FYS-MEK1110

Obligatorisk oppgave 3

Klaudia Małgorzata Pawlak

klaudiap@student.matnat.uio.no

03.03.2019

Oppgave1

a)

Vi bruker Pythagoras og får:

$$0.3^2 + x_0^2 = 0.5^2$$

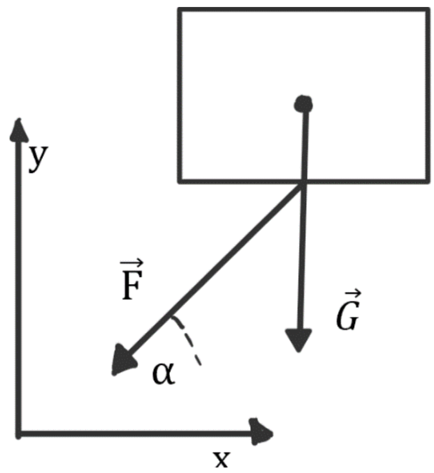
$$x_0 = \sqrt{0.16} = \pm 0.4$$

b)

Vi bruker Pythagoras og får:

$$l = \sqrt{x^2 + h^2}$$

c)



Figur 1: Fri-kropps-diagram

d)

Vi vett at $F = \pm k\Delta L$, videre får vi at:

$$\Delta l = l - l_0 = \sqrt{x^2 + h^2} - l_0$$

Da får vi:

$$F = \pm k\Delta l = \pm k\left(\sqrt{x^2 + h^2} - l_0\right)$$

Dekomponerer vi kraften med hensyn på vinkelen α, så får vi:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}}$$

Og den dekomponerte kraften blir:

$$F_x = \cos\alpha * F = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} * \pm k\left(\sqrt{x^2 + h^2} - l_0\right) = \frac{\pm kx\sqrt{x^2 + h^2} - l_0 kx}{\sqrt{x^2 + h^2}}$$

$$F_x = \pm kx - \frac{l_0 kx}{\sqrt{x^2 + h^2}} = \pm kx(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + h^2}})$$

Altså:

$$F_x = -kx(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + h^2}})$$

Siden kraften virker i motsatt retning av Δx

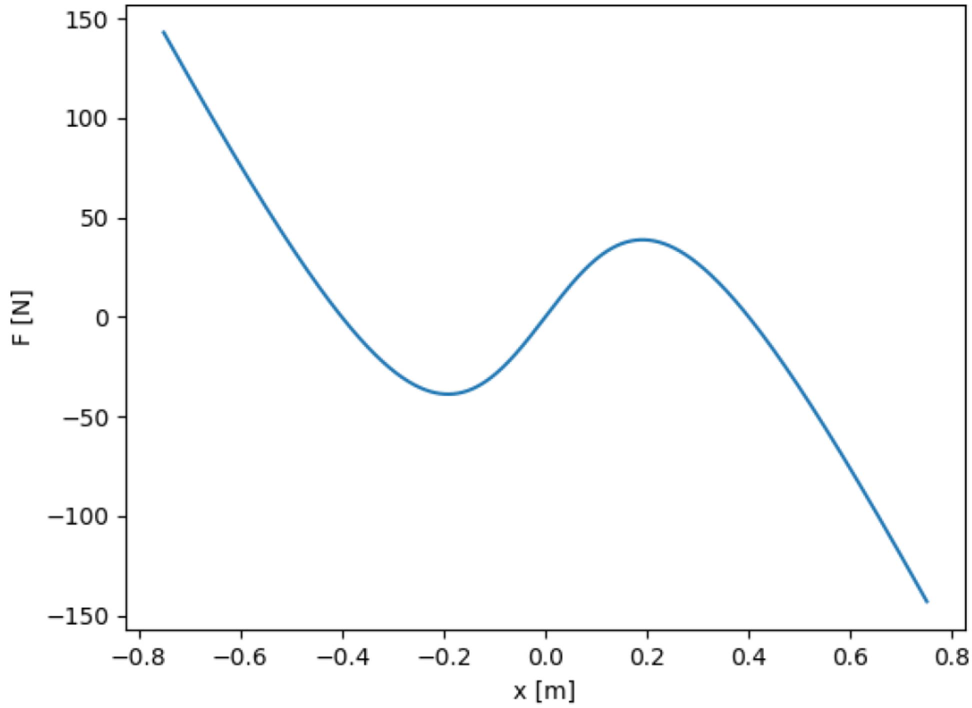
e)

