Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

«Уфимский государственный авиационный технический университет»

Общенаучный факультет

Кафедра ВВТиС

Отчет

по лабораторной работе №1

«Решение вырожденных и плохообусловленных систем линейных  
алгебраических уравнений с использованием  
обобщенного принципа невязки»

по дисциплине

«Некорректные задачи»

Выполнил: студент группы ПМИ-103м

Спеле В.В.

Проверил: доцент каф. ВВТиС,

Лукащук С.Ю.

Уфа – 2017

**Цель работы**

Научиться находить приближённое нормальное решение вырожденных и плохообусловленных систем линейных алгебраических уравнений  
с неточно заданными матрицей и правой частью методами регуляризации.

# Теоретическая часть

Рассматривается система линейных алгебраических уравнений

где

Требуется найти такое псевдорешение СЛАУ (1) с минимальной нормой.

**Определение 1.** *Псевдорешением* СЛАУ (1) является такой вектор , который определяет минимальную меру разницы между правой и левой частью:

где \* множество псевдорешений.

**Определение 2.** *Нормальное решением* СЛАУ (1) является такой вектор , который определяется как:

Рассмотрим функционал невязки вида:

,

где – классическая евклидова норма.

Вместо точных переменных рассмотрим неточные. Для этого рассмотрим приближенный функционал

где – вектор погрешности, – неточные значения матрицы и правой части системы (1), которые удовлетворяют неравенствам:

Выполнено условие аппроксимации:

где – мера аппроксимации.

Введем стабилизирующий функционал:

**Постановка задачи.**

1. По исходным данным требуется найти устойчивое приближение к точной мере несовместности исходной точной СЛАУ

То есть при , устремить .

1. По исходным данным требуется построить устойчивое приближенное нормальное решение СЛАУ :  
   при .

**Алгоритм решения задачи 1.**

Вводится дополнительный функционал

причем для решения данной задачи вычисляется – обобщённая мера несовместности СЛАУ.

Для рассматриваемой задачи обобщенная мера несовместности СЛАУ (1) имеет вид:

**Алгоритм решения задачи II**

Вводится сглаживающий функционал

где .

Требуется минимизировать сглаживающий функционал, для этого требуется решить соответствующее уравнение Эйлера:

Вводится обобщенная невязка:

где , – решение .

*Обобщенный принцип невязки*: за нормальное решение задачи принимается , где – корень уравнения:

**Порядок выполнения работы**

* 1. Случай единственного решения СЛАУ .

1. сгенерировать случайным образом матрицу ;
2. сгенерировать вектор – вектор точного решения;
3. вычислить правую часть ;
4. сгенерировать матрицу и по правилам:

,

– случайные величины, подчиняющиеся равномерному закону распределения ,

(10 экспериментов);

1. найти и (аналитически);
2. решить (**1**) найти , сравнить с ;
3. Решить (**2**) найти как решение и .
   1. Случай несовместной системы.
4. Взять из 1.1) и расширить до:

, ,

расширить до , ;

1. Повторить пункты 4) - 7) из 1.1).
   1. Случай недоопределенной системы (бесконечное множество решений):
2. Взять из 1.1) и редуцировать до .

Построить множество решений, построить ФСР и выписать общее решение. Найти точное нормальное решение.

1. Повторить пункты 4) - 7) из 1.1).
   1. Случай вырожденной системы:
2. Взять из 1.1) и продублировать строчку

;

1. Повторить пункты 4) - 7) из 1.1) на точных данных.

# Практическая часть

**1. Случай единственного решения СЛАУ.**

Для совместной СЛАУ графики точного решения и приближенные решения при различных малых возмущениях исходных данных представлены на рисунках 1-3.

