad \mathbf{b}_2 = \frac{1}{3}\mathbf{b}_0 + \frac{2}{3}\mathbf{b}_3$$

Metoda Chiyokura in Kimura



Slika: Metoda Chiyokura in Kimura

$$\mathbf{a}_0 = k_0\mathbf{b}_0 + h_0\mathbf{c}_0 \qquad \mathbf{a}_3 = k_1\mathbf{b}_3 + h_1\mathbf{c}_2$$

$$\mathbf{b}_1 = \frac{2}{3}\mathbf{b}_0 + \frac{1}{3}\mathbf{b}_3 \qquad \mathbf{b}_2 = \frac{1}{3}\mathbf{b}_0 + \frac{2}{3}\mathbf{b}_3$$

$$\mathbf{a}_1 = (k_1 - k_0)\frac{\mathbf{b}_0}{3} + k_0\mathbf{b}_1 + 2h_0\frac{\mathbf{c}_1}{3} + h_1\frac{\mathbf{c}_0}{3}$$

$$\mathbf{a}_2 = k_1\mathbf{b}_2 - (k_1 - k_0)\frac{\mathbf{b}_3}{3} + h_0\frac{\mathbf{c}_2}{3} + 2h_1\frac{\mathbf{c}_1}{3}$$

Kvadratne Gregoryjeve krpe

Konstrukcija

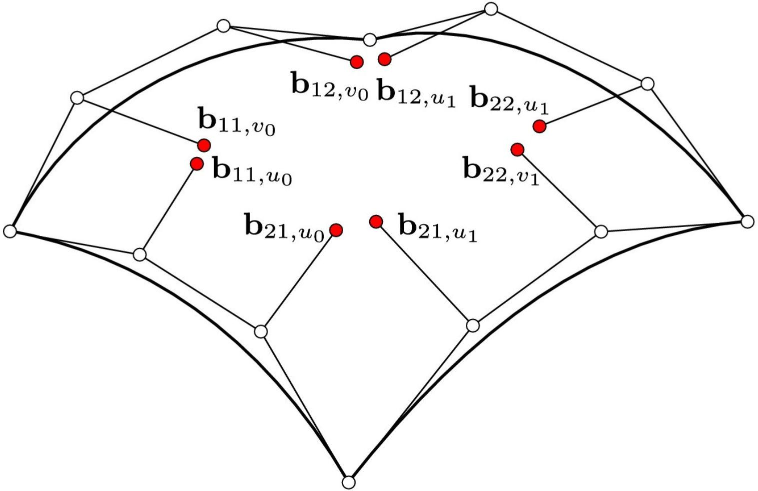
- Domena $[0,1] \times [0,1]$
- Podane imamo 4 robne krivulje: Bézierjeve krivulje reda 3
- Na vsakem robu uporabimo metodo Chiyokura in Kimura (dobimo $2 \cdot 4 = 8$ točk)
- Nastopi twist compatibility problem. Tukaj si pomagamo z racionalnimi funkcijami:

$$\mathbf{b}_{11}(u,v) = \frac{v\mathbf{b}_{11,u_0} + u\mathbf{b}_{11,v_0}}{u+v}$$

$$\mathbf{b}_{21}(u,v) = \frac{(1-v)\mathbf{b}_{21,u_0} + u\mathbf{b}_{21,v_1}}{(1-v)+u}$$

$$\mathbf{b}_{12}(u,v) = \frac{v\mathbf{b}_{12,u_1} + (1-u)\mathbf{b}_{12,v_0}}{v+(1-u)}$$

$$\mathbf{b}_{22}(u,v) = \frac{(1-v)\mathbf{b}_{22,u_1} + (1-u)\mathbf{b}_{22,v_1}}{(1-u)+(1-v)}$$



Slika: Kvadratna Gregoryjeva krpa

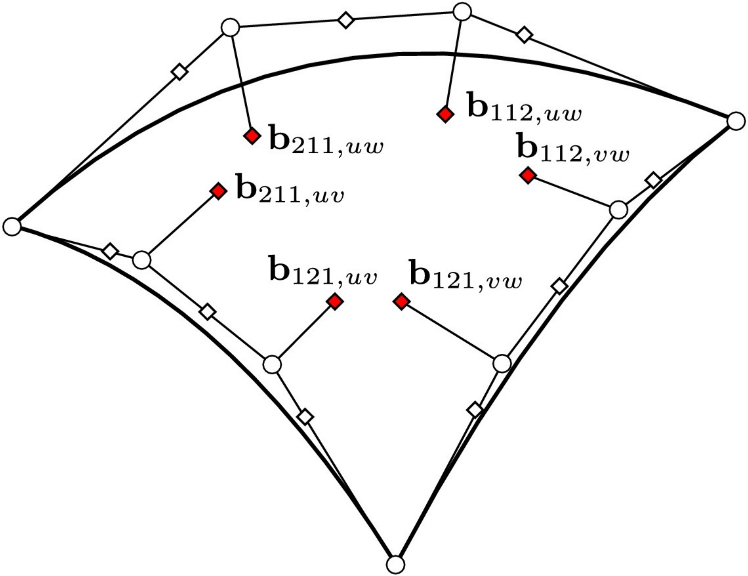
Trikotne Gregoryjeve krpe

- Trikotna domena, baricentrične koordinate
- 3 kubične Bézierjeve krivulje na robu
- Uporabimo metodo Chiyokura in Kimura (dobimo $2 \cdot 3 = 6$ točk).
- Na posameznem paru uporabimo racionalno funkcijo, da dobimo 3 notranje točke.
- Kubična bézierjeva krpa ima le eno kontrolno točko, ki ni robna, kvadratna pa ima 3, kar nam v tem primeru bolj ustreza. Zato moramo še robnim krivuljam zvišati stopnjo.
- Posamezen par združimo v eno točko:

$$\mathbf{b}_{211}(v,w) = \frac{(1-w)v\mathbf{b}_{211,uv} + (1-v)w\mathbf{b}_{211,uw}}{(1-w)v + (1-v)w}$$

$$\mathbf{b}_{121}(u,w) = \frac{(1-w)u\mathbf{b}_{121,uv} + (1-u)w\mathbf{b}_{121,vw}}{(1-w)u + (1-u)w}$$

$$\mathbf{b}_{112}(u,v) = \frac{(1-u)v\mathbf{b}_{112,vw} + (1-v)u\mathbf{b}_{112,uw}}{(1-u)v + (1-v)u}$$



Slika: Trikotna Gregoryjeva krpa