AGH

Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica
w Krakowie

Sprawozdanie - laboratorium nr 4

Uogólniony (symetryczny) problem własny – wyznaczanie modów własnych strun w 1D

Klaudia Fil, 24.03.2019 r.

1. Wstęp teoretyczny

Wyznaczenie wartości własnych i wektorów własnych macierzy ma swoje zastosowanie m.in. w równaniach opisujących drgania struny, gdzie naturalne części drgań układu reprezentowane są przez wartości własne, a mody drgań – wektory własne.

Metody do wyznaczania wartości i wektorów własnych macierzy są liczne, w zależności od implementacji macierzy bazowej. W przypadku macierzy symetrycznej, jaka jest w treści zadania, wykonano odpowiednie przekształcenia do uogólnionego problemu własnego, co po wprowadzeniu przekształceń ułatwiających obliczenia, pozwala na bezpośrednie otrzymanie wyników.

Niech dana będzie kwadratowa macierz A_{NxN} . Wektorem własnym $\vec{x} \in C^N$ oraz odpowiadającą mu własnością własną $\lambda \in C$, nazwiemy taką parę, dla której spełnione jest:

$$A\vec{x} = \lambda \vec{x}, \vec{x} \neq 0 \quad . \tag{1}$$

Uogólniony problem własny definiujemy następująco:

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot B \cdot \vec{x} \quad , \tag{2}$$

gdzie A i B są macierzami kwadratowymi.

Równanie (2) można przekształcić do zwykłego problemu własnego tj.

$$B^{-1} A \vec{x} = C \vec{x} = \lambda \vec{x} \quad , \tag{3}$$

jednak wciąż problemem jest wyznaczenie B^{-1} , w tym przypadku gdy macierze są symetryczne posłużono się rozkładem $L L^T$:

$$\begin{aligned} B &= L L^T \\ B B^{-1} &= I = L L^T (L^T)^{-1} L^{-1} \\ B^{-1} &= (L^T)^{-1} L^{-1} \end{aligned} \quad , \tag{4}$$

następnie przy wykorzystaniu tego samego rozkład znaleziono macierz podobną do $B^{-1}A$:

$$\begin{aligned} L^T(B^{-1}A)(L^T)^{-1} &= L^T(L^T)^{-1}L^{-1}A(L^T)^{-1} \\ L^T(B^{-1}A)(L^T)^{-1} &= L^{-1}A(L^T)^{-1} \\ L^T(B^{-1}A)(L^T)^{-1} &= G \end{aligned} \quad . \tag{5}$$

Dzięki temu przekształceniu, otrzymano macierz G, która podobnie jak A jest symetryczna i posiada identyczne widmo wartości własnych, ale nie wektory własne:

$$G\vec{y}=\lambda\vec{y} \quad . \tag{6}$$

Do wyznaczenia macierzy *G*, znaleziono najpierw macierz *F*, następnie rozwiązano układ równań:

$$\begin{aligned} F &= A(L^T)^{-1} \\ FL^T = A \Rightarrow LF^T &= A^T = A \\ G &= L^{-1}F \\ LG &= F \end{aligned} \quad . \tag{7}$$

Wektory własne macierzy *A* można wyznaczyć przekształcając wektory macierzy *G* lub rozwiązując układ:

$$L^T\vec{x}=\vec{y} \quad . \tag{8}$$

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

Celem zadania jest wyznaczenie częstości drgań własnych struny, której wychylenie w czasie i przestrzeni opisuje funkcja $\psi=\psi(x,t)$. Dynamiką takiej struny rządzi równanie falowe:

$$\frac{N}{\rho(x)}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \quad , \tag{9}$$

gdzie *N*- naciąg struny, $\rho(x)$ - liniowy rozkład gęstości.