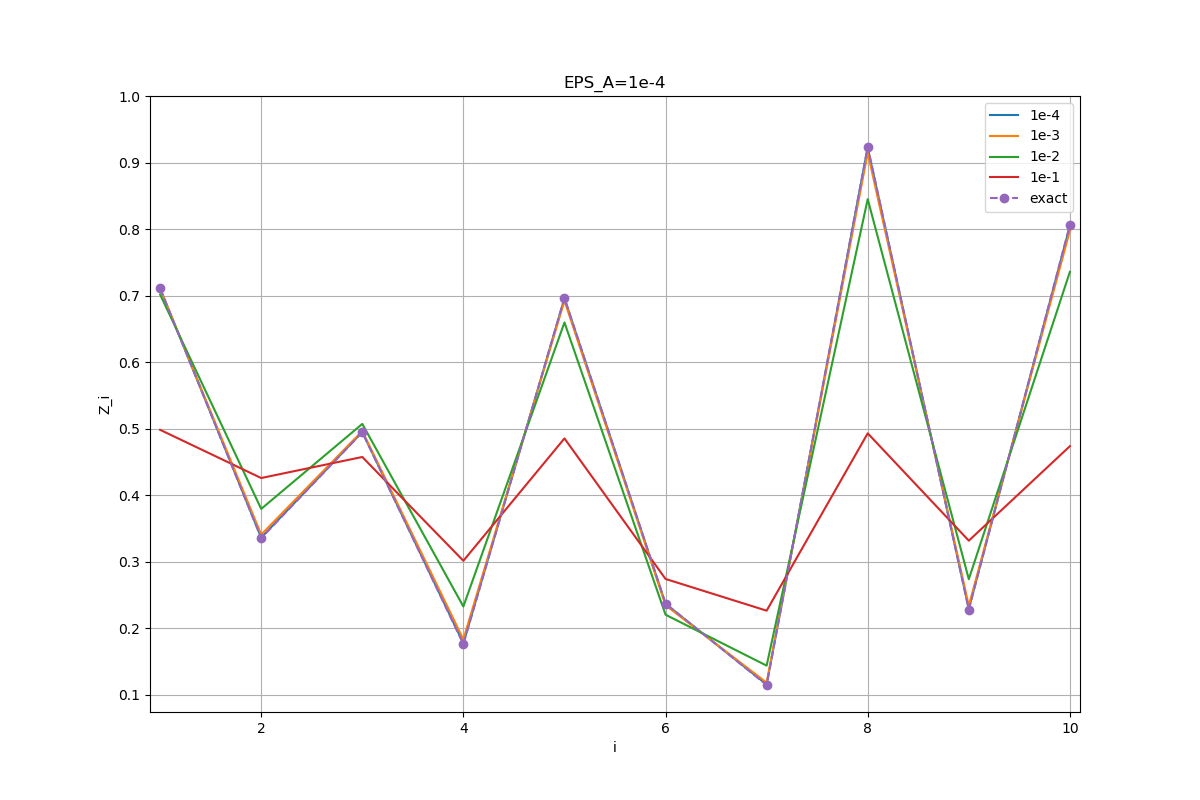


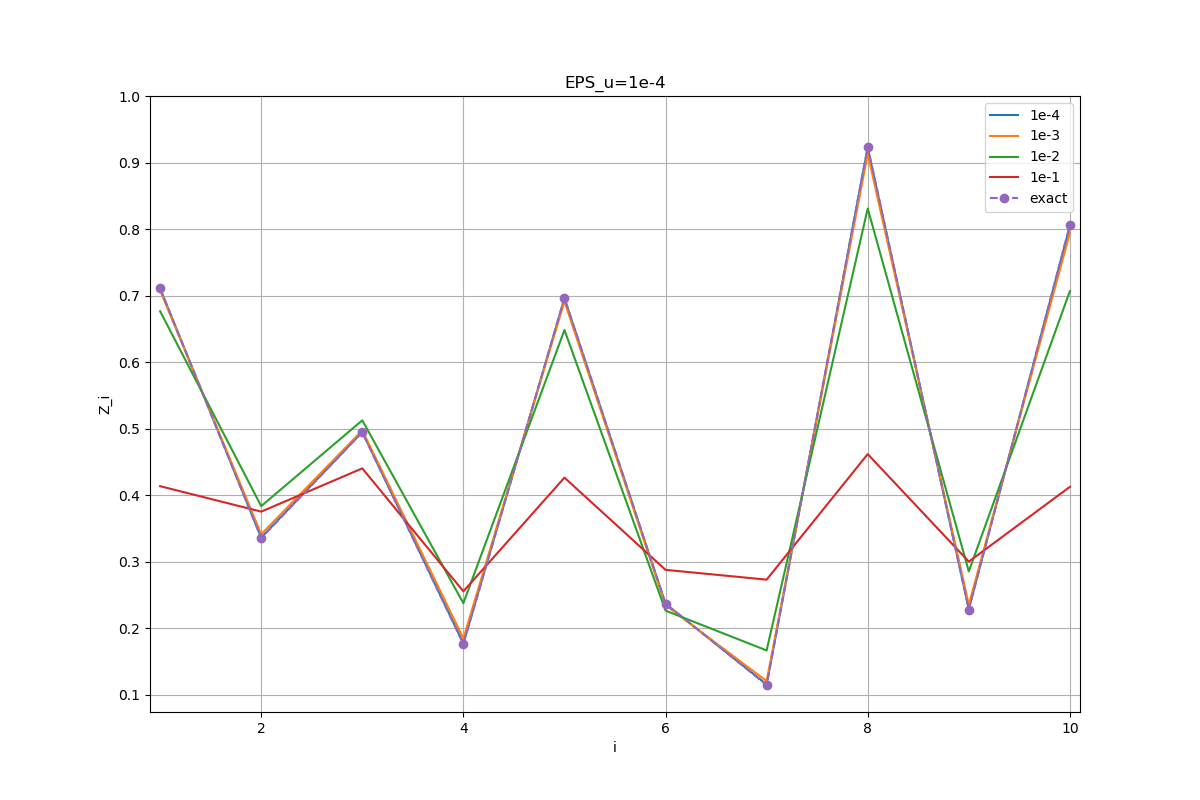
Рисунок . Отклонение от точного решения совместной СЛАУ  
при 

