# ØV6 — Transformanalyse 2

KLAUDIAP

24.09.2020

**Oppgave 1**

a)
b)
c)

**Oppgave 2**

a) Vi har

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})}$$

Vi bruker delbrøkoppspalting, og får

$$\frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})} = \frac{A}{1 - z^{-1}} + \frac{B}{1 + 2z^{-1}}$$

Vi bestemmer nå $A$ og $B$, vi løser følgende ligning

$$1 - \frac{1}{3}z^{-1} = A(1 + 2z^{-1}) + B(1 - z^{-1})$$

Vi velger $z$ slik at parentesen foran $A$ blir $0$, altså

$$1 + 2z^{-1} = 0$$
$$z = -2$$

Dette gir

$$1 - \frac{1}{3}(-2)^{-1} = B(1 - (-2)^{-1})$$
$$B = \frac{7}{9}$$

Vi velger $z$ slik at parentesen foran $B$ blir $0$, altså

$$1 - z^{-1} = 0$$
$$z = 1$$

Dette gir

$$1 - \frac{1}{3}(1)^{-1} = A(1 + 2(1)^{-1})$$
$$A = \frac{2}{9}$$

Da får vi

$$X(z) = \frac{A}{1 - z^{-1}} + \frac{B}{1 + 2z^{-1}} = \frac{\frac{2}{9}}{(1 - z^{-1})} + \frac{\frac{7}{9}}{(1 + 2z^{-1})}$$

Vi har tre mulige ROC til $X(z)$

1. For $|z| < 1$ finner vi den inverse z-transformasjon til $X(z)$ og får

$$x[n] = -\frac{2}{9}u[-n-1] - \frac{7}{9}(-2)^n u[-n-1]$$

Vi brukte vedlagte tabell 3.1, punkt 4

2. For $1 < |z| < 2$ finner vi den inverse z-transformasjon til $X(z)$ og får

$$x[n] = \frac{2}{9}u[n] - \frac{7}{9}(-2)^n u[-n-1]$$

Vi brukte vedlagte tabell 3.1, punkt 2 og 4

3. For $|z| > 2$ finner vi den inverse z-transformasjon til $X(z)$ og får

$$x[n] = \frac{2}{9}u[n] + \frac{7}{9}(-2)^n u[n]$$

Vi brukte vedlagte tabell 3.1, punkt 2

b) Vi har

$$X(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

Vi får

$$\frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} - \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

Vi vett at $x[n]$ er kasuelt, derfor har vi at ROC til $X(z)$ er

$$|z| > \frac{1}{4}$$

Vi finner vi den inverse z-transformasjon til $X(z)$ og får

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - 4^{1-n}u[n-1]$$

Vi brukte vedlagte tabell 3.1, punkt 3 og at

$$Z^{-1}\left[-\frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}\right](n) = -4^{1-n}u[n-1]$$

c) Vi har

$$X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})}$$

Vi bruker delbrøkoppspalting, og får

$$\frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} = \frac{A}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

Vi bestemmer nå $A$ og $B$, vi løser følgende ligning

$$1 = A\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right) + B\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)$$

Vi velger $z$ slik at parentesen foran $A$ blir $0$, altså

$$1 - \frac{1}{4}z^{-1} = 0$$

$$z = \frac{1}{4}$$

Dette gir

$$1 = B\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right)$$

$$B = -1$$

Vi velger $z$ slik at parentesen foran $B$ blir 0, altså

$$1 - \frac{1}{2}z^{-1} = 0$$

$$z = \frac{1}{2}$$

Dette gir

$$1 = A\left(1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)$$

$$A = 2$$

Da får vi

$$X(z) = \frac{A}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

Vi har at $x[n]$ er absolutt konvergent (stabilt), derfor har vi at ROC til $x[n]$ er

$$|z| > \frac{1}{2}$$

Vi finner vi den inverse z-transformasjon til $X(z)$ og får

$$x[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Vi brukte vedlagte tabell 3.1, punkt 3