Dokonując separacji zmiennych poprzez podstawienie $\psi(x,t)=u(x)\cdot\theta(t)$ oraz podzielenie równania przez $u\theta$:

$$\frac{N}{\rho(x)}\cdot\frac{1}{u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{\theta}\cdot\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=const=-\lambda \quad , \quad \lambda=\omega^2 \quad (\quad \omega \quad \text{- częstość własna drgań}), \tag{10}$$

otrzymano:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\lambda\cdot\frac{\rho(x)}{N}\cdot u \quad . \tag{11}$$

Struna przymocowana jest w punktach +/- L/2, gdzie *L*-długość struny. Po wprowadzeniu siatki równoległych węzłów: $x=x_i$, $u(x)=u_i$, $\rho(x)=\rho_i$ możemy oznaczyć odległość pomiędzy węzłami:

$$\Delta x=\frac{L}{n+1} \quad , \tag{12}$$

a położenie w przestrzeni:

$$x_i=-\frac{L}{2}+\Delta x\cdot(i+1) \quad \text{, dla } i=0,1,2,\ldots,n-1. \tag{13}$$

Dzięki dyskretyzacji równania (11) możliwe jest podstawienie trójpunktowego ilorazu różnicowego centralnego za drugą pochodną:

$$-\frac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{\Delta x^2}=\lambda\frac{\rho_i}{N}u_i \quad , \tag{14}$$

co można zapisać w postaci (*A*,*B* – macierze, $\vec{u}$ - wektor):

$$A\cdot u=\lambda\cdot B\cdot u \quad , \tag{15}$$

która stanowi uogólniony problem własny, w którym elementy macierzowe definiuje się:

$$A_{i,j}=\frac{-\delta_{i,j+1}+2\delta_{i,j}-\delta_{i,j-1}}{\Delta x^2} \quad , \tag{16}$$

$$B_{i,j}=\frac{\rho_i}{N}\cdot\delta_{i,j} \quad , \tag{17}$$

gdzie δ jest deltą Kroneckera:

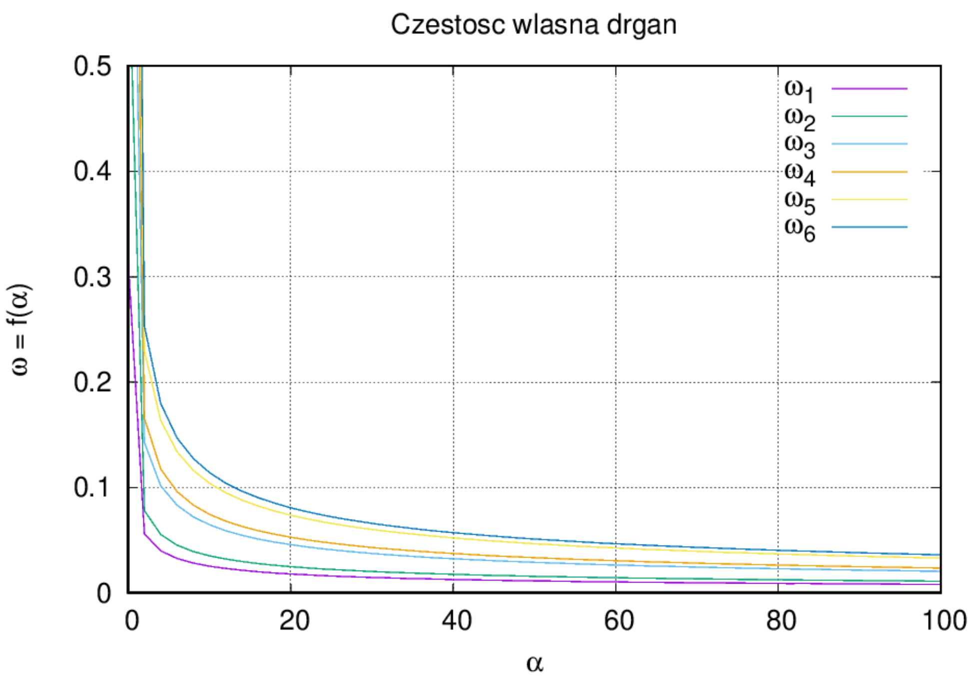
$$\delta_{i,j}=\begin{cases}1, i=j\\0, i\neq j\end{cases} \quad . \tag{18}$$

Równanie (9) rozwiązano dla następujących parametrów początkowych:

L = 10, n = 200, $\rho(x)=1+4\alpha x^2$, N = 1, $\Delta\alpha=2$.

