AGH

Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica
w Krakowie

Sprawozdanie - laboratorium nr 3

Iteracyjne rozwiązywanie układów równań liniowych

Klaudia Fil, 17.03.2019 r.

1. Wstęp teoretyczny

Problemem zadania jest rozwiązanie układu równań liniowych wykorzystując iteracyjne metody rozwiązywania układów równań.

Metody te są skuteczne w przypadku rzadkich macierzy, które dla większości elementów nie potrzebują zapisu w pamięci komputera. Do takich zalicza się m.in. macierz wstęgową, która poza diagonalią i wstęgą wokół niej ma elementy równe 0. Macierz taką można zapamiętać na $n(2m+1)$ komórkach pamięci zamiast n^2, gdzie *n* - wymiar macierzy, *m* - grubość wstęgi. Możliwe jest zauważenie większej wydajność w stosunku do metod bezpośrednich w przypadku, gdy liczba elementów macierzy różnych od 0 jest rzędu *n*.

Jedną z metod iteracyjnych jest metoda sprzężonego gradientu, gdzie należy przyjąć założenia:

- x_d - rozwiązanie dokładne układu równań
- $v_{1,} v_{2,} v_{3,} \ldots$ - ciąg wektorów stanowiących bazę w *n*-wymiarowej przestrzeni euklidesowej.

Różnicę rozwiązania dokładnego i przybliżonego możemy zapisać w postaci kombinacji liniowej elementów bazy:

$$x_d - x_i = \sum \alpha_j v_j \quad \text{, dla } j = 1,\ldots,n. \tag{1}$$

Gdy elementy bazy są ortogonalne to można łatwo wyznaczyć współczynniki kombinacji liniowej:

$$\alpha_j = \frac{v_j^T (x_d - x_i)}{v_j^T v_j}, \; j = 1,2,\ldots \quad , \tag{2}$$

wiemy również, że

$$A \cdot x_d = b \quad , \tag{3}$$

więc po przekształceniu:

$$\alpha_j = \frac{v_j^T A(x_d - x_i)}{v_j^T A v_j} = \frac{v_j^T r_i}{v_j^T A v_j} \quad . \tag{4}$$

Żądamy, aby wektory bazy spełniały warunek A-ortogonalności:

$$v_j^T A v_i = 0 \Leftrightarrow i \neq j \quad . \tag{5}$$

Aby skonstruować taką bazę to zwykłą - $u_1, u_2, u_3 \ldots$, poddajemy procesowi ortogonalizacji Grama-Schmidita:

$$\begin{gathered} v_1 = u_1 \\ v_{i+1} = u_{i+1} + \sum \beta_{i+1,k} v_k \\ \beta_{i+1,k} v_k = \frac{-v_k^T A u_{i+1}}{v_k^T A v_k} \end{gathered} \quad \text{, dla } k=1,\ldots,i. \tag{6}$$

Kolejne przybliżenia w podstawowej metodzie wyznaczamy zgodnie z poniższym schematem:

$$\begin{gathered} v_1 = r_1 = b - A x_1 \\ \alpha_i = \frac{r_i^T r_i}{v_i^T A v_i} \\ x_{i+1} = x_i + \alpha_i v_1 \\ r_{i+1} = r_i - \alpha_i A v_1 \\ \beta_i = \frac{-r_{i+1}^T r_{i+1}}{r_i^T r_i} \\ v_{i+1} = r_{i+1} + \beta_i v_i \end{gathered} \quad , \tag{7}$$

dzięki ortogonalności wystarczy wyznaczyć jeden współczynnik *β*, a reszta zanika.

W (7) dla każdej iteracji należy wykonać tylko jedno mnożenia macierz-wektor minimalizując nakład obliczeń. Maksymalna liczba iteracji to *n+1*, zazwyczaj wystarcza ich znacznie mniej.

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

Celem zadania jest rozwiązanie układu równań liniowych $A \cdot x = b$ metodą sprzężonych gradientów.

Macierz $A_{1000x1000}$ należy wypełnić zgodnie z zadanym wzorem:

$$A[i][j] = \frac{1}{1+|i-j|} \quad , \tag{8}$$

gdy $|i-j| \leq m$ dla *i,j = 0,…,n-1* oraz *m = 5.*

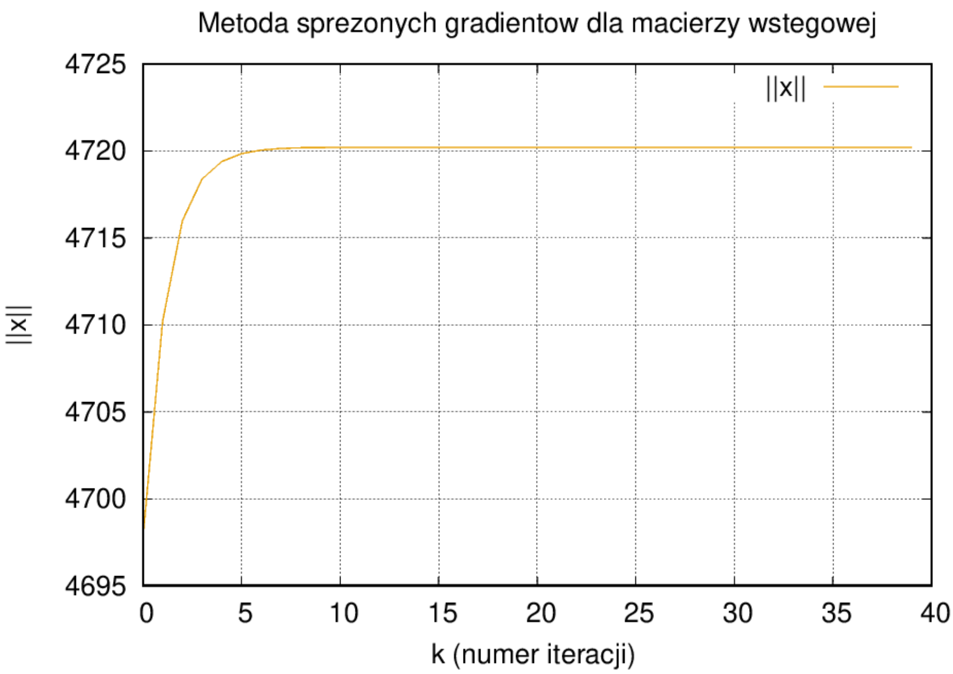
Następnie tworzyć również wektor wyrazów wolnych $\vec{b}$ oraz wektor startowy $\vec{x}$:

$$\begin{matrix} b[i] = i+1 \\ x[i] = 0 \end{matrix} \quad \text{, dla } i=0,1,\ldots,n-1. \tag{9}$$

Należy zaprogramować metodę sprzężonego gradientu do rozwiązania układu równań liniowych wykorzystując wzór (7), zliczając przy tym iterację do momentu, gdy norma euklidesowa wektora reszt będzie mniejsza od 10^{-6} . Wyznaczyć wykresy zależności norm wektorów reszt i rozwiązań od numeru iteracji oraz porównać wydajność metody Grama-Schmidita z metodą eliminacji zupełnej.

2.2. Wyniki

Dzięki programowi w języku C korzystającemu z biblioteki numerycznej Numerical Recipes oraz wykorzystując skrypt Gnuplota wygenerowano:



Rysunek 1: Norma wektora rozwiązań $\|\vec{x}_k\|_2$ w funkcji numeru iteracji.

Rysunek 2: Norma wektora reszt $\|\vec{r}_k\|_2$ w funkcji numeru iteracji.

Porównanie czasu metody iteracyjnej, a eliminacji zupełnej:

```
Czas trwania rozwizania ukladu metoda iteracyjna: 0
Czas trwania rozwizania ukladu metoda eliminacj zupelnej: 3
```

3. Wnioski

Metoda iteracyjna jest efektywniejsza od eliminacji zupełnej, a co za tym idzie bardziej wydajna, świadczy o tym szybszy czas rozwiązania. Sprawdza się ona głównie dla macierzy rzadkich, w tym macierzy wstęgowej, dla której potrzeba znacznie mniej miejsca na zapis w pamięci komputera, co również jest dużym plusem. Jak można zauważyć, zgodnie z Rysunkiem 1., norma wektora rozwiązań $\|\vec{x}_k\|_2$ po około 8 wykonaniach schematu (7) przyjmuje stałą wartość. Normy mają istotne znaczenie w analizie błędów przy rozwiązywaniu układów, więc stabilizacja (pomimo dużej wartości) świadczy, że odległość między rozwiązaniem dokładnym układu równań, a jego wartością przybliżoną nie wzrasta. Analizując Rysunek 2. zauważamy znaczny spadek wektora reszt $\|\vec{r}_k\|_2$, skutkuje to spadkiem błędu wraz ze wzrostem iteracji.

Gdy zwiększymy rozmiar macierzy do *n=1000*, czasy rozwiązań znacząco się różnią:

```
Czas trwania rozwizania ukladu metoda iteracyjna: 0
Czas trwania rozwizania ukladu metoda eliminacj zupelnej: 1227
```

Metoda iteracyjna nie jest tak dokładna jak bezpośrednia, przewagę ma w wydajności, ale należy pamiętać, że jest głównie stosowana do macierzy rzadkich o dużych rozmiarach, gdzie poza szybkością rozwiązań pozwala na mniejsze zużycie pamięci.