

Gregoryjeve krpe

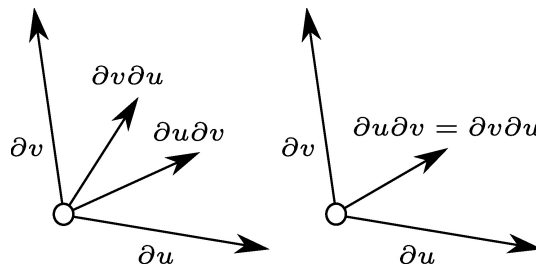
Seminarska naloga pri predmetu RPGO

Klara Kresnik in Meta Trdin
Fakulteta za matematiko in fiziko

1 Uvod

Za začetek najprej predstavimo problem. Krpe oziroma ploskve v prostoru želimo zlepiti tako, da bo vzdolž skupnega roba dosežena geometrijska zveznost reda 1. To bomo lahko dosegli lokalno. Zaradi lokalne G^1 zveznosti se Gregoryjeve krpe uporablja pri geometrijskem modeliranju in v računalniški grafiki. S predavanj vemo, da nam G^1 zveznost zagotavlja zveznost enotskih tangent, kar v našem primeru pomeni, da se morata tangentni ravnini ene in druge krpe ujemati.

Ko združujemo dve krpi, naletimo na problem. Reče se mu twist compatibility problem ali tudi vertex inconsistency problem in sicer ni nujno, da bodo mešani odvodi enaki. Kot vemo se pri polinomski konstrukciji mešani odvodi ujemajo, v primeru Gregoryjevih krp pa niti ni treba, da se (glej sliko 1). To je tudi ena izmed prednosti. Pokaže se pri računanju notranjih kontrolnih točk, kjer bo posamezna točka postala racionalna funkcija, zato bo ploskev sama po sebi racionalna.



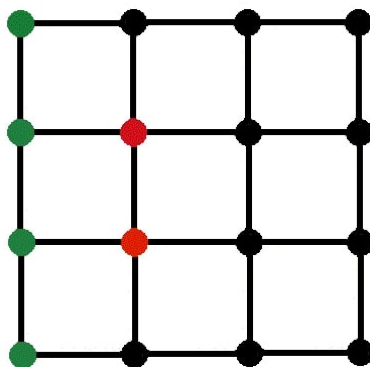
Slika 1: Levo: mešani odvodi v primeru Gregoryjeve krpe; Desno: mešani odvodi pri polinomski konstrukciji

Podane bomo imeli robne krivulje, ki bodo kar Bézierjeve krivulje stopnje 3. Računali bomo notranje kontrolne točke. Pri tem bomo potrebovali tudi podatke s tangentne ravnine na robu, da bomo lahko zagotovili G^1 zveznost. To nas pripelje do metode Chiyokura in Kimura.

2 Metoda Chiyokura in Kimura

Metoda združi dve Bézierjevi ploski, tako da imamo na skupnem robu G^1 zveznost. Kot vhodne podatke bomo imeli na voljo samo podatke o skupnem robu in vektorjih iz tangentne ravnine. V izhodu nam metoda poda notranje točke ploskve. Zaradi lokalnosti podatkov bo zlepek zgolj lokalno G^1 zvezen.

Za primer bomo metodo aplicirali na dveh Bézierjevih ploskvah iz tenzorskega produkta stopnje 3, Φ_a in Φ_b . Metoda nam vrne notranji točki na ploskvi Φ_a (slika 2). To ploskev poimenujemo osnovna ploskev in ploskev Φ_b pridružena ploskev. Da dobimo G^1 zveznost na robu, moramo izračunati tudi notranji točki na ploskvi Φ_b . To naredimo tako, da ploskev Φ_b vzamemo za osnovno ploskev in ploskev Φ_a za pridruženo.



Slika 2: Kontrolne točke Bézierjeve ploskve iz tenzorskega produkta stopnje 3. Zelene točke so kontrolne točke krivulje na skupnem robu. Rdeči točki sta kontrolni točki, ki ju dobimo z izvedbo metode Chiyokura in Kimura.

