FYS2130 regneoppgaver uke 01

Frie svingninger

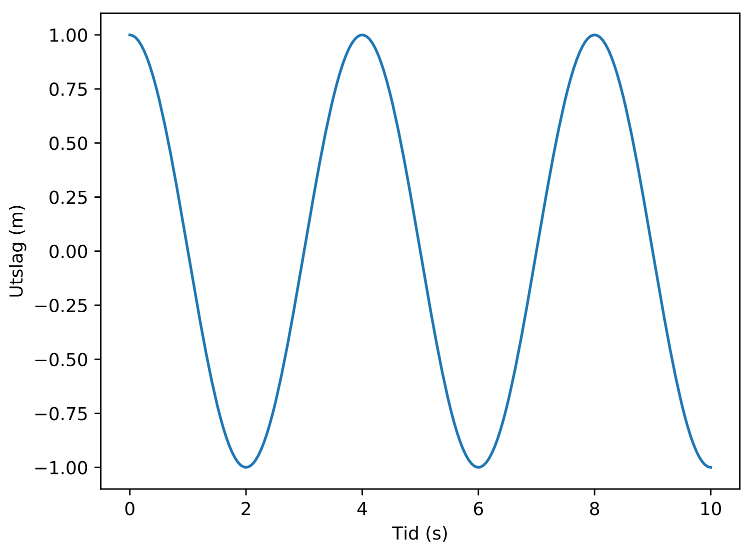
OBLIG innlevering med frist 27.01.2021, kl. 0900

Monday 25th January, 2021, 15:38

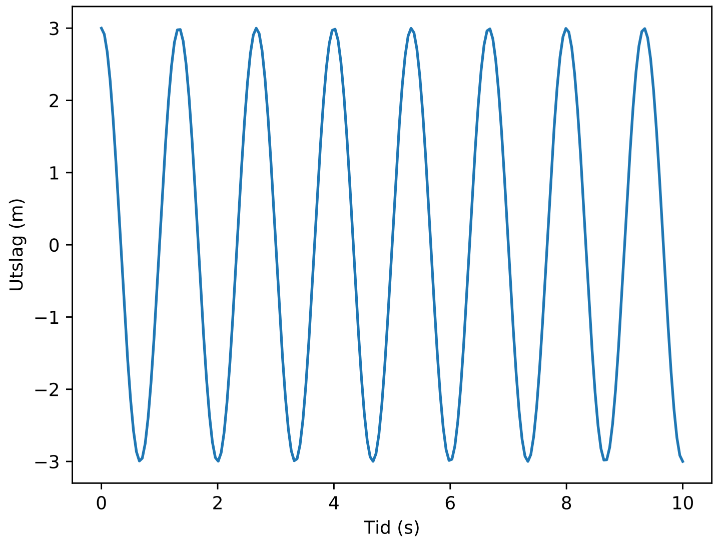
OPPGAVE 1: Les av koeffisientene

I denne oppgaven skal vi se på frie svingninger beskrevet med likningen $f(t) = A\cos(\omega t + \phi)$. For alle oppgavene gjelder at du skal skissere figuren og markere alle mål du gjør for å finne de forskjellige parametrene i likningen.

