AGH

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA
W KRAKOWIE

Sprawozdanie - laboratorium nr 8

Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach.

Klaudia Fil, 27.04.2019 r.

1. Wstęp teoretyczny

Dla zadanego przedziału $[a,b]$ danych jest *n + 1* punktów, takich że:

$$a=x_0<x_1<...<x_n=b \quad (1)$$

Punkty te pozwalają na określenie przedziału $[a,b]$ na *n* podprzedziałów, czyli $[x_i, x_{i+1}]$.

Funkcję *s(x)* określona na przedziale $[a,b]$ nazywa się funkcją sklejaną stopnia $m(m\geq 1)$,gdy:

1. *s(x)* jest wielomianem stopanie co najwyżej *m* na każdym podprzedziale.
2. $s(x)\in C^m$.

Punkty x_j z równania (1) nazywamy węzłami funkcji sklejanej, możemy więc zapisać funkcję *s(x)* wzorem:

$$s_i(x)=c_{im}x^m+c_{im-1}x^{m-1}+...+c_{i0}x+c_{i0} \text{ , gdzie } x\in(x_i;x_{i+1}) \text{ .} \quad (2)$$

Lub zapisać funkcję interpolującą jako kombinacją liniową elementów bazy $\{s_i(x)\}$:

$$s(x)=\sum_{i=0}^{n-1} c_i s_i(x) \text{ , gdzie } x\in[a,b] \text{ .} \quad (3)$$

Funkcjami najczęściej stosowanymi są sklejane trzeciego stopnia (*m=3*), nazywamy tak funkcję interpolujące, jeżeli:

$$s(x_i)=f(x_i)=y_i \text{ ,} \qquad i=0,1,...,n;n\geq 2 \quad (4)$$

Do określenia funkcji *s(x)* stopnia trzeciego potrzebne jest wyznaczenie n+3 parametrów. Ponieważ ilość węzłów jest równa n+1 pozostają 2 stopnie swobody, dlatego też nakłada się dwa dodatkowe warunki zależne od funkcji *f(x)* lub od znajomości jej zachowania w pobliżu końców przedziału $[a,b]$:

1. I pochodna : $$\begin{array}{l} s^{(1)}(a+0)=\alpha_1 \\ s^{(1)}(b-0)=\beta_1 \end{array} \text{ ,} \quad (5)$$
2. II pochodna : $$\begin{array}{l} s^{(2)}(a+0)=\alpha_2 \\ s^{(2)}(b-0)=\beta_2 \end{array} \text{ ,} \quad (6)$$
3. warunek na I i II pochodną: $$\begin{array}{c} s^{(i)}(a+0)=s^{(i)}(b-0) \\ i=1,2 \end{array} \text{ .} \quad (7)$$

Interpolację funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach oznaczamy jako:

$$M_j = s^{(2)}(x_j) \quad , \qquad j = 0,1,\ldots,n \tag{8}$$

Zgodnie z założeniem druga pochodna funkcji *s(x)* jest ciągła i liniowa w każdym z przedziałów $[x_{i-1}, x_i]$, możemy więc zapisać:

$$\begin{gathered} s_{i-1}^{(2)}(x) = M_{i-1}\frac{x_i - x}{h_i} + M_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i} \\ x \in [x_{i-1}, x_i] \\ h = x_i - x_{i-1} \end{gathered} \quad . \tag{9}$$

Całkując dwukrotnie wyrażenie (9) otrzymujemy:

$$s_{i-1}(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_j} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i \quad , \tag{10}$$

do wyznaczenia brakujących stałych A_i, B_i wykorzystujemy warunek interpolacji:

$$\begin{aligned} s_{i-1}(x_{i-1}) &= M_{i-1}\frac{h_i^2}{6} + B_i = y_{i-1} \\ s_{i-1}(x_i) &= M_i\frac{h_i^2}{6} + A_i h_i + B_i = y_i \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} B_i &= y_{i-1} - M_{i-1}\frac{h_i^2}{6} \\ A_i &= \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_i - M_{i-1}) \end{aligned} \quad . \tag{11}$$

Natomiast w punkcje x_i pochodna musi być ciągła, a więc:

$$\begin{gathered} s_{i-1}^{(1)}(x_i) = s_i^{(1)}(x) \\ s_{i-1}^{(1)}(x_i - 0) = \frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{h_i}{3}M_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \\ s_i^{(1)}(x_i + 0) = \frac{-h_{i+1}}{3}M_i - \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} \end{gathered} \quad . \tag{12}$$

