FYS-MEK1110

Obligatorisk oppgave 6

Klaudia Malgorzata Pawlak

klaudiap@student.matnat.uio.no

05.05.2019

Oppgave 1:

a) Hastigheten til massesenteret:

$$v = \frac{mv_0 + m \cdot 0}{m + m} = \frac{mv_0}{2m} = \frac{1}{2}v_0$$

b) Det er ingen ytre krefter → akselerasjonen til massesenteret er null (etter Newtons 1. lov). Derfor blir hastigheten til massesenteret konstant, og vi får samme svar som i Oppgave a) :

$$v = \frac{1}{2}v_0$$

c) Endringen i kinetisk energi:

$$\Delta K = K_0 - K_1$$

Den kinetiske energien til systemet før kollisjonen er:

$$K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Den kinetiske energien til systemet etter kollisjonen er:

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}v_0\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}v_0\right)^2 = \frac{1}{8}mv_0^2 + \frac{1}{8}mv_0^2 = \frac{1}{4}mv_0^2$$

Og vi får:

$$\Delta K = K_0 - K_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{4}mv_0^2 = \frac{1}{4}mv_0^2 = \frac{1}{2}K_0$$

d) Siden det er likevekstlengde *b* mellom atomene, så har vi ingen ytre krefter som virker på systemet, og hastigheten til massesenteret blir samme som i Oppgave a):

$$v = \frac{1}{2}v_0$$

I dette systemet beholder atomene sine hastigheter relativt til massesenteret, slik at den kinetiske energien til systemet er uforandret.

e) Fjærkraft (Hookes lov):

$$F = -k\Delta x$$

Der Δx er strekningen ut fra hvilestillingen, altså:

$$\Delta x = (x_b - x_a) - b \rightarrow \; F = -k((x_b - x_a) - b)$$

Siden kraften på atom A virker i positiv retning, så får vi:

$$F_A = k((x_b - x_a) - b)$$

Fjæren har ingen masse og derfor vil kraften som virker på B den samme som i A, men motsatt rettet:

$$F_B = -k((x_b - x_a) - b)$$

f) Vi bruker Newtons 2. lov, og får:

$$a_A = \frac{F_A}{m} = \frac{k\big((x_b - x_a) - b\big)}{m}$$

$$a_B = \frac{F_B}{m} = -\frac{k\big((x_b - x_a) - b\big)}{m}$$

Differensiallikninger:

$$v_{A_{i+1}} = v_{A_i} + a_A * dt$$

$$v_{B_{i+1}} = v_{B_i} + a_B * dt$$

$$x_{A_{i+1}} = x_{A_i} + v_{A_{i+1}} * dt$$

$$x_{B_{i+1}} = x_{B_i} + v_{B_{i+1}} * dt$$

Initialbetingelser:

