ØV4 — z-tranformasjon

KLAUDIAP

10.09.2020

Oppgave 1 — Oppgave 4.11 fra Ambardar: Z-transform og ROC

a. $x(n-5) = \alpha^{n-5}u(n-5)$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^{n-5}u(n-5)\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-5} \alpha^{n}\, z^{-n} = \sum_{n=5}^{\infty} (\alpha^{-1}z)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} (\alpha^{-1}z)^{-r-5}$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