**Oppgave 3**

a) Input/output forholdet er

$$y[n] = \frac{3}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] + x[n]$$

Vi bruker z-transformasjonen, og får

$$y[n] = \frac{3}{4}z^{-1}y[z] - \frac{1}{8}z^{-2}y[z] + x[z]$$

$$y[z]\left(1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}\right) = x[z]$$

Og vi får derfor at

$$H(z) = \frac{y(z)}{x(z)} = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$$

Vi bruker abc-formel, og får

$$1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2} = 0$$

$$z^{-1} = \frac{1}{4}, z^{-1} = \frac{1}{2}$$

Derfor

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})}$$

Vi har tre mulige ROC til $H(z)$

1. $|z| < \frac{1}{4}$
2. $\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{2}$
3. $|z| > \frac{1}{2}$

Konvergensområdet til z-transformasjonen inneholder enhetssirkelen for $|z| > \frac{1}{2}$, derfor er systemet stabilt.

b) Impulsresponsen $h[n]$ er definert som

$$h[n] = z^{-1}[H(z)]$$

Vi får at

$$y[z] = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$$
$$= \frac{z^2}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}}$$
$$= \frac{z^2}{\left(1 - \frac{1}{2}z\right)\left(1 - \frac{1}{4}z\right)}$$

Vi bruker delbrøkoppspalting, og får

$$\frac{z^2}{\left(1 - \frac{1}{2}z\right)\left(1 - \frac{1}{4}z\right)} = \frac{A}{\left(1 - \frac{1}{4}z\right)} + \frac{B}{\left(1 - \frac{1}{2}z\right)}$$

Vi bestemmer nå $A$ og $B$, vi løser følgende ligning

$$z^2 = A\left(1 - \frac{1}{2}z\right) + B\left(1 - \frac{1}{4}z\right)$$

Vi velger $z$ slik at parentesen foran $A$ blir 0, altså

$$1 - \frac{1}{2}z = 0$$
$$z = 2$$

Dette gir

$$2^2 = B\left(1 - \frac{1}{4} \cdot 2\right)$$
$$B = 8$$

Vi velger $z$ slik at parentesen foran $B$ blir 0, altså

$$1 - \frac{1}{4}z = 0$$
$$z = 4$$

Dette gir

$$4^2 = A\left(1 - \frac{1}{2} \cdot 4\right)$$
$$A = -16$$

Da får vi

$$y[z] = \frac{A}{\left(1 - \frac{1}{4}z\right)} + \frac{B}{\left(1 - \frac{1}{2}z\right)} = \frac{-16}{\left(1 - \frac{1}{4}z\right)} + \frac{8}{\left(1 - \frac{1}{2}z\right)}$$

Vi bruker vedlagte tabell 3.1, punkt 3, og får

$$y[n] = h[n] = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 16\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

c) Stepresponsen $s[n]$ til systemet er definert som

$$s[n] = X[z] \cdot H[z]$$

Der

$$X[z] = u[n] = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Vi skriver $H[z]$ som

$$H[z] = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{8}{8 - 6z^{-1} + z^{-2}}$$

Og vi får

$$s[z] = \frac{1}{1 - z^{-1}}\left(\frac{8}{8 - 6z^{-1} + z^{-2}}\right) = \frac{1}{1 - z^{-1}}\left(\frac{8}{(z^{-1} - 4)(z^{-1} - 2)}\right)$$

Vi bruker delbrøkoppspalting, og får

$$\frac{8}{(z^{-1} - 4)(z^{-1} - 2)} = \frac{A}{z^{-1} - 4} + \frac{B}{z^{-1} - 2}$$

