Klaudia Korczak – 3 zadanie numeryczne

Problematyka

Celem zadania jest wyznaczenie wartości wektora $\vec{y} = A^{-1}\vec{x}$ dla zadanych A, $\vec{x}$, $N = 100$ oraz obliczenie wyznacznika macierzy A.

$$A = \begin{pmatrix} 1.2 & \frac{0.1}{1} & \frac{0.4}{1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 1.2 & \frac{0.1}{2} & \frac{0.4}{2^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 1.2 & \frac{0.1}{3} & \frac{0.4}{3^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 1.2 & \frac{0.1}{N-2} & \frac{0.4}{(N-2)^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 1.2 & \frac{0.1}{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 1.2 \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ . \\ . \\ N \end{pmatrix}$$

Omówienie metody

Aby wyznaczyć wektor $\vec{y}$ rozwiązałam układ równań: $A\vec{y} = \vec{x}$, korzystając z rozkładu LU dla macierzy A.

Metoda rozkładu LU nie jest niezawodna, podczas obliczeń może wystąpić dzielenie przez 0. Jednak w tym przypadku, jest pewne, że to się nie wydarzy, ponieważ wszystkie elementy diagonalne są równe $1.2 \neq 0$. Ponadto dla tej macierzy nie wystąpi problem dzielenia przez małe liczby, co by prowadziło do niestabilności numerycznej. Ponieważ elementy diagonalne przez które dzielimy są równe 1.2 i jest to największa wartość jaka występuje w tej macierzy (pozostałe elementy macierzy są ≤ 0).

Po znalezieniu rozkładu LU: $A = LU$ problem sprowadził się do rozwiązania dwóch prostszych układów równań:

$$A\vec{y} = \vec{x} \;\rightarrow\; LU\vec{y} = \vec{x}$$

$$\begin{cases} (1) \quad L\vec{z} = \vec{x} \\ (2) \quad U\vec{y} = \vec{z} \end{cases}$$

Użyłam metody forward substitution (wstawianie w przód) do rozwiązania (1) układu równań, zaś do rozwiązania (2) układu równań użyłam metody backward substitution (wstawianie w tył) oraz obliczonych z (1) równania wartości wektora $\vec{z}$. W taki sposób otrzymałam wektor $\vec{y}$, który stanowi rozwiązanie tego problemu.

Obliczenie wyznacznika macierzy A sprowadza się do obliczenia iloczynu elementów diagonalnych macierzy U, ponieważ:

$$det(A) = det(L \times U) = det(L) * det(U)$$

L jest macierzą trójkątną dolną, wypełnioną jedynkami na diagonali, zaś U jest macierzą trójkątną górną. Wyznacznik macierzy trójkątnej jest iloczynem jej elementów diagonalnych, zatem $det(L) = 1$.

$$det(A) = 1 * det(U) = \prod_{i=1}^{N} u_{i,i} \qquad u \text{ – elementy macierzy } U$$

Wyniki

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 0.03287133486041399 \\ 1.339622798096375 \\ 2.066480295894664 \\ 2.825543605175336 \\ 3.557571715528883 \\ 4.284492868897645 \\ 5.00721018451999 \\ 5.727664002754518 \\ 6.446615582748809 \\ 7.164554400995276 \\ 7.881773878242026 \\ 8.598465868371878 \\ 9.314759799907844 \\ 10.030746230199036 \\ 10.746490321152768 \\ 11.46204012796359 \\ 12.177431844626687 \\ 12.892693237901542 \\ 13.60784595684208 \\ 14.322907124390252 \\ 15.03789045794619 \\ 15.752807073551208 \\ 16.467666073000725 \\ 17.182474979167374 \\ 17.897240063340146 \\ 18.611966594532937 \\ 19.32665903159678 \\ 20.041321172855753 \\ 20.755956273816828 \\ 21.47056714061568 \\ 22.18515620483152 \\ 22.899725583859315 \\ 23.61427712998635 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24.328812470561147 \\ 25.043333041083297 \\ 25.757840112626393 \\ 26.472334814693667 \\ 27.186818154368854 \\ 27.901291032443737 \\ 28.615754257064278 \\ 29.33020855532933 \\ 30.04465458319117 \\ 30.75909293394065 \\ 31.473524145507586 \\ 32.1879487067645 \\ 32.902367062989086 \\ 33.61677962061327 \\ 34.33118675136514 \\ 35.045588795892535 \\ 35.75998606694211 \\ 36.474378852156384 \\ 37.18876741654113 \\ 37.90315200464761 \\ 38.61753284250725 \\ 39.331910139350974 \\ 40.04628408914067 \\ 40.76065487193609 \\ 41.47502265511775 \\ 42.189387594482916 \\ 42.90374983523002 \\ 43.6181095128443 \\ 44.33246675389621 \\ 45.04682167676243 \\ 45.76117439227791 \\ 46.47552500432681 \\ 47.18987361037867 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 47.904220301975755 \\ 48.618565165176626 \\ 49.332908280960545 \\ 50.047249725596565 \\ 50.76158957098093 \\ 51.47592788494589 \\ 52.19026473154275 \\ 52.904600171301595 \\ 53.6189342614698 \\ 54.33326705623164 \\ 55.04759860691019 \\ 55.761928962153874 \\ 56.47625816810818 \\ 57.19058626857465 \\ 57.90491330515779 \\ 58.61923931740096 \\ 59.33356434291259 \\ 60.04788841748285 \\ 60.76221157519233 \\ 61.47653384851288 \\ 62.1908552684013 \\ 62.9051758643867 \\ 63.61949566465192 \\ 64.33381469610926 \\ 65.04813298447127 \\ 65.76245055431694 \\ 66.47676742915336 \\ 67.19108363147355 \\ 67.9053991828134 \\ 68.61971410401004 \\ 69.33402833257784 \\ 70.0483379441879 \\ 70.7650588638003 \\ 71.53915685603329 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = 78240161.00959387$$