Vi bruker Python og får følgende kode:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

m = 5
g = -9.81
k = 500
h = 0.3
l0 = 0.5
n = 10000

    F = np.zeros(n)
    x = np.linspace(-.75, .75, n)

    for i in range(n):
        F[i] = -k*x[i]*(1- (l0/(np.sqrt(x[i]**2 + h**2))))

    plt.plot(x, F)
```

```
plt.ylabel("F [N]")
plt.xlabel("x [m]")
plt.show()
```

Kjøreeksempel gir:



Figur 2: Horisontal kraft F som funksjon av posisjon x

I punktet $x = -0.8$ har vi en spent fjær og derfor er kraften større. I punktet $x = 0.4$ vil fjæren prøve å komprimere, slik at kraften øker i motsatt retning. Etter dette punktet vil fjæren strekkes slik at kraften som virker på sylinderen, øke igjen.

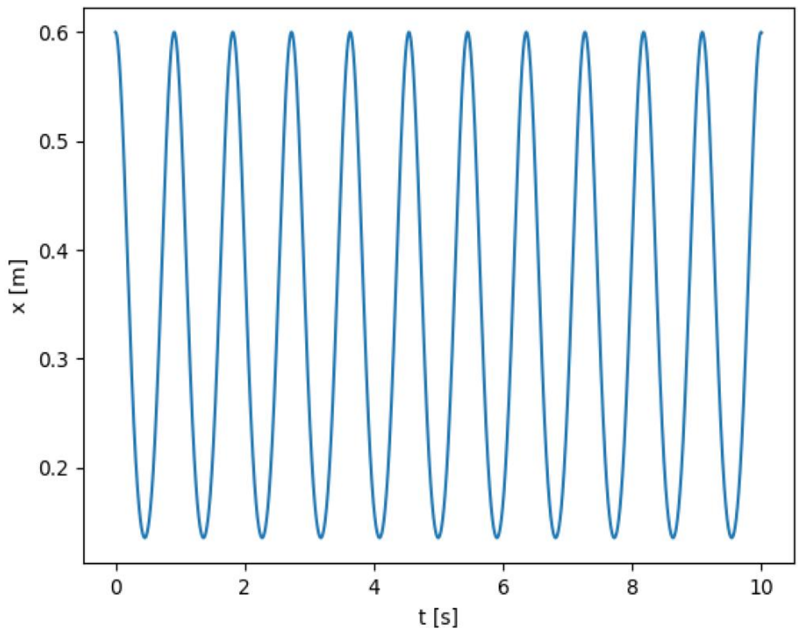
f)

Vi bruker Python og får følgende kode:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

m = 5
g = -9.81
k = 500
h = 0.3
l0 = 0.5
n = 10000
T = 10
dt = T/n

```

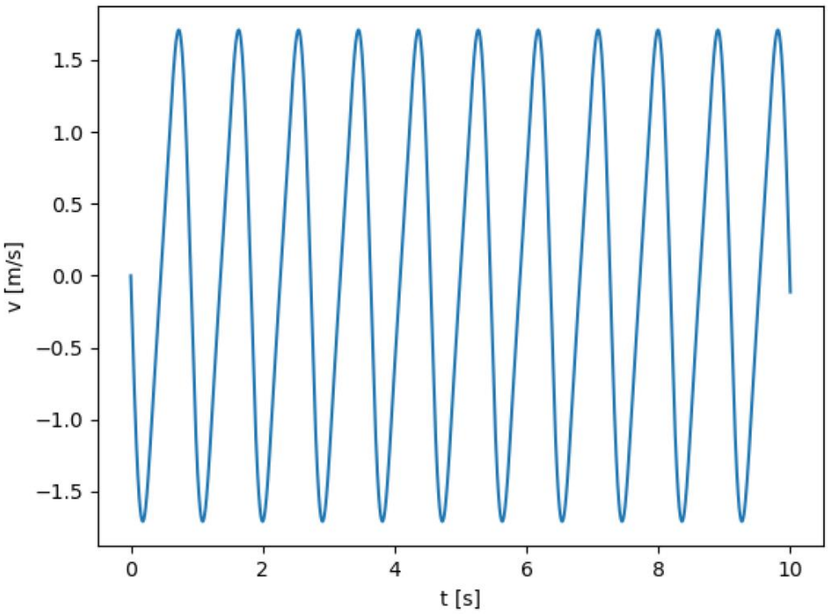
```
    F = np.zeros(n)
    x = np.zeros(n)
    v = np.zeros(n)
    t = np.linspace(0, 10, n)

    x[0] = 0.6
    F[0] = -k*x[0]*(1- (l0/(np.sqrt(x[0]**2 + h**2))))

    for i in range(n-1):
        F[i+1] = -k*x[i]*(1- (l0/(np.sqrt(x[i]**2 + h**2))))
        v[i+1] = v[i] + F[i+1]/m*dt
        x[i+1] = x[i] + v[i+1]*dt

    plt.plot(t, x)
    plt.ylabel("x [m]")
    plt.xlabel("t [s]")
    plt.show()
    plt.plot(t, v)
    plt.ylabel("v [m/s]")
    plt.xlabel("t [s]")
    plt.show()
```