Рисунок . Отклонение от точного решения совместной СЛАУ  
при

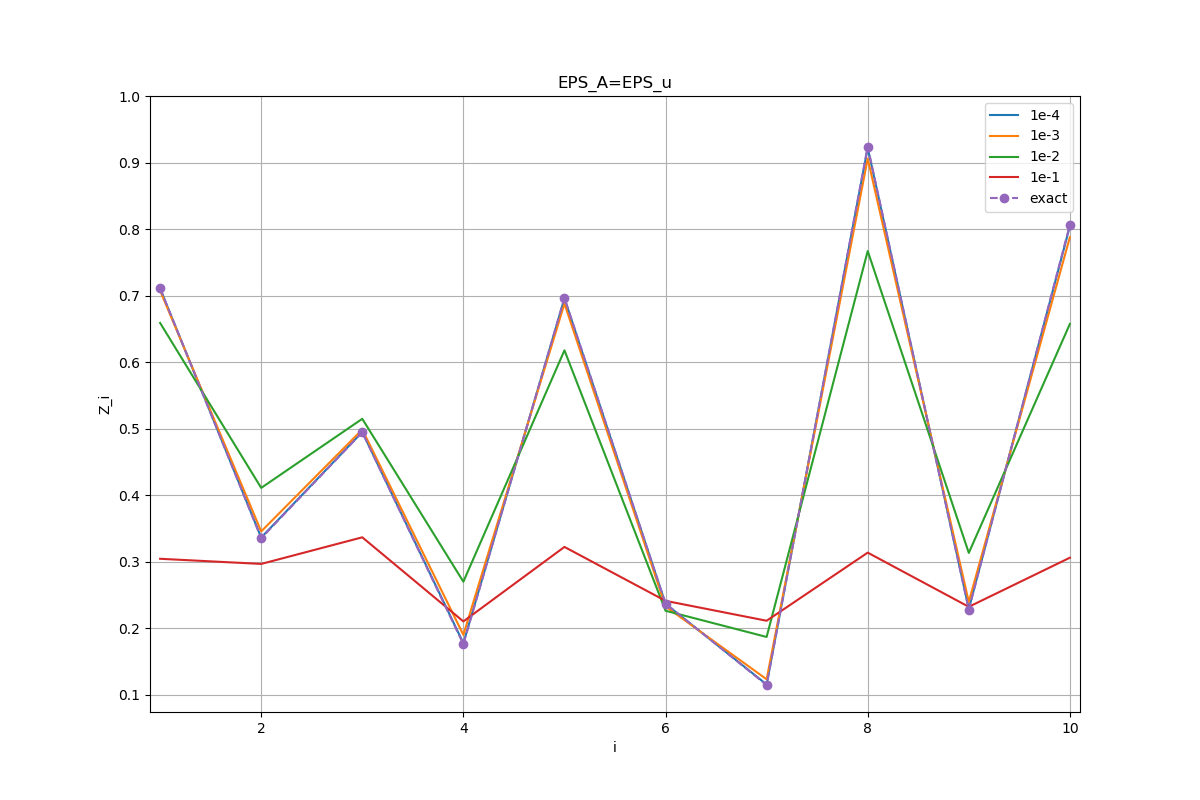


Рисунок . Отклонение от точного решения совместной СЛАУ  
при

Численные результаты работы программы вычисления   
единственного решения совместной СЛАУ при различных приближенных начальных данных приведены в таблице 1.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | 0.0008879 | 0.0009705 | 0.0023426 | 1.4210884 | 0.0027092 | 0.0125654 |
|  |  | 0.0008879 | 0.0097045 | 0.0110763 | 3.6920816 | 0.0137346 | 0.0603990 |
|  |  | 0.0008879 | 0.0970452 | 0.0984137 | 1.9447649 | 0.1073768 | 0.6196012 |
|  |  | 0.0008879 | 0.9704522 | 0.9718146 | 2.8863483 | 0.4991351 | 10.445985 |
|  |  | 0.0088790 | 0.0009705 | 0.0146919 | 2.7004534 | 0.0156754 | 0.0802288 |
|  |  | 0.0088790 | 0.0097045 | 0.0234225 | 1.6144157 | 0.0261661 | 0.1299572 |
|  |  | 0.0887904 | 0.0009705 | 0.1382362 | 2.1324699 | 0.1236674 | 0.8743331 |
|  |  | 0.0887904 | 0.0970452 | 0.2339489 | 2.4760112 | 0.1974988 | 1.6656439 |
|  |  | 0.8879041 | 0.0009705 | 1.3869025 | 2.9753218 | 0.5347660 | 13.451622 |
|  |  | 0.8879041 | 0.9704522 | 2.3474660 | 2.1032838 | 0.7730199 | 31.031588 |

Таблица . Численные значения параметров в случае совместной СЛАУ

1. **Случай несовместной СЛАУ**

Для несовместной СЛАУ графики точного решения и приближенные решения при различных малых возмущениях исходных данных представлены на рисунках 4-6.

