Будем решать задачу поиска собственных чисел и собственных векторов для дискретного аналога оператора Лапласа

На тех узлах сетки, где , будем задавать граничное условие .

Введём нумерацию активных узлов (для которых )

Пример:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 |  |
| -1 | 0 | 1 | 2 | -1 |  |
| -1 | 3 | 4 | 5 | -1 (тут u=0) | -1 |
| -1 | 6 | 7 | 8 | 9 |  |
| -1 | -1 | 10 | 11 | 12 |  |
|  |  |  |  |  |  |

Значения типа и известны из граничных условий и равны 0 (условия 1-го рода).

Требуется составить матрицу для дискретного аналога оператора Лапласа. В её -ой строке всегда содержится «» на диагонали и могут присутствовать 4 единицы в столбцах, соответствующих номерам соседей в итоговом массиве неизвестных. Если соседний узел неактивен, его коэффициент равен нулю (за счёт граничного условия)

1. Используйте для вычисления собственных чисел и векторов стандартную процедуру numpy.linalg.eig или numpy.linalg.eigh (для симметричных матриц).
2. Отсортируйте собственные значения по убыванию.
3. Получите собственные вектора, соответствующие нескольким первым собственным значениям.
4. Изобразите каждый выбранный собственный вектор в виде поверхности , разместив его координаты на правильных местах в массиве (используйте )
5. Аналитически для прямоугольной пластины с размерами и получены следующие собственные значения для оператора Лапласа с краевыми условиями первого рода:  
   .  
   При достаточно мелких ячейках сетки близкие к нулю собственные значения должны дискретного и точно совпадать с большой точностью (отсортируйте , ). Напечатайте величину отклонения.
6. Используйте метод обратных итераций для получения ближайшего к нулю (по модулю) собственного значения.

Вместо поиска на каждом шаге решайте систему с матрицей . Текущее приближение для вычислять через отношения Рэлея.   
Критерий остановки: .

1. Найдите собственное число, ближайшее к заданному . Это и его собственный вектор.
2. Проверьте, насколько ускоряется вычисление собственного числа от
   1. Дополнительных сдвигов матрицы на найденное собственное число
   2. Предварительного приведения матрицы к трёхдиагональному виду scipy.linalg.hessenberg.

Используйте метод обратных итераций со сдвигами для построения собственных чисел и векторов, постройте графики собственных функций.