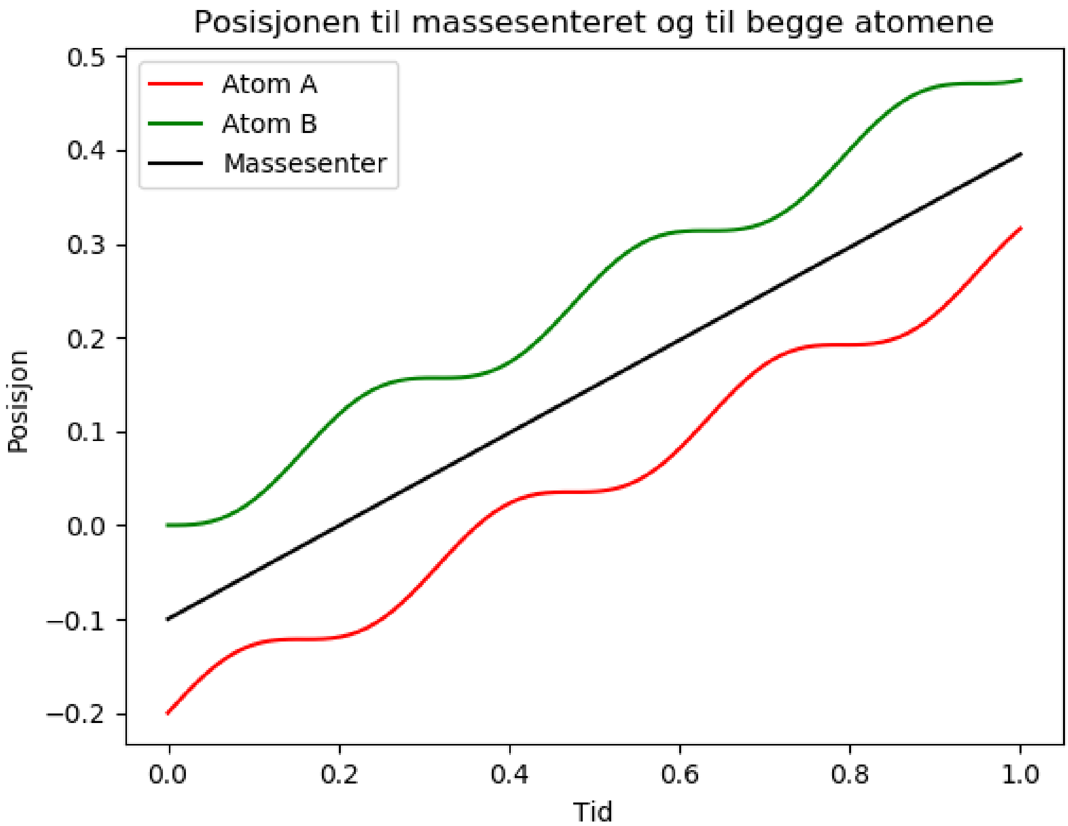
$$v_{B_0} = 0$$

g)

```
#Oppgave g

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

m = 0.1
k = 20
b = 0.2
n = 1000
T = 1
dt = T/n
```

```

xa = np.zeros(n)
xb = np.zeros(n)
aa = np.zeros(n)
ab = np.zeros(n)
va = np.zeros(n)
vb = np.zeros(n)
t = np.linspace(0, T, n)

va[0] = 1
vb[0] = 0
xa[0] = -b
xb[0] = 0

for i in range(n-1):
    aa = k*(xb[i] - xa[i] - b)/m
    va[i+1] = va[i] + aa * dt
    xa[i+1] = xa[i] + va[i+1] * dt
    ab = -aa
    vb[i+1] = vb[i] + ab * dt
    xb[i+1] = xb[i] + vb[i+1] * dt
    xc = (xa + xb)/2

plt.plot(t, xa, 'r', label='Atom A')
plt.plot(t, xb, 'g', label='Atom B')
plt.plot(t, xc, 'k', label='Massesenter')
plt.xlabel("Tid")
plt.ylabel("Posisjon")
plt.title("Posisjonen til massesenteret og til begge atomene")
plt.legend()
plt.show()
```

h)



i) Vi endrer progammet fra Oppgave 1g):

```python
xmax = np.zeros(n)

for i in range(n-1):
    xmax[i] = abs(xb[i] - xa[i])

print("Den maksimale avstanden mellom de to atomene er: %g " %(xmax.max()))
```

Kjøreeksempel gir:

```
C:\Users\claau\Desktop>python g.py
Den maksimale avstanden mellom de to atomene er: 0.250002
```

j) Det er ingen ytre krefter → akselerasjonen til massesenteret er null (etter Newtons 1. lov). Derfor blir hastigheten til massesenteret konstant gjennom kollisjonen:

$$v = \frac{1}{2}v_0$$

Det er ingen ytre krefter → ingen kraftmomenter + spinn er bevart:

$$\vec{\tau}_{net} = \frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{0}$$

Og vi får:

$$\vec{r}_A = \vec{R} + \vec{r}_{A,cm}$$

$$\vec{r}_B = \vec{R} + \vec{r}_{B,cm}$$

$$\vec{R} = \frac{1}{2m}(m\vec{r}_A + m\vec{r}_B) = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B)\left(= \frac{b}{2}\right)$$

$$\vec{v}_A = \vec{v} + \vec{v}_{A,cm} = \overrightarrow{v_0}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v} + \vec{v}_{B,cm} = \vec{0}$$

$$\vec{v}_{A,cm} = \vec{v}_A - \vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{v_0}$$

$$\vec{v}_{B,cm} = -\vec{v} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{v_0}$$

Spinn om massesenteret rett før kollisjon:

$$\vec{L}_{cm,z} = -\frac{b}{2}m\frac{1}{2}\overrightarrow{v_0} - \frac{b}{2}m\frac{1}{2}\overrightarrow{v_0} = -\frac{1}{2}bm\overrightarrow{v_0}$$

Etter kollisjonen roterer hele systemet med vinkelhastighet ω om massesenteret:

$$\vec{L}_{cm,z} = I_{cm,z}\omega$$

Treghetsmoment:

$$I_{cm,z} = 2m\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}mb^2$$

Vinkelhastighet:

