Klaudia Korczak – Zadanie numeryczne 2

Problematyka

Zadanie miało na celu rozwiązanie układów równań

$$A_1 y_1 = b \qquad A_1 y_1' = b' \qquad A_2 y_2 = b \qquad A_2 y_2' = b'$$

dla zadanych:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2.40827208 & -0.36066254 & 0.80575445 & 0.46309511 & 1.20708553 \\ -0.36066254 & 1.14839502 & 0.02576113 & 0.02672584 & -1.03949556 \\ 0.80575445 & 0.02576113 & 2.45964907 & 0.13824088 & 0.0472749 \\ 0.46309511 & 0.02672584 & 0.13824088 & 2.05614464 & -0.9434493 \\ 1.20708553 & -1.03949556 & 0.0472749 & -0.9434493 & 1.92753926 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2.61370745 & -0.6334453 & 0.76061329 & 0.24938964 & 0.82783473 \\ -0.6334453 & 1.51060349 & 0.08570081 & 0.31048984 & -0.53591589 \\ 0.76061329 & 0.08570081 & 2.46956812 & 0.18519926 & 0.13060923 \\ 0.24938964 & 0.31048984 & 0.18519926 & 2.27845311 & -0.54893124 \\ 0.82783473 & -0.53591589 & 0.13060923 & -0.54893124 & 2.6276678 \end{pmatrix}$$

$$b \equiv \begin{pmatrix} 5.40780228 \\ 3.67008677 \\ 3.12306266 \\ -1.11187948 \\ 0.54437218 \end{pmatrix} \qquad b' = b + \begin{pmatrix} 10^{-5} \\ 0 \\ 0 \\ 00 \end{pmatrix}$$

oraz obliczenie $\Delta_i \equiv \left\| \mathrm{y_i} - \mathrm{y_i'} \right\|_2$ dla $i = 1, 2$

Wyniki

$$\boldsymbol{y_1} = \begin{pmatrix} 3.28716602 \\ 3.8029998 \\ 0.25146854 \\ -1.57875474 \\ -0.50410395 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{y_1'} = \begin{pmatrix} 16.74173331 \\ -14.06233581 \\ -2.70495914 \\ -15.57494943 \\ -25.34234553 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Delta_1} = 36.35612428128695$$

$$\boldsymbol{y_2} = \begin{pmatrix} 3.18374857 \\ 3.94032033 \\ 0.27419287 \\ -1.47117406 \\ -0.31318674 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{y_2'} = \begin{pmatrix} 3.18375389 \\ 3.94032237 \\ 0.27419131 \\ -1.47117514 \\ -0.31318814 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Delta_2} = 6.166739465487801e - 06$$

Interpretacja wyników

Wyniki pokazały, że $\Delta_2 \ll \Delta_1$. Błąd wyniku dla macierzy A_1 jest tak duży ponieważ, współrzędne wektorów y_1 i y_1' znacznie się różnią, zatem równania dla tej macierzy są wrażliwe na zaburzenia.

Aby pokazać, że problem dla macierzy A_1 jest źle uwarunkowany, obliczę współczynnik uwarunkowania macierzy κ.

$$\kappa = \frac{max|\lambda_i|}{min|\lambda_i|}$$

Wartości własne macierzy:

A_1: $max|\lambda_i| = 4.00000001204478$ $min|\lambda_i| = 1.0179218401518142e - 07$

A_2: $max|\lambda_i| = 4.000000009294838$ $min|\lambda_i| = 0.9999999961854147$

Zatem współczynnik κ przyjmuje postać:

$$\kappa_1 = \frac{4.00000001204478}{1.0179218401518142e - 07} = 39295748.00603762$$

$$\kappa_2 = \frac{4.000000009294838}{0.9999999961854147} = 4.000000024553179$$

$$\kappa_1 \gg \kappa_2$$

Wartości współczynnika κ potwierdzają, że problem dla macierzy A_1 jest źle uwarunkowany, ze względu na szum numeryczny. Natomiast problem dla macierzy A_2 jest dużo lepiej uwarunkowany.