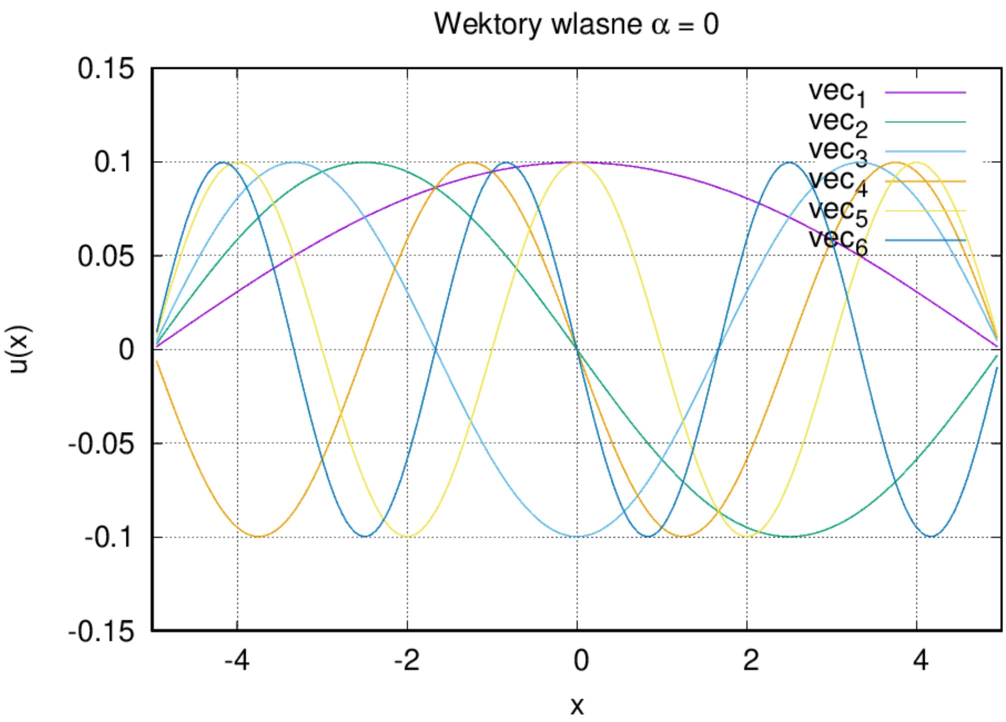
2.2. Wyniki

Dzięki programowi w języku C korzystającemu z biblioteki numerycznej GSL oraz wykorzystując skrypt Gnuplota wygenerowano:



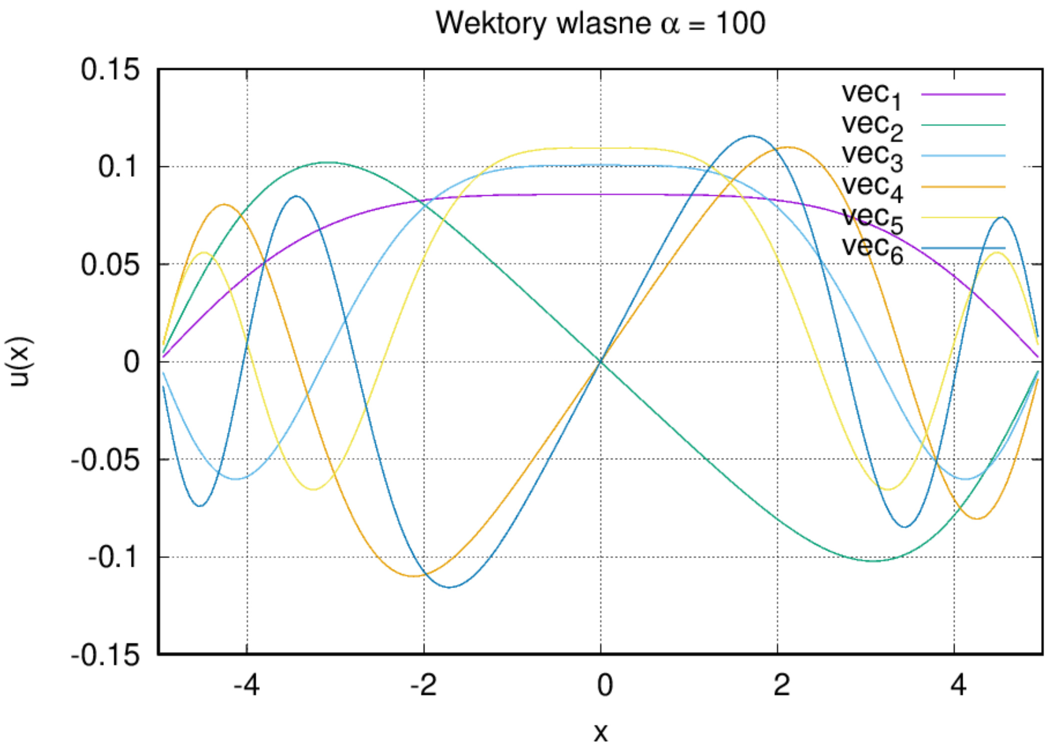
Rysunek 1: Częstość własna struny w funkcji α (pierwiastki z sześciu najniższych wartości własnych: $\omega_k=\sqrt{\lambda_k}$)

Zgodnie z rysunkiem 1. łatwo zauważyć, że wraz z wzrostem parametru α wartości własne macierzy asymptotycznie zmierzają do zera.



Rysunek 2: Wektory własne odpowiadające sześciu najniższym wartościom własnym z jednorodną gęstością, $\alpha = 0$

Analizując rysunek 2. możemy zauważyć, że wykres każdego wektora jest sinusoidą, spowodowane jest to tym, że rozkład gęstości zależny od parametru α, który wynosi 0, a więc jest on jednorodny, czyli stały bez względu na punkt struny, do którego można się odnieść. Wykresy poszczególnych wektorów różnią się tylko częstotliwością, a ich amplitudy są sobie równe.



Rysunek 3: Wektory własne odpowiadające sześciu najniższym wartościom własnym z niejednorodną gęstością, α = 100

Porównując rysunki 2. i 3. łatwo zauważyć, że wraz z zmianą α = 100, gęstość zależy coraz bardziej od położenia. Ze względu na kwadratowy charakter funkcji $\rho(x)=1+4\alpha x^2$, wnioskujemy, że oddalając się od środka, wartości symetrycznie zmieniają się po obu stronach „wierzchołka paraboli” na coraz większe zagęszczenie okresów drgań, co ma swoje potwierdzenie na rysunku 3. Amplitudy w tym przypadku różnią się.

Możemy zauważyć parzystość/nieparzystość funkcji *u(x)*, spowodowaną zmianą odpowiadających im wektorów własnych.

3. **Wnioski**

Wyznaczanie wartości i wektorów własnych dla macierzy symetrycznych, jest szybkie i skuteczne, ponieważ po przekształceniach część elementów macierzy *B* jest wypełniona zerami. Być może w tym przypadku gdzie wymiar macierzy był *5x5* nie było to zauważalne, ale przy większych rozmiarach np. *100x100* z macierzy rzadkiej znacznie łatwiejsze jest wyznaczenie szukanych rozwiązań. Przekształcając wzór (9) do postaci (15) możliwe było skorzystanie metody, która zminimalizowała koszt obliczeniowy macierzy bazowej *A*.

Rozwiązanie problemu struny pozwoliło na pokazanie ciekawego zastosowania wartości i wektorów własnych. Wraz ze wzrostem parametru α , gęstość zniekształcała mody struny (fale stojące), szczególnie w okolicach centralnych, czyli „wierzchołka paraboli” funkcji gęsotści.