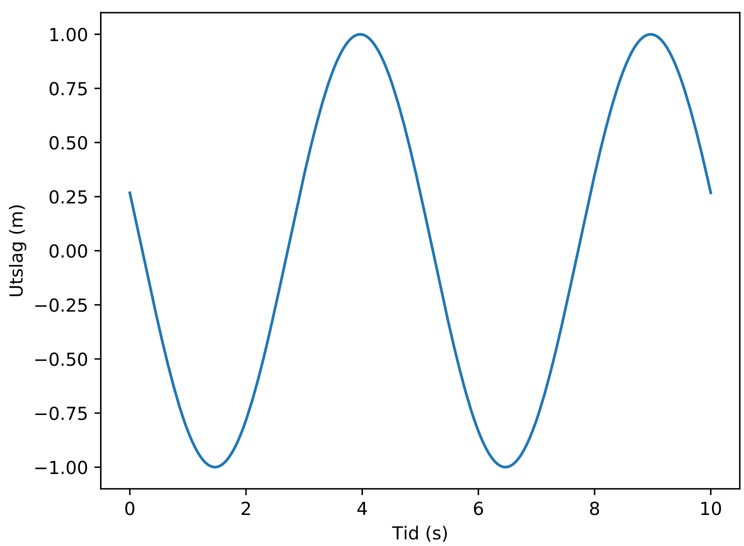
a) Finn amplituden A og periodetiden T til svingningen i figuren under.



b) Finn amplituden A og frekvensen f til svingningen i figuren under.



c) Finn vinkelfrekvensen ω og faseforskyvningen ϕ i svingningen i figuren under.



OPPGAVE 2: Enkel harmonisk bevegelse

En harmonisk bevegelse i sin enkleste form er løsningen av likningen

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -ax$$

Ofte ser vi på et svingesystem der en kloss med masse m er festet i en lineær fjær med fjærkonstant k, og der vi ser bort ifra luftmotstand.

a) Bruk Newtons 2. lov til å skrive opp bevegelseslikningen til systemet med en kloss og en lineær fjær.

b) Løs likningen med $k = 8$ N/m, $m = 2$ kg og initialbetingelsene $x(0) = 0.4$ m og $\dot{x}(0) = -2$ m/s.

c) Bruk løsningen av likningen til å skrive et uttrykk for den mekaniske energien $(E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}})$ til systemet når det svinger. Kommentér løsningen.

d) Plott løsningen av likningen i *faserommet*, altså rommet av posisjon og bevegelsesmengde. Hvilken form får plottet?

e) Gjør aksene dimesjonsløse på en slik måte at plottet får en mer regulær form. Hvilken form får nå plottet?

OPPGAVE 3: Fjærpendel og energifordeling

a) Et lodd med masse m henger i en masseløs fjær med fjærstivhet k. Multipliser diff'ligningen $m\ddot{x} = -kx$ med hastigheten $\dot{x}$ og vis at summen av den kinetiske og potensielle energien er konstant over tid.

b) Amplituden er A. Hvor stort er utslaget fra likevektsstillingen når den kinetiske energien er lik halvparten av den potensielle energien?

OPPGAVE 4: Sprettball

En annen type svingebevegelse er bevegelsen til en sprettball. Anta at vi har en tapsfri sprettball, altså at den spretter like høyt hver gang.

a) Tegn bevegelsen til en sprettball i *tidrommet*.

b) Tegn bevegelsen til en sprettball i *faserommet*.

c) Kan denne bevegelsen betegnes som harmonisk?

OPPGAVE 5: Masse i fjær

En fjær henger loddrett ned og har en lengde L. Når du henger en masse i fjæra, blir den i likevektsposisjon 1,85 cm lenger ($\Delta L = 1,85$ cm). Du finner dessuten ut at massen oscillerer 10 ganger på 4,44 s. Hvilken planet er du på?
Hint: Finn tyngdeakselerasjonen g!

FASIT FOR OPPGAVE 1

a) $A \approx 1$ m, $T \approx 4$ s

b)

$$
\begin{aligned}
&A \approx 3 \text{ m} \\
&f = \frac{1}{T} \approx \frac{1}{1,5 \text{ s}} = 0,7 \frac{1}{\text{s}} = 0,7 \text{ Hz}
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
&\phi \approx 1,3 \\
&\omega = \frac{2\pi}{T} \approx \frac{2\pi}{5 \text{ s}} = 1,3 \text{ rad/s}
\end{aligned}
$$

