AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA
W KRAKOWIE

Sprawozdanie - laboratorium nr 12

Całkowanie numeryczne metodą Romberga

Klaudia Fil, 26.05.2019 r.

1. Wstęp teoretyczny

Całkowanie numeryczne oznacza zastosowanie metod numerycznych w celu znalezienia przybliżonej wartości całki oznaczonej:

$$C=\int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

W przypadku wzoru złożonego trapezów dzielimy przedział całkowania na *m* podprzedziałów:

$$h=\frac{b-a}{m} \quad , \tag{2}$$

$$f_k=f(a+k\cdot h) \quad , \tag{3}$$

$$S(f)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{2}h(f_k+f_{k+1})=h(\frac{1}{2}f_0+f_1+...+f_{m-1}+\frac{1}{2}f_m) \quad . \tag{4}$$

Zakładamy, że

$$f\in C^2([a,b]) \quad , \tag{5}$$

błąd złożonego wzoru trapezów wynosi:

$$E(f)=-\frac{h^3}{12}\sum_{k=0}^{m-1}f^{(2)}(\xi_k)=-\frac{(b-a)^3}{12m^2}\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}f^{(2)}(\xi_k) \quad , \quad \xi_k\in(a+kh,a-(k+1)h) \quad , \tag{6}$$

gdzie wyraz

$$E(f)=-\frac{h^3}{12}\sum_{k=0}^{m-1}f^{(2)}(\xi_k)=-\frac{(b-a)^3}{12m^2}\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}f^{(2)}(\xi_k) \quad , \quad \xi\in[a,b] \tag{7}$$

jest średnią arytmetyczną wartości drugiej pochodnej w przedziale całkowania.

Finalnie błąd ten przyjmuje postać:

$$E(f)=-\frac{(b-a)^3}{12m^2}f^{(2)}(\xi) \quad , \tag{8}$$

zależy od długości przedziału, ale zwiększając *m* można istotnie ograniczyć jego wartość.

Metoda Romberga opiera się na wzorze trapezów, gdzie dzielimy przedział analogicznie do (2) i wykorzystujemy wzór opierający się na (4):

$$S_n=h(\sum_{k=0}^{n}f(a+ih)-\frac{f(a)+f(b)}{2}) \quad , \text{jeśli} \quad x\in[0,1] \quad . \tag{9}$$

Dla kolejnych wartości *n* dostajemy poniższy ciąg przybliżeń wartości całki:

$$S_0=\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}f(1)$$
$$S_2=\frac{1}{4}f(0)+\frac{1}{2}\{f(\frac{1}{2})\}+\frac{1}{4}f(1) \quad . \tag{10}$$
$$S_4=\frac{1}{8}f(0)+\frac{1}{4}\{f(\frac{1}{4})+f(\frac{1}{2})+f(\frac{3}{4})\}+\frac{1}{8}f(1)$$

Łatwo można zauważyć, że do obliczenia T_{2n} można wykorzystać już obliczone T_n :

$$S_2=\frac{1}{2}S_0+\frac{1}{2}\{f(\frac{1}{2})\}$$
$$S_4=\frac{1}{2}S_2+\frac{1}{4}\{f(\frac{1}{4})+f(\frac{3}{4})\} \quad , \tag{11}$$
$$S_6=\frac{1}{2}S_4+\frac{1}{8}\{f(\frac{1}{8})+f(\frac{3}{8})+f(\frac{5}{8})+f(\frac{7}{8})\}$$

co ogólnie można przedstawić wzorem:

$$S_{2n}=\frac{1}{2}S_{2(n-1)}+h_{2n}\sum_{i=1}^{n}f(a+(2i-1)h) \quad , \tag{12}$$

z krokiem całkowania

$$h_{2n}=\frac{b-a}{2^n} \quad , \tag{13}$$

który jednocześnie jest odległością między *n+1* węzłami.

Do obliczenia całki wykorzystujemy rekurencyjną formułę z wzorem trapezów

$$R_{0,0}=\frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]$$
$$R_{n,0}=\frac{1}{2}R_{n-1,0}+\frac{b-a}{2^n}\sum_{i=1}^{2^{n-1}}f\left(a+(2i-1)\frac{b-a}{2^n}\right) \quad . \tag{14}$$
$$R_{n,m}=R_{n,m-1}+\frac{4^m R_{n,m-1}-R_{n-1,m-1}}{4^m-1}$$

Wartości kolejnych przybliżeń można uporządkować w postaci tablicy, obliczenia przerywa się, gdy spełniony jest warunek

$$|R_{k,k}-R_{k-1,k-1}| \quad , \quad \varepsilon\in R \quad , \tag{15}$$

lub po osiągnięciu liczby iteracji *k*. Metoda ta jest przykładem kwadratury adaptacyjnej.

