Klaudia Korczak – 4 zadanie numeryczne

Problematyka

Celem zadania jest rozwiązanie równania $Ay = b$ dla zadanych:

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 8 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 10 & 8 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 10 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 10 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} \equiv \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ . \\ . \\ . \\ 5 \end{pmatrix} \qquad N = 50$$

Sposób rozwiązania

Macierz B nie jest macierzą rzadką, jednak problem można sprowadzić do macierzy rzadkiej przy użyciu wzoru Shermana-Morrisona.

$$\mathrm{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 7 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 9 & 7 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 9 & 7 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 7 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}}_{\mathrm{A}} + \vec{u}\vec{v}^T \qquad \text{, gdzie } \vec{u} = \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = LU$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = A$$

Zatem wystarczy użyć metody wstawiania w tył.

Wzory iteracyjne:

i – numer wiersza, j – numer kolumny

dla $i > j \vee i + 1 < j$: $\quad A_{ij} = 0 \quad \Rightarrow \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{i}} = \frac{\vec{\mathbf{b}}_{\mathbf{i}}}{\mathbf{a}_{\mathbf{ii}}}$

dla pozostałych: $\quad \vec{x_i} = \frac{\vec{b_i} - \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij}\vec{x_j}}{a_{ii}}$

Aby obliczyć wektor $\vec{y}$ najpierw należy rozwiązać:

$$A\vec{z} = \vec{b}$$

$$A\vec{q} = \vec{u}$$

Powyższe równania rozwiązuje metodą backward substitution i otrzymuje w wyniku wektor $\vec{z}$ oraz $\vec{q}$, które wstawiam do wzoru na szukany wektor $\vec{y}$.

$$\vec{y} = \vec{z} - \frac{\vec{v}^T\vec{z}}{1 + \overrightarrow{v^T}\vec{q}}\vec{q}$$

Wyniki

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 0.07525844089350037 \\ 0.07525904117533852 \\ 0.07525826938440369 \\ 0.07525926168703423 \\ 0.07525798586936636 \\ 0.07525962620636797 \\ 0.07525751720165161 \\ 0.07526022877914401 \\ 0.07525674246522518 \\ 0.07526122486883524 \\ 0.07525546177847939 \\ 0.07526287146607977 \\ 0.07525334472487927 \\ 0.07526559339213704 \\ 0.07524984510566277 \\ 0.07527009290255826 \\ 0.07524406002083556 \\ 0.07527753086876468 \\ 0.0752344969214272 \\ 0.07528982628228972 \\ 0.07521868853260927 \\ 0.07531015135362709 \\ 0.07519255629803279 \\ 0.07534374994093965 \\ 0.07514935811434514 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.07539929046282379 \\ 0.07507794887192268 \\ 0.07549110234593842 \\ 0.07495990502220382 \\ 0.07564287300986267 \\ 0.07476477131144413 \\ 0.0758937592094108 \\ 0.07444220334059656 \\ 0.07630848945764337 \\ 0.07390897873572605 \\ 0.07699406394961972 \\ 0.07302752581747077 \\ 0.0781273605588052 \\ 0.07157043017708939 \\ 0.08000076923929544 \\ 0.0691617618736019 \\ 0.08309762848663654 \\ 0.06518008569844908 \\ 0.08821692642611872 \\ 0.058598131204829124 \\ 0.09667943934648726 \\ 0.04771775745006959 \\ 0.11066849131689238 \\ 0.029731833488120224 \\ 0.13379325069654147 \end{pmatrix}$$

Porównanie szybkości programu z rozwiązaniem bibliotecznym

Czas wykonywania programu dla danych wejściowych o rozmiarze N=1000:

- Mojego : ok. 0.003s
- Napisanego w oparciu o rozwiązania biblioteczne (numpy): ok. 3.8s