AGH

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA
W KRAKOWIE

Sprawozdanie - laboratorium nr 11

Odszumianie sygnału przy użyciu FFT – splot funkcji

Klaudia Fil, 18.05.2019 r.

1. Wstęp teoretyczny

Kiedy mamy do czynienia z funkcją okresową $f(x)$, wówczas łatwiej do jej interpolacji zamiast wielomianów, użyć wielomianów trygonometrycznych tz. rozwinąć ją w szereg Fouriera:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\right) \quad \text{, gdzie} \tag{1}$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(kt)dt \quad , \tag{2}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(kt)dt \quad . \tag{3}$$

Funkcje można zapisać również w postaci zespolonego szeregu Fouriera:

$$\hat{f}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-Ikt}dt \quad . \tag{4}$$

Szybką transformatą Fouriera (FFT) nazywamy algorytm pozwalający policzyć dyskretną transformatę oraz do niej odwrotną w wydajny sposób.

Jednym z najprostszych algorytmów FFT jest Radix-2, którego celem jest obliczenie współczynników transformaty Fouriera z jak najmniejszym nakładem obliczeniowym.

Zakładamy, że liczba całkowita węzłów jest potęgą 2:

$$x_j=\frac{2\pi}{N}j \quad \text{, dla} \quad j=0,1,\ldots,N-1 \quad , \tag{5}$$

$$N=2^r, r\in N \quad . \tag{6}$$

Współczynniki oznaczamy następująco:

$$c_k=\langle E_k,f\rangle=\sum_{j=0}^{N-1}E_k(x_j)f(x_j)=\sum_{j=0}^{N-1}f(x_j)\exp(-Ix_jk)=\sum_{j=0}^{N-1}f(x_j)\exp\left(-I\frac{2\pi}{N}jk\right) \quad . \tag{7}$$

Grupując osobno składniki parzyste (*j = 2m*) oraz nieparzyste (*j = 2m + 1*):

$$c_k=\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1}f_{2m}\exp\left(-I\frac{2\pi}{N}(2m)k\right)+\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1}f_{2m+1}\exp\left(-I\frac{2\pi}{N}(2m+1)k\right) \quad , \tag{8}$$

z czego po odpowiednich przekształceniach możemy otrzymać:

$$c_k = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m} \exp\left(-I \frac{2\pi}{N/2} mk\right) + \exp\left(-I \frac{2\pi}{N} k\right) \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m+1} \exp\left(-I \frac{2\pi}{N/2} mk\right) \quad . \tag{9}$$

Przyjmując kolejno oznaczenia:

$$p_k = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m} \exp\left(-I \frac{2\pi}{N/2} mk\right) \quad , \tag{10}$$

$$q_k = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m+1} \exp\left(-I \frac{2\pi}{N/2} mk\right) \quad , \tag{11}$$

$$\varphi_k = \exp\left(-I \frac{2\pi}{N} k\right) \quad , \tag{12}$$

możemy zapisać:

$$c_k = p_k + \varphi_k q_k \quad . \tag{13}$$

Wykorzystując okresowość (10) i (11) nie musimy wyznaczać wszystkich współczynników, tylko ich połowę, natomiast współczynnik fazowy (12) ma następującą własność:

$$\begin{aligned} \varphi_{k+N/2} &= \exp\left(-I \frac{2\pi}{N}(k+N/2)\right) = \exp\left(-I \frac{2\pi}{N} k\right) \exp\left(-I \frac{2\pi}{N}(N/2)\right) \\ \varphi_{k+N/2} &= -\exp\left(-I \frac{2\pi}{N} k\right) = -\varphi_k \end{aligned} \tag{14}$$

Współczynniki p_k, q_k można wyliczyć dzięki DFT z nakładem $O\left(\frac{N}{2}\right)^2 = O\left(\frac{N^2}{4}\right)$

dodatkowo oszczędzając czas wyznaczając tylko współczynniki dla $k < \frac{N}{2}$, ponieważ

$$c_k = \begin{cases} p_k + \varphi_k q_k , & k < N/2 \\ p_{k-N/2} - \varphi_k q_{k-N/2} , & k \geq N/2 \end{cases} \quad . \tag{15}$$

Kolejnym krokiem w FFT jest podział sum w p_k, q_k na sumy zawierające tylko elementy parzyste i nieparzyste, po którym każda liczba elementów jest dwukrotnie mniejsza niż w elemencie macierzystym. Proces rekurencyjnego podziału kończymy, gdy liczba elementów jest równa 1.

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

Mając splot dwóch funkcji:

$$(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad , \tag{16}$$

gdzie $f(t)$ jest funkcją sygnału, a $g(t)$ - funkcja wagi, splot obu funkcji możemy potraktować jako uśrednienie funkcji $f(t)$ pewną ustaloną funkcją wagową $g(t)$.

Wykorzystujemy to do wygładzenia zaszumionego sygnału, stosując metodę FFT.