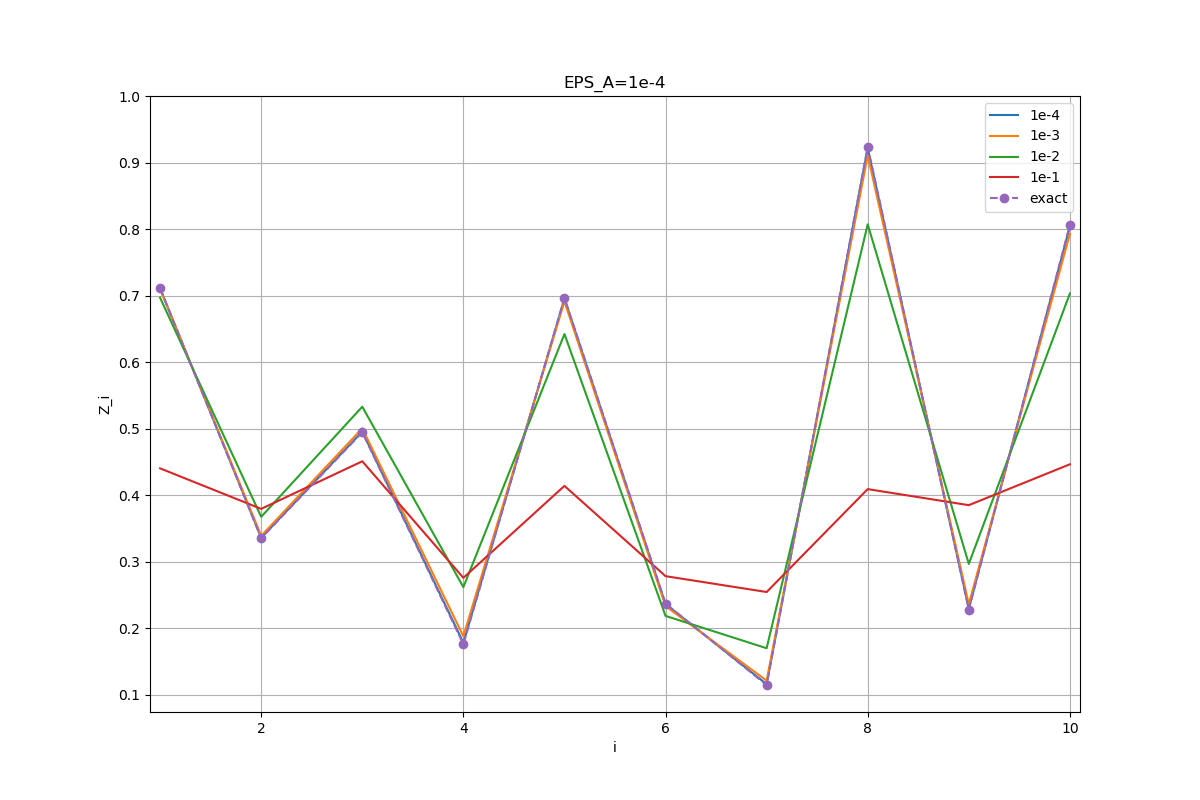
****

Рисунок . Отклонение от точного решения несовместной СЛАУ  
при

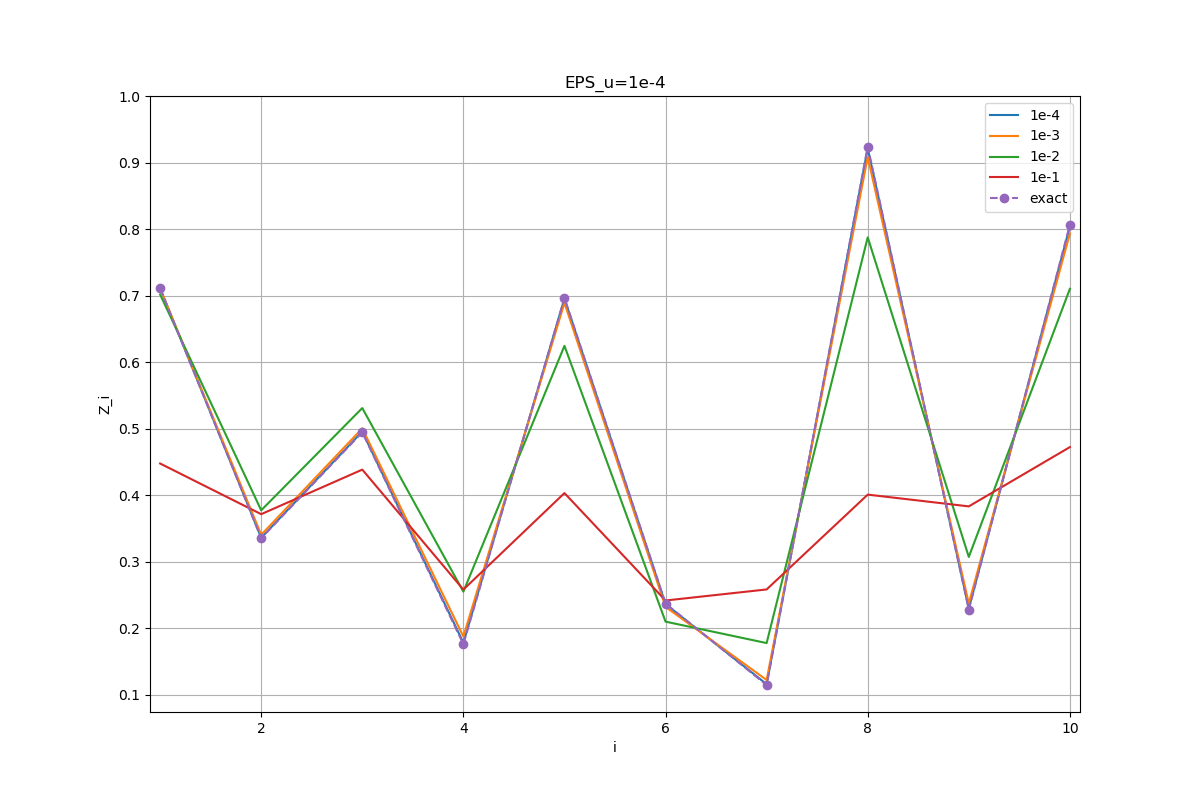
****

Рисунок . Отклонение от точного решения несовместной СЛАУ  
при

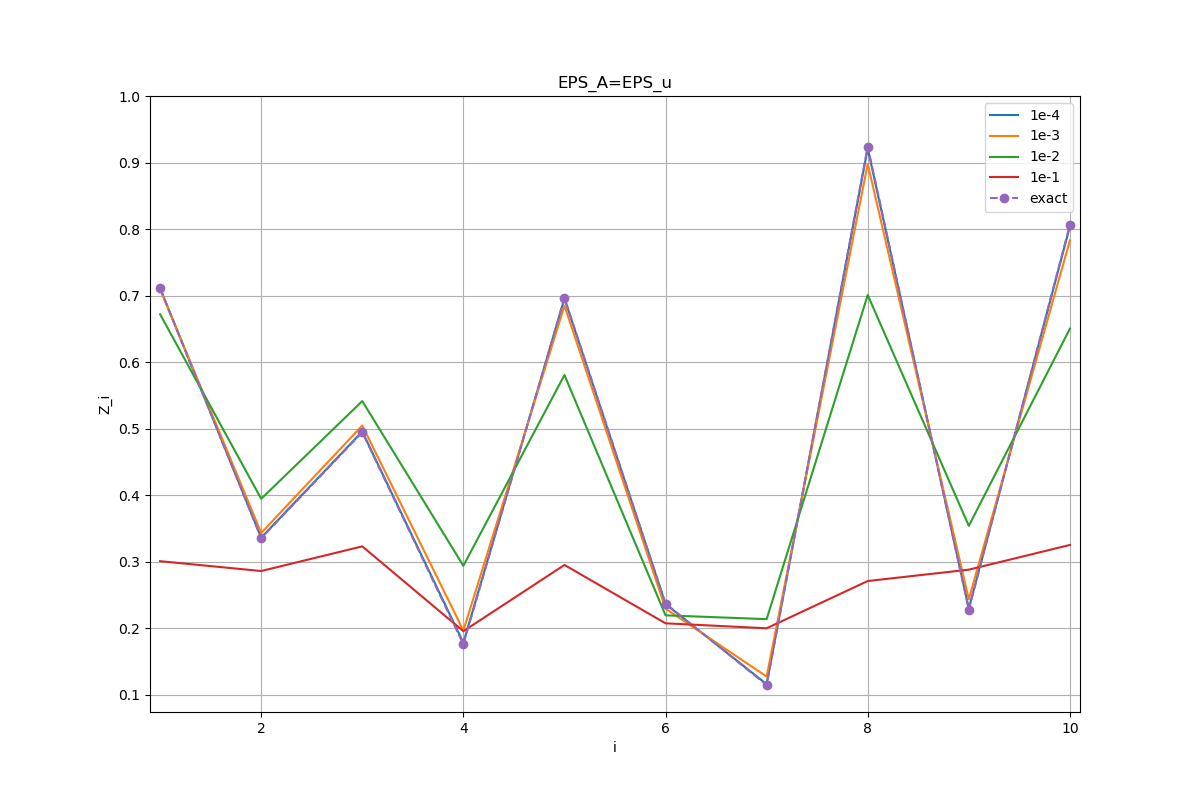
****

Рисунок . Отклонение от точного решения несовместной СЛАУ  
при

Численные результаты работы программы вычисления   
единственного решения несовместной СЛАУ при различных приближенных начальных данных приведены в таблице 2 (цветом выделены случаи с одинаковым порядком погрешности исходных данных).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | 0.0011149 | 0.0012724 | 0.0031345 | 0.0001389 | 0.0031018 | 0.0184774 | 0.0002980 |
|  |  | 0.0011149 | 0.0127243 | 0.0167443 | 0.0022956 | 0.0144161 | 0.0954745 | 0.0036952 |
|  |  | 0.0011149 | 0.1272432 | 0.1531662 | 0.0241860 | 0.1097909 | 1.0045556 | 0.0377251 |