G^1 zveznost lahko karakteriziramo s tangentnimi vektorji. Definirajmo krivuljo $\Gamma(u)$, ki za parametre $u \in [0, 1]$, parametrizira krivuljo na skupnem robu zlepa. Tangentni vektor te krivulje označimo z $\partial\Gamma(u)$. Tangentni vektor ploskve Φ_a , ki je pravokoten na vektor $\partial\Gamma(u)$ označimo z $\partial\Gamma_a(u)$ in na podoben način definiramo vektor $\partial\Gamma_b(u)$. Zlepek bo G^1 zvezen natanko takrat, ko bodo vektorji $\partial\Gamma(u)$, $\partial\Gamma_a(u)$ in $\partial\Gamma_b(u)$ koplanarni, oziroma, ko velja

$$\det(\partial\Gamma(u), \partial\Gamma_a(u), \partial\Gamma_b(u)) = 0, \quad u \in [0, 1] \quad (1)$$

Na sliki 3 so z modro obarvani vhodni podatki. Točke obarvane z zeleno in rdečo se ujemajo z obarvanimi točkami na sliki 2, torej je naš cilj izračunati vektorja \mathbf{a}_1 in \mathbf{a}_2 . Namesto kontrolnih točk imamo podane vektorje. Vektorji $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1$ in \mathbf{c}_2 definirajo kontrolne točke za krivuljo na skupnem robu. Vektorja \mathbf{a}_0 in \mathbf{a}_3 sta tangenta na ploskev Φ_a in podobno sta vektorja \mathbf{b}_0 in \mathbf{b}_3 tangenta na ploskev Φ_b . Poleg tega morata slednja biti enotska, vsak posebej pravokoten na \mathbf{c}_0 in \mathbf{c}_2 in ležati v ravnini katere normala je določena v ogliščih v_i in v_{i+1} .

Da bomo lahko izračunali vektorja \mathbf{a}_1 in \mathbf{a}_2 zapišimo enačbo, ekvivalentno enačbi 1, s pomočjo skalarnih funkcij $k(u)$ in $h(u)$:

$$\partial\Gamma_a(u) = k(u)\partial\Gamma_b(u) + h(u)\partial\Gamma(u) \quad (2)$$

Da rešimo enačbo 2, izrazimo a_0 in a_3

$$\mathbf{a}_0 = k_0 \mathbf{b}_0 + h_0 \mathbf{c}_0 \quad \mathbf{a}_3 = k_1 \mathbf{b}_3 + h_1 \mathbf{c}_2$$

, kjer so $k_0, k_1, h_0, h_1 \in \mathbb{R}$. Sledi, da sta iskani funkciji

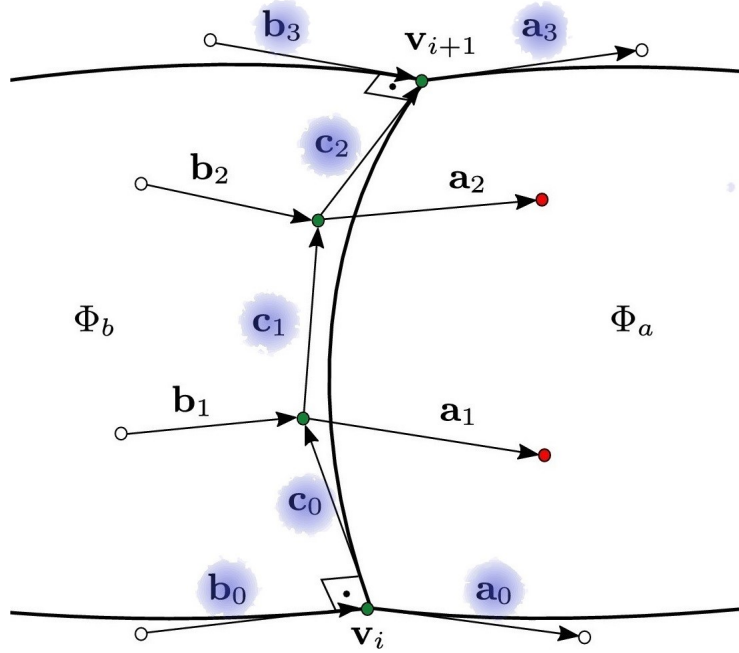
$$k(u) = (1 - u)k_0 + uk_1 \quad h(u) = (1 - u)h_0 + uh_1$$

