ØV1 — TRIGONOMETRI, KOMPLEKSE TALL OG GEOMETRISKE REKKER

Klaudia M. Pawlak (KLAUDIAP)

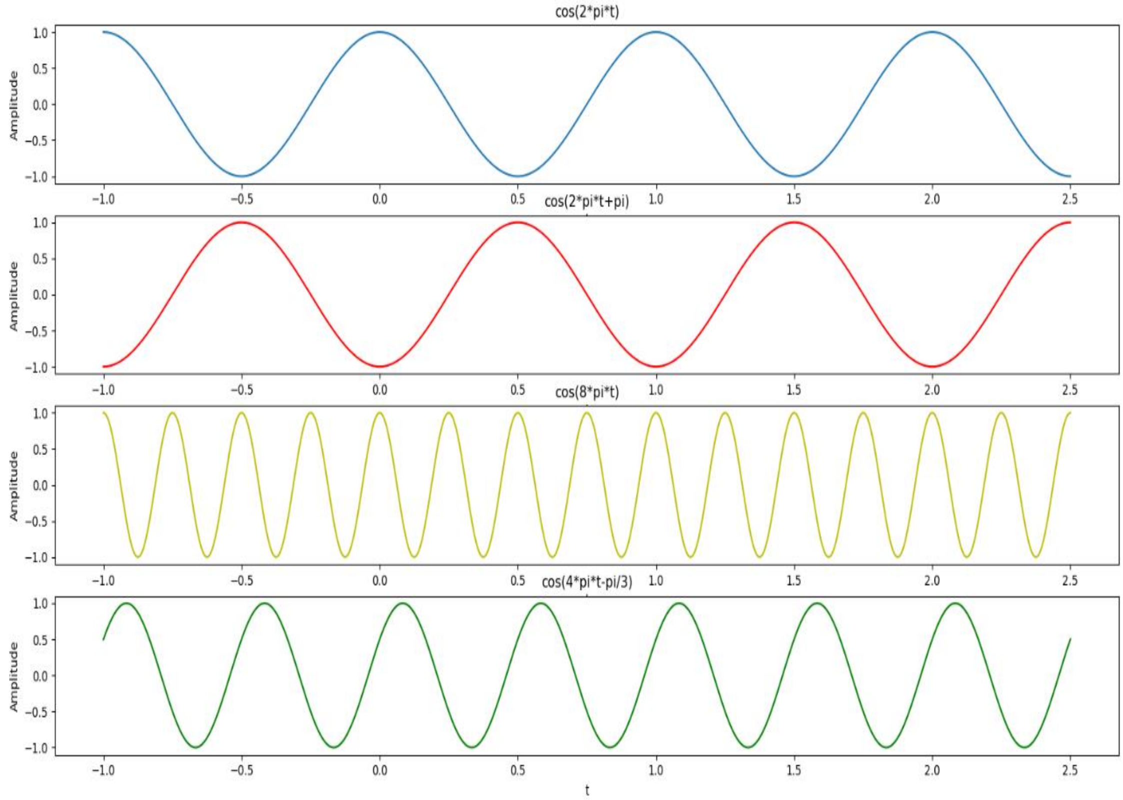
20.08.2020

Oppgave 1 Trigonometriske funksjoner

a) Jeg brukte Python og skrev følgende programmet:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

t = np.linspace(-1,2.5,1000)

fig, axs = plt.subplots(4)
axs[0].plot(t, np.cos(2*np.pi*t))
axs[0].set_title('cos(2*pi*t)')
axs[1].plot(t, np.cos(2*np.pi*t+np.pi), "r")
axs[1].set_title('cos(2*pi*t+pi)')
axs[2].plot(t, np.cos(8*np.pi*t), "y")
axs[2].set_title('cos(8*pi*t)')
axs[3].plot(t, np.cos(4*np.pi*t-np.pi/3), "g")
axs[3].set_title('cos(4*pi*t-pi/3)')

for ax in axs.flat:
    ax.set(xlabel='t', ylabel='Amplitude')