FASIT FOR OPPGAVE 2

a) Newtons 2. lov i én dimensjon sier at $\sum F = m\ddot{a}$. I dette tilfellet er den eneste kraften i systemet den gjenopprettende kraften fra fjæra. Dermed er

$$m\ddot{x} = -kx$$

siden fjørkonstanten sier hvor stor kraften er per strekklengde. Vi antar nå at likevektspunktet for klossen er $x = 0$.

b) Basert på erfaring med slike likninger gjetter vi på løsningen

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Når vi deriverer denne funksjonen en og to ganger får vi

$$\dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi).$$

Vi kan dermed se at $\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$. Om vi prøver å sette denne ansatz'en inn i differensiallikningen som vi ønsker å løse får vi at

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$m(-\omega^2)x(t) = -kx.$$

Dermed er likningen løst om vi velger $-m\omega^2 = -k$, altså $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\ \mathrm{s}^{-1}$

Deretter må vi velge en spesifikk løsning som passer med initialbetingelsene.

Vi vet at $x(0) = 0,4$ m. Dermed kan vi si at $A\cos(\phi) = 0,4$ m. Vi vet videre at $\dot{x}(0) = -2$ m/s, slik at $-A\omega\sin(\phi) = 2$ m/s. Dette gir oss at $\tan\phi = \frac{5}{\omega}\ \mathrm{s}^{-1} = \frac{5}{2}$. Dette gir oss at $\phi \approx 1,19$.

(Husk at arctan gir 2 muligheter for ϕ. Vi kan alltid se hvilken som er riktig ved å sjekke fortegnet til sin og cos av vinkelen når vi har likninger for disse.)

Når vi kjenner vinkelen ϕ kan vi til slutt finne

$$A = \frac{0,4\ \mathrm{m}}{\cos(1,19)} \approx 1,1,$$

slik at

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

med $A \approx 1,1$ m, $\omega = 2\ \mathrm{s}^{-1}$ og $\phi \approx 1,19$ rad.

c) Den potensielle energien i systemet, dersom $x = 0$ er nullpunkt for den potensiell energien, er gitt ved $\int_x^0 -kx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx^2$. Den kinetiske energien er $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$. Om vi setter inn at $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ får vi

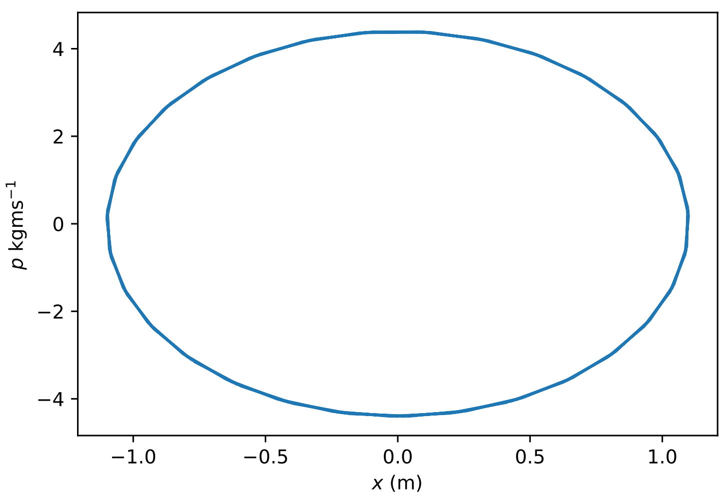
$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2}k(A\cos(\omega t + \phi))^2 + \frac{1}{2}m(-\omega A\cos(\omega t + \phi))^2 \tag{1}$$

$$= \frac{1}{2}kA^2(\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)) \tag{2}$$

