

UiO : Universitetet i Oslo

Skriftlig hjemmeksamen i FYS-MEK1110

Vår 2020

Emnekode: FYS-MEK1110

Kandidatnummer: 15196

Antall ord: 2262

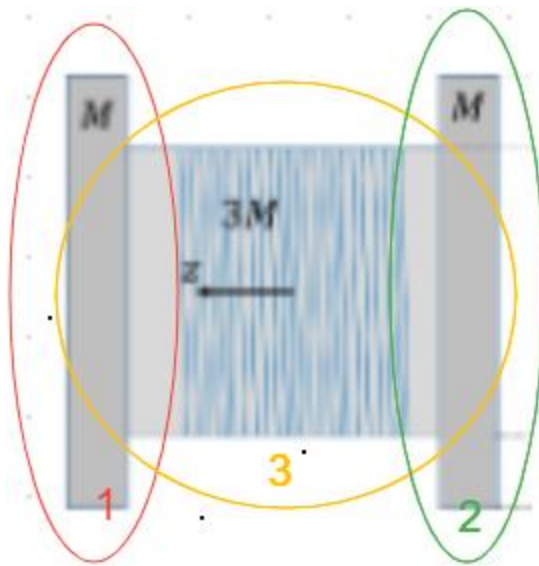
Dato: 02.06.2020



Oppgave 1

a.

I denne oppgaven fokuserer jeg på at denne trådsnellen er bygget av tre sylindere. Vi har to sylindriske skriver med masse M og radius $3R$ og en full sylinder med masse $3M$ og radius $2R$. Og siden treghetsmomentet til en homogen, full sylinder om symmetriaksen er $I = \frac{1}{2}mr^2$, finner vi treghetsmomentet til hver av de sylindrene vi har, for å så addere de sammen, se figur under



Figur 1. Tre sylindere

Jeg regner ut først treghetsmomentet til hver sylinder

$$I_1 = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}M(3R)^2 = \frac{9}{2}MR^2$$

$$I_2 = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}M(3R)^2 = \frac{9}{2}MR^2$$

$$I_3 = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}3M(2R)^2 = 6MR^2$$

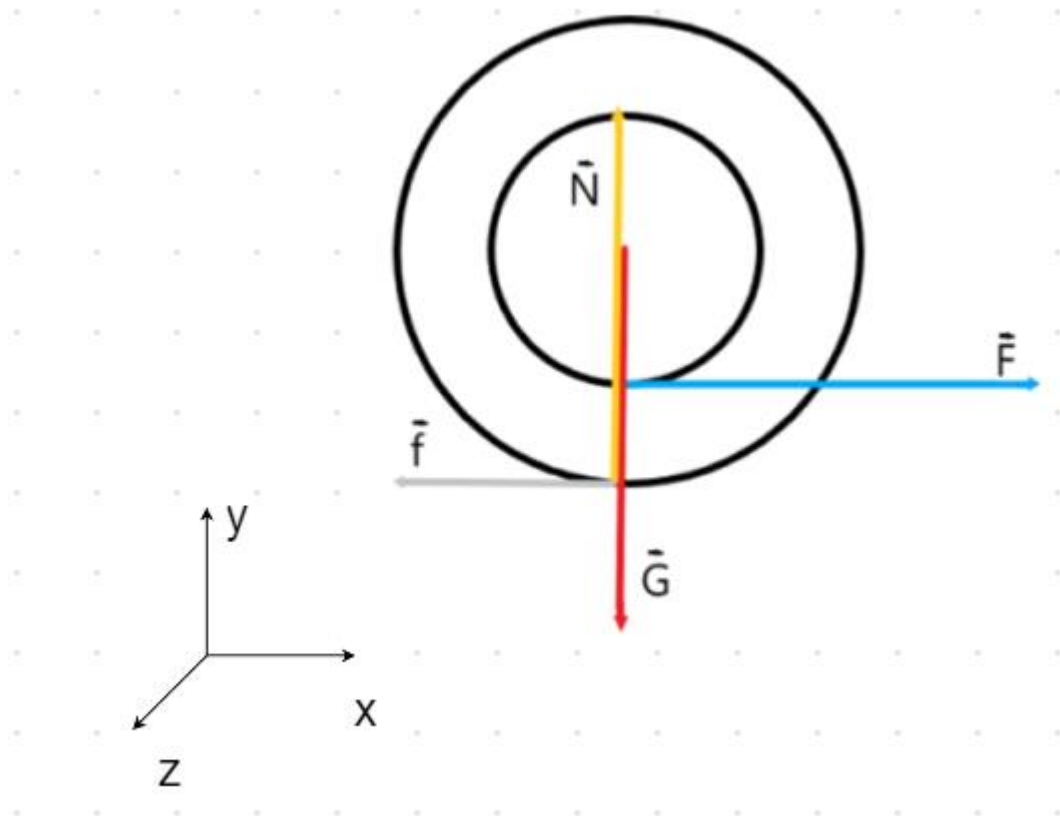
Så treghetsmomentet blir

$$I = \frac{9}{2}MR^2 + \frac{9}{2}MR^2 + 6MR^2 = 15MR^2$$

Resultatene stemmer med oppgaveteksten.

b.

Vi har fire kreftene som virker på trådsnellen: gravitasjonskraft \vec{G} ; normalkraft \vec{N} ; friksjonskraft \vec{f} og snordrag \vec{F} . Siden snellen sklir ikke, blir friksjonskraften statisk. Se figur under

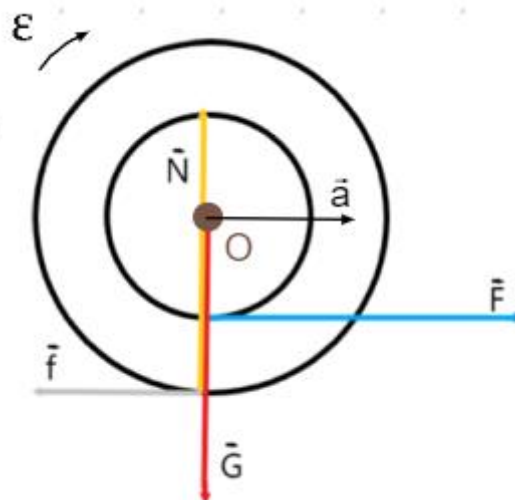


Figur 2. Frilegemediagram

c.

I denne oppgaven starter jeg med å regne ut friksjonskraft. Det er gitt i oppgaveteksten at vi har en friksjon mellom snellen og gulvet med en statisk friksjonskoeffisient på $\mu_s = 0.25$. Vi vett også at massen til trådsnellen er $5M$. Normalkraften skal i denne sammenhengen vær lik tyngdekraften, altså $N = mg$. Den maksimale friksjonskraften blir derfor

$$\vec{f}_{max} = N\mu_s = 5Mg\mu_s = 1.25Mg$$



Figur 3. Hjelpefigur med rotasjonsaksen O , og akselerasjon

Videre regner jeg ut nettokraft i horisontalretning (x -akse). Kreftene som befinner seg på x -aksen er \vec{f} og \vec{F} , altså

$$\sum \vec{F}_x = \vec{F} - \vec{f} = \vec{F} - 1.25Mg = 5Ma$$

Summen av dreiemomenter rundt punktet O er lik

$$\sum M_O = 1.25Mg \cdot 3R - \vec{F} \cdot 2R = I_O \varepsilon$$

Jeg bruker resultatene fra oppgave a), siden der har vi regnet ut treghetsmoment for legemet om rotasjon aksen, og regner ut ligningen

$$3.75Mg \cdot R - \vec{F} \cdot 2R = 15MR^2 \varepsilon$$

$$3.75Mg \cdot R - \vec{F} \cdot 2R = 15MR^2 \varepsilon \quad | /R$$

$$3.75Mg - 2\vec{F} = 15MR \varepsilon \quad | /15MR$$

$$\frac{3.75Mg - 2\vec{F}}{15MR} = \varepsilon$$

Videre vil jeg finne akselerasjon. Vi vett at bevegelsen skjer uten at trådsnellen sklir (statisk friksjon). Derfor vil akselerasjon bli gitt som

$$\vec{a} = \varepsilon r = 3R\varepsilon = 3R \cdot \frac{3.75Mg - 2\vec{F}}{15MR} = \frac{3.75Mg - 2\vec{F}}{5M}$$

