Odkształcenie sprężyste - wyprowadzenie sformułowania wariacyjnego

Jakub Karoń

Styczeń 2024

1 Dane oraz warunki początkowe

$$-\frac{d}{dx}(E(x)\frac{du(x)}{dx}) = 0$$
$$u(2) = 0$$
$$\frac{\partial u(0)}{\partial x} + u(0) = 10$$
$$E(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla } x \in [0,1] \\ 5 & \text{dla } x \in (1,2] \end{cases}$$

Gdzie u to poszukiwana funkcja:

$$x \in [0,2] \to u(x) \in \mathbb{R}$$

2 Obliczenia

Rozważmy dowolną funkcję $v \in V$ i pomnóżmy nasze równanie początkowe stronami:

$$-E'(x)u'' \cdot v\, dx = 0 \cdot v\, dx$$
$$\int_0^2 -E'(x)u'' \cdot v\, dx = \int_0^2 0 \cdot v\, dx$$

Przeprowadźmy następnie całkowanie przez części:

$$-\Big[E(x)u'v\Big]_0^2 + \int_0^2 E(x)u'v'\, dx = 0$$

$$E(0) \cdot u'(0) \cdot v(0) - E(2) \cdot u'(2) \cdot v(2) + \int_0^2 E(x) \cdot u' \cdot v'\, dx = 0$$

Korzystając kolejno z warunków podanych w zadaniu, po przekształceniach otrzymujemy:

$$E(0) \cdot [10 - u(0)] \cdot v(0) + \int_0^2 E(x) \cdot u' \cdot v' \, dx = 0$$

$$= 3 \cdot (10 - u(0)) \cdot v(0) + \int_0^2 E(x) \cdot u' \cdot v' \, dx = 0$$

$$\int_0^2 E(x) v' u' \, dx - 3 \cdot u(0) \cdot v(0) = -30 \cdot v(0)$$

Po tym przekształceniu, rozważane równanie zostało zapisane w postaci:

$$B(u, v) = L(v)$$