Vi bestemmer nå $A$ og $B$, vi løser følgende ligning

$$8 = A(z^{-1} - 2) + B(z^{-1} - 4)$$

Vi velger $z$ slik at parentesen foran $A$ blir $0$, altså

$$z^{-1} - 2 = 0$$

$$z = \frac{1}{2}$$

Dette gir

$$8 = B\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - 4\right)$$

$$B = -4$$

Vi velger $z$ slik at parentesen foran $B$ blir $0$, altså

$$z^{-1} - 4 = 0$$

$$z = \frac{1}{4}$$

Dette gir

$$8 = A\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} - 2\right)$$

$$A = 4$$

Da får vi

$$s[z] = \frac{1}{1-z^{-1}}\left(\frac{4}{z^{-1}-4} - \frac{4}{z^{-1}-2}\right) = \frac{4}{(z^{-1}-4)(1-z^{-1})} - \frac{4}{(z^{-1}-2)(1-z^{-1})}$$

Vi bruker delbrøkoppspalting igjen, og får

$$s[z] = \frac{A}{z^{-1}-4} + \frac{B}{1-z^{-1}} - \frac{C}{z^{-1}-2} - \frac{D}{1-z^{-1}}$$

Vi bestemmer nå $A$ og $B$, vi løser følgende ligning

$$4 = A(1-z^{-1}) + B(z^{-1}-4)$$

Vi velger $z$ slik at parentesen foran $A$ blir 0, altså

$$1 - z^{-1} = 0$$
$$z = 1$$

Dette gir

$$4 = B((1)^{-1} - 4)$$
$$B = -\frac{4}{3}$$

Vi velger $z$ slik at parentesen foran $B$ blir 0, altså

$$z^{-1} - 4 = 0$$
$$z = \frac{1}{4}$$

Dette gir

$$4 = A\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right)$$
$$A = -\frac{4}{3}$$

Da får vi

$$s[z] = -\frac{\frac{4}{3}}{z^{-1}-4} - \frac{\frac{4}{3}}{1-z^{-1}} - \frac{C}{z^{-1}-2} - \frac{D}{1-z^{-1}}$$

Vi bestemmer nå $C$ og $D$, vi løser følgende ligning

$$4 = C(1-z^{-1}) + D(z^{-1}-2)$$

Vi velger $z$ slik at parentesen foran $C$ blir 0, altså

$$1 - z^{-1} = 0$$
$$z = 1$$

Dette gir

$$4 = D((1)^{-1} - 2)$$
$$D = -4$$

Vi velger $z$ slik at parentesen foran $D$ blir 0, altså

$$z^{-1} - 2 = 0$$
$$z = \frac{1}{2}$$

Dette gir

$$4 = C\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - 2\right)$$
$$C = 4$$

Da får vi

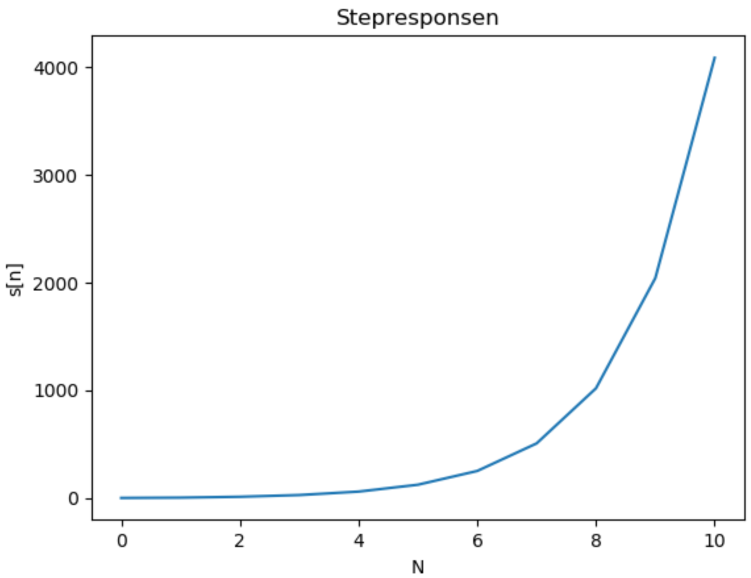
$$s[z] = -\frac{\frac{4}{3}}{z^{-1} - 4} - \frac{4}{z^{-1} - 2} - \frac{\frac{16}{3}}{1 - z^{-1}}$$