Porównując prawe strony z równania (12) dla każdego z węzłów uzyskujemy *n-1* równań, które można zapisać w postaci:

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n-1 \tag{13}$$

gdzie:

$$\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \quad , \tag{14}$$

$$\mu_i = 1 - \lambda_i \quad , \tag{15}$$

$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right) = 6 f(x_{i-1}; x_i; x_{i+1}) \quad . \tag{16}$$

Do układu równań należy dołączyć jeszcze 2 równania wynikające z dodatkowych warunków:

$$\begin{aligned} 2M_0 + M_1 &= d_0 \\ M_{n-1} + 2M_n &= d_n \end{aligned} \quad \text{- dla warunków z I pochodną, gdzie} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{6}{h_1} \left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \alpha_1 \right) \\ d_n &= \frac{6}{h_1} \left(\beta_1 - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} \right) \end{aligned} \quad , \tag{18}$$

oraz

$$\begin{aligned} M_0 &= \alpha_2 \\ M_n &= \beta_2 \end{aligned} \quad \text{- dla warunków z II pochodną.} \tag{19}$$

Otrzymujemy finalny układ równań, który w postaci macierzowej wygląda następująco:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ \beta \end{bmatrix} \quad . \tag{20}$$

Do jego rozwiązania wykorzystuje się wzór (10).

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

Wykorzystując metodę interpolacji funkcji sklejanych należy poddać analizie dwie funkcje:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\ f_2(x) &= \cos(2x) \end{aligned} \quad . \tag{21}$$

Przyjęto warunki na II pochodną równą 0 - $\alpha = \beta = 0$, przedział interpolacji $x \in [-5, 5]$ oraz liczbę węzłów $n = 5, 8, 21$. Sporządzono wykresy funkcji interpolującej i interpolowanej dla każdego przypadku.

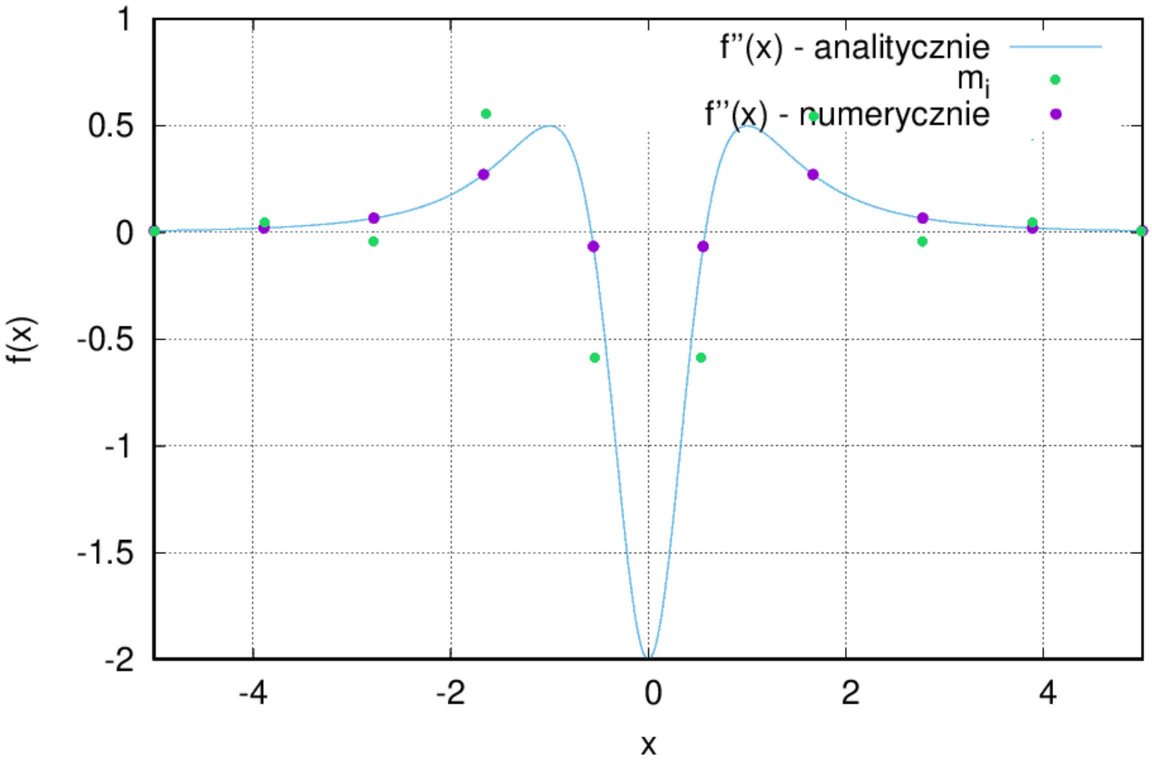
Ponadto dla $f_1(x)$ oraz $n=10$ wyznaczono wartości drugich pochodnych i porównano je z dokładniejszymi wartościami obliczonymi ze wzoru:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \approx \frac{f(x-\Delta x) - 2f(x) + f(x+\Delta x)}{(\Delta x)^2} \quad , \tag{22}$$