plt.show()
```

Kjøreeksempel gir:



b) På figuren øverst til venstre ser vi at:

Amplitude = 2
Frekvens = 2
Faseendring = 0

På figuren øverst til høyre ser vi at:

Amplitude = 1
Frekvens = 4
Faseendring = π

På figuren nederst til venstre ser vi at:

Amplitude = 1
Frekvens = 1
Faseendring = 0.5 π

På figuren nederst til høyre ser vi at:

Amplitude = 1
Frekvens = 0.5
Faseendring = - 0.5 π

Oppgave 2 Diskrete trigonometriske funksjoner

a) Vi ser på de ulike funksjoner:

1. $\cos\left(\frac{n}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\frac{n}{2} = 2\pi F_0 n$$
$$F_0 = \frac{n}{n4\pi} = \frac{1}{4\pi}$$
$$N = F_0^{-1} = 4\pi$$

4π er ikke et heltall, derfor er ikke denne periodisk.

2. $\cos\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\pi n = 2\pi F_0 n$$
$$F_0 = \frac{\pi n}{2\pi n} = \frac{1}{2}$$
$$N = F_0^{-1} = 2$$

1 og 2 er et heltall, derfor er denne periodisk.

3. $\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi n\right)$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\pi n = 2\pi F_0 n$$
$$F_0 = \frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$N = F_0^{-1} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$\frac{4}{\sqrt{2}}$ er ikke et heltall, derfor er ikke denne periodisk.

b) Vi får

$$\cos\left(\frac{\pi}{5} \cdot n\right)$$

c) Vi får

$$\cos(n)$$

Oppgave 3 Regning med komplekse tall

a) Vi får følgende:

1. z^* på polar form:

$$z = re^{j\theta}$$
$$z^* = re^{-j\theta}$$

2. zz^*på polar form:

$$zz^* = re^{j\theta}re^{-j\theta} = re^0 = r$$

zz^*på kartetisk form:

$$zz^* = (a + bj)(a - bj) = (a^2 + b^2) = r$$

Som er det samme som

$$(a^2 + b^2) = r^2$$

3. z^k på polar form:

$$z^k = \left(re^{j\theta}\right)^k = re^{j\theta k}$$

4. $z + z^*$på polar form:

$$\mathrm{z} + z^* = re^{j\theta} + re^{-j\theta} = r(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) = 2rcos(\theta)$$

$z + z^*$på kartetisk form:

$$\mathrm{z} + z^* = (a + bj) + (a - bj) = 2a$$

5. $z - z^*$på polar form:

$$\mathrm{z} - z^* = re^{j\theta} - re^{-j\theta} = \frac{jr\left(e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right)}{j} = 2jrsin(\theta)$$

$z - z^*$på kartetisk form:

$$\mathrm{z} + z^* = (a + bj) - (a - bj) = 2jb$$

6. z^{-1} på polar form:

$$z^{-1} = c + jd = \frac{1}{a + jb} = \frac{a - jb}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - j\frac{b}{a^2 + b^2}$$

Altså:

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2}, d = -\frac{b}{a^2 + b^2}$$

z^{-1} på kartetisk form:

$$z^{-1} = se^{j\phi} = \frac{1}{re^{j\theta}} = \frac{1}{r}e^{-j\theta}$$

Altså:

$$s = r^{-1}, \phi = -\theta$$

7. Bruk punktene over for å finne et uttrykk for $cos(\theta)$ og $sin(\theta)$ ved komplekse eksponentialer:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} = \frac{z + z^*}{2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} = \frac{z - z^*}{2j}$$

8. Forskjellen på z^{-1} og z^*:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{z^*}{zz^*} = \frac{z^*}{|z|^2}$$

b) Vi får følgende:

1. -1:

$$-1 = e^{j\pi}$$

2. $(-1)^k$:

$$(-1)^k = e^{jk\pi}$$

3. j^k:

$$j^k = e^{\frac{jk\pi}{2}}$$

Oppgave 4 Regning med komplekse tall

a) Vi får følgende:
   1. $|3+4j| = ?$:
   $$|3+4j| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$
   2. $\frac{1}{3+4j}$ til kartetisk form:
   $$\frac{1}{3+4j} = \frac{3-4j}{9+16} = \frac{3-4j}{25} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}j$$
   3. $\frac{1+2j}{1+e^{\frac{j\pi}{2}}}$ til kartetisk form:
   $$\frac{1+2j}{1+e^{\frac{j\pi}{2}}} = \frac{1+2j}{1+j} = \frac{(1+j2)(1-j)}{1+1} = \frac{1+2j-j+2}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}j$$
   4. $(-1)^n + e^{jn\pi} = ?$:
   $$(-1)^n + e^{jn\pi} = (-1)^n + (-1)^n = 2(-1)^n$$

b) Viser at $\left(cos(\theta) + \ jsin(\theta)\right)^n = (cos(\theta n) + jsin(\theta n))$:
$$\begin{aligned} cos(\theta n) + jsin(\theta n) &= \frac{1}{2}\left(e^{jn\theta} + e^{-jn\theta}\right) + \frac{j}{2j}\left(e^{jn\theta} - e^{-jn\theta}\right) \\ &= e^{jn\theta} \\ &= \left(e^{j\theta}\right)^n \\ &= (\cos(\theta) + \sin(\theta))^n \end{aligned}$$

Oppgave 5 Geometriske rekker

a) Verdien til følgende endelige geometriske rekker er:
   1. $\sum_{k=0}^{100} 23^k$:
   $$\sum_{k=0}^{100} 23^k = \frac{1-23^{101}}{1-23} = 1.56 \cdot 10^{136}$$
   2. $\sum_{k=5}^{19} (4.5)^k$:
   $$\sum_{k=5}^{19} (4.5)^k = \frac{1-4.5^{19}}{1-4.5} - \frac{1-4.5^5}{1-4.5} = 3.31 \cdot 10^{12}$$

b) Hvilke av de følgende uendelige geometriske rekkene som konvergerer, og verdien til disse er:
   1. $\sum_{k=0}^{\infty} 1^k$:
   $$\sum_{k=0}^{\infty} 1^k \to Konvergerer\ ikke/divergerer\ mot\ \infty$$
   2. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{a}\right)^k$:
   $$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{a}\right)^k \to \frac{1}{1-\frac{3}{a}} = \frac{a}{a-3}$$
   $$Konvegens\ for\ a > 4$$

3. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-k}$:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-k} \rightarrow Konvergerer\ ikke/divergerer\ mot\ \infty$$

4. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-|k|}$:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-|k|} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} \rightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$Konvergerer$$

c) Konvergensområdet til følgende uendelige geometriske rekker er

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{k}, x \in \mathbb{R}$:

   Rekken konvergerer for:

$$-2 < x < 2$$

2. $\sum_{k=0}^{\infty} (x^{-1})^{k}, x \in \mathbb{R}$:

   Rekken konvergerer for:

$$|x| > 1$$

3. $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k} z^{-k}, z \in \mathbb{R}$

   Rekken kan skrives som:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^{k}$$

   Rekken konvergerer for:

$$|z| > 2$$