Jeg setter resultatene inn i ligningen vi fant for nettokraften

$$\vec{F} - 1.25Mg = 5M \cdot \frac{3.75Mg - 2\vec{F}}{5M} = 3.75Mg - 2\vec{F}$$

$$\vec{F} + 2\vec{F} = 3\vec{F} = 3.75Mg + 1.25Mg = 5Mg$$

$$3\vec{F} = 5Mg$$

$$\vec{F}_{max} = \frac{5}{3}Mg$$

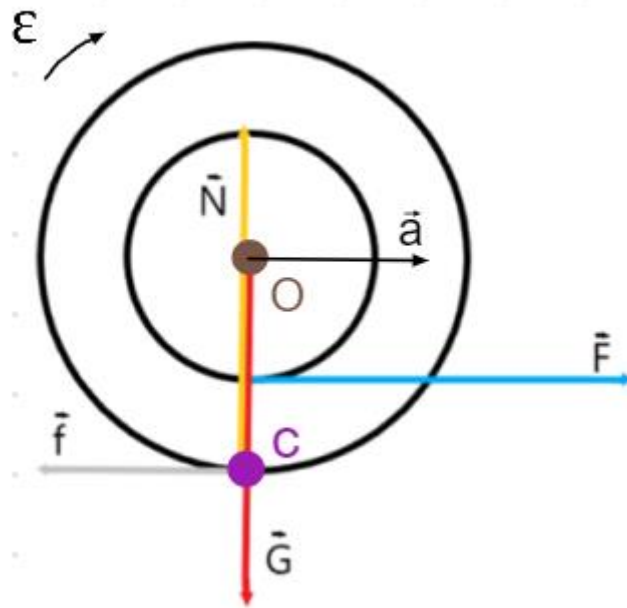
Resultatene stemmer med det vi skulle vise i oppgaven.

d.

Ved

$$\vec{F} = \vec{F}_{max} = \frac{5}{3}Mg = 1.67Mg$$

Vil kraften \vec{F} bli større enn friksjonskraften $\vec{f} = 1.25Mg$. Derfor vil snellen bevege seg i \vec{F} -retning, altså ut fra under senger. Derfor vil jeg klare å få den ut av under sengen.



Figur 4. Hjelpefigur med kontaktpunkt C

Summen av dreiemomenter rundt punktet C er lik

$$\sum M_C = \vec{F}R = I_C \varepsilon$$

Tregghetsmomentet (punkt C) er lik

$$I_C = I + 5M(3R)^2 = 15MR^2 + 45MR^2 = 60MR^2$$

Setter vi det i ligningen vi fant for dreiemomenter rundt punktet C, så blir det

$$\vec{F}R = 60MR^2 \varepsilon$$

$$\vec{F} = 60MR \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{\vec{F}}{60MR}$$

Akselerasjonen er

$$\vec{a} = 3R\varepsilon = 3R \cdot \frac{\vec{F}}{60MR} = \frac{\vec{F}}{20M}$$

Vi bruker resultatene fra oppgave e)

$$\vec{F} - 1.25Mg = 5M \cdot \frac{\vec{F}}{20M} = \frac{\vec{F}}{4}$$

$$\vec{F} - \frac{5}{4}Mg = \frac{\vec{F}}{4}$$

$$\frac{3}{4}\vec{F} = \frac{5}{4}Mg$$

$$\vec{F} = \frac{5}{3}Mg$$

Akselerasjonen blir derfor

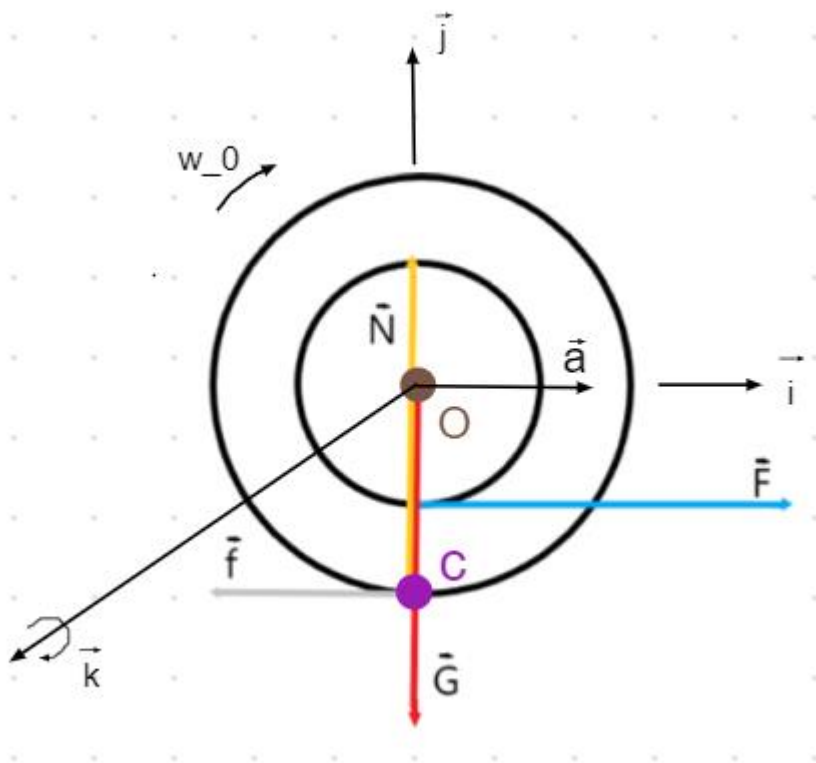
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{20M} = \frac{5}{3}Mg \cdot \frac{1}{20M} = \frac{g}{12} \approx \frac{9.81}{12} = 0,8175 \frac{m}{s^2}$$

e.

Impulsen som trådsnellen får blir

$$\Delta \vec{p} = m\vec{v} + I_o \vec{\omega} = 5M \cdot \vec{v}_0 + 15MR^2 \cdot \vec{\omega}_0$$

f.



Figur 5. Hjelpefigur med vinkelhastighet og aksene

Startfarten blir

$$\vec{v}_0 = \frac{3}{2}R\vec{\omega}_0$$

Akselerasjonen blir

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\vec{F}}{5m} \rightarrow \vec{F} = \vec{a} \cdot 5M$$

Videre får vi

$$\varepsilon = \vec{F} \cdot \frac{2R}{15MR^2} = \frac{\vec{a} \cdot 5M \cdot 2R}{15MR^2} = \frac{2\vec{a}}{3R}$$

$$\varepsilon = \frac{2a}{3R} \cdot \Delta t$$

$$\varepsilon \cdot \Delta t = \frac{2}{3R} \vec{a} \cdot \Delta t$$

Videre setter vi $\varepsilon \cdot \Delta t = \vec{\omega}_0$ og $\vec{a} \cdot \Delta t = \vec{v}_0$ og vi får

$$\vec{\omega}_0 = \frac{2v_0}{3R}$$

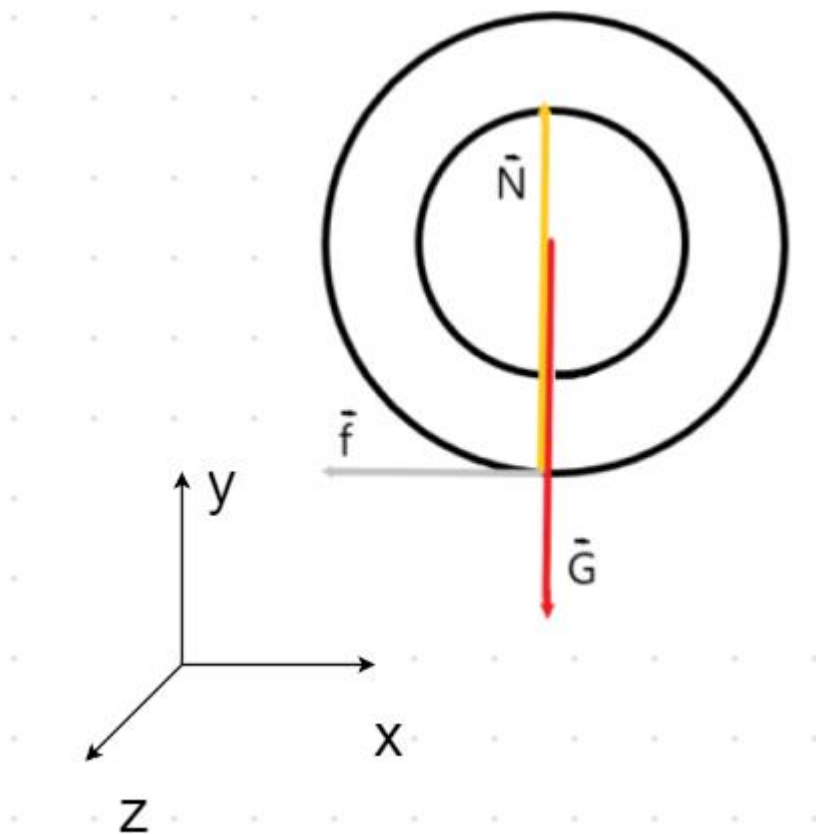
Om akse \vec{k} , se hjelpefigur. Vinkelhastigheten blir derfor

$$\vec{\omega}_0 = \frac{2v_0}{3R} \vec{k}$$

Resultatene stemmer med det vi skulle vise i oppgaven.

g.

