FYS2130 regneoppgaver uke 03

Tvungne svingninger

OBLIG innlevering med frist 10.02.2021, kl. 0900

Thursday 11th February, 2021, 22:38

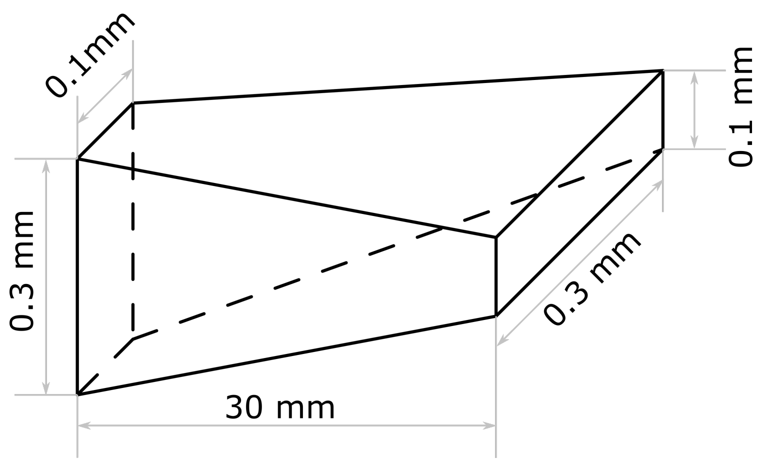
OPPGAVE 1: Radio

Ved gammeldags radiomottaking i mellombølgeområdet brukte vi svingekretser bestående av en induktans (spole) og en kapasitans (kondensator) for aå skille en radiostasjon fra en annen. Radiostasjonene tok opp 9 kHz på frekvensbåndet, og to radiostasjoner kunne ligge så tett som 9 kHz. For at vi skulle kunne skille en radiostasjon fra en annen, måtte da mottakeren ha en variabel resonanskrets som passet til én radiostasjon, men ikke til en annen. Frekvensen på Stavanger-senderen var 1313 kHz. Hvilken Q-faktor måtte radiomottakerens resonanskrets ha? Disse betraktningene er fortsatt gjeldende i vår moderne tid, selv om digitalteknikken gir visse endringer.

OPPGAVE 2: Basillarmembranen

Deler av denne oppgaven ble gitt som gruppeopggave denne uken. Her skal du svare skriftlig, med egne ord, på de av spørsmålene som sammenfaller.

I øret finner vi sneglehuset hvor basillarmembranen strekker seg diametralt over et konisk hulrom. Membranen er ca. 30 mm lang og det sitter ca. 3 000 nerveceller langs den. Disse omdanner vibrasjoner til elektriske impulser slik at hjernen kan oppfatte lyd. I den ene enden er membranen smal ($0,1$ mm), tykk ($0,3$ mm), og har lav massetetthet ($\rho = 1500$ kg/m^3), mens i den andre enden er den bred (0,3 mm), tynn (0,1 mm) og har en høyere massetetthet ($\rho = 2500$ kg/m^3). (Merk at med denne modellen vil ikke frekvensintervallet du vil finne sammenfalle perfekt med det for det mennsklige øret).



a) Forklar sammenhengen mellom membranens fysikalske egenskaper og ørets evne til å kunne skille mellom forskjellige tonehøyder.

b) For en gitt posisjon langs membranen (d.v.s. bredden, høyden, og tettheten er gitt), hvordan kan du bestemme massen som er knyttet til en nervecelle? Finn et utrykk for massen, $m(l)$ av hver nervecelle som funksjon av posisjon langs membranen, l.

c) Anta at membranens egenfrekvens kan modelleres som en rekke av harmoniske oscillatorer med en "fjærstivhet" som forandrer seg langs membranen fra 10^{-6} kg/s^2 i begynnelsen til 10^{-1} kg/s^2. Anta at bredden, høyden, og tettheten forandrer seg lineært langs membranen. Plott oscillatorfrekvens som funksjon av posisjon langs membranen.

d) Hvilken dempingsfaktor trengs for å kunne skille mellom tonene C_4 ($f = 261,63$ Hz) og $C_4^{\#}$ ($f = 277,18$ Hz)? Løs oppgaven ved å lage en figur som viser amplituderesponsen som en funksjon av distansen langs membranen. Du kan tolke "skille" som at responstoppen fra de relevante oscillatorene skal være klart adskilt.

e) Bestem Q faktoren i denne situasjonen!

f) Hvor lenge svinger membranen etter en ekstern stimulans slutter?

OPPGAVE 3: RLC-krets

En serie-RLC-krets består av en motstand med resistans R på $1,0\ \Omega$, en kondensator med kapasitans C på 100 nF og en spole med induktans L på 25 μH.