$$= \frac{1}{2}kA^2. \tag{3}$$

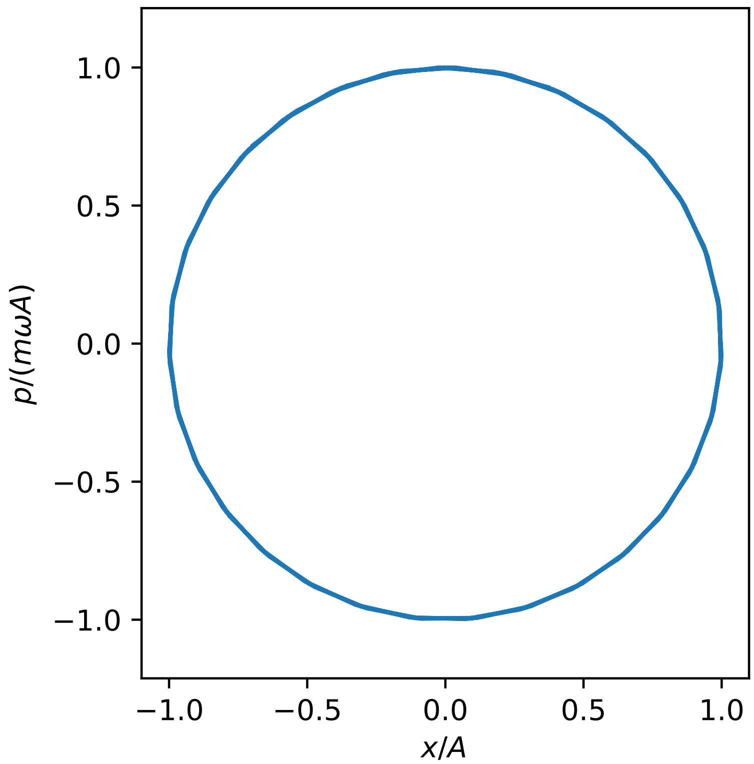
Som vi kan se er den totale mekaniske energien uavhengig av tiden. Den er *bevart*.

d)



e)

Siden forrige figur ble en ellipse, så er det naturlig å se om vi kan få den til å bli en sirkel. For å gjøre det kan vi for eksempel dele x-aksen på A, og p-aksen på $p_{\max} = m\omega A$ slik at vi får følgende plottet.



Plottet viser fjærsvingning i faserommet på dimesjonsløse akser.

FASIT FOR OPPGAVE 3

a) $m\ddot{x} = -kx \leftrightarrow m\ddot{x}\dot{x} = -kx\dot{x} \leftrightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = \dfrac{d}{dt}\left(-\dfrac{1}{2}kx^2\right) \leftrightarrow \dfrac{d}{dt}\left(E_k + E_p\right) = 0$

b) Energien er bevart, så når den kinetiske energien er lik halvparten av den potensielle, finner vi at

$$E_{\text{tot}} = E_k + E_p = \frac{1}{2}E_p + E_p \quad \Rightarrow \quad E_p = \frac{2}{3}E_{\text{tot}}$$

Ved maksimalt utslag er den totale energien lik den potensielle energien, og vi har at