Kjøreeksempel gir:



Figur 3: Posisjonen til sylinderen

Og:

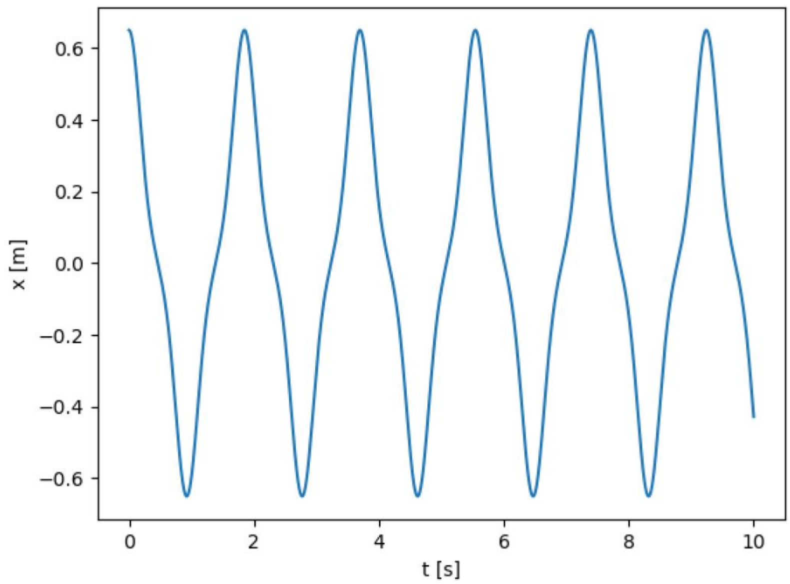


Figur 4: Hastigheten til sylinderen

Vi kan se på grafene at sylinderen beveger seg periodisk med variabel hastighet, forårsaket kompresjon og strekk av fjæret.

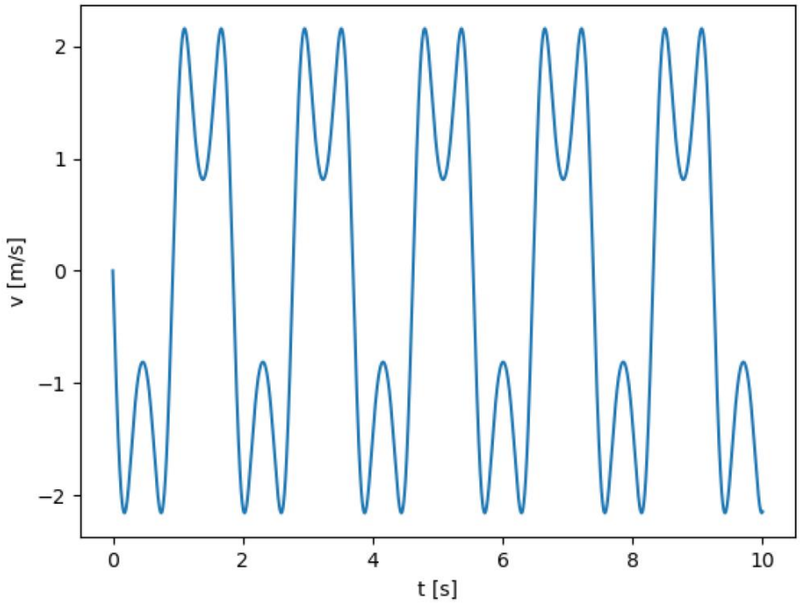
g)

