T4 EJERCICIOS

Neus Molero

3 de diciembre de 2020

Ejercicio 1

Realizar el desarrollo completo para la obtención de la función de Lagrange primal y dual para las máquinas de vectores soporte con márgenes blando (separabilidad no lineal).

SOLUCIÓN:

Dado $S = (x_1, c_1), ..., (x_N, c_N)$ y una constante $C > 0$, obtenemos $\theta \in \mathbb{R}_d$ y $\theta_0 \in \mathbb{R}_d$ y $\zeta \in \mathbb{R}_N$ sujetos a las condiciones siguientes:

$$c_n\left(\theta^t x_n + \theta_0\right) \geq 1 - \zeta_n,\ 1 \leq n \leq N$$

$$\zeta_n \geq 0,\ 1 \leq n \leq N$$

Donde la función a minimizar es:

$$\frac{1}{2}\theta^t\theta + C\sum_{n=1}^{N}\zeta_n$$

La función lagrangiana primal la obtenemos minimizando la expresión anterior:

$$\Lambda(\theta, \theta_0, \zeta, \alpha, \beta) = \frac{1}{2}\theta^t\theta + C\sum_{n=1}^{N}\zeta_n - \sum_{n=1}^{N}\alpha_n(c_n(\theta^t x_n + \theta_0) + \zeta_n - 1) - \sum_{n=1}^{N}\beta_n\zeta_n$$

Sujeto a $\alpha_n \geq 0,\ \beta_n \geq 0$ y $\ \zeta_n \geq 0$ para $1 \leq n \leq N$

Por tanto, las soluciones óptimas son las siguientes:

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\theta} = 0 \implies \theta^* = \sum_{n=1}^{N} c_n\alpha_n x_n$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\theta_0} = 0 \implies \sum_{n=1}^{N}\alpha_n c_n = 0$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\zeta} = 0 \implies C\sum_{n=1}^{N}1 - \sum_{n=1}^{N}\alpha_n\sum_{n=1}^{N}\beta_n = 0$$

A partir de la anterior expresión obtenemos que :

$$C = \alpha_n + \beta_n \text{ para } 1 \leq n \leq N$$

Esta última expresión la utilizaremos más adelante (**ECUACIÓN A**)

En la función de Lagrange dual minimizamos $\Lambda_D(\alpha, \beta)$ y vamos sustituyendo las soluciones óptimas obtenidas anteriormente:

$$\Lambda_D(\alpha, \beta) = \Lambda(\theta^*, \theta_0^*, \zeta^*, \alpha, \beta) =$$

$$= \frac{1}{2}\theta^{t^*}\theta^* + C\sum_{n=1}^{N}\zeta_n^* - \sum_{n=1}^{N}\alpha_n(c_n(\theta^{t^*}x_n + \theta_0^*) + \zeta_n^* - 1) - \sum_{n=1}^{N}\beta_n\zeta_n^* =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n,m=1}^{N} c_n c_m \alpha_n \alpha_m x_n^t x_m + C\sum_{n=1}^{N}\zeta_n^* - \sum_{n=1}^{N}\alpha_n\left(c_n\left(\sum_{m=1}^{N} c_m \alpha_m x_m^t x_n + \theta_0^*\right) + \zeta_n^* - 1\right) - \sum_{n=1}^{N}\beta_n\zeta_n^* =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n,m=1}^{N} c_n c_m \alpha_n \alpha_m x_n^t x_m + C\sum_{n=1}^{N}\zeta_n^* - \theta_0^*\sum_{n=1}^{N}\alpha_n c_n + \sum_{n=1}^{N}\alpha_n - \sum_{n=1}^{N}\alpha_n\zeta_n^* - \sum_{n=1}^{N}\beta_n\zeta_n^*$$

En este punto del desarrollo, utilizamos la (**ECUACIÓN A**) y la aplicamos a la expresión anterior obteniendo:

$$-\frac{1}{2}\sum_{n,m=1}^{N} c_n c_m \alpha_n \alpha_m x_n^t x_m + C\sum_{n=1}^{N}\zeta_n^* + \sum_{n=1}^{N}\alpha_n + \sum_{n=1}^{N}\beta_n\zeta_n^* - C\sum_{n=1}^{N}\zeta_n^* - \sum_{n=1}^{N}\beta_n\zeta_n^* =$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\alpha_n - \frac{1}{2}\sum_{n,m=1}^{N} c_n c_m \alpha_n \alpha_m x_n^t x_m$$

Sujeto a las restricciones:

$$\alpha_n \geq 0,\ \alpha_n + \beta_n = C \text{ para } 1 \leq n \leq N \text{ y a } \sum_{n=1}^{N} c_n \alpha_n = 0$$

Ejercicio 2

Diseñar el grafo dirigido y acíclico para la clasificación en 5 clases utilizando SVM para dos clases y la estrategia uno-contra-uno.

Solución: La solución del ejercicio se refleja en la Figura 1.

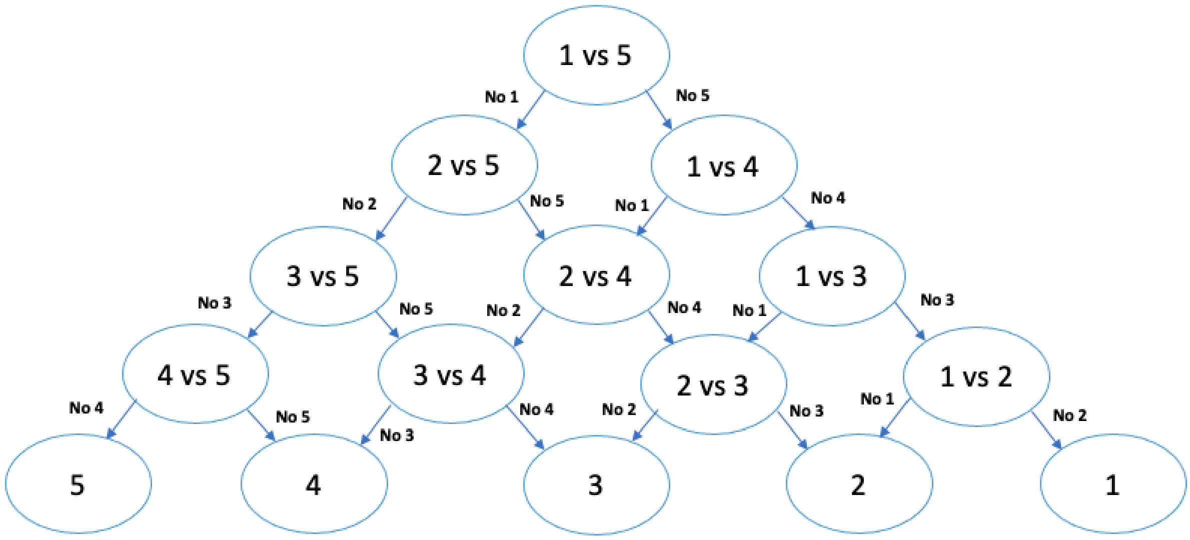

Figura 1: Solución del ejercicio de clasificación

Como podemos observar, el número de clases es $C = 5$