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

Celem zadania jest zaprogramowanie metody Romberga całkowania numerycznego, w celu uzyskania tablicy całek:

$$\begin{array}{lllll} D_{0,0} & & & & \\ D_{1,0} & D_{1,1} & & & \\ D_{2,0} & D_{2,1} & D_{2,2} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ D_{n,0} & D_{n,1} & D_{n,2} & \dots & D_{n,n} \end{array} \quad . \tag{16}$$

Gdzie poszczególne elementy określone są wzorami (13) z krokiem całkowania (12).

Wykorzystując program należy obliczyć wartość numeryczną całek z funkcji:

- $$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx \quad , \tag{17}$$
- $$\int_{-1}^1 \frac{\cos(x)-e^x}{\sin(x)} dx \quad , \tag{18}$$
- $$\int_1^\infty \frac{1}{x e^x} dx \quad . \tag{19}$$

Dla pierwszej i trzeciej przyjmując wartość *n=7*, dla drugiej *n=15*. W przypadku ostatniej z nich należało dokonań podstawienia $x=\frac{1}{t}$ do postaci akceptowalnej przez program.

2.2. Wyniki

Dzięki napisanemu programowi uzyskano następujące wyniki przedstawione w tabelach:

w	$D_{w,0}$	$D_{w,w}$
0	0.920735	0.920735
1	0.939793	0.946146
2	0.944514	0.946083
3	0.945691	0.946083
4	0.945985	0.946083
5	0.946059	0.946083
6	0.946077	0.946083
7	0.946082	0.946083

Tabela 1. Tabela z wartościami elementów $D_{w,0}$ oraz $D_{w,w}$ z tablicy całek dla $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx \quad , \quad w \in \{0, \dots, n\}$.

w	$D_{w,0}$	$D_{w,w}$
0	-2.79321	-2.79321
1	-2.3966	-2.2644
2	-2.28522	-2.247
3	-2.25633	-2.2466
4	-2.24903	-2.24659
5	-2.2472	-2.24659
6	-2.24674	-2.24659
7	-2.24663	-2.24659
8	-2.2466	-2.24659
9	-2.24659	-2.24659
10	-2.24659	-2.24659
11	-2.24659	-2.24659
12	-2.24659	-2.24659
13	-2.24659	-2.24659
14	-2.24659	-2.24659
15	-2.24659	-2.24659

Tabela 2. Tabela z wartościami elementów $D_{w,0}$ oraz $D_{w,w}$ z tablicy całek dla

$$\int_{-1}^{1} \frac{\cos(x)-e^x}{\sin(x)} dx \quad , \quad w \in \{0,\ldots,n\} \quad .$$

w	$D_{w,0}$	$D_{w,w}$
0	0.18394	0.18394
1	0.227305	0.24176
2	0.219834	0.215716
3	0.219351	0.21937
4	0.219384	0.21941
5	0.219384	0.219383
6	0.219384	0.219384
7	0.219384	0.219384

Tabela 3. Tabela z wartościami elementów $D_{w,0}$ oraz $D_{w,w}$ z tablicy całek dla

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x e^x} dx \quad , \quad w \in \{0,\ldots,n\} \quad .$$

3. Wnioski

Przedstawiono wyniki z pierwszej kolumny, które wynikają wprost z metody trapezów dla zwiększających się węzłów, oraz te znajdujące się na diagonali, które są efektem wykorzystania metody Romberga.

Łatwo zauważyć, że wynik stosunkowo najpoprawniejszy (uwzględniamy błędy zaokrąglenia, spowodowane ograniczonym miejscem w pamięci) dla drugiego przypadku został szybciej osiągnięty na diagonali. Różnice pomiędzy nimi na poziomie tej samej iteracji te nie są bardzo znaczące. Wraz z wzrostem osiągamy lepsze przybliżenia, co jest zgodne ze wzorem (8), mówiącym o odwrotnej proporcji liczby iteracji to wielkości błędu.

Szybciej poprawniejsze przybliżenie znajdziemy na przekątnej tablicy, jednak możemy stwierdzić, że dla odpowiedniej liczby iteracji metoda ta już w pierwszej kolumnie da nam relatywnie dobre przybliżenie, jednak kosztem pamięci obliczeniowej (większa tablica).