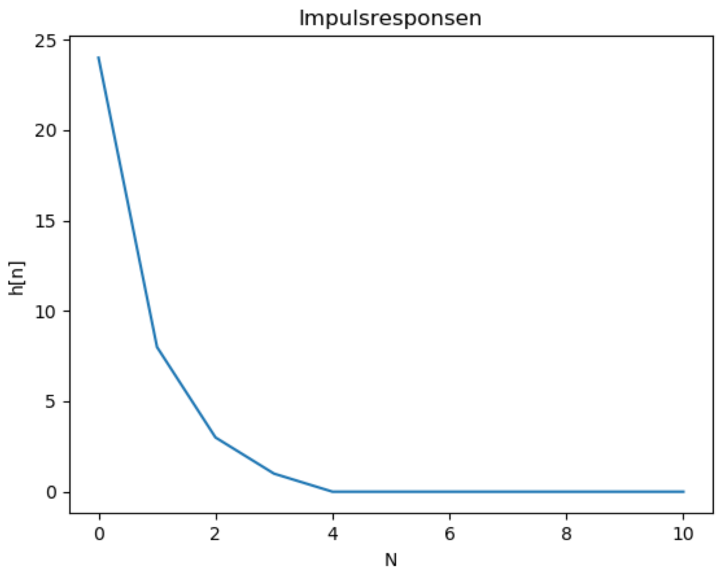
Vi finner nå $s[n]$

$$s[n] = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 4(2)^n u[n] - \frac{16}{3} u[n]$$

Vi brukte vedlagte tabell 3.1, punkt 2 og 3.

d) Vi først skriver ut resultatene vi har fått fra forrige oppgaver, vi får følgende ploter




Koden som ble brukt (Python)

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

N = np.linspace(0,10,11,dtype=int)
s = np.zeros_like(N)
```

```python
h = np.zeros_like(N)

for n in N:
    s[n] = (1/3)*(1/4)**n + 4*2**n - 16/3
    h[n] = 8*(1/2)**n + 16*(1/4)**n

plt.plot(N,s)
plt.title("Stepresponsen")
plt.xlabel("N")
plt.ylabel("s[n]")
plt.show()

plt.plot(N,h)
plt.title("Impulsresponsen")
plt.xlabel("N")
plt.ylabel("h[n]")
plt.show()
```

Vi bruker nå filter-funksjonen til Python for å verifisere resultatene

```python
import numpy as np
from scipy import signal
import matplotlib.pyplot as plt

N = np.linspace(0,10,11)

b = [0,0,8]
a = [1,-6,8]

S = signal.lfilter(b,a,np.ones(1,N))
plt.stem(y)
plt.show()