|  |  | 0.0011149 | 1.2724319 | 1.5174473 | 0.2431066 | 0.4840290 | 17.726290 | 0.3780286 |
|  |  | 0.0111495 | 0.0012724 | 0.0199657 | 0.0014637 | 0.0203945 | 0.1189569 | 0.0007790 |
|  |  | 0.0111495 | 0.0127243 | 0.0313547 | 0.0013887 | 0.0298828 | 0.1926473 | 0.0029810 |
|  |  | 0.1114951 | 0.0012724 | 0.1897201 | 0.0163131 | 0.1589630 | 1.3904952 | 0.0102846 |
|  |  | 0.1114951 | 0.1272432 | 0.3145533 | 0.0138160 | 0.2179879 | 2.6063666 | 0.0299145 |
|  |  | 1.1149514 | 0.0012724 | 1.8744508 | 0.1598406 | 0.5738964 | 23.250518 | 0.1069424 |
|  |  | 1.1149514 | 1.2724319 | 3.2806711 | 0.1365022 | 0.7569672 | 53.478029 | 0.3083137 |

Таблица . Численные значения параметров в случае несовместной СЛАУ

1. **Недоопределенная система**

Для недоопределенной СЛАУ графики точного решения и приближенные решения при различных малых возмущениях исходных данных представлены на рисунках 7-9.