Nå har vi kun friksjonskraft \vec{f} (dynamisk), normalkraft \vec{N} og gravitasjonskraft \vec{G} som virker på snellen.



Figur 6. Frilegemediagram

h.

Av kreftene er det kun friksjonen som påvirker bevegelsen. Friksjonen reduserer hastigheten til snellen på følgende måte

$$\vec{F}_x = -\vec{f} = -\mu g m = -0.2 \cdot g \cdot 5M = -Mg$$

Snellen har både lineærhastighet v_0 og vinkelhastighet ω_0 som gjør at snellen beveger seg bakover, altså i motsatt retning til snordraget. Altså summen av dreiemomenter rundt punktet O vil være

$$\sum M_O = -3\vec{f}R$$

Derfor vil vi ikke klare å få den ut fra under sengen (eller kanskje på andre enden av sengen, avhengig av lengden til sengen).

i.

Vi bruker at lineærhastigheten er gitt som

$$\vec{v} = \vec{v}_0 - \vec{a}t = \vec{v}_0 - \frac{\vec{f}}{M}t = \vec{v}_0 - \mu g t$$

Vinkelakselerasjon er gitt som

$$\alpha = \frac{\vec{f} \cdot r}{I_O} = \frac{5\mu M g \cdot 3R}{15MR^2} = \frac{\mu g}{5R}$$

Dermed blir vinkehastighet lik

$$\vec{\omega}_x = \alpha t = \frac{\mu g}{5R} t$$

Vi bruker rullebetingelsen og får

$$\begin{aligned}\vec{v}_x &= R\vec{\omega}_x \\ \vec{v}_0 - \mu g t &= \frac{3R\mu g}{5R} t \\ \vec{v}_0 &= \frac{3R\mu g}{5R} t + \mu g t \\ \vec{v}_0 &= \frac{3\mu g}{5} t + \mu g t \\ \vec{v}_0 &= \frac{3g}{25} t + \frac{1}{5} g t \\ \vec{v}_0 &= \frac{3g}{25} t + \frac{5g}{25} t = \frac{8g}{25} t \\ t &= \frac{25 \vec{v}_0}{8 g}\end{aligned}$$

j.

Vi bruker utregningene fra oppgave i.

$$\vec{v}(t) = \frac{8g}{25} t$$

Og

$$\vec{\omega}(t) = \frac{\mu g}{5R} t$$

Ved t_1 får vi

$$\vec{v}_1 = \vec{v}(t_1) = \frac{8g}{25} \cdot \frac{25\vec{v}_0}{8g} = \vec{v}_0$$

Og

$$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}(t_1) = \frac{g}{25R} \cdot \frac{25\vec{v}_0}{8g} = \frac{\vec{v}_0}{8R}$$

Setter vi resultatene fra oppgave f., så får vi

$$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}(t_1) = \frac{1}{8R} \vec{v}_0 = \frac{1}{8R} \cdot \frac{3R}{2\vec{\omega}_0} = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{2\vec{\omega}_0} = \frac{3}{16\vec{\omega}_0}$$

Resultatene stemmer ikke med det vi hadde forventet, jeg tror det er en små utregningsfeil i beregningen av $\vec{v}(t)$ og $\vec{\omega}(t)$

k.

I forhold til punkt C (kontaktpunkt på gulvet) befinner snellen seg i posisjon

$$\vec{r} = -R\hat{j}$$

Ved tid t_0 har snellen hastighet (vi bruker resultatene fra oppgave f.)

$$\vec{\omega}_0 = \frac{2v_0}{3R} \vec{k}$$

Og bevegelsesmengde \vec{p}_0 blir

$$\vec{p}_0 = \frac{2v_0 m}{3R} \vec{k}$$

Og ved tid t_1 har snellen hastighet (vi bruker resultatene fra oppgave j.)

$$\vec{\omega}_1 = \frac{v_0}{8R} \vec{k}$$

Og bevegelsesmengde \vec{p}_1 blir

$$\vec{p}_1 = \frac{v_0 m}{8R} \vec{k}$$

Vi finner spinnet ved tid t_0

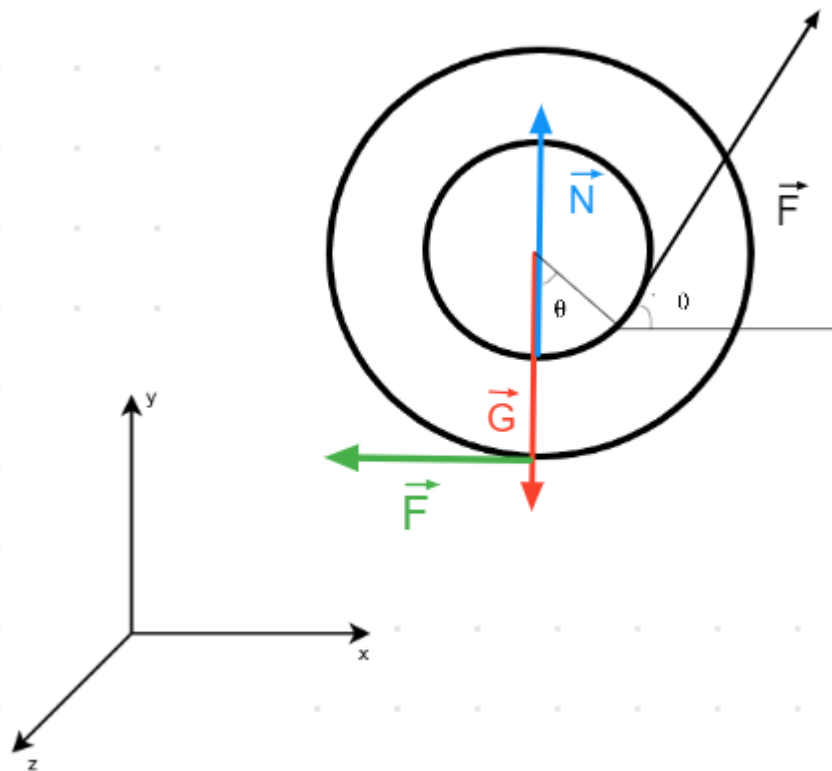
$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}_0 = -R\hat{j} \times \frac{2v_0 m}{3R} \vec{k} = -\frac{2Rv_0 m}{3R} = -\frac{2v_0 m}{3}$$

Vi finner spinnet ved tid t_1

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}_1 = -R\hat{j} \times \frac{v_0 m}{8R} \vec{k} = -\frac{Rv_0 m}{8R} = -\frac{v_0 m}{8}$$

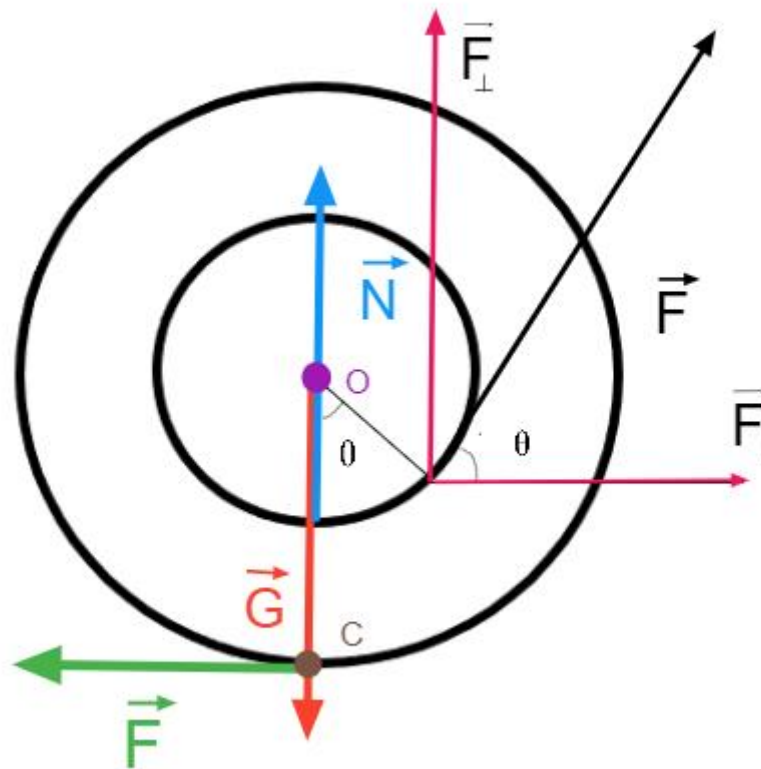
l.