I = signal.lfilter(b,a,[1, np.zeros(1,N-1)])
plt.stem(y)
plt.show()
```

Koden virker ikke. $a$ i $y = filter(b, a, x)$ står for orden til ligningen i nevner til funksjon $H(z)$, dersom den er f.eks. $\frac{8}{8-6z^{-1}+z^{-2}}$, så skal $a$ være $a = [1, -6,8]$, $b$ står derimot for orden til ligningen i telleren til funksjonen $H(z)$.

**Oppgave 4**

a) Vi har

$$y[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[n-1])$$

System funksjon er

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} z^{-1}$$

Frekvensrespons er

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-j\omega} = \frac{1}{2}(1 - \cos\omega + j\sin\omega)$$

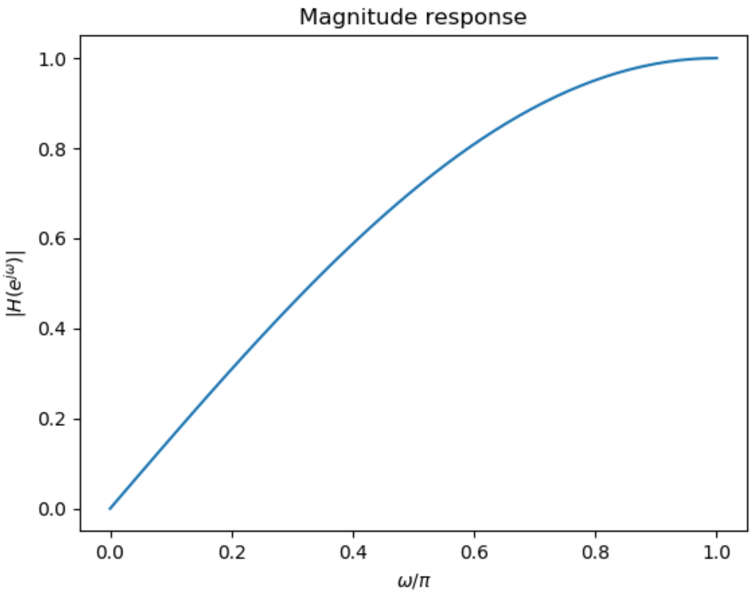
Magnituderespons er

$$|H(e^{j\omega})| = \left|\frac{1}{2}(1 - \cos\omega + j\sin\omega)\right| = \frac{\sqrt{(1-\cos\omega)^2 + \sin^2\omega}}{2} = \left|\sin\frac{\omega}{2}\right|$$

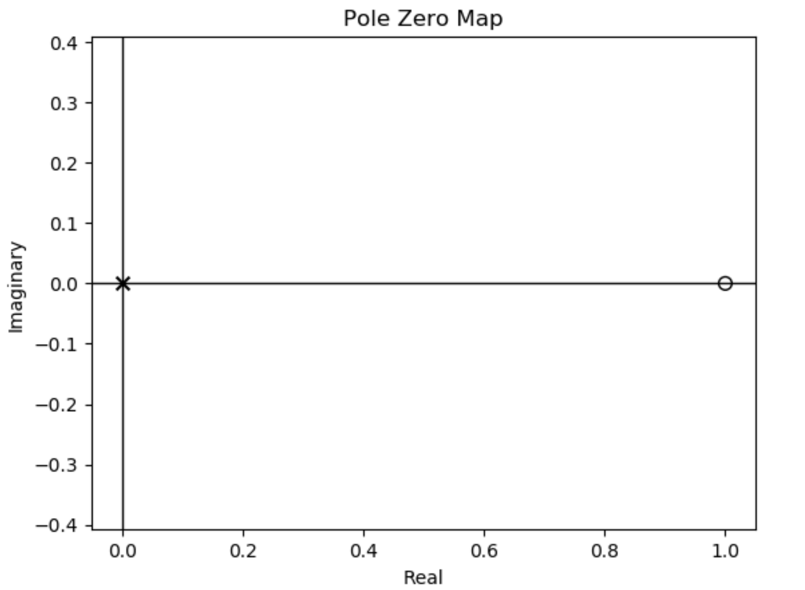
Fase respons er

$$\angle H(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\frac{\sin\omega}{1 - \cos\omega} = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}$$

Plot for magnituderespons




Pole-Zero plot




Koden som ble brukt (Python)

```
import numpy as np
import control
import matplotlib.pyplot as plt

def magnitude():

    w = np.linspace(0,np.pi)
    h = np.zeros_like(w,dtype = 'complex_')

    for i in range(len(w)):
        h[i] = 1/2-np.exp(-1j*w[i])/2

    plt.plot(w/np.pi,abs(h))
    plt.title("Magnitude response")
    plt.xlabel("$\omega/\pi$")
    plt.ylabel("$|H(e^{j\omega})|$")
    plt.show()

magnitude()