For å beskrive dette systemet kan vi bruke følgende differensiallikning:

$$L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\ Q = V_0\cos(\omega_F t) \tag{1}$$

a) Likningen over er helt analog med likningen for en harmonisk drevet lineær fjærpendel. Bruk det til å finne uttrykkene for faseskift (mellom påtrykt spenning og ladning på kondensatoren), amplitude for ladningsoscillasjonene, Q-verdi, faseresonansfrekvens og amplituderesonansfrekvens.

b) Beregn Q-verdien for kretsen.

c) Hvor stor faseforskjell er det mellom påtrykt spenning og strøm i kretsen ved faseresonans, og ved en påtrykt frekvens som svarer til $\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$ når $\Delta\omega$ er gitt som i $Q = \frac{f}{\Delta f}$ (likning 3.16 i læreboka).

FASIT FOR OPPGAVE 1

For å skille stasjonene fra hverandre, må radiomottakeren ha høy nok Q-verdi til å hindre forstyrrelse fra nabostasjonen. Q-verdien må minst være:

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{1313 \text{ kHz}}{9 \text{ kHz}} \approx 150$$

FASIT FOR OPPGAVE 2

a) Massen og stivheten varierer langs membranen. Dermed vil også resonansfrekvensen variere. Det gjør at forkjellige frekvenser vil komme i resonans, og dermed forsterkes, ved forkjellige deler av membranen. Det sitter tett med nerveceller på Basilarmembranen, og disse vet selv hvor de sitter. De melder inn til hjernen om akkurat den tonehøyden de skal passe på har stort utslag.

b) Membranen er 30 mm lang og det sitter 3000 nerveceller på den. Dermed er avstanden mellom nervecellene omtrent 100 μm.

Vi kan så anta at alle avstander varierer lineært fra den ene til den andre enden av membranen, altså at bredden varierer jevnt fra $0,1$ til $0,3$ mm osv. Om vi nå beskriver høyde og bredde av membranen langs lengderetningen, som spenner $l \in (0, L)$ der $L = 30$ mm, har vi at $b(l) = 0,1 \text{ mm} + \frac{0,2}{30} l$ og $h(l) = 0,3 \text{ mm} - \frac{0,2}{30} l$.

Dermed har vi volumet av hvert enkelt element langs membranen:

$$V(l) = lb(l)h(l) = 10 \ \mu\text{m} \cdot (0,1 \text{ mm} + \frac{0,2}{30} l) \cdot (0,3 \text{ mm} - \frac{0,2}{30} l)x$$

Vi har fått oppgitt tettheten ρ, og dermed kan vi finne massen av et element langs membranen.

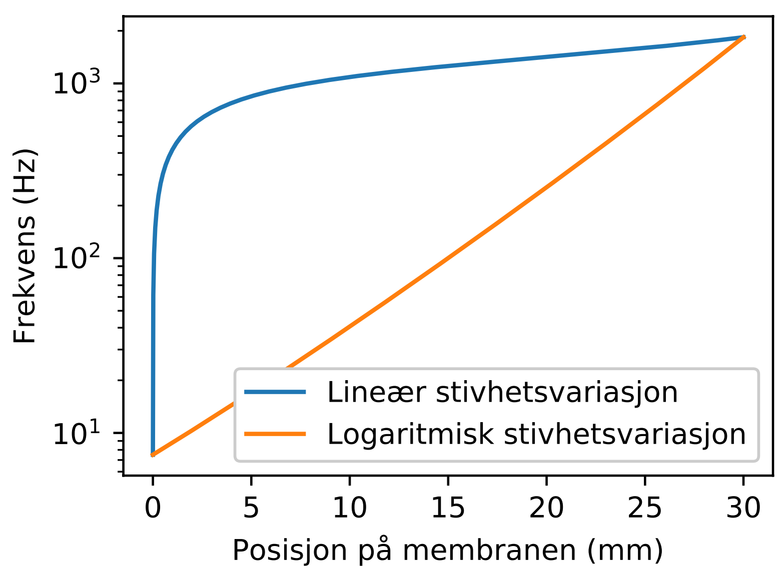
$$m(l) = \rho(l)V(l) = lb(l)h(l) = \rho \cdot 10 \ \mu\text{m} \cdot (0,1 \text{ mm} + \frac{0,2}{30} l) \cdot (0,3 \text{ mm} - \frac{0,2}{30} l)$$

c) NB: En bedre modell av et menneskelig øre ville være stor stivhet i begynnelsen, og liten mot slutten. Om du bruker slike k'er i besvarelsen er dette selvsagt helt ok (du vil da få tallsvar noe forskjellig fra de under).

