Klaudia Korczak – Zadanie numeryczne 1

Problematyka

Zadanie miało na celu obliczenie przybliżonej wartości pochodnej, przy użyciu wzorów:

A. $D_h f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

B. $D_h f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$

oraz analizę zachowania błędu względnego podczas tych obliczeń. Dzięki temu możliwe będzie ustalenie najbardziej optymalnego h, takiego żeby błąd obliczeń był najmniejszy.

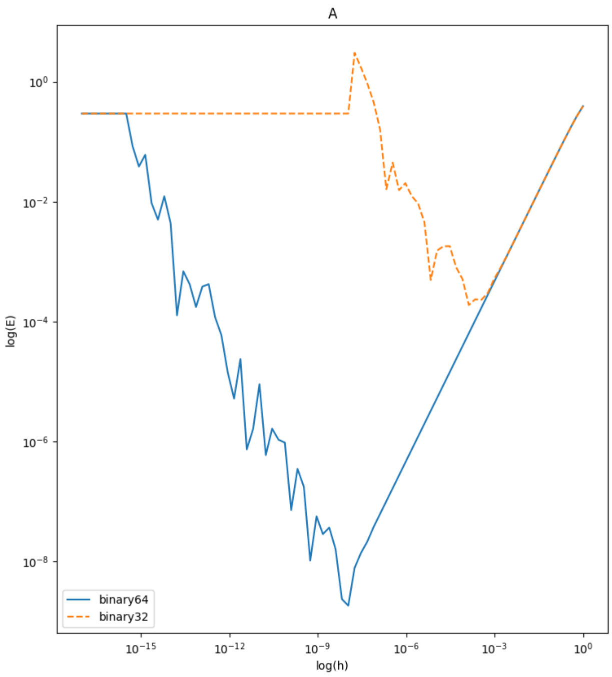
Wykresy przedstawiają funkcje błędu względnego w zależności od parametru h dla przybliżonych definicji pochodnej z podpunktów odpowiednio A i B, dla $f(x) = \cos(x)$ oraz $x = 0.3$

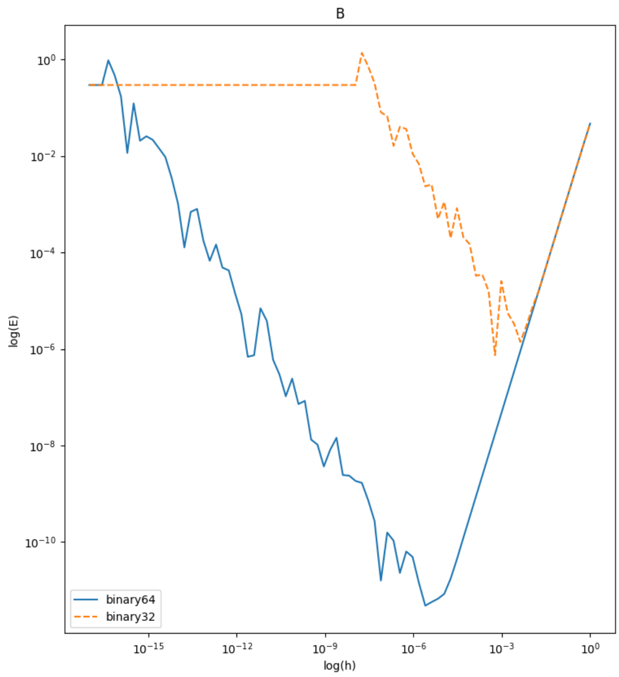
$$E_A(h) = \left|\frac{\cos(0.3+h) - \cos(0.3)}{h} - (-\sin(0.3))\right|$$

$$E_B(h) = \left|\frac{\cos(0.3+h) - \cos(0.3-h)}{2h} - (-\sin(0.3))\right|$$

Dla każdego z podpunktów zostały wygenerowane dwa wykresy, dla dwóch różnych precyzji: pojedynczej (binary32) oraz podwójnej (binary64).

Wyniki





Interpretacja wyników

Rozważając problem intuicyjnie, spodziewamy się, że dla bardzo małych wartości h błąd będzie rosnąć, ponieważ dzielenie przez takie liczby jest niestabilne numerycznie, a obliczane w ten sposób wyniki są zaokrąglane, aby można je było reprezentować na maszynie cyfrowej. Z kolei dla większych wartości h również spodziewamy się wzrostu błędu, ponieważ definicja pochodnej zakłada h bliskie zeru. Zatem otrzymane wykresy spełniają nasze oczekiwania.

Na wykresie można zauważyć, że lewa strona jest „poszarpana”, wynika to z faktu, że obliczając wartości funkcji dzielimy przez bardzo małe liczby, które są reprezentowane w pamięci komputera z zadaną precyzją, zaokrąglenia tych wyników powodują takie „skoki” wykresu.