Vektorja \mathbf{b}_1 in \mathbf{b}_2 določimo z linearno interpolacijo vektorjev \mathbf{b}_0 in \mathbf{b}_3 .

$$\mathbf{b}_1 = \frac{2}{3} \mathbf{b}_0 + \frac{1}{3} \mathbf{b}_3 \quad \mathbf{b}_2 = \frac{1}{3} \mathbf{b}_0 + \frac{2}{3} \mathbf{b}_3$$

Sedaj imamo vse podatke, da lahko zapišemo enačbi za \mathbf{a}_1 in \mathbf{a}_2 .

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (k_1 - k_0) \frac{\mathbf{b}_0}{3} + k_0 \mathbf{b}_1 + 2h_0 \frac{\mathbf{c}_1}{3} + h_1 \frac{\mathbf{c}_0}{3} \\ \mathbf{a}_2 &= k_1 \mathbf{b}_2 - (k_1 - k_0) \frac{\mathbf{b}_3}{3} + h_0 \frac{\mathbf{c}_2}{3} + 2h_1 \frac{\mathbf{c}_1}{3} \end{aligned}$$



Slika 3: Prikaz podatkov pri metodi Chiyokura in Kimura.

3 Gregoryjeve krpe

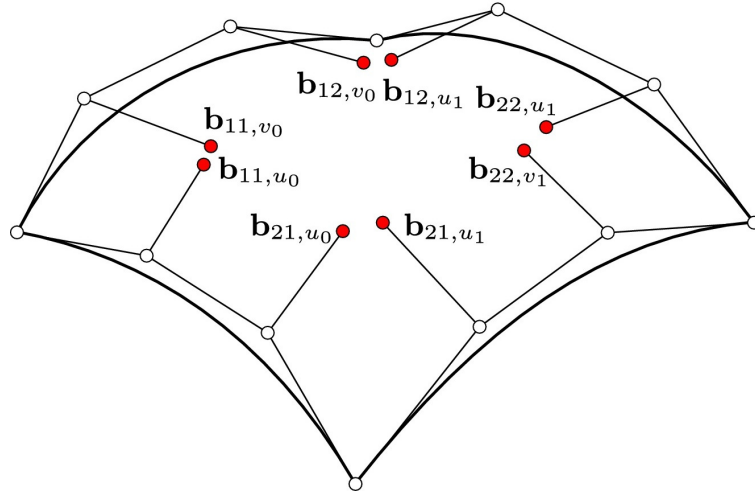
Z Gregoryjevimi krpami posplošimo Gregoryjeve ideje za tenzorski produkt Bézierjevih krp. Konstruirati želimo ploskev, ki bo imela na robu geometrijsko

zveznost reda 1, ko jo bomo zlepili z drugimi ploskvami, pri tem pa bomo imeli podane le robne krivulje. V nadaljevanju bomo obravnavali trikotne in štirikotne ploskve. Gregoryjeve krpe delamo tudi nad večkotniki višje stopnje, vendar se s tem ne bomo ukvarjali.

Poglejmo si konstrukcijo štirikotne in trikotne Gregoryjeve krpe.

3.1 Kvadratne Gregoryjeve krpe

Imamo štiri kubične Bézierjeve krivulje, kjer vsaka predstavlja rob Gregoryjeve krpe. Na vsakem robu uporabimo metodo Chiyokura in Kimura in tako pridemo po 2 točki. Tako zagotovimo G^1 zveznost. Tukaj nastopi twist compatibility problem in sicer dobljene točke ne sovpadajo, kot prikazuje slika 4.