Vi har fire kreftene som virker på trådsnellen: gravitasjonskraft \vec{G} ; normalkraft \vec{N} ; friksjonskraft \vec{f} og snordrag \vec{F} . Se figur under



Figur 7. Frilegemediagram

For å finne kraftmomentene tegner vi hjelpefigur



Figur 8. Hjelpefigur

Kraftmoment om kontaktpunkt med gulvet

$$\vec{M}_c = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I_c \vec{\omega})}{dt} = I_c \varepsilon$$

Vi har funnet i oppgave d. at $I_c = 60MR^2$, derfor

$$\vec{M}_c = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I_c \vec{\omega})}{dt} = 60MR^2 \varepsilon$$

Kraftmoment om massesenteret

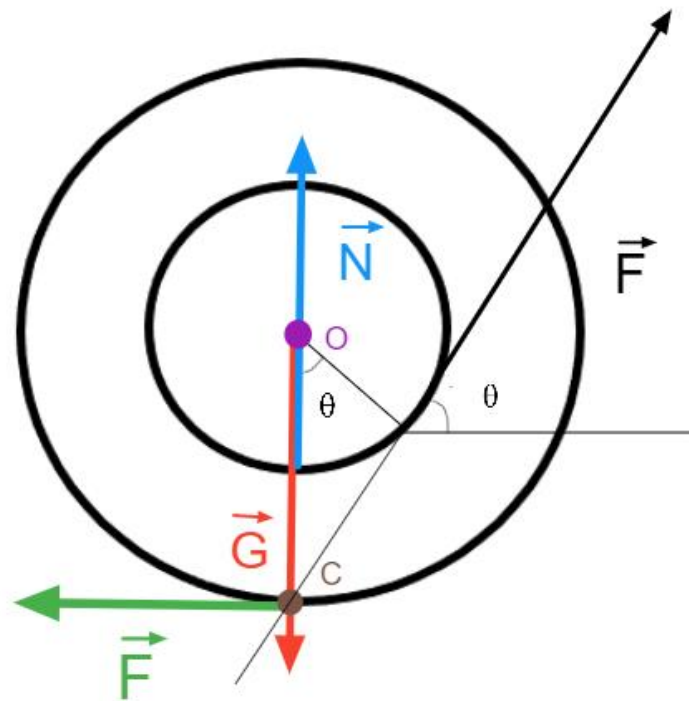
$$\vec{M}_o = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I_o \vec{\omega})}{dt} = I_o \varepsilon$$

Vi har funnet i oppgave c. at $I_o = 15MR^2$, derfor

$$\vec{M}_o = 15MR^2 \varepsilon$$

m.

Vi tegner hjelpefigur



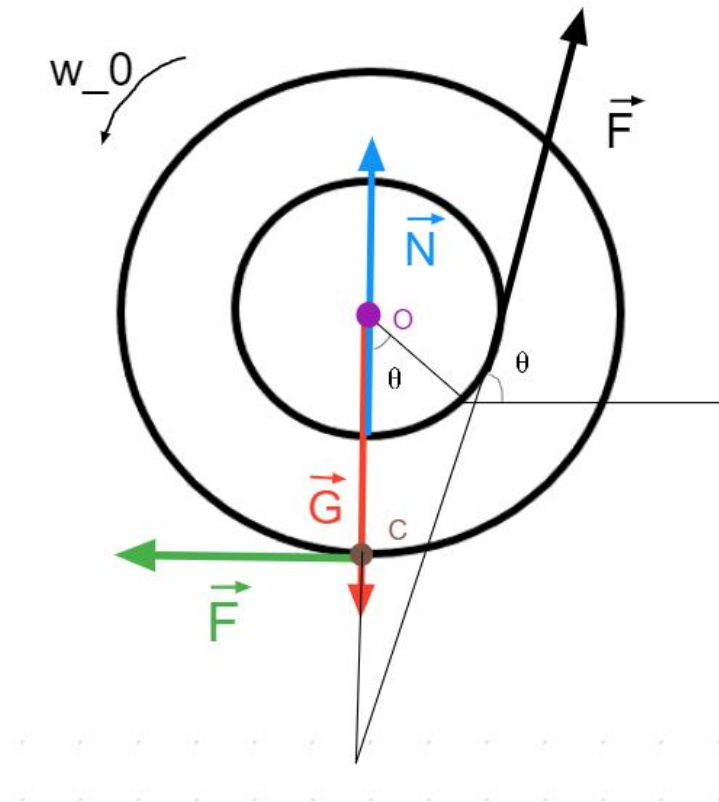
Figur 9. Hjelpefigur

Ut fra definisjon av dreiemoment har vi at

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Vi ser at i denne tilfellen vil momentankraften \vec{M} være lik null, siden retningen til kraften med vinkel θ går gjennom punktet C , slik at \vec{r} er lik null. I denne situasjonen vil ikke snellen rotere, men kun skli framover.

Vi tegner en ny hjelpefigur



Figur 10. Hjelpefigur med større vinkel θ

I tilfellen der vinkelen er større enn vinkel θ vil dreiemoment \vec{M} rotere snellen til venstre, altså snellen vil endre sin rulleretningen til motsatt retning og tråden vil vikle seg av fra spolen.

Oppgave 2

a.

Vi skriver følgende kode i Python

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 #Setter alle konstanter lik 1
5 U0 = 1
6 m = 1
7 b = 1
8 g = 1
9 h0 = 1
10
11 #Setter integralet for plottet
12 x = np.linspace(-3/2*b, 3/2*b)
13
14 #Skriver formelen for U(x)
15 def U(x):
16     return U0*(0.5*(x/b)**4-(x/b)**2)
```