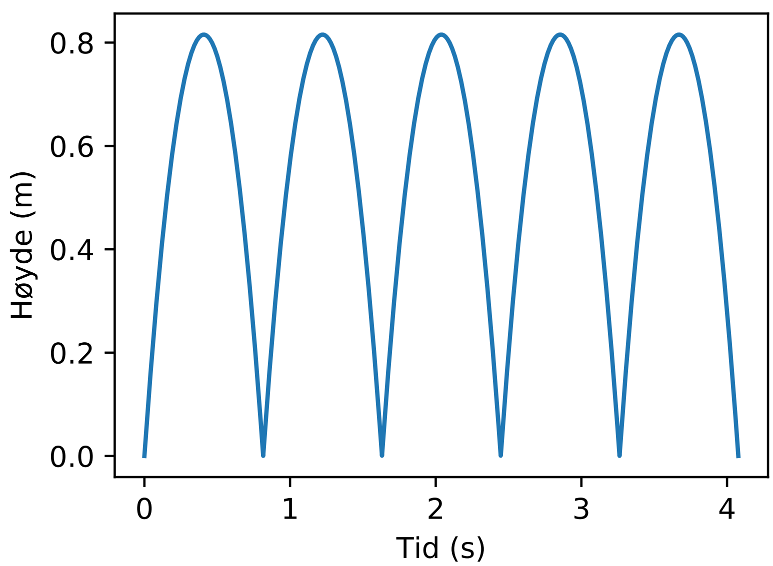
$$E_{\text{tot}} = 0.5kA^2$$

I vårt tilfelle er da

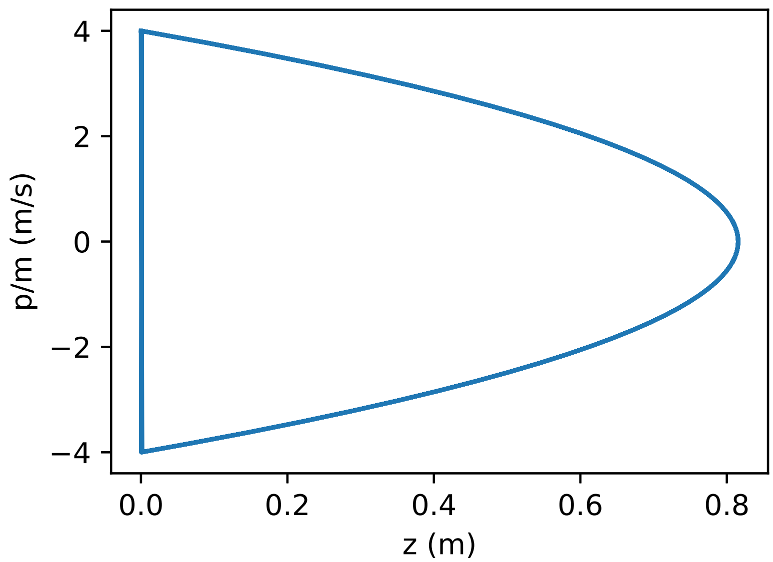
$$\frac{2}{3}0.5kA^2 = 0.5kx^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{2}{3}}A$$

FASIT FOR OPPGAVE 4

a) Vi antar at den eneste kraften som virker er gravitasjon, slik at $z(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$. Dermed er hastigheten $v(t) = v_0 + at$. Dette gjelder fra sprettballen er på vei oppover, og fram til den når bakken. Vi kan se på bakken som en elastisk vegg, slik at sprettballens hastighet bare bytter fortegn i det sprettballen kommer i kontakt med bakken. Tiden det tar for sprettballen å gå fra bakken, opp og ned igjen til bakken er gitt ved $v(t) = -v_0$, altså $t = 2v_0/a$. Den analytiske løsningen av sprettballens bevegelse er dermed $z(t) = v_0 \mod (t,T) + \frac{1}{2}a \mod (t,T)^2$. En sprettball i tidrommet:



b) En sprettball i faserommet.



c) Harmoniske svingninger er løsninger av den lineære svingeligningen. Det er ikke denne bevegelsen. Derfor kan ikke bevegelsen betegnes som harmonisk.

FASIT FOR OPPGAVE 5

Vi begynner med det vi vet om svingetider, fjærer og masser:

$$k = \frac{F}{\Delta L} = \frac{mg}{\Delta L}$$
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \implies k = m\omega^2$$

Når vi setter dette sammen får vi at

$$
\begin{aligned}
m\omega^2 &= \frac{mg}{\Delta L} \\
g &= \omega^2 \Delta L = \frac{4\pi^2 \Delta L}{T^2} \\
g &= \frac{4\pi^2 0.0185\ \mathrm{m}}{\left(\frac{4,44}{10}\ \mathrm{s}\right)^2} \\
g &= 3,70\ \mathrm{m/s}^2
\end{aligned}
$$

Verdien for g er rimelig konsistent med både Mars og Merkur.