Vi forandrer $x = 0.6$m til $x = 0.65$m i koden fra Oppg.1f) og får:



Figur 5: Posisjon til sylinderen

Og:



Figur 6: Hastighet til sylinderen

Siden vi har øket x til $x = 0.65$ kan vi nå lettere se endringen i hastigheten til sylinderen i likevekts punktet. I punktet $x = 0.1$ kan vi observere at den kinetiske energi omformes til potensiell energi (og vi ser at hastigheten til sylinderen avtar), og senere kan vi observere at den potensielle energi omformes til kinetisk og hastigheten til sylinderen øker igjen.

h)

Vi bruker samme prosedyre som i Oppg.1d), men bytter ut cosinus med sinus, altså:

$$\sin\alpha = \frac{h}{\sqrt{x^2 + h^2}}$$

Og vi får:

$$F_y = \sin\alpha * F = \frac{h}{\sqrt{x^2 + h^2}} * -k\left(\sqrt{x^2 + h^2} - l_0\right) = \frac{-kh\sqrt{x^2 + h^2} - l_0 kh}{\sqrt{x^2 + h^2}}$$

$$F_y = -kh - \frac{l_0 kh}{\sqrt{x^2 + h^2}} = -kh\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + h^2}}\right)$$

i)

Her vil normalkraften motvirke bare gravitasjonskraft og vi får:

$$N = G = mg = 5 * 9.81 = 49.05\ N$$

j)

Vi bruker Newtons andre lov, og vi får følgende:

$$N - G + F_y = ma_y$$

Der $a_y = 0$, da bevegelsen av sylinderen ikke skjer i y-retning, vi får videre at:

$$N - mg - kh\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + h^2}}\right) = 0$$

$$N = mg + kh\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + h^2}}\right)$$

k)

Vi bruker resultatene fra Oppg.1j) og setter $N = 0$, videre løser vi ligningen for x, og vi får:

$$mg + kh\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + h^2}}\right) = 0$$

$$-\frac{l_0}{\sqrt{x^2 + h^2}} = -\frac{mg}{kh} - 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + h^2}} = \frac{\frac{mg}{kh} + 1}{l_0}$$

$$\frac{l_0}{\frac{mg}{kh} + 1} = \sqrt{x^2 + h^2}$$

$$\left(\frac{l_0}{\frac{mg}{kh} + 1}\right)^2 - h^2 = x^2$$

$$x = \pm\sqrt{\left(\frac{l_0}{\frac{mg}{kh} + 1}\right)^2 - h^2}$$

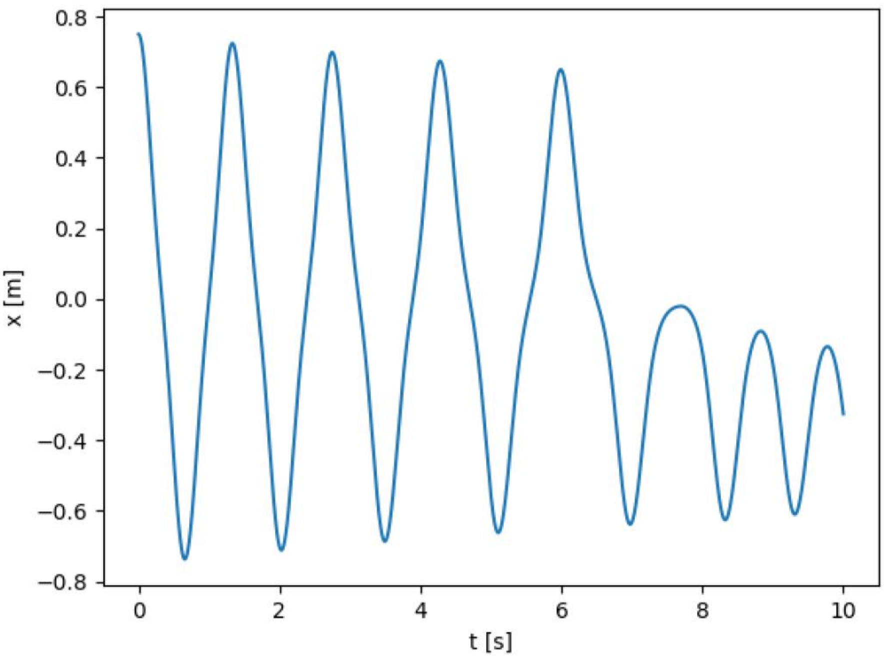
l)