```

17
18 #Plotter funksjonen
19 plt.plot(x, U(x))
20 plt.xlabel('x')
21 plt.ylabel('U(x)')
22 plt.show()

```

Kjøreeksempel gir

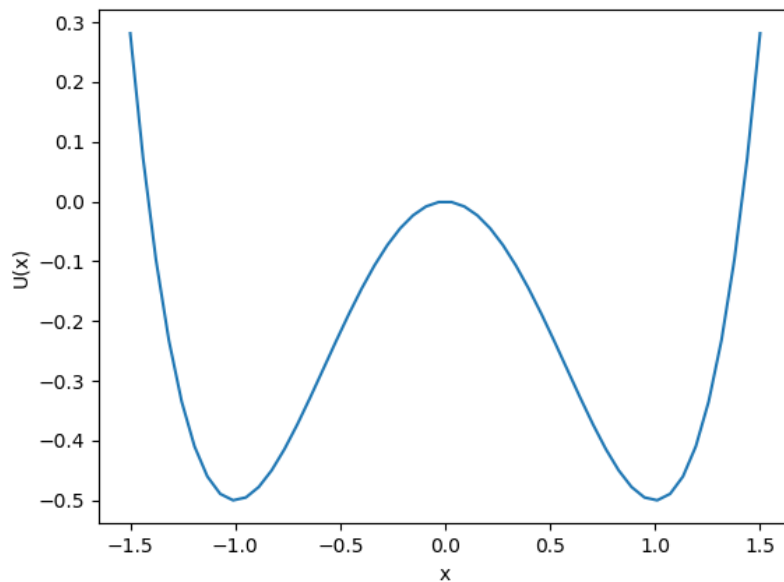


Figure 11. Potensialfunksjonen $U(x)$ for intervallet $-\frac{3}{2}b < x < \frac{3}{2}b$

b.

Det er mulig å finne kraften F ved å bruke at $-\frac{dU}{dx} = F(x)$

$$\begin{aligned}
 F(x) &= -\frac{dU}{dx} \\
 &= -\frac{d}{dx} \left(mgh_0 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x}{b} \right)^4 - \left(\frac{x}{b} \right)^2 \right) \right) \\
 &= -mgh_0 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x}{b} \right)^4 - \left(\frac{x}{b} \right)^2 \right) \\
 &= -mgh_0 \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x}{b} \right)^4 \right) - \frac{d}{dx} \left(\left(\frac{x}{b} \right)^2 \right) \right)
 \end{aligned}$$

Der

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x}{b} \right)^4 \right) &= \frac{2x^3}{b^4} \\
 \frac{d}{dx} \left(\left(\frac{x}{b} \right)^2 \right) &= \frac{2x}{b^2}
 \end{aligned}$$

Dermed blir det

$$\begin{aligned}
 F(x) &= -mgh_0 \left(\frac{2x^3}{b^4} - \frac{2x}{b^2} \right) \\
 &= -2mgh_0 \left(\frac{x^3}{b^4} - \frac{x}{b^2} \right) \\
 &= -\frac{2mgh_0}{b} \left(\frac{x^3}{b^3} - \frac{x}{b} \right) \\
 &= -\frac{2mgh_0}{b} \left(\left(\frac{x}{b} \right)^3 - \frac{x}{b} \right) \\
 &= \frac{2mgh_0}{b} \left(\frac{x}{b} - \left(\frac{x}{b} \right)^3 \right)
 \end{aligned}$$

Resultatet stemmer med det vi skulle vise i oppgaven.

c.

Likevektspunkter kan bli funnet ved å sette $F(x) = 0$

$$\begin{aligned}
 F(x) &= 0 \\
 \frac{2mgh_0}{b} \left(\frac{x}{b} - \left(\frac{x}{b} \right)^3 \right) &= 0
 \end{aligned}$$

Ut fra denne kan vi tolke at vi har likevektspunktene når $x = \pm b$ og $x = 0$. Vi kan bestemme likevektspunktene ved å finne minimum og maksimum i potensiell energi. Vi kan se på figur 7. i oppgave a. For $x = \pm b$ har vi en minimum i potensiell energi (siden vi satt at $b = 1$ i koden), og vi får derfor stabile likevektspunkter for $x = b$ og $x = -b$. For $x = 0$ har vi en maksimum i potensiell energi, og vi får derfor et ustabilt likevektspunkt for $x = 0$.

d.

Siden vi kan finne ett potensial slik at $-\frac{dU}{dx} = F(x)$ (se oppgave b.), så vett vi at energi er bevart (kraften er konservativ). Derfor tenker vi at vi må finne en punkt som har en større verdi enn i punktet $x = 0$ der $U(0) = 0$. Vi finner nullpunktene til funksjonen

$$\begin{aligned}
 U(x) &= 0 \\
 mgh_0 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x}{b} \right)^4 - \left(\frac{x}{b} \right)^2 \right) &= 0 \\
 \frac{1}{2} \left(\frac{x}{b} \right)^4 - \left(\frac{x}{b} \right)^2 &= 0 \\
 \frac{x^4}{2b^4} - \frac{x^2}{b^2} &= 0 \\
 x^2 \left(\frac{x^2}{2b^4} - \frac{1}{b^2} \right) &= 0
 \end{aligned}$$

$$\frac{x^2}{2b^4} - \frac{1}{b^2} = 0 \text{ eller } x = 0$$

$$\frac{x^2}{2b^4} = \frac{1}{b^2}$$

$$x^2 = \frac{2b^4}{b^2}$$

$$x^2 = 2b^2$$

$$x = \pm \sqrt{2}b$$

Vi er kun interessert i punktet der $x > 0$ altså punktet $x = \sqrt{2}b$. Så for at partikkelen skulle komme til en posisjon $x < 0$ må vi derfor slippe partikkelen ved en posisjon $x > \sqrt{2}b$, noe som stemmer med grafen vi har fått i oppgave a.

e.

For å finne den kinetiske energien til partikkelen A rett før kollisjon, kan vi bruke at energien er bevart (siden kraften er konservativ), da får vi

$$E = K_0 + U_0 = K_1 + U_1$$

I punktet 1 er $U_1 = 0$, vi får derfor at

$$\frac{1}{2}mv_{A,0}^2 + U_0 = \frac{1}{2}mv_{A,1}^2$$

Vi vil finne $v_{A,1}$, vi løser ligningen med hensyn på $v_{A,1}$ og får

$$\frac{1}{2}mv_{A,0}^2 + U_0 = \frac{1}{2}mv_{A,1}^2$$

$$mv_{A,0}^2 + 2U_0 = mv_{A,1}^2$$

$$v_{A,0}^2 + \frac{2U_0}{m} = v_{A,1}^2$$

$$\sqrt{v_{A,0}^2 + \frac{2U_0}{m}} = v_{A,1}$$

$$v_{A,1} = \sqrt{v_{A,0}^2 + \frac{2U_0}{m}}$$

Siden partikkelen slippes uten initialhastighet er $v_{A,0} = 0$ og derfor

$$v_{A,1} = \sqrt{\frac{2U_0}{m}}$$

f.

Siden partikkelen b er i ro, blir $v_{B,1} = 0$. Vi bruker formelen $v_1 = -rv_0$ for å finne hastighetene til partiklene etter kollisjonen, for partikkel b får vi at

$$v_1 = -rv_0$$

$$v_{B,2} = 0.5 \cdot 0 = 0$$

Og for partikkel a

$$v_1 = -rv_0$$

$$v_{A,2} = -0.5v_{A,1} = \frac{\sqrt{\frac{2U_0}{m}}}{2}$$

g.

Potensial i to dimensjoner er gitt som

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} = -\frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}\hat{i} - \frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{\partial y}\hat{j}$$

Vi bruker resultatene fra oppgave b. (vi bytte x med r) og får at

$$\frac{dU}{dr} = \frac{2mgh_0}{b} \left(\frac{r}{b} - \left(\frac{r}{b} \right)^3 \right)$$

Vi vett at $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Videre finner vi

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}$$

Og

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r}$$

Setter vi resultatene i funksjonen \vec{F} , så får vi

$$\vec{F} = \frac{2mgh_0}{b} \left(\frac{r}{b} - \left(\frac{r}{b} \right)^3 \right) \cdot \frac{x}{r} \hat{i} + \frac{2mgh_0}{b} \left(\frac{r}{b} - \left(\frac{r}{b} \right)^3 \right) \cdot \frac{y}{r} \hat{j}$$

$$\vec{F} = \frac{2mgh_0}{b} \left(\frac{r}{b} - \frac{r^3}{b^3} \right) \cdot \frac{x}{r} \hat{i} + \frac{2mgh_0}{b} \left(\frac{r}{b} - \frac{r^3}{b^3} \right) \cdot \frac{y}{r} \hat{j}$$

$$\vec{F} = \frac{2mgh_0}{b} \left(\frac{1}{b} - \frac{r^2}{b^3} \right) \cdot x \hat{i} + \frac{2mgh_0}{b} \left(\frac{1}{b} - \frac{r^2}{b^3} \right) \cdot y \hat{j}$$

$$\vec{F} = \frac{2mgh_0}{b} \left(\frac{1}{b} - \frac{r^2}{b^3} \right) (x\hat{i} + y\hat{j})$$

Kraften virker i posisjon $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$

$$\vec{F} = \frac{2mgh_0}{b^2} \left(1 - \frac{r^2}{b^2} \right) \vec{r}$$

$$\vec{F} = \frac{2mgh_0}{b^2} \left(1 - \left(\frac{r}{b} \right)^2 \right) \vec{r}$$

$$\vec{F} = \frac{2mgh_0}{b^2} \left(1 - \left(\frac{r}{b} \right)^2 \right) \vec{r}$$

Resultatet stemmer med det vi skulle vise

h.

Vi skriver koden i Python og får

```

1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3
4  #Setter alle konstanter lik 1
5  U0 = 1
6  m = 1
7  b = 1
8  g = 1
9  h0 = 1
10
11 #Variablene
12 dt = 0.1
13 N = 150
14 r = np.zeros((N,2), float)
15 v = np.zeros((N,2), float)
16 U = np.zeros((N,2), float)
17 K = np.zeros((N,2), float)
18 t = np.zeros((N,1), float)
19
20 #Initialbetingelser
21 r[0,:] = [1.5*b,0]
22 v[0,:] = [0,1.5*np.sqrt(g*h0)]
23
24 #Lager for-løkken for å regne ut funksjonene
25 for i in range(N-1):
26     rr = np.linalg.norm(r[i,:])
27     F = 2*m*g*h0/b**2*(1-(rr/b)**2)*r[i,:]
28     a = F/m
29     v[i+1,:] = v[i,:] + a*dt
30     r[i+1,:] = r[i,:] + v[i+1,:]*dt
31     t[i+1] = t[i] +dt
32     U[i+1,:] = U0*((1/2)*(rr/b)**4-(rr/b)**2)
33     #Skriver formel for kinetisk energi K = 0.5mv**2
34     K[i+1,:] = (1/2)*m*v[i+1,:]**2
35
36 #Plotter funksjonen
37 plt.figure()
38 plt.plot(r[:,0], r[:,1])
39 plt.xlabel('x/b')
40 plt.ylabel('y/b')
41 plt.show()
42
43 plt.figure()
44 plt.subplot(211)
45 plt.plot(t, U[:,0])
46 plt.xlabel('t')

```

```

47 plt.ylabel('U')
48 plt.subplot(212)
49 plt.plot(t, K[:,0])
50 plt.xlabel('t')
51 plt.ylabel('K')
52 plt.show()

```

For $\vec{v}_0 = 1.5\sqrt{gh_0}\hat{j}$ endrer vi initialbetingelse i koden, kjøreeksempel i dette tilfelle gir

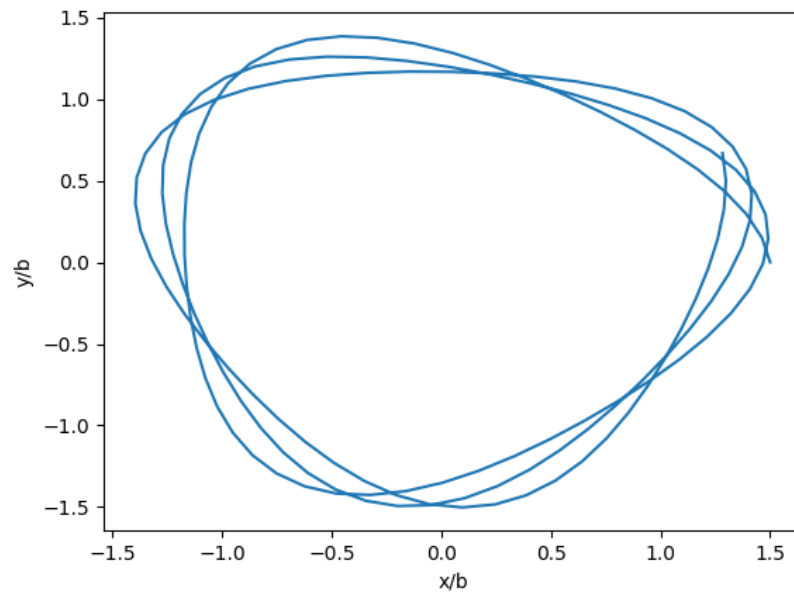


Figure 12. Plot av posisjon og hastighet til partikkelen som funksjon av tid
Og

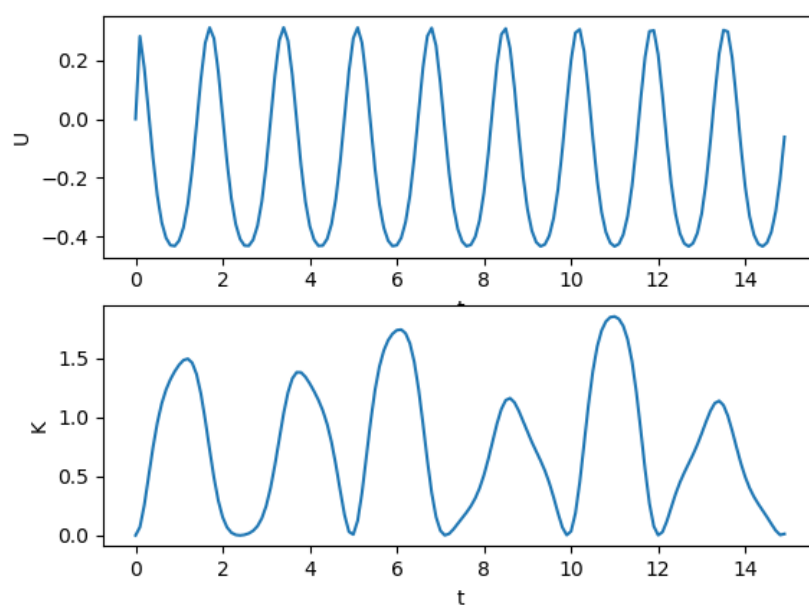


Figure 13. Plot av potensiell og kinetisk energi som funksjon av tid

Vi har en små feil i beregning som gjør at kinetisk energi ser ikke korrekt ut i forhold til den potensielle energien. Vi bare antar videre i oppgaven at den kinetiske energien ser ut som den inverse av den potensielle energien.

Initialbetingelsen $\vec{v}_0 = 1.5\sqrt{gh_0}\hat{j}$ fører til at partikkelen ikke lenger beveger seg i en stjerneformet bane, men den får en mer sirkulær bevegelse (pga. økningen i den kinetiske energien). Vi ser at kollisjonen med partikkelen ikke lenger er sentral.

For $\vec{v}_0 = 3\sqrt{gh_0}\hat{j}$ endrer vi initialbetingelse i koden, kjøreeksempel i dette tilfelle gir

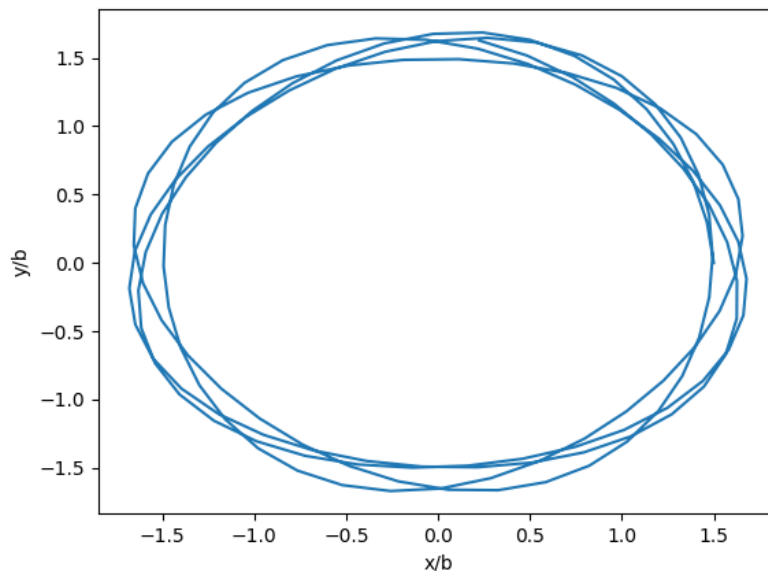


Figure 14. Plot av posisjon og hastighet til partikkelen som funksjon av tid

Og

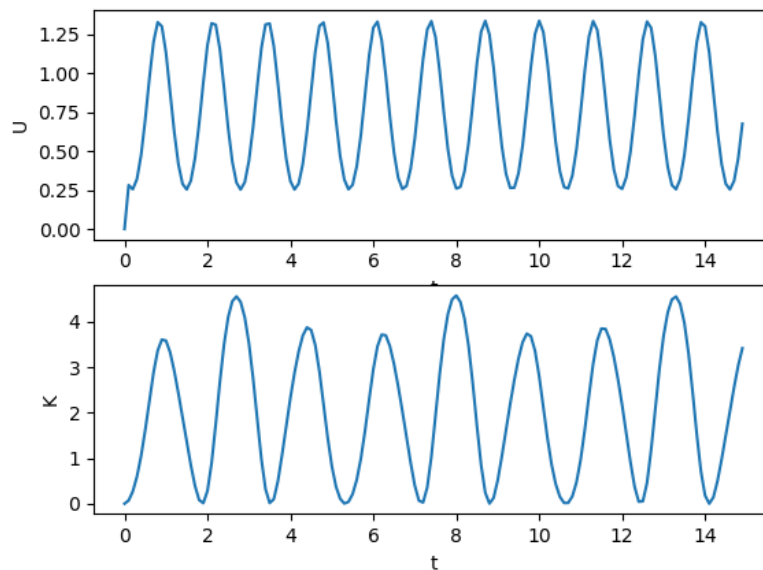


Figure 15. Plot av potensiell og kinetisk energi som funksjon av tid

Initialbetingelsen $\vec{v}_0 = 3\sqrt{gh_0}\hat{j}$ partikkelen får nå en mer sirkulær bevegelse pga. en større økning i den kinetiske energien (og at den potensielle energien ble mindre).

i.

For å regne ut dette, kan vi finne en minimum ved den potensielle energien (når den kinematiske energien er størst) fra initialposisjon $r_0 = \sqrt{2}b\hat{i}$.

$$\begin{aligned}\frac{d^2U}{dr^2} &> 0 \\ \frac{d^2}{dr^2} \left(U_0 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{r}{b} \right)^4 - \left(\frac{r}{b} \right)^2 \right) \right) &> 0 \\ \frac{d}{dr} \left(U_0 \left(\frac{2r^3}{b^4} - \frac{2r}{b^2} \right) \right) &> 0 \\ U_0 \left(\frac{6r^2}{b^4} - \frac{2}{b^2} \right) &> 0 \\ \frac{6r^2 - 2b^2}{b^4} &> 0 \\ \frac{1}{b^2} &> 0\end{aligned}$$

Vi kunne ikke finne initialhastigheten analytisk.

j.

Vi setter en ny konstant til koden fra oppgave h.

$D=0.1$

Og vi forandrer akselerasjonen til

$$a = (F - D \cdot \text{abs}(v[i,:]) \cdot v[i,:]) / m$$

Så koden blir

```
53 import numpy as np
54 import matplotlib.pyplot as plt
55
56 #Setter alle konstanter lik 1
57 U0 = 1
58 m = 1
59 b = 1
60 g = 1
61 h0 = 1
62 D = 0.1
63
64 #Variablene
65 dt = 0.1
66 N = 150
67 r = np.zeros((N,2), float)
68 v = np.zeros((N,2), float)
69 U = np.zeros((N,2), float)
70 K = np.zeros((N,2), float)
71 t = np.zeros((N,1), float)
72
73 #Initialbetingelser
74 r[0,:] = [1.5*b,0]
75 v[0,:] = [0,1.5*np.sqrt(g*h0)]
76
77 #Lager for-løkken for å regne ut funksjonene
78 for i in range(N-1):
79     rr = np.linalg.norm(r[i,:])
80     F = 2*m*g*h0/b**2*(1-(rr/b)**2)*r[i,:]
81     a = (F - D*abs(v[i,:])*v[i,:])/m
82     v[i+1,:] = v[i,:] + a*dt
83     r[i+1,:] = r[i,:] + v[i+1,:]*dt
84     t[i+1] = t[i] + dt
85     U[i+1,:] = U0*((1/2)*(rr/b)**4-(rr/b)**2)
86     #Skriver formel for kinetisk energi K = 0.5mv**2
87     K[i+1,:] = (1/2)*m*v[i+1,:]**2
88
89 #Plotter funksjonen
90 plt.figure()
91 plt.plot(r[:,0], r[:,1])
92 plt.xlabel('x/b')
93 plt.ylabel('y/b')
94 plt.show()
```

```

95
96 plt.figure()
97 plt.subplot(211)
98 plt.plot(t, U[:,0])
99 plt.xlabel('t')
100 plt.ylabel('U')
101 plt.subplot(212)
102 plt.plot(t, K[:,0])
103 plt.xlabel('t')
104 plt.ylabel('K')
105 plt.show()

```

For $\vec{v}_0 = 0.1\sqrt{gh_0}\hat{j}$ endrer vi initialbetingelse i koden, kjøreeksempel i dette tilfelle gir

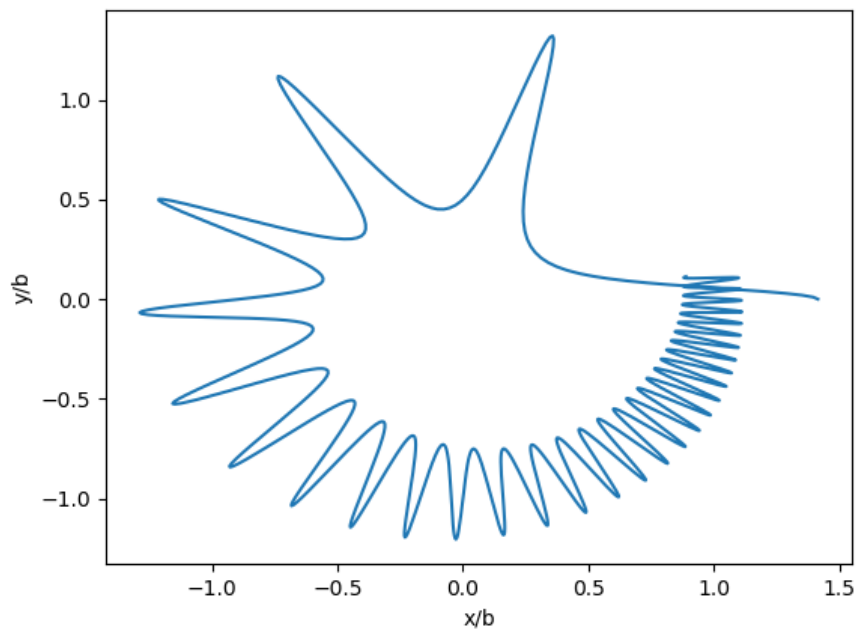


Figure 16. Plot av posisjon og hastighet til partikkelen som funksjon av tid

Og

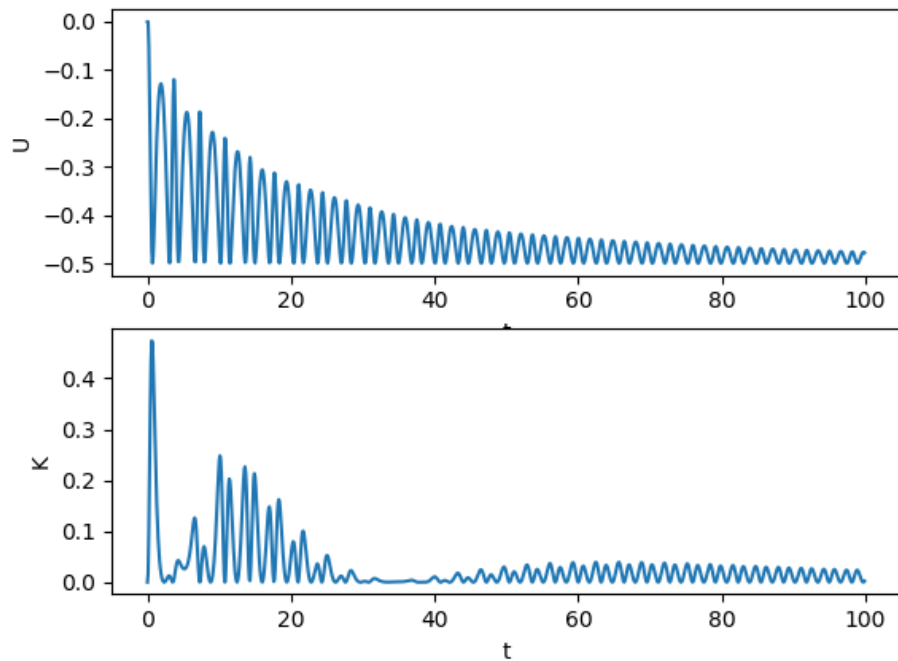


Figure 17. Plot av potensiell og kinetisk energi som funksjon av tid

For $\vec{v}_0 = 1.5\sqrt{gh_0}\hat{j}$ endrer vi initialbetingelse i koden, kjøreeksempel i dette tilfelle gir

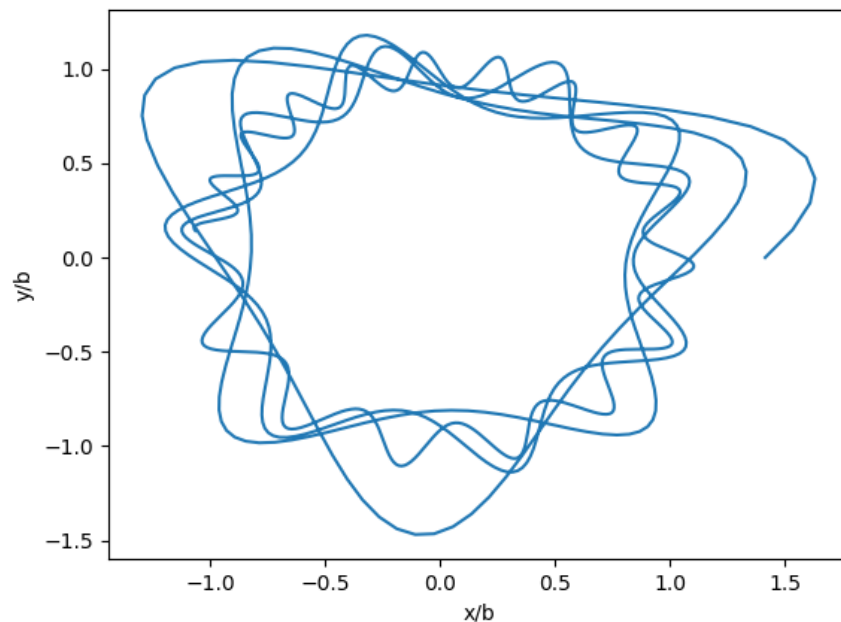


Figure 18. Plot av posisjon og hastighet til partikkelen som funksjon av tid

Og

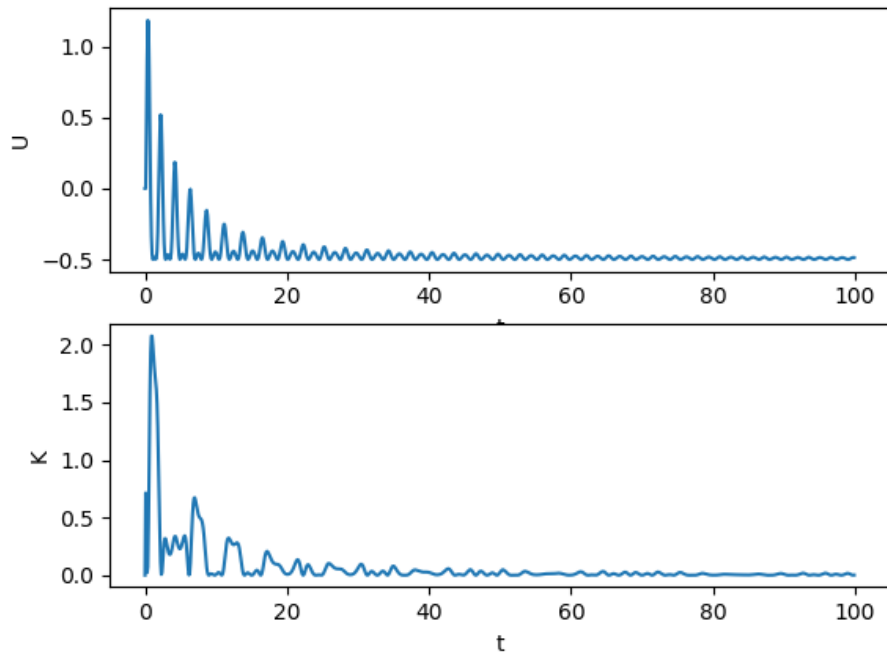


Figure 19. Plot av potensiell og kinetisk energi som funksjon av tid

For $\vec{v}_0 = 3\sqrt{gh_0}\hat{j}$ endrer vi initialbetingelse i koden, kjøreeksempel i dette tilfelle gir

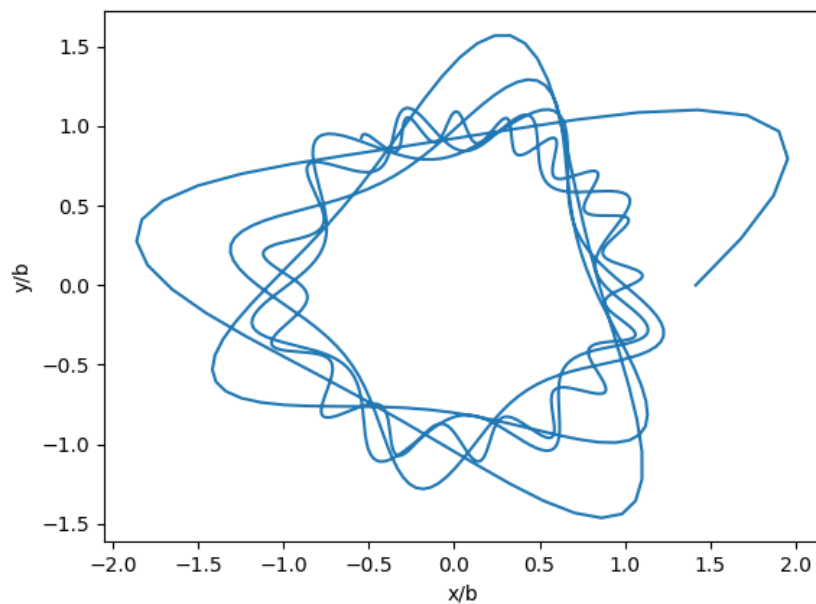


Figure 20. Plot av posisjon og hastighet til partikkelen som funksjon av tid

Og

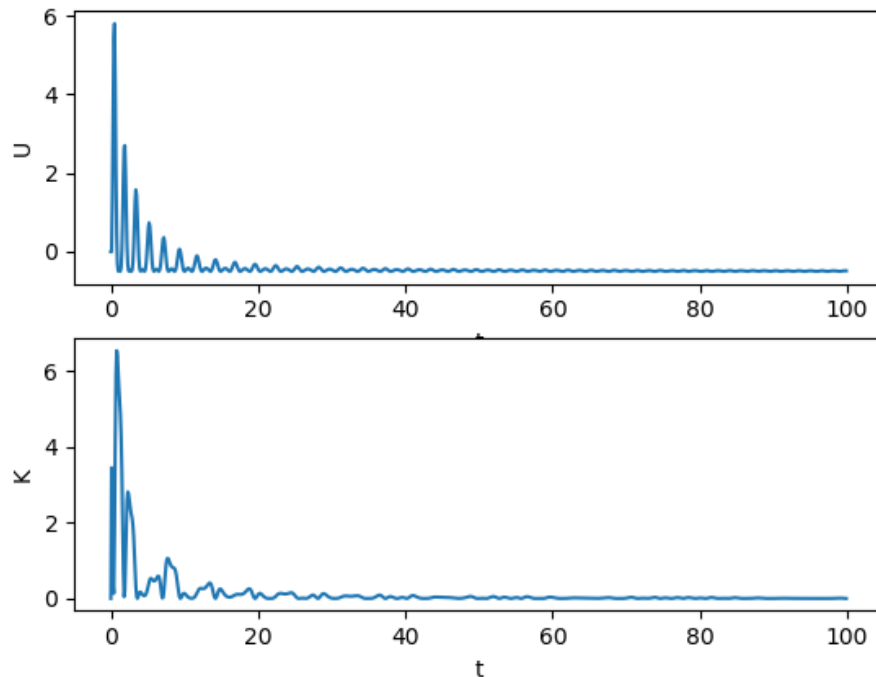


Figure 21. Plot av potensiell og kinetisk energi som funksjon av tid

Ut fra grafene kan vi observere at partikkelen får en mer stjerneformet bevegelse. Ut fra endringen i initialhastigheten kan vi observere at ved større initialhastighet vil vi få en mer stjerneformet bevegelse, med grunnere hopp.

Oppgave 3

a.

Myon observasjon er mulig pga. tidsdilatasjon fenomenet fra relativitetsteorien. Uten tidsdilatasjon burde en myon, som beveger seg med en hastighet nær lysets hastighet, gå i oppløsning etter et par hundre meter. Myoner er ustabile og levetiden for et myon er veldig kort i deres eget referansesystem, men i systemer der myonene kan bevege seg med relativistiske hastigheter kan denne levetiden bli mye større. Dette gjør det mulig å observere myonene på steder det normalt ikke hadde vært mulig.

b.

Vi vett at romskipet beveger seg med hastighet $v = 0.8c$, og det skytter en laserkanon i samme retning med hastighet $u' = c$ (siden lyspartiklene har hastighet c). Hadde vi brukt Galilei transformasjon, ville vi få $u = v + c$, noe som ikke stemmer med Einsteins postulater.

I henhold til den relativistiske transformasjonen av hastighet (Lorentz transformasjon for hastighet) blir hastigheten

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'} = \frac{c + 0.8c}{1 + \frac{0.8c \cdot c}{c^2}} = \frac{1.8c}{1.8c} = c$$

Lorentz transformasjonen indikerer at det ikke er noe referansesystem der lyspartikler ville ha en annet hastighet enn c .