Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica
w Krakowie

# Sprawozdanie - laboratorium nr 7

*Interpolacja Newtona z optymalizacją położeń węzłów*

Klaudia Fil, 12.04.2019 r.

# 1. Wstęp teoretyczny

Dla zadanego przedziału $[a,b]$ danych jest *n + 1* różnych punktów $x_0, x_1, \dots, x_n$, nazywanych węzłami interpolacji, oraz wartości funkcji $y=f(x)$ w tych punktach:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= y_0 \\ f(x_1) &= y_1 \\ &\vdots \\ f(x_n) &= y_n \end{aligned} \quad . \tag{1}$$

Idea interpolacji opiera się na wyznaczaniu przybliżonych wartości funkcji w punktach nie będących węzłami oraz oszacowaniu błędu przybliżonych wartości.

Problem sprowadza się zatem do znalezienia funkcji interpolującej *F(x)*, która w węzłach przyjmuje wartości takie jak $y=f(x)$, czyli funkcja interpolowana.

Jedną z metod dokonywania interpolacji jest metoda ilorazów różnicowych pierwszego i wyższych rzędów, w której dana jest funkcja $f(x)$, która w punktach $x_i$, *i = 0,1,…,n,* gdzie $x_i \neq x_j$ przyjmuje wartości $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$, wtedy kolejne ilorazy różnicowe możemy zdefiniować następująco:

**I rzędu:** $$f(x_{n-1}; x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \quad , \tag{2}$$

**II rzędu:** $$f(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n) = \frac{f(x_{n-1}; x_n) - f(x_{n-2}; x_{n-1})}{x_n - x_{n-2}} \quad , \tag{3}$$

**n-tego rzędu:** $$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+n}) = \frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}; x_{i+n}) - f(x_i; x_{i+1}; x_{i+n-1})}{x_{i+n} - x_i} \quad . \tag{4}$$

Wykorzystując metodę Newtona zakładamy, że odległości między węzłami nie muszą być takie same, dążymy wtedy do znalezienia wielomianu w postaci:

$$W_n(x_i) = \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})(x_j-x_n)} \quad . \tag{5}$$

Dla którego są spełnione warunki:

$$W_n(x_i) = f(x_i) \quad , \qquad i = 0, 1, \dots, n. \tag{6}$$

Wzór interpolacyjny Newtona dla nierównych odstępów argumentów możemy nazwać:

$$W_n(x_i)=f(x_0)+f(x_0;x_1)\,\omega_0(x)+...+f(x_0;x_1;...;x_n)\,\omega_{n-1}(x) \quad , \tag{7}$$

można go wyprowadzić wykorzystując równanie (4).

Pogorszenie jakości interpolacji wielomianowej, mimo zwiększenia liczby jej węzłów nazywane jest efektem Rungego. Początkowo ze wzrostem liczby węzłów n przybliżenie poprawia się, jednak po dalszym wzroście n, zaczyna się pogarszać, co jest szczególnie widoczne na końcach przedziałów.

Zgodnie z twierdzeniem Weierstrassa istnieje ciąg interpolujących wielomianów coraz wyższych stopni, które przybliżają jednostajnie funkcje ciągłą, można uważać to za paradoks, iż efekt Rungego ma dokładnie odwrotny wynik. Jest to spowodowane nałożeniem warunku na równoodległość węzłów.

Aby uniknąć tego efektu, stosuje się interpolację z węzłami coraz gęściej upakowanymi na krańcach przedziału interpolacji. Np. węzłami interpolacji n-punktowej wielomianowej powinny być miejsca zerowe wielomianu Czebyszewa n-tego stopnia.

Optymalne położenia węzłów Czebyszewa stanowią zera wielomianów, zdefiniowane następująco dzięki wzorowi rekurencyjnemu:

$$\begin{aligned} &T_0(x)=1 \\ &T_1(x)=x \\ &T_k(x)=2\,x\,T_{k-1}(x)-T_{k-2}(x) \end{aligned} \quad , \tag{8}$$

które można rozwiązać wykorzystując równanie:

$$T_k(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^k+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^k}{2} \quad . \tag{9}$$

Wielomian Czebyszewa $T_k(x)$ posiada *k* zer rzeczywistych należących do przedziału $[-1,1]$ danych wzorem:

$$x_j=\cos\left(\frac{2j-1}{2k}\cdot\pi\right) \quad . \tag{10}$$

# 2. Zadanie do wykonania

## 2.1. Opis problemu

Dla funkcji:

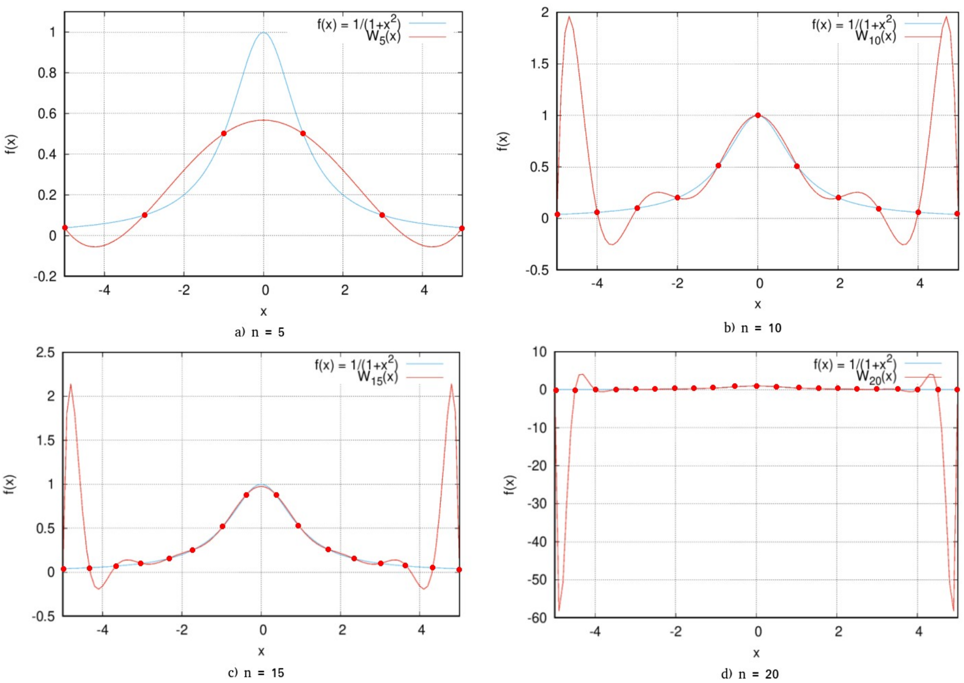
$$f(x)=\frac{1}{1+x^2} \tag{11}$$

przeprowadzono interpolację wielomianową Newtona z optymalizacją położeń węzłów równoległych oraz tych, których współrzędne są wyznaczone przez miejsca zerowe wielomianów Czebyszewa.

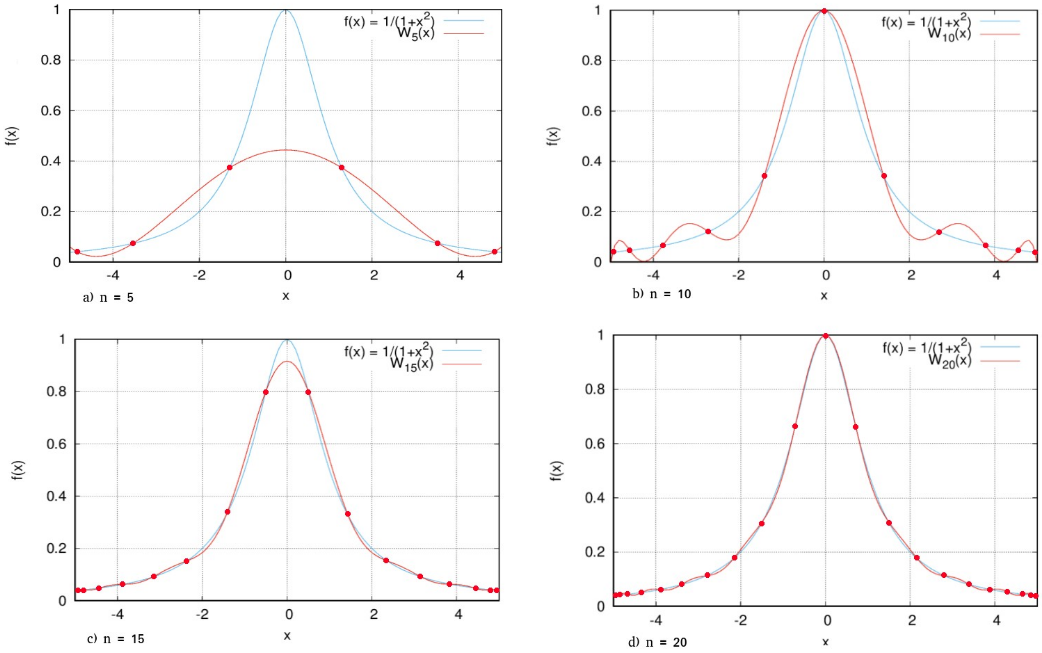
Możemy zastosować wzór interpolacyjny (5) do wyznaczenia przybliżonych wartości funkcji w przedziale [ $x_{min}$ , $x_{max}$ ], który w naszym przypadku wynosił $[-5{,}5]$ , dla *n = 5, 10, 15, 20.*

## 2.2. Wyniki

Dzięki programowi w języku C stworzono odpowiednie funkcje iteracyjne, które wykorzystując skrypt Gnuplota pozwoliły na wygenerowanie wykresów:




**Rysunek 1. a) - d):** Wyniki interpolacji wielomianem Newtona $W_n(x)$ z równoległymi węzłami; liczba węzłów: n + 1




**Rysunek 2. a) - d):** Wyniki interpolacji wielomianem Newtona $W_n(x)$ z węzłami, których współrzędne są wyznaczone przez miejsca zerowe wielomianów Czebyszewa; liczba węzłów: n + 1

Jak łatwo zauważyć dla rysunku 1. a) oraz 2. a), gdzie wartość n jest dość mała, wartości funkcji interpolowanej dla argumentów tożsamych z położenia węzłów są równe z wartościami teoretycznymi, jednak nasze funkcje są dalekie od ideału. Zauważamy, że w przypadku algorytmu Czebyszewa wartości na krańcach przedziałów są bardziej dopasowane niż dla węzłów równoległych.

Wraz z wzrostem n analogicznie dla rysunku 1. i 2. dokonując porównania możemy stwierdzić, że dopasowania na krańcach przedziałów są znacząco różne. W przypadku rysunku 1. zauważalny jest efekt Rungego, ponieważ oscylacje z przerzutami wartości rosną wraz z ilością węzłów.

# 3. Wnioski

Analizując dwie różne metody interpolacji można stwierdzić, że w jednym przypadku (węzły równoległe) wzrost *n* wpływa niekorzystnie na postać funkcji. Otrzymana funkcja w centrum układu pokrywa się w większości z analityczna, jednak na krańcach przedziału dochodzi do oscylacji z przeregulowaniem, które jest znacząco duże dla większych *n.*

W przypadku węzłów Czebyszewa dopasowanie na całym przedziale, a zwłaszcza na krańcach, gdzie ilość węzłów jest większa jest dokładniejsze dla większych *n.* Można zaryzykować stwierdzenie, że dla $n = 20$ dopasowanie jest idealne.

Podsumowując interpolację wielomianów - metoda Newtona jest skuteczna, jeżeli zadbamy o dobry dobór węzłów (np. Czebyszewa).