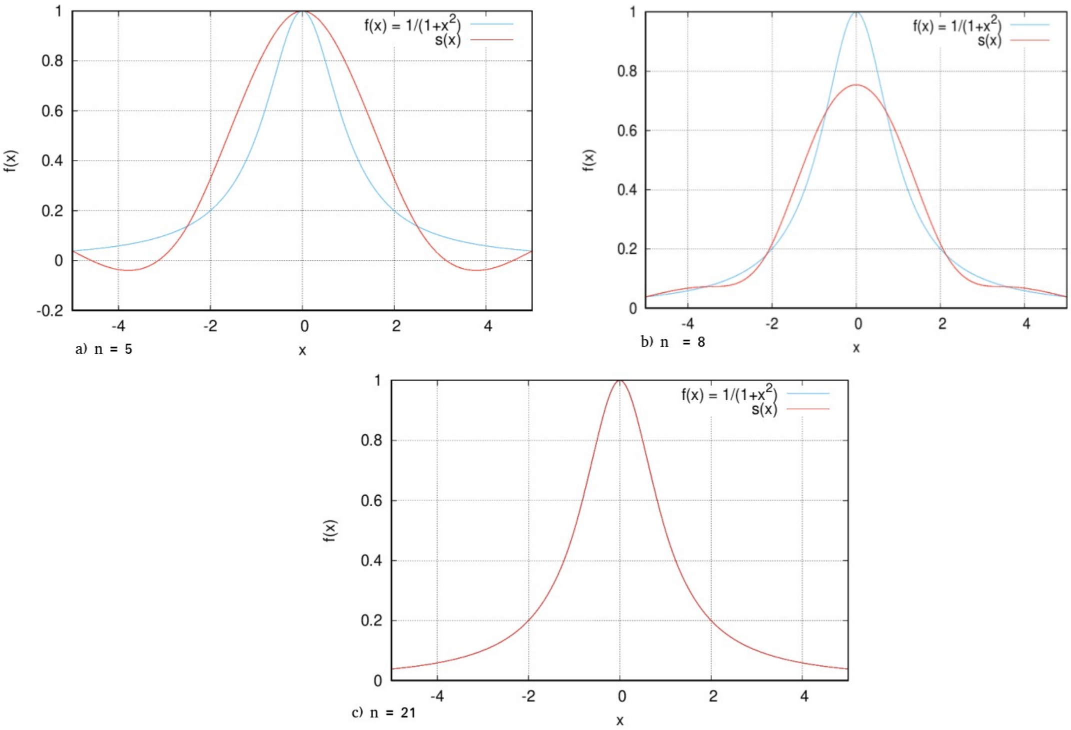
za Δx przyjęto 0.01.

