AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA
W KRAKOWIE

Sprawozdanie - laboratorium nr 6

Poszukiwanie zer wielomianów metodą iterowanego dzielenia

(metoda siecznych)

Klaudia Fil, 03.04.2019 r.

1. Wstęp teoretyczny

Jedną z metod wyznaczania pojedynczych pierwiastków rzeczywistych równań nieliniowych jest metoda Regula Falsi, w której wykorzystuje się założenie lokalnej liniowości funkcji (fałszywe), ponadto:

a) w przedziale $[a,b]$ funkcja ma tylko jeden pierwiastek pojedynczy,

b) $f(a)f(b)<0$,

c) funkcja jest klasy C^2 ,

d) pierwsza i druga pochodna nie zmieniają znaku w przedziale $[a,b]$.

Kolejne przybliżenia wyznaczone między punktami $A(a,f(a))$ oraz $B(b,f(b))$ pozwalają wyznaczyć prostą o równaniu:

$$y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a) \quad , \tag{1}$$

jako kolejne przybliżenia pierwiastków można potraktować miejsca, w których te proste przecinają się z osią *x:*

$$x_1=a-\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}\cdot(b-a) \quad . \tag{2}$$

Obliczenia należy przerwać, gdy $f(x_1)=0$, w przeciwnym razie na końcach którego z dwóch przedziałów wartość funkcji mają różne znaki, przez te punkty poprowadzona zostanie prosta. Wadą tej metody jest wolna zbieżność, której rząd jest określony parametrem $p=1$.

Metoda siecznych jest modyfikacją metody Regula Falsi. Polega ona na przeprowadzeniu prostej przez dwa ostatnie przybliżenia x_k i x_{k-1} (metoda dwupunktowa). Kolejne przybliżenia wyznacza się według rekurencji:

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)(x_k-x_{k-1})}{k(x_k)-f(x_{k-1})} \quad , \tag{3}$$

zbieżność metody jest większa niż w Regula Falsi, wynosi $p=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\approx 1.618$.

Należy przyjąć założenie, że $|f(x_k)|$ mają tworzyć ciąg wartości malejących, jeżeli w kolejnych iteracjach $|f(x_k)|$ zaczynają rosnąć, należy przerwać obliczenia i ponownie wyznaczyć punkty startowe zawężając przedział izolacji.

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

Dany jest wielomian, którego zera chcemy znaleźć:

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x^1+a_0=0 \quad , \tag{4}$$

jeśli podzielimy wielomian przez wyraz $(x-x_j)$ to otrzymamy:

$$f(x)=(x-x_j)(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_0)+R_j \quad . \tag{5}$$

Współczynniki *b* dla nowego wielomianu, wyznaczamy rekurencyjnie:

$$\begin{aligned} &b_n=0 \\ &b_k=a_{k+1}+x_j b_{k+1} \quad \text{, dla} \quad k=n-1,n-2,\ldots,0 \\ &R_j=a_0+x_j b_0 \end{aligned} \tag{6}$$

Wykorzystując metodę siecznych, oraz znając dwa początkowe przybliżenia x_{j-1} i x_j oraz reszty R_{j-1} i R_j możemy wyznaczyć iteracyjnie zera wielomianu wykorzystując wzór:

$$x_{j+1}=x_j-\frac{R_j(x_j-x_{j-1})}{R_j-R_{j-1}} \quad . \tag{7}$$

Wielomianem do rozwiązania jest $f(x)=x^5+14x^4+33x^3-92x^2-196x+240$, wartościami startowymi $x_0=0$ i $x_1=0.1$, a iteracją maksymalną $IT_{MAX}=30$.

2.2. Wyniki

Dzięki odpowiednio zaimplementowanemu algorytmowi udało się wyznaczyć kolejne przybliżenia dla każdego z pierwiastków. Na potrzeby zadania przyjęto punkt przerwania pętli w momencie, gdy wartość będzie bliska zeru: $x_1-x_0<10^{-7}$. Wartości kolejnych przybliżeń wypisane zostały w tabelach 1) – 5).

1)

L	it	x_{it+1}	R_{it+1}
1	1	1.17156	-34.2531
1	2	1.02692	-5.84693
1	3	0.997147	0.628384
1	4	1.00004	-0.00803032
1	5	1	-1.05E-05
1	6	1	1.76E-10

2)

L	it	x_{it+1}	R_{it+1}
2	1	-6.14612	-211.972
2	2	-47.6089	3.63E+06
2	3	-6.14855	-212.305
2	4	-6.15097	-212.637
2	5	-4.60089	-34.2831
2	6	-4.30293	-14.1731
2	7	-4.09294	-3.65601
2	8	-4.01994	-0.732267
2	9	-4.00166	-0.0598706
2	10	-4.00003	-0.00116616
2	11	-4	-1.93E-06
2	12	-4	-6.28E-11

3)

L	it	x_{it+1}	R_{it+1}
3	1	11.7417	3122.3
3	2	0.317661	-57.5873
3	3	0.524549	-54.7308
3	4	4.48854	270.001
3	5	1.19265	-37.8866
3	6	1.59822	-21.4276
3	7	2.12622	7.84603
3	8	1.9847	-0.913902
3	9	1.99947	-0.0320206
3	10	2	0.00013931
3	11	2	-2.11E-08
3	12	2	-1.42E-14

4)

L	it	x_{it+1}	R_{it+1}
4	1	-2.29008	5.47346
4	2	-2.79641	1.46656
4	3	-2.98174	0.128181
4	4	-2.99949	0.00360434
4	5	-3	9.38E-06
4	6	-3	6.90E-10
4	7	-3	0

5)

L	it	x_{it+1}	R_{it+1}
5	1	-10	-3.55E-14
5	2	-10	0

Tabele 1) – 5): Tabele przybliżeń miejsc zerowych, w kolumnach kolejno: L- numer miejsca zerowego, it – numer iteracji, x_{it+1} - przybliżenie miejsca zerowego w danej iteracji, R_{it+1} - reszta z dzielenia wielomianu w danej iteracji.

Wszystkie wartości wyznaczonych pierwiastków okazały się z dużą dokładnością zgodne z teoretycznymi, co więcej w żadnym z przypadków nie osiągnięto limitu $IT_{MAX}=30$.

3. Wnioski

Metoda siecznych pozwala na uzyskanie relatywnie poprawnych wyników, należy jednak zaznaczyć, że wyznaczanie pierwiastków polegające na metodach iteracyjnych daje tylko przybliżenie. Do każdego kolejnego pierwiastka wykorzystujemy zmodyfikowany już wielomian o mniejszym stopniu, co może mieć wpływ na ilość iteracji potrzebnych do uzyskania satysfakcjonującego wyniku.