Slika 4: Konstrukcija kvadratne Gregoryjeve krpe

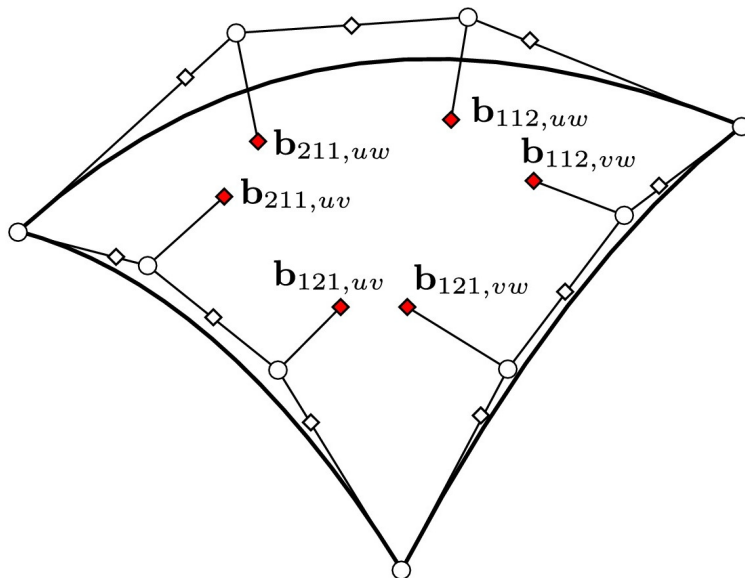
Na tem mestu si pomagamo z racionalnimi funkcijami. Točke \mathbf{b}_{11} , \mathbf{b}_{21} , \mathbf{b}_{12} , \mathbf{b}_{22} definiramo kot racionalne funkcije odvisne od parametrov u in v z intervala $[0, 1]$:

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_{11}(u, v) &= \frac{v\mathbf{b}_{11,u_0} + u\mathbf{b}_{11,v_0}}{u + v} \\ \mathbf{b}_{21}(u, v) &= \frac{(1-v)\mathbf{b}_{21,u_0} + u\mathbf{b}_{21,v_1}}{(1-v) + u} \\ \mathbf{b}_{12}(u, v) &= \frac{v\mathbf{b}_{12,u_1} + (1-u)\mathbf{b}_{12,v_0}}{v + (1-u)} \\ \mathbf{b}_{22}(u, v) &= \frac{(1-v)\mathbf{b}_{22,u_1} + (1-u)\mathbf{b}_{22,v_1}}{(1-u) + (1-v)}\end{aligned}$$

Če v vsako točko vstavimo določen (u, v) iz roba domene dobimo ravno točke, pridobljene iz metode Chiyokura in Kimura. Opazimo, da se singularnosti v imenovalcu pojavijo le v ogliščih domene, te pa se da obladati z analizo vrednosti v parametrih.

3.2 Trikotne Gregoryjeve krpe

Kot že ime pove imamo pri trikotnih Gregoryjevih krpah trikotno domeno, tako da uporabljamo baricentrične koordinate. Imamo 3 kubične Bézierjeve krivulje na robu, mi pa želimo dobiti notranje kontrolne točke za našo ploskev. Enako kot prej, po metodi Chiyokura in Kimura pridelamo po 2 točki z vsake stranice.



Slika 5: Konstrukcija trikotne Gregoryjeve krpe

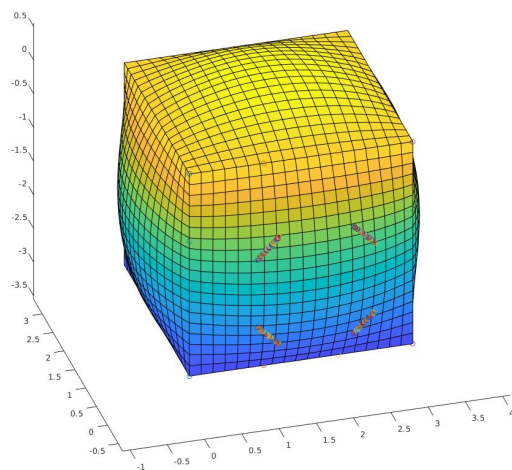
Spet opazimo, da se točke ne ujemajo in tako definiramo racionalne funkcije, ki bodo predstavljale kontrolne točke:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{211}(u, v, w) &= \frac{(1-w)v\mathbf{b}_{211,uv} + (1-v)w\mathbf{b}_{211,v_1}}{(1-w)v + (1-v)w} \\ \mathbf{b}_{121}(u, v, w) &= \frac{(1-w)u\mathbf{b}_{121,uv} + (1-u)v\mathbf{b}_{121,vw}}{(1-w)u + (1-u)v} \\ \mathbf{b}_{112}(u, v, w) &= \frac{(1-u)v\mathbf{b}_{112,vw} + (1-v)u\mathbf{b}_{112,uw}}{(1-u)v + (1-v)u} \end{aligned}$$