2.2. Wyniki

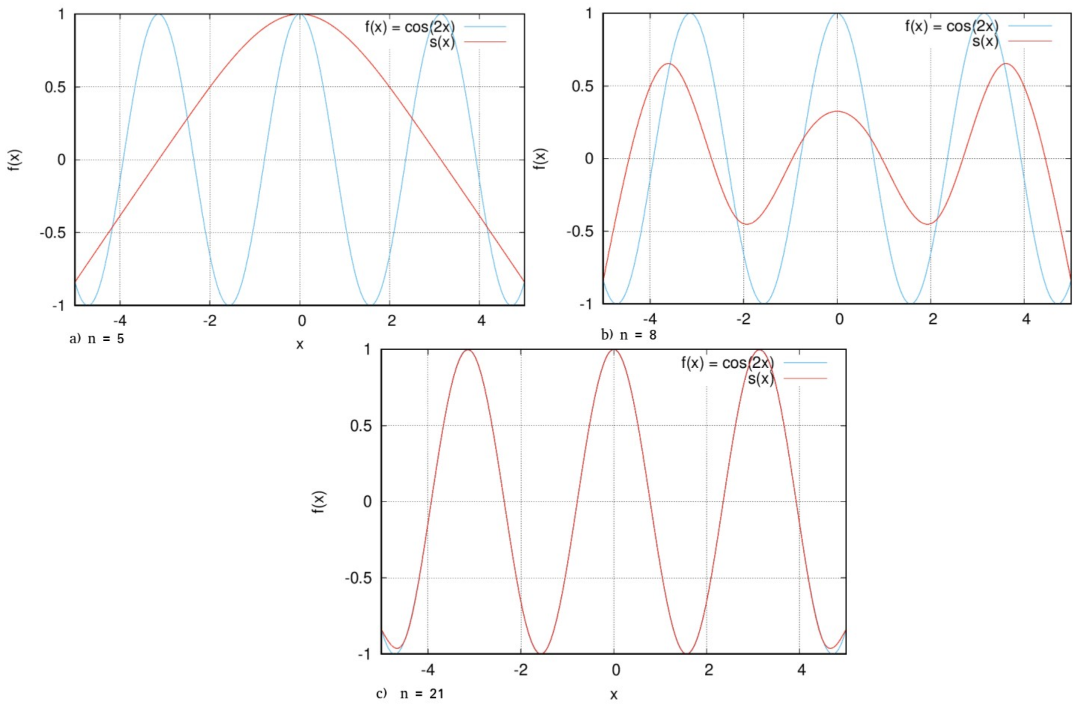
Dzięki programowi w języku C, oraz funkcji z biblioteki numerycznej Numerical Recipes stworzono odpowiednie funkcje, które wykorzystując skrypt Gnuplota pozwoliły na wygenerowanie wykresów:



Rysunek 1.: Wartości drugich pochodnych wyznaczone algorytmem interpolacji funkcji $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ kubicznymi funkcjami sklejanymi dla *n = 10* węzłów porównane z wartościami wynikającymi z ilorazu różnicowego oraz z pochodną wyprowadzoną analitycznie.



Rysunek 2. a) - c): Wyniki interpolacji funkcji $f_1(x)$ kubicznymi funkcjami sklejanymi dla *n* węzłów.



Rysunek 3. a) - c): Wyniki interpolacji funkcji $f_2(x)$ kubicznymi funkcjami sklejanymi dla *n* węzłów.

Analizując rysunek 1., na którym widać wyznaczone wartości funkcji $f_1(x)$ dla 10 węzłów, możemy zauważyć przewagę w dokładności wartości wynikającymi z pochodnej wyprowadzonej analitycznie. Chociaż na krańcach przedziału punkty te się pokrywają, jednak dla środkowych wartości odbiegają.

Dla rysunku 2. a)-c) wraz we wzrostem ilości węzłów możemy zaobserwować zwiększającą się jakość interpolacji. Dla wartości *n = 21* funkcja ta pokrywa się w całości przedziału z funkcją analityczną. Dodatkowo można zauważyć, że dla nieparzystej ilości węzłów ekstremum funkcji interpolowanej i interpolującej pokrywają się.

W przypadku funkcji sinusoidalnych z rysunku 3. a)-c) nasuwają się podobne wnioski jak w przypadku poprzedniego rysunku, tj. zwiększona ilość węzłów wpływa na poprawę wyników interpolowania. Kolejną analogią, jest niemal idealne odwzorowanie na rysunku 3c) jednak należy zauważyć delikatne rozbieżności na krańcach przedziału, które można zniwelować większą ilością węzłów.

3. Wnioski

Interpolacja funkcji sklejanymi w bazie jest szybką i efektywną metodą dla równoległych węzłów. Niewielka ilość węzłów (*n=21*) wystarczyła na uzyskanie relatywnie dobrego wyniku, a wraz z jej wzrostem możliwa jest widoczna poprawa interpolacji. Należy uważać szczególnie na funkcje okresowe, ponieważ tak jak w naszym przypadku rysunek 3a) odbiega znacznie od oczekiwanego, nawet ilość 21 węzłów nie zagwarantowała idealnego wyniku jak w przypadku $f_1(x)$, gdzie rysunek 2c) pokrywa się idealnie.