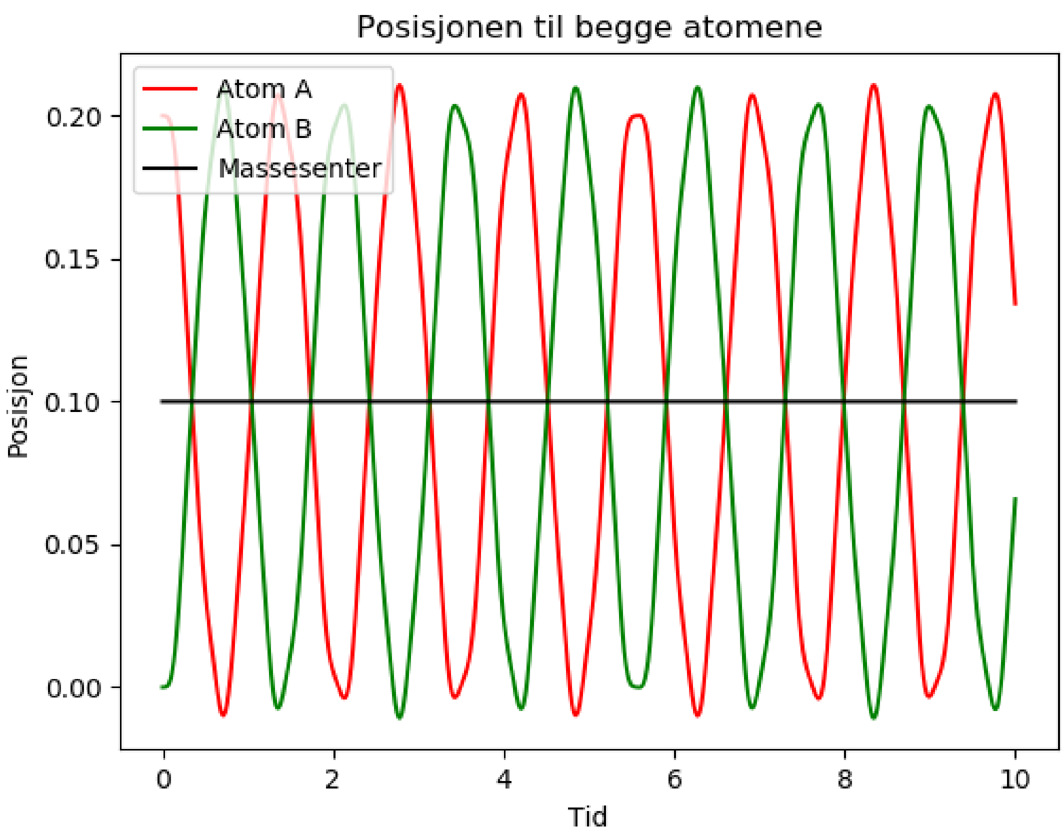
$$\omega = \frac{\vec{L}_{cm,z}}{I_{cm,z}} = -\frac{\frac{1}{2}bm\overrightarrow{v_0}}{\frac{1}{2}mb^2} = -\frac{\overrightarrow{v_0}}{b}$$

k)

```
#Oppgave k

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

m = 0.1
k = 20
b = 0.2
n = 10000
T = 10
dt = T/n

xa = np.zeros((n,2))
xb = np.zeros((n,2))
aa = np.zeros((n,2))
ab = np.zeros((n,2))
va = np.zeros((n,2))
vb = np.zeros((n,2))
t = np.linspace(0, T, n)

xa[0] = np.array([0, b])
```

```
xb[0] = np.array([0, 0])
va[0] = np.array([1, 0])
xb[0] = np.array([0, 0])

for i in range(n-1):
    dx = xb[i] - xa[i]
    xn = np.sqrt(np.dot(dx, dx))
    fa = k*(xn-b)*dx/xn
    aa = fa/m
    va[i+1] = va[i] + aa * dt
    xa[i+1] = xa[i] + va[i+1] * dt
    ab = -aa
    vb[i+1] = vb[i] + ab * dt
    xb[i+1] = xb[i] + vb[i+1] * dt
    xc = (xa[:, 1]+xb[:, 1])/2

plt.plot(t, xa[:, 1], 'r', label='Atom A')
plt.plot(t, xb[:, 1], 'g', label='Atom B')
plt.plot(t, xc, 'k', label='Massesenter')
plt.xlabel("Tid")
plt.ylabel("Posisjon")
plt.title("Posisjonen til begge atomene")
plt.legend()
plt.show()
```

l)



m)

Siden posisjonen til atomene varierer i forhold til massesenteret, vil også treghetsmomentet variere, sammen med vinkelhastigheten.