Fra forrige deloppgave kjenner vi massen til en membrandel som funksjon av posisjonen langs membranen. Når vi i tillegg får vite at fjærstivheten varierer fra 10^{-6} kg/s^2 til 10^{-1} kg/s^2 langs membranen har vi alt vi trenger. Fjærstivhet må nok her forstås som effektiv fjærstivhet opplevd av et 100 μm bredt område av membranen.

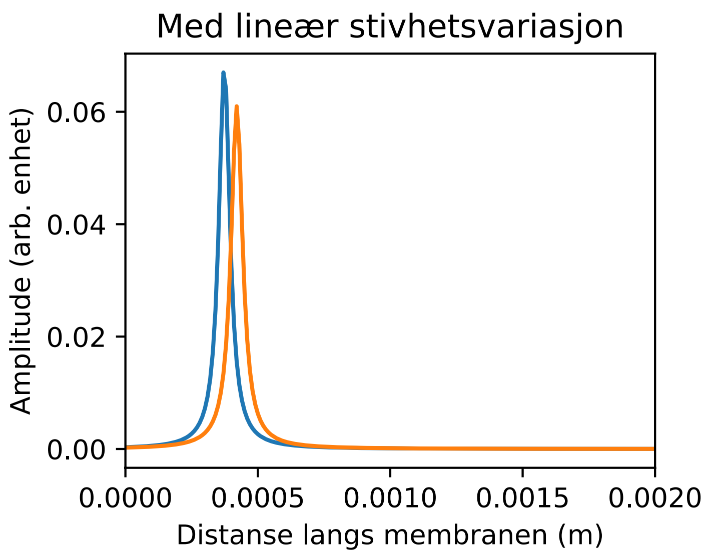
Resonansfrekvensen er gitt ved $\omega_0 = \frac{k}{m}$ om vi foreløpig antar at vi ikke har demping i systemet.

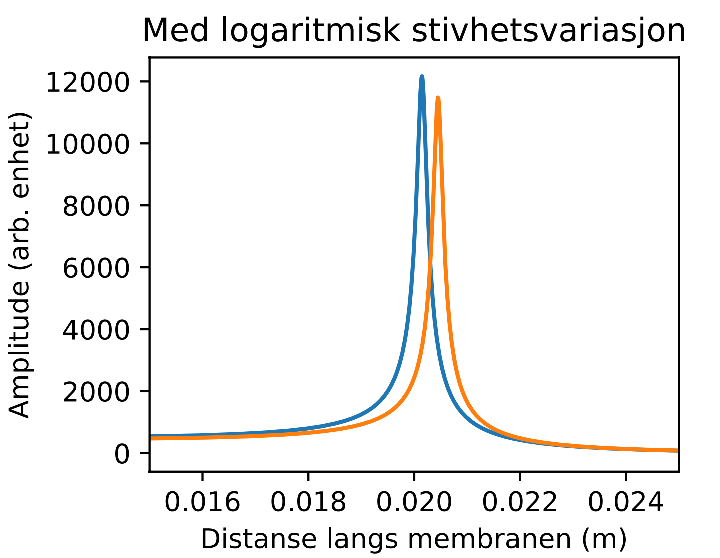
Dermed er frekvensresponsen gitt som i figuren under:



d) Vi prøver oss fram med forskjellige dempingsverdier til vi ser at overlappet mellom kanalene har falt betraktelig. Amplituderesponsen kan beregnes analytisk med formelen $A = \frac{F/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_F^2)^2+(b\omega_F/m)^2}}$, der ω_F er påtvunget frekvens og ω_0 er systemets egenfrekvens uten demping: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Vi plotter dette på to forskjellige måter, nemlig med lineær og med logaritmisk fordeling av stivheter på basillarmembranen. Vi ser at i begge tilfellene så vil en dempningsfaktor på $b \sim 5 \times 10^{-7}$ kg/s fungere.





Merk at det har mye å si om vi legger til grunn lineær eller logaritmisk variasjon av stivheten langs membranen (se utsnitt for x-aksen).

e) Q-faktoren kan bestemmes som $\frac{f_0}{\Delta f}$ slik at vi i dette tilfellet får $Q \approx \frac{270 \text{ Hz}}{15 \text{ Hz}} \approx 18$. Man kan også finne Q-faktoren ved å finne ut av hva stivheten i systemet var akkurat ved toppen, og bruke $\sqrt{\frac{mk}{b^2}}$.

f) Det står vist i læreboka at om man fjerner drivekraften så kan energien i systemet etter at drivekraften er fjernet skrives som $E(t) = E_0 e^{-\omega_0 t/Q}$, slik at tiden det tar før energien faller til $\frac{1}{e}$ av hva den var er $\Delta t = \frac{QT}{2\pi}$, der T er systemets svingetid. Dette er det samme som $\Delta t = \frac{Q}{2\pi f}$, som innsatt for tallene i denne oppgaven gir $\Delta t \approx 0.01$ s.