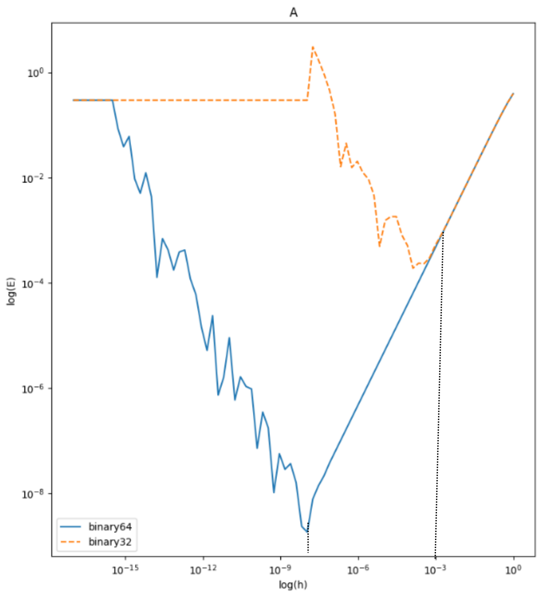
Warto rozważyć jeszcze różnice między precyzjami przy zapisie wartości h. Widzimy, że dla pojedynczej precyzji wykres jest przesunięty w prawo względem drugiego. Wynika to z faktu, że błąd rzędów zaokrągleń dla binary32 jest równy 10^{-7}, a dla binary64 jest to już 10^{-16}. Dlatego właśnie wykres dla binary32 „zaczyna się” (ma tendencje spadkową) dopiero w okolicach punktu $h = 10^{-7}$

Z rachunków przeprowadzonych na zajęciach wiemy, że minimum funkcji $E_A(h)$ ma postać:

$$\tilde{h} = \sqrt{\frac{4|f(x)|\varepsilon}{|f''(x)|}} = \sqrt{\frac{4|\cos(0.3)|\varepsilon}{|-\sin(0.3)|}}$$

$$\tilde{h}_{binary32} = \sqrt{\frac{4|\cos(0.3)|10^{-7}}{|-\sin(0.3)|}} \approx 10^{-3}$$

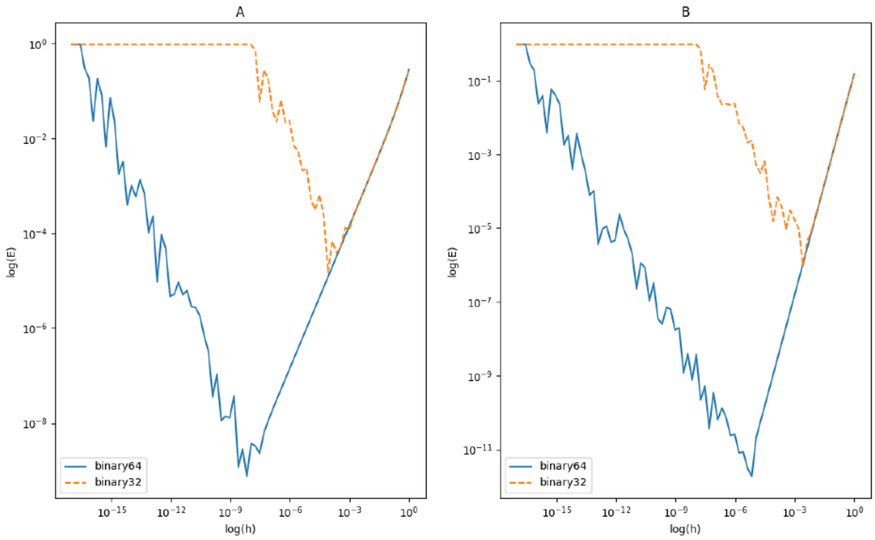
$$\tilde{h}_{binary64} = \sqrt{\frac{4|\cos(0.3)|10^{-16}}{|-\sin(0.3)|}} \approx 10^{-8}$$



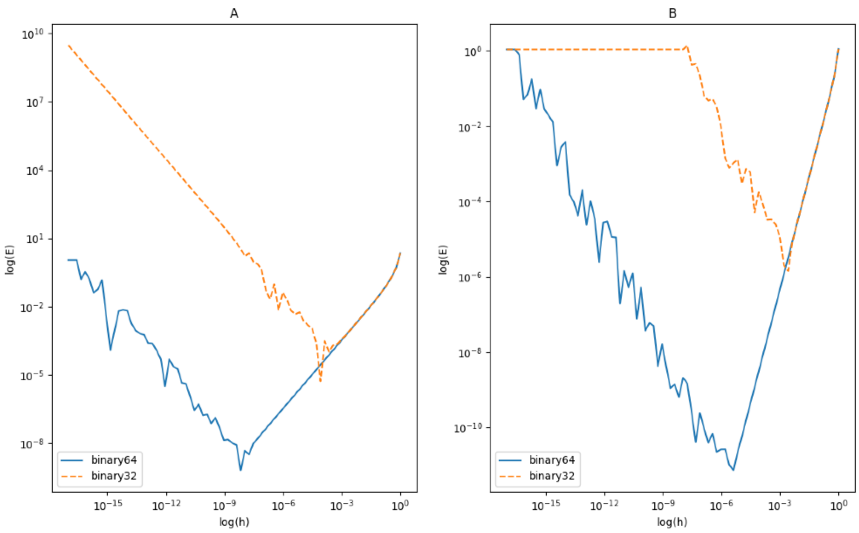
Zatem przy obliczaniu pochodnej funkcji na maszynie cyfrowej najbardziej optymalnym wyborem wartości h jest wybór minimum funkcji błędu($E(h) = |D_h f(x) - f'(x)|$).
Na przykład dla wzoru (A), najlepszy wybór dla pojedynczej precyzji to $h = 10^{-3}$, a dla podwójnej to $h = 10^{-8}$. Dla wzoru (B) możemy mniej więcej odczytać z wykresu, że te wartości będą wynosiły odpowiednio 10^{-3} i 10^{-5}.

Wykresy dla innych funkcji

$$f(x) = \sin(x)$$
$$f'(x) = \cos(x)$$



$$f(x) = \tan x$$
$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$



$$f(x) = \sqrt{x}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$