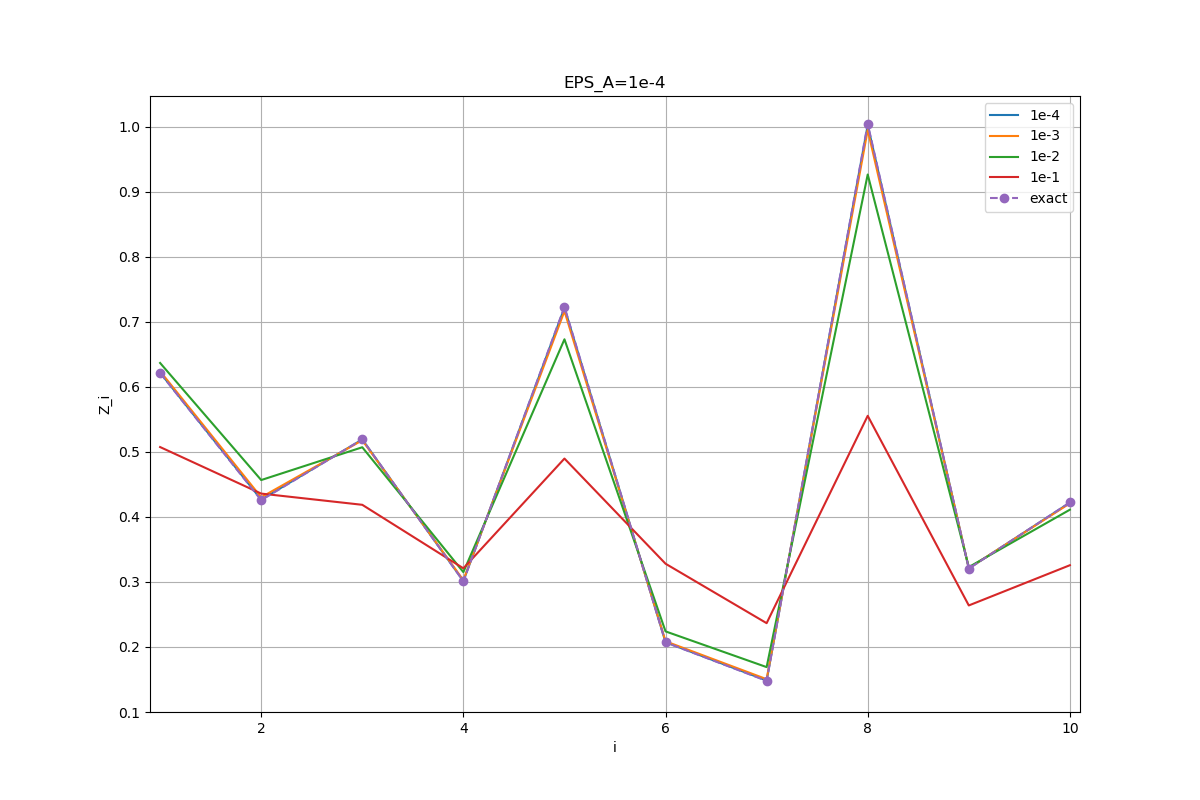
****

Рисунок . Отклонение от точного решения недоопределенной СЛАУ  
при

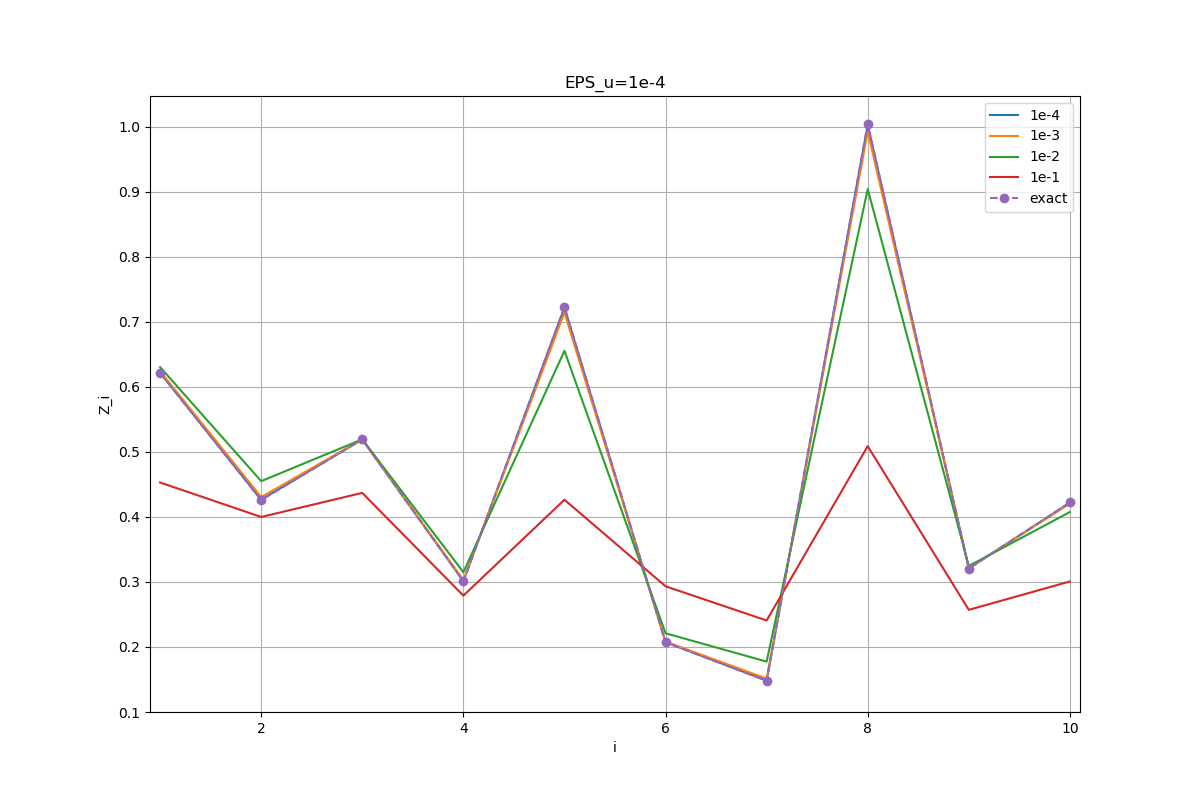
****

Рисунок . Отклонение от точного решения недоопределенной СЛАУ  
при

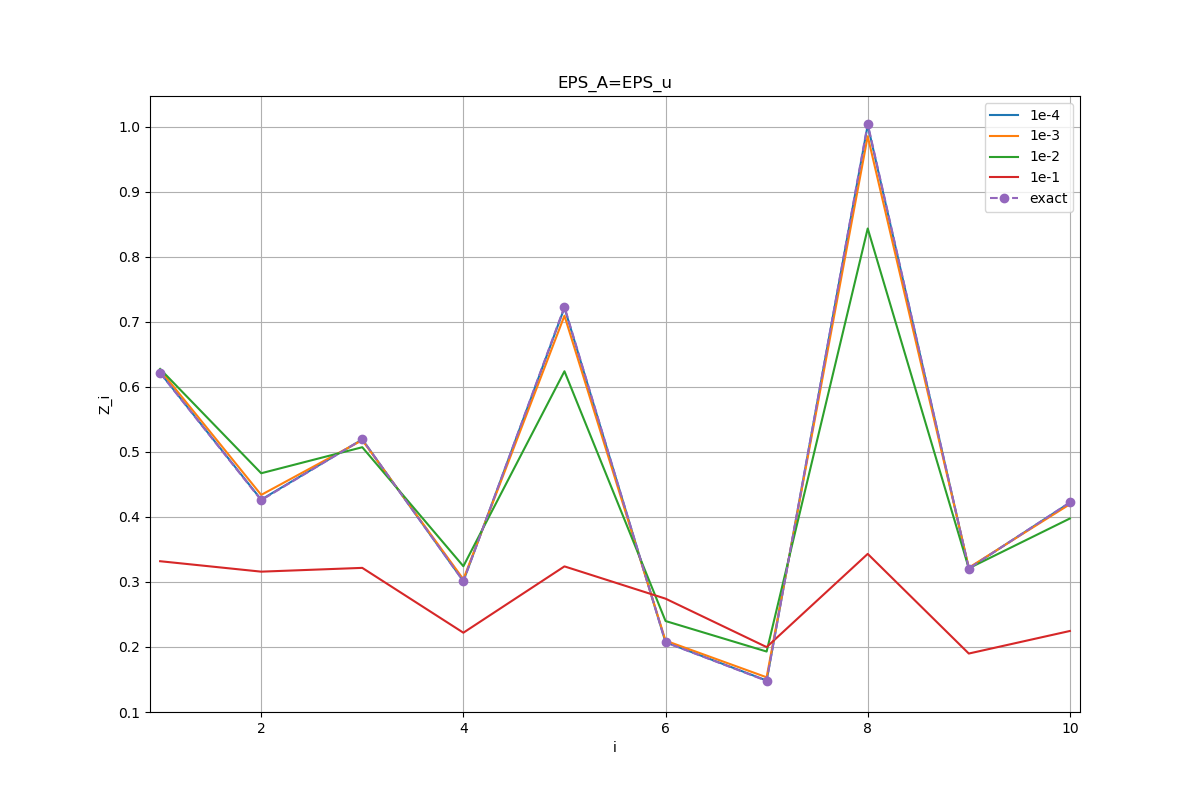
****

Рисунок . Отклонение от точного решения недоопределенной СЛАУ  
при

Для фундаментальной системы решений проведена минимизация общего решения. При полученных значениях свободных переменных получено точное нормальное решение СЛАУ вида:

Численные результаты работы программы вычисления   
решения недоопределенной СЛАУ при различных приближенных начальных данных приведены в таблице 3.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | 0.0007936 | 0.0008732 | 0.0022827 | 2.1759870 | 0.0845514 | 0.0117719 |
|  |  | 0.0007936 | 0.0087322 | 0.0100045 | 2.0961055 | 0.0850578 | 0.0543091 |
|  |  | 0.0007936 | 0.0873218 | 0.0885642 | 2.8900556 | 0.1166923 | 0.5244343 |
|  |  | 0.0007936 | 0.8732176 | 0.8744766 | 1.4082549 | 0.4666367 | 8.2498738 |
|  |  | 0.0079364 | 0.0008732 | 0.0129213 | 2.0471796 | 0.0853238 | 0.0704499 |
|  |  | 0.0079364 | 0.0087322 | 0.0207885 | 3.2175194 | 0.0865798 | 0.1143143 |
|  |  | 0.0793646 | 0.0008732 | 0.1213973 | 1.1705579 | 0.1295090 | 0.7250499 |
|  |  | 0.0793646 | 0.0873218 | 0.2078708 | 1.0899032 | 0.1822295 | 1.3463296 |
|  |  | 0.7936446 | 0.0008732 | 1.2160668 | 3.7451949 | 0.5149826 | 10.758656 |
|  |  | 0.7936446 | 0.8732176 | 2.0976618 | 2.1396705 | 0.7393113 | 25.158846 |

Таблица . Численные значения параметров в случае недоопределенной СЛАУ

1. **Вырожденная система**

Графики точного решения исходной СЛАУ и решения преобразованной СЛАУ при различных малых возмущениях исходных данных представлены на рисунках 10.

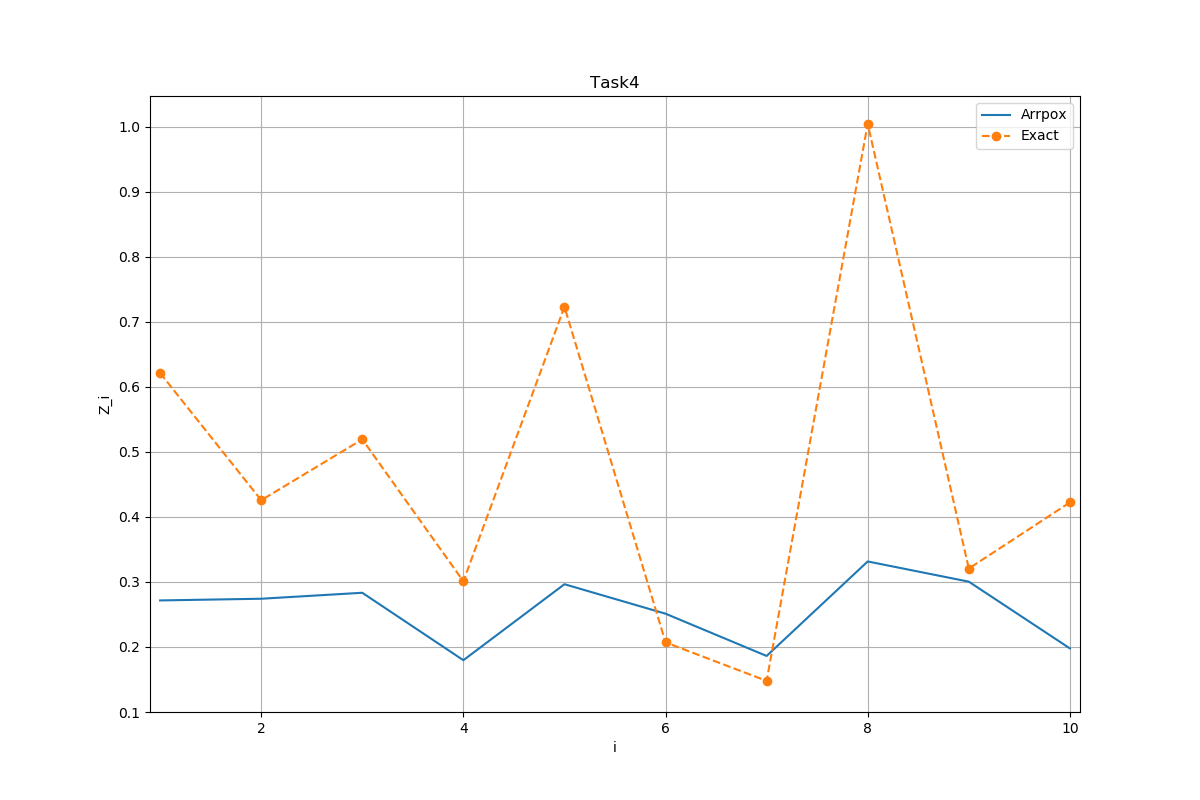
****

Рисунок . Отклонение от исходного решения вырожденной СЛАУ

Численные результаты работы программы вычисления   
решения вырожденной приведены в таблице 4.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 3.3087073 | 1.02443582 | 0.95103968 | 32.881578 |

Таблица . Численные значения параметров в случае вырожденной СЛАУ

**Вывод.**

В ходе выполнения лабораторной работы найдены устойчивые приближения к нормальному решению системы линейных алгебраических уравнений с применением метода регуляризации.

При увеличении степени возмущения исходных данных значение параметра увеличивается на порядок. Также наблюдается заметный рост параметра с ростом параметров возмущения.

При решении несовместной системы с ростом погрешности параметр изменяется так же, как и в случае совместной системы. При этом, во второй задаче имеет большее значение, чем в первой задаче при одинаковых уровнях погрешности.

На графиках показано, что чем больше параметры возмущения, тем больше величина отклонения от точного решения.