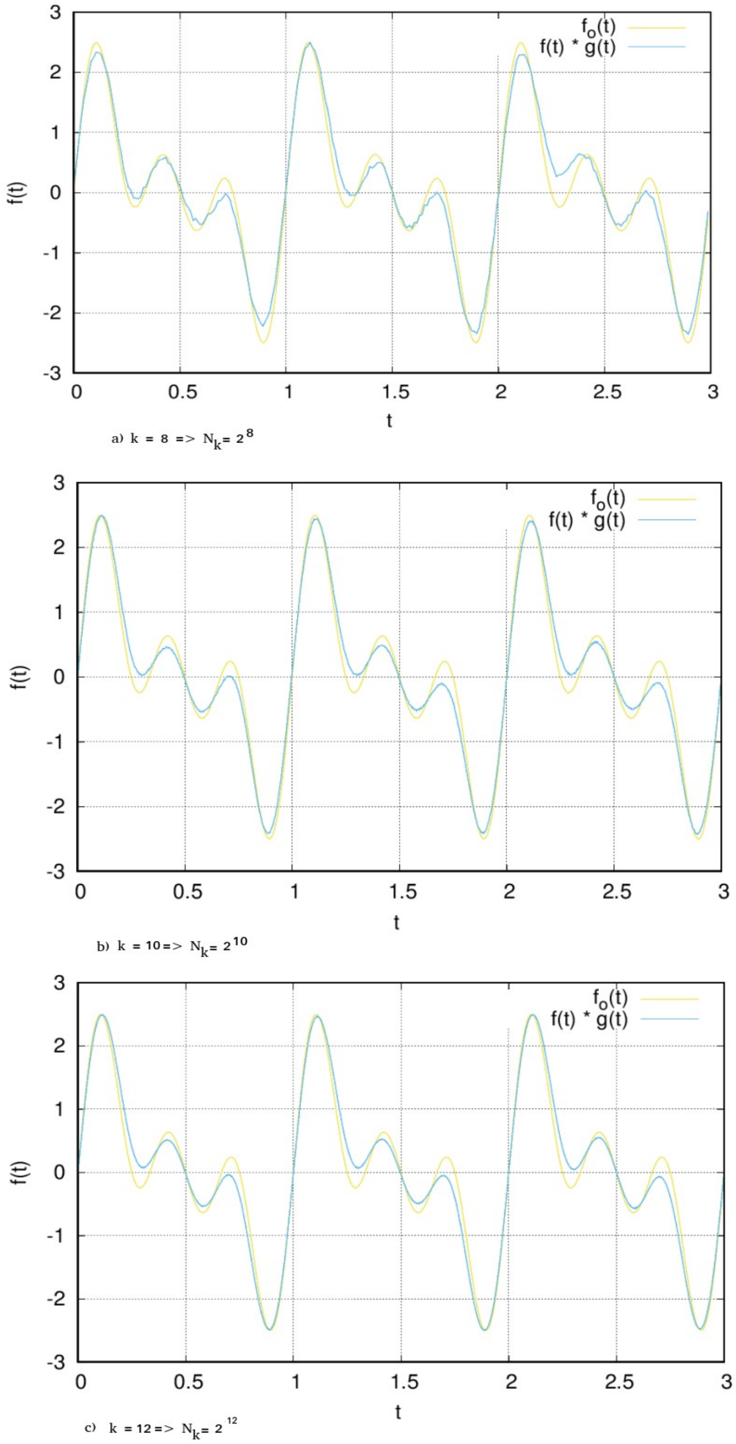
$$f*g=FFT^{-1}f(k)\cdot g(k) \quad . \tag{17}$$

Przyjęto:

- $f(t)=f_0(t)+\Delta$ - funkcja sygnału, (18)
- $f_0(t)=\sin(1\cdot\omega t)+\sin(2\cdot\omega t)+\sin(3\cdot\omega t)$ - sygnał niezaburzony, (19)
- $g(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma^2}\right)$ - funkcja wagowa, (20)
- $\Delta\in[-0.5,0.5]$,
- $N_k=2^k$,
- $k=8,10,12$ - liczba węzłów,
- $T=1.0$ - okres,
- $\omega=\frac{2\pi}{T}$,
- $t_{max}=3T$ - maksymalny czas trwania sygnału,
- $dt=\frac{t_{max}}{N_k}$ - krok czasowy,
- $\sigma=\frac{T}{20}$.

2.2. Wyniki

Dzięki programowi w języku C wykorzystującemu bibliotekę numeryczną Numerical Recipes, oraz przy pomocy skryptu Gnuplota wygenerowano:



Rysunek 1. a) - c): Wynik odszumiania sygnału przy użyciu FFT; $f_0(t)$ – oryginalny sygnał niezaburzony, $f(t) = f_0(t) + \Delta$ – sygnał zaburzony, $f(t) * g(t)$ – sygnał wygładzony (odszumiony), tj. splot funkcji.

Analizując rysunek 1. a) możemy zauważyć, że splot funkcji nie jest gładki, ekstrema nie pokrywają się, możliwe, że spowodowane jest to za mała ilością węzłów.

Na wykresach 1. b)-c) można zauważyć znaczną poprawę gładkości funkcji, względem 1.a) jednak mimo zwiększania (z 10 na 12 węzłów) wykres niemal się nie różni od siebie, ekstrema nadal się nie pokrywają.

3. Wnioski

Rozbieżności w wygenerowanych wykresach spowodowane mogą być prawdopodobnie zbyt małą ilością węzłów, po jej zwiększeniu wyniki uległy małej poprawie. Największe pokrycie można zauważyć w ekstremach globalnych, dla ekstremów lokalnych w żadnym z przypadków nie nastąpiło idealne pokrycie.

Na pierwszym rysunku bardzo widoczny był brak gładkości funkcji splotu, który jest zależny od ilości elementów w tablicy, przy ustalonym czasie generowania.

Pomimo to w każdym z przypadków sygnał był zbliżony do pożądanego, metoda FFT jest szybka, a co za tym idzie wydajna oraz ma swoje zastosowanie w rozwiązaniu różnorodnych problemów numerycznych np. szybkie mnożenie czy rozwiązywanie równań różniczkowych.