Noen betraktninger til slutt: en modell er en representasjon av noe. Å modellere et system er dermed det å lage en representasjon av systemet. Vi bruker modeller til å forstå eller si noe om systemet. Vanligvis er modeller forenklede. I dette konkrete tilfellet består modelleringen først i å late som at basillarmembranen har en mer regulær form enn den egentlig har. Deretter sier vi at den enkle formen videre kan deles opp i mange små og uavhengige oscillatorer, og at disse oscillatorene kan fortelle oss noe om hvordan hørsel virker.

FASIT FOR OPPGAVE 3

a) Ved å dele på L over hele, blir ligning (1) på formen

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{CL}Q = \frac{V_0}{L}\cos(\omega_F t)$$

!et

Vi ser dette er helt parallelt til ligning (3.1) i læreboka:

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{b}{m}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}z = \frac{F}{m}\cos(\omega_F t)$$

Vi gjør konklusjonen at alle kjente formler for et fjærsystem kan brukes for en RCL-krets med substitusjonene:

$$b \to R \quad m \to L \quad k \to \frac{1}{C} \quad F \to V_0$$

Merk også at egenfrekvensen har gått fra å være $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ til $\omega_0 = 1/\sqrt{CL}$.

Vi får nå en rekke nye formler ved å benytte disse substitusjonene:

Faseskift: ligning (3.3) i læreboka

$$\cot\phi = \frac{\omega_0^2 - \omega_F^2}{\omega_F \cdot R/L}$$

Amplitude: ligning (3.4) i læreboka

$$A = \frac{V_0/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (R\omega_F/L)^2}}$$

Q-verdi: ligning (3.11) i læreboka

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \sqrt{\frac{L}{CR^2}}$$

Faseresonans

$$F_{fase.res.} = \frac{1}{2\pi}\omega_0 = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{CL}}$$

Amplituderesonans

$$F_{ampl.res.} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{2L^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{2L^2}}$$

b) Vi bruker formelen for Q-verdi som vi definerte i forrige oppgave.

$$Q = \sqrt{\frac{L}{CR^2}} = \sqrt{\frac{25 \cdot 10^{-6}}{100 \cdot 10^{-9} \cdot 1^2}} = 15,8$$

c) Ved faseresonans vil fasen til ladningen per definisjon ligge 90° etter fasen til påtrykt spenning. Dette er faseforskjell mellom påtrykt spenning og **ladning** på kondensatoren. For å finne faseforskjell mellom påtrykt spenning og **strøm** i kretsen bruker vi at faseforskjell mellom strøm og ladning er 90° (se boka ligning ovenfor (3.10)), som gir at faseforskjell mellom påtrykt spenning og strøm i kretsen er $-90° + 90° = 0$. I.e. påtrykt spenning og strøm er i fase ved faseresonans.

For $\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$: fra $Q = f_0/\Delta f = \omega_0/\Delta\omega$ har vi at $\Delta\omega = \omega_0/Q$.
Vi bruker så formelen for faseforskjeller vi definerte i forrige oppgave:

$$\begin{aligned}
\cot\phi &= \frac{\omega_0^2 - \omega_F^2}{\omega_0(1+\frac{1}{2Q}) \cdot R/L} = \frac{\omega_0^2 - (\omega_0 + \Delta\omega/2)^2}{\omega_0(1+\frac{1}{2Q}) \cdot R/L} = \frac{\omega_0^2 - (\omega_0 + \omega_0/(2Q))^2}{\omega_0(1+\frac{1}{2Q}) \cdot R/L} \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{CL}} - \frac{1}{\sqrt{CL}}(1+\frac{1}{2Q})^2}{(1+\frac{1}{2Q}) \cdot R/L} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}} - \sqrt{\frac{L}{C}}(1+\frac{1}{2Q})^2}{(1+\frac{1}{2Q}) \cdot R} = \frac{5\sqrt{10} - 5\sqrt{10}(1+\frac{1}{2\cdot 15,8})^2}{(1+\frac{1}{2\cdot 15,8}) \cdot 1} = -0,985
\end{aligned}$$

Som gir oss at $\phi = -45°$. For å finne faseforskjell mellom påtrykt spenning og **strøm** i kretsen bruker vi som ovenfor at faseforskjell mellom strøm og ladning er 90° som gir at faseforskjell mellom påtrykt spenning og strøm i kretsen er $-45° + 90° = 45°$.