H = control.TransferFunction([1,-1],[1,0])
control.pzmap(H)
plt.show()
```

b) Vi har

$$y[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[n-1])$$

System funksjon er

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^{-2} = \frac{z^2 - 1}{2z^2}$$

Frekvensrespons er

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2j\omega} = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega + j\sin 2\omega)$$

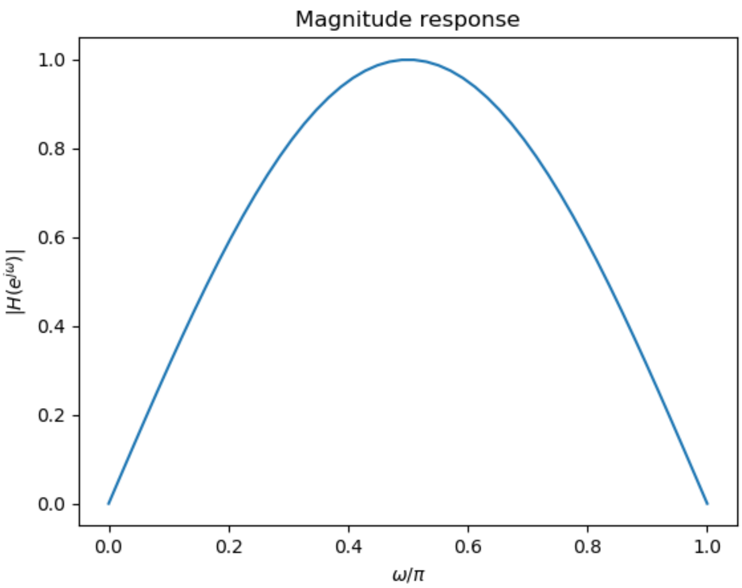
Magnituderespons er

$$|H(e^{j\omega})| = \left|\frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega + j\sin 2\omega)\right| = \frac{\sqrt{(1 - \cos 2\omega)^2 + \sin^2 2\omega}}{2} = |\sin \omega|$$

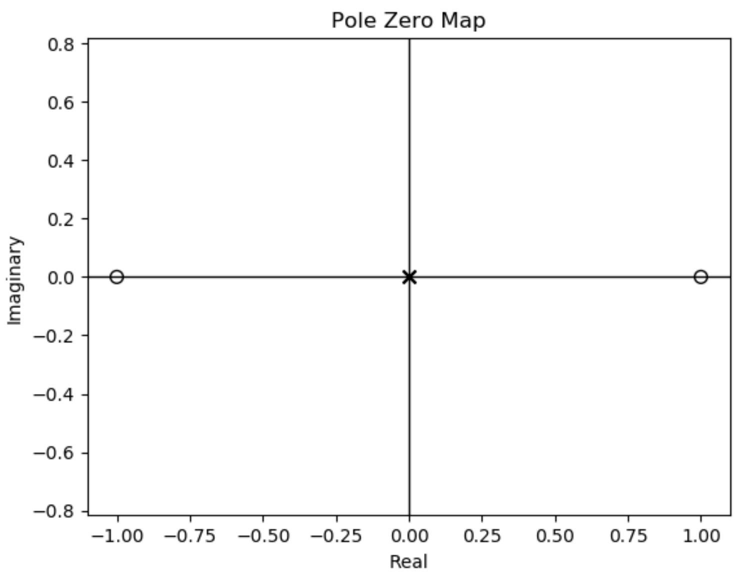
Fase respons er

$$\angle H(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\frac{\sin 2\omega}{1 - \cos 2\omega} = \frac{\pi}{2} - \omega$$

Plot for magnituderespons




Pole-Zero plot



Koden som ble brukt (Python)

```python
import numpy as np
import control
import matplotlib.pyplot as plt

def magnitude():

    w = np.linspace(0,np.pi)
    h = np.zeros_like(w,dtype = 'complex_')

    for i in range(len(w)):
        h[i] = 1/2-np.exp(-2j*w[i])/2

    plt.plot(w/np.pi,abs(h))
    plt.title("Magnitude response")
    plt.xlabel("$\omega/\pi$")
    plt.ylabel("$|H(e^{j\omega})|$")
    plt.show()

magnitude()

H = control.TransferFunction([1,0,-1],[2,0,0])
control.pzmap(H)
plt.show()
```