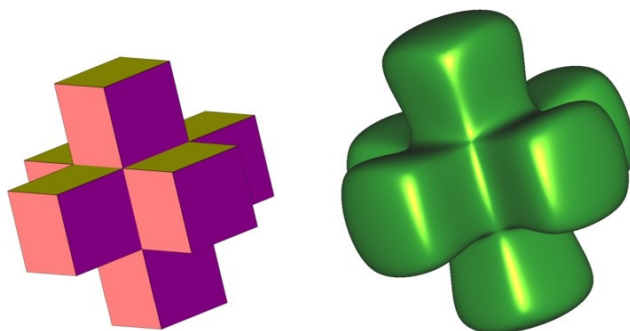
Argumenti o singularnosti so enaki kot prej. Kubična Beziejeva krpa ima le eno notranjo kontrolno točko, za krpo stopnje 4 pa vemo, da jih ima 3. V našem primeru nam zato bolj ustreza slednji primer, saj imamo definirane tri različne funkcije za te točke. Robnim krivuljam tako še zvišamo stopnjo, da dobimo mrežo za krpo stopnje 4. Te točke so na sliki 5 označene kot kare.

4 Zaključek

Za konec si pogledjmo nekaj primerov. Za prvi primer sva za osnovo vzeli kocko in nato v programu Matlab na straneh implementirali G^1 zveznost. Dobljeno telo

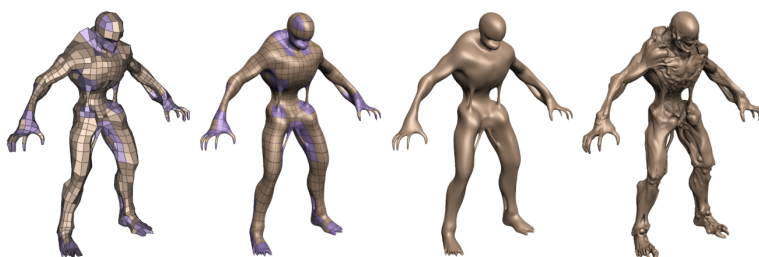


Slika 6: Primer Gregoryjeve ideje na kockastem telesu



Slika 7: Posebna kocka

prikazuje slika 6. Na sliki se vidijo tudi točke $\mathbf{b}_{11}(u, v)$, $\mathbf{b}_{21}(u, v)$, $\mathbf{b}_{12}(u, v)$, $\mathbf{b}_{22}(u, v)$, ki jih dobimo pri različnih parametrih u in v .



Slika 8: Zahtevnejša struktura - človek

Kot smo že omenili se Gregoryjeve krpe uporabljajo v računalniški grafiki. Zgoraj sta prikazana še posebna kocka in pa bolj zapletena figura. Na sliki 8 je osnovno telo pokrito iz samih štirikotnikov. Na vsakem izmed njih skonstruiramo kvadratno Gregoryjevo krpo. Čisto na desni so nato z displacement map dodane še podrobnosti.

Literatura

- [1] G. J. Hettinga, J. Kosinka: *Multisided generalisations of Gregory patches*, Computer Aided Geometric Design, **62**, (2018), 166–180.
- [2] C. Loop, S. Schaefer, T. Ni, I. Castaño, *Approximating Subdivision Surfaces with Gregory Patches for Hardware Tessellation*, ACM Trans. Graph., **12**, (2009)