Vi bruker Python og får følgende kode:

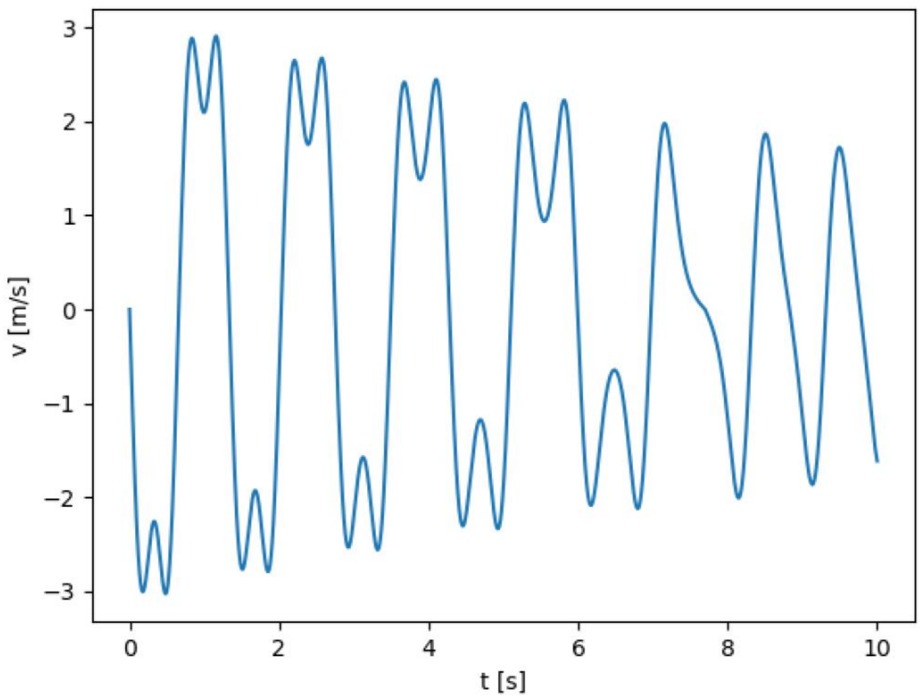
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```python

m = 5
g = 9.81
k = 500
h = 0.3
l0 = 0.5
n = 10000
T = 10
dt = T/n
mu = 0.05

Fx = np.zeros(n)
Fy = np.zeros(n)
x = np.zeros(n)
v = np.zeros(n)
a = np.zeros(n)
t = np.linspace(0, T, n)

x[0] = 0.75
Fx[0] = -k*x[0]*(1- (l0/(np.sqrt(x[0]**2 + h**2))))
Fy[0] = -k*h*(1-l0/np.sqrt(x[0]**2+h**2))

for i in range(n-1):
    Fy[i+1] = -k*h*(1-l0/np.sqrt(x[i]**2+h**2))
    N = m*g - Fy[i]
    Fx[i+1] = -k*x[i]*(1- l0/(np.sqrt(x[i]**2 + h**2)))
    a[i+1] = (Fx[i] - mu*N*np.sign(v[i]))/m
    v[i+1] = v[i] + a[i+1]*dt
    x[i+1] = x[i] + v[i+1]*dt

plt.plot(t, x)
plt.ylabel("x [m]")
plt.xlabel("t [s]")
plt.show()
plt.plot(t, v)
plt.ylabel("v [m/s]")
plt.xlabel("t [s]")
plt.show()
```

Kjøreeksempel:



Figur 7: Posisjon til sylinderen (med friksjon)



Figur 8: Hastighet til sylinderen (med friksjon)

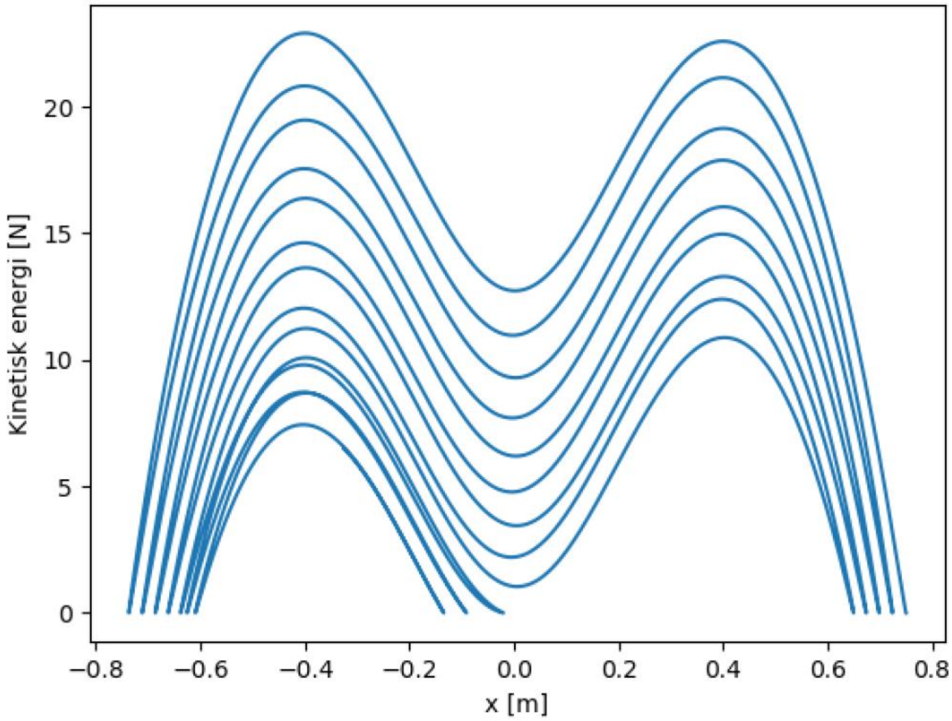
På grunn av friksjon avtar hastigheten til sylinderen og den potensielle-/kinetisk energi (avhengig av posisjon)

m)

Vi bruker Python og får følgende kode:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

m = 5
g = 9.81
k = 500
h = 0.3
l0 = 0.5
n = 10000
T = 10
dt = T/n
mu = 0.05

Fx = np.zeros(n)
Fy = np.zeros(n)
x = np.zeros(n)
v = np.zeros(n)
a = np.zeros(n)
t = np.linspace(0, T, n)
Ek = np.zeros(n)

x[0] = 0.75
Fx[0] = -k*x[0]*(1- (l0/(np.sqrt(x[0]**2 + h**2))))
Fy[0] = -k*h*(1-l0/np.sqrt(x[0]**2+h**2))

for i in range(n-1):
    Fy[i+1] = -k*h*(1-l0/np.sqrt(x[i]**2+h**2))
    N = m*g - Fy[i]
    Fx[i+1] = -k*x[i]*(1- l0/(np.sqrt(x[i]**2 + h**2)))
    a[i+1] = (Fx[i] - mu*N*np.sign(v[i]))/m
    v[i+1] = v[i] + a[i+1]*dt
    x[i+1] = x[i] + v[i+1]*dt
    Ek[i+1] = 1/2*m*v[i]**2

plt.plot(x, Ek)
plt.xlabel("x [m]")
plt.ylabel("Kinetisk energi [N]")
plt.show()
```

Kjøreeksempel gir:



Figur 9: Kinetisk energi

På grunn av friksjon vil hastigheten til sylinderen avta, og det vil også den potensiell-/kinetisk energi (avhengig av posisjon)

n)

Vi bruker Python og får følgende kode:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

m = 5
g = 9.81
k = 500
h = 0.3
l0 = 0.5
mu = 0.05
n = 1000

x = np.linspace(.4, .75, n)
Fx = -k*x*(1- (l0/(np.sqrt(x**2 + h**2))))
Fy = -k*h*(1-l0/np.sqrt(x**2+h**2))
N = m*g - Fy
R = -mu*N
F = Fx + R
W = np.trapz(-F,x)
print("W = %g J" %(W))
```

Kjørreeksempel gir:

```
C:\Users\claau\Desktop>Python 1n.py
W = 25.1074 J
```

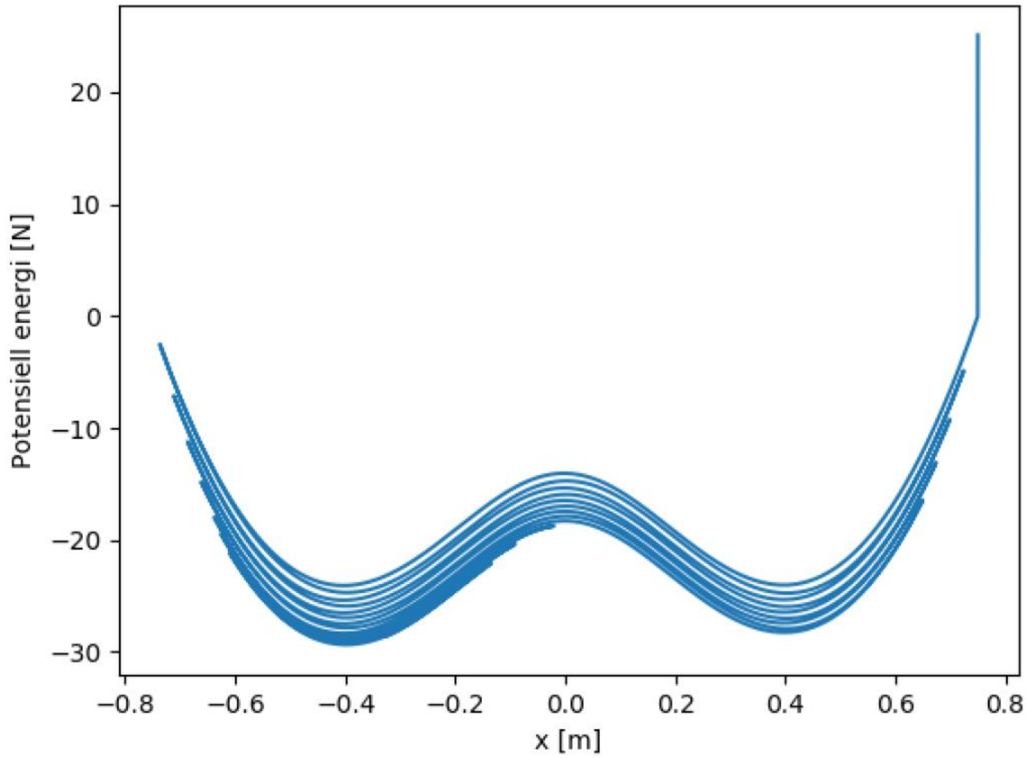
o)

Vi bruker Python og får følgende kode:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import integrate as ing

m = 5
g = 9.81
k = 500
h = 0.3
l0 = 0.5
n = 10000
T = 10
dt = T/n
mu = 0.05

Fx = np.zeros(n)
Fy = np.zeros(n)
x = np.zeros(n)
v = np.zeros(n)
a = np.zeros(n)
t = np.linspace(0, T, n)
Ep = np.zeros(n)

x[0] = 0.75
Fx[0] = -k*x[0]*(1- (l0/(np.sqrt(x[0]**2 + h**2))))
Fy[0] = -k*h*(1-l0/np.sqrt(x[0]**2+h**2))

def w():
    x = np.linspace(.4, .75, n)
    Fx = -k*x*(1- (l0/(np.sqrt(x**2 + h**2))))
    Fy = -k*h*(1-l0/np.sqrt(x**2+h**2))
    N = m*g - Fy
    R = -mu*N
    F = Fx + R
    W = np.trapz(-F,x)
    return W

W = w()

```

```
    for i in range(n-1):
        Fy[i+1] = -k*h*(1-l0/np.sqrt(x[i]**2+h**2))
        N = m*g - Fy[i]
        Fx[i+1] = -k*x[i]*(1- l0/(np.sqrt(x[i]**2 + h**2)))
        R = -mu*N
        a[i+1] = (Fx[i] +R*np.sign(v[i]))/m
        v[i+1] = v[i] + a[i+1]*dt
        x[i+1] = x[i] + v[i+1]*dt
        Ep = ing.cumtrapz(-Fx, x, initial=W)

    print("W = %g J" %(W))

    plt.plot(x, Ep)
    plt.xlabel("x [m]")
    plt.ylabel("Potensiell energi [N]")
    plt.show()
```

Kjøreeksempel gir:



Figur 10:

Her har vi en feil i koden som gjør at grafen ikke ser korrekt ut.

p)

Likevekts punktene finner vi i punktene: $x = \pm 0.75$ og $x = \pm 0.4$. Stabile likevekts punkter er $x = \pm 0.4$, siden systemet vil alltid komme seg tilbake til en av de. Og ustabile likevekts punktene er $x = \pm 0.75$, siden systemet er kun midlertidig i disse punktene og vil ikke komme til de igjen av seg selv. Disse ustabile likevekstpunktene varierer hele tiden og blir i enda mindre avstand fra x.