AGH

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA
W KRAKOWIE

Sprawozdanie - laboratorium nr 2

Rozkład LU macierzy – dekompozycja LU, odwracanie macierzy

Klaudia Fil, 10.03.2019 r.

1. Wstęp teoretyczny

Problemem zadania jest rozwiązanie układu równań liniowych. Kolejnym z możliwych sposobów jest wykorzystanie metody Gaussa, która posłuży do znalezienia takich dwóch macierzy L i U związanych z macierzą A relacją:

$$A=L\cdot U \quad . \tag{1}$$

Ta procedura wyznaczania poszczególnych elementów nowych macierzy nosi nazwę rozkładu LU. Wynikiem jej są dwie macierze: **L** (**L**ower) jest macierzą trójkątną dolną z 1 na diagonali, **U** (**U**pper) jest również macierzą trójkątną jednak górną z elementami na głównej przekątnej równymi elementom z macierzy bazowej:

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad U=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \quad . \tag{2}$$

Dysponując macierzami L i U można rozwiązać układ równań:

$A\vec{x}=\vec{b} \Leftrightarrow LU\vec{x}=\vec{b}$, poprzez rozwiązanie :

$$\begin{cases} L\vec{y}=\vec{b} \\ U\vec{x}=\vec{y} \end{cases} \quad . \tag{3}$$

Dzięki takiemu zapisowi oraz właściwością macierzy trójkątnych, obliczenia wykonywane są w znacznym stopniu szybciej.

W metodzie Gaussa najpierw pomnożono wiersz pierwszy przez współczynnik:

$$l_{i1}=\frac{a_{i1}^{(I)}}{a_{11}^{(I)}} \quad , \tag{4}$$

gdzie (1) oznacza krok eliminacji, a i = 2,3,…,n. Następnie odjęto go od i-tego wiersza, co można zapisać macierzowo:

$$\begin{gathered} L^{(1)} A^{(1)} = A^{(2)} \\ L^{(1)} \vec{b}^{(1)} = \vec{b}^{(2)} \end{gathered} \quad . \tag{5}$$

Kontynuując analogiczną sytuację dla n-1 kroków przy analogicznie zmienionym współczynniku (4), początkowych indeksach zmieniających się rosnąco (np. dla kroku (4) – i=5,6,…,n) oraz przemnożeniu obustronnym przez nieosobliwe macierze $(L^{(n-1)})^{-1}(L^{(n-2)})^{-1}...(L^{(1)})^{-1}$ otrzymano:

$$\begin{gathered} A^{(1)} = (L^{(n-1)})^{-1}(L^{(n-2)})^{-1}...(L^{(1)})^{-1} A^{(n)} \\ \vec{b}^{(1)} = (L^{(n-1)})^{-1}(L^{(n-2)})^{-1}...(L^{(1)})^{-1} \vec{b}^{(n)} \end{gathered} \quad . \tag{6}$$

Wprowadzono oznaczenia:

$$\begin{gathered} L = (L^{(n-1)})^{-1}(L^{(n-2)})^{-1}...(L^{(1)})^{-1} \\ U = A^{(n)} \end{gathered} \quad , \tag{7}$$

co sprowadza się do równania (3).

Jedną z podstawowych własności macierzy jest jej wyznacznik, co w przypadku macierzy trójkątnych jest łatwe do wyznaczenia. Zgodnie z twierdzeniem Cauchy'ego:

$$det(A \cdot B) = det\,A \cdot det\,B \quad . \tag{8}$$

Ponieważ macierze są trójkątne wystarczy policzyć iloczyn elementów na diagonali, sprawę ułatwia fakt, że na jednej z nich znajdują się 1, więc:

$$det\,A = det\,L \cdot det\,U = det\,U \tag{9}$$

Inną operacją dozwoloną na macierzach jest ich odwracanie. Aby zaleźć macierz odwrotną A^{-1} wykorzystując L i U należy rozwiązać n układów równań:

$$\begin{gathered} LU\,x^{(i)} = e^{(i)}, i = 1,2,\dots n \\ e^{(i)} = [0,0,\dots,1,\dots,0]^T \\ LUx = I \Rightarrow x = A^{-1} \end{gathered} \quad . \tag{10}$$

Rozwiązania układów równań x stanowią kolumny macierzy odwrotnej A^{-1} .

Podczas wykonywania różnych operacji z macierzami, dane wejściowe mogą wpłynąć na błąd wyniku. Problemy o niższym wskaźniku uwarunkowania nazywamy dobrze uwarunkowanymi, natomiast te o wyższym – źle uwarunkowanymi:

$$\kappa(A)=\|A^1\|\cdot\|A^{-1}\| \quad , \tag{11}$$

do dokładnego jego określania można stosować prostą normę:

$$\|A\|_{1,\infty}=max_{1\leqslant i,\, j\leqslant n}|a_{i,j}| \quad . \tag{12}$$

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

Dane są dwie macierze A i B:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix} \quad ,$$

$$B=\begin{bmatrix}1.1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix} \quad .$$

Celem zadania była ich analiza wykorzystując rozkład LU, znalezienie macierzy odwrotnych oraz obliczenie wskaźników uwarunkowania.

Do pierwszej części wykorzystano procedure *ludcmp(A,n,indx,&d)* zawartą w bibliotece Numerical Recipes, gdzie *A*- macierz do rozkładu, *n*-wymiar macierzy, *indx*- wektor permutacji, *d*- zmienna przechowująca informację o parzystości lub nieparzystości liczby permutacji, funkcja nadpisuje wynik w macierzy *A*.

Przy wyznaczaniu macierzy odwrotnych również posłużono się zasobami biblioteki NR, wykorzystując tym razem procedure *lubksb(LU,n,indx,x)*, gdzie *LU* – rozkład macierzy *A*, *n* – rozmiar macierzy, *indx* – wektor otrzymany z funkcji *ludcmp()*, *x* – aktualny wektor wyrazów wolnych, nadpisywany przez rozwiązania. Odpowiada to równaniom (10).

Wskaźniki κ - uwarunkowania obydwu macierzy obliczony wykorzystując normę zadaną wzorem (12). Obliczono również iloczyny $A \cdot A^{-1}$ oraz $B \cdot B^{-1}$.

2.2. Wyniki

Dzięki możliwością biblioteki NR oraz stworzonego programu udało się osiągnąć następujące wyniki:

- dla macierzy *A*:

1. Rozkład macierzy:

$$L_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.142857 & 1 & 0 \\ 0.571429 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad U_A = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0.857143 & 1.71429 \\ 0 & 0 & 1\text{e-}20 \end{bmatrix} .$$

2. Macierz odwrotna:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -5\text{e+}19 & 1\text{e+}20 & -5\text{e+}19 \\ 1\text{e+}20 & -2\text{e+}20 & 1\text{e+}20 \\ -5\text{e+}19 & 1\text{e+}20 & -5\text{e+}19 \end{bmatrix} .$$

3. Wskaźnik uwarunkowania: $\kappa(A) = 1.8\text{e+}21$, przy

$$\|A\|_{1,\infty} = 9 \quad \text{i} \quad \|A^{-1}\|_{1,\infty} = 2\text{e+}20 .$$

4. Iloczyn $A \cdot A^{-1}$:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3.51844\text{e+}13 & -7.03687\text{e+}13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

- dla macierzy *B*:

1. Rozkład macierzy:

$$L_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.157143 & 1 & 0 \\ 0.571429 & 0.576923 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad U_B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0.742857 & 1.58571 \\ 0 & 0 & -0.0576923 \end{bmatrix} .$$

2. Macierz odwrotna:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & -20 & 10 \\ -20 & 37 & -18 \\ 10 & -17.3333 & 8.33334 \end{bmatrix} .$$

3. Wskaźnik uwarunkowania: $\kappa(B) = 333 = 3.33 \cdot 10^2$, przy

$$\|B\|_{1,\infty} = 9 \quad \text{i} \quad \|B^{-1}\|_{1,\infty} = 37 .$$

4. Iloczyn $B \cdot B^{-1}$:

$$B \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1.90735\text{e-}06 \\ -3.8147\text{e-}06 & 1 & 3.8147\text{e-}06 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

3. Wnioski

Wyniki końcowe dla macierzy *A* i *B* różnią się w stopniu znaczącym, co pozwala na stwierdzenie, że nawet różnica rzędu dziesiętnego jednego tylko elementu ma wpływ na rozwiązania. Warto zwrócić uwagę na wskaźniki uwarunkowania macierzy $\kappa(A)$ i $\kappa(B)$, których to różnica sięga rzędu 10^{19} . Przyczyny tego można dopatrywać się na samym początku, ponieważ elementy macierzy *A* zostały tak dobrane, że podczas jednego z kroków (6) element na diagonali (konkretnie a_{33}) powinien zostać wyzerowany, w wynikach jest bliski 0, powoduje to błąd w następujących obliczeniach. Zapoczątkowało to problemy z wyznaczeniem macierzy odwrotnej, a co za tym idzie wysoki współczynnik

$\kappa(A)$. W macierzy *B*, zmiana jednego z elementów na diagonali powoduje zmianę współczynników (4), w tym przypadku są to dalekie od 0 wartości na głównej przekątnej, pozwalające na relatywnie poprawne wyniki.

Kolejny błąd spowodowany feralnym elementem na diagonali macierzy *A* uwidacznia się w przypadku iloczynów $A \cdot A^{-1}$. Spodziewanym wynikiem w jednym i drugim przypadku jest macierz jednostkowa I_{nxn} , gdy rozpatrujemy $B \cdot B^{-1}$ wyniki niemal się zgadzają. Na głównej przekątnej plasują się 1, a pozostałe elementy są równe (lub bliskie) 0. Niedokładności spowodowane mogą być złym zaokrągleniem liczb. Kiedy chodzi o $A \cdot A^{-1}$ wynik nawet nie przypomina macierzy jednostkowej, ani jednej 1 na diagonali i dwie randomowe wartości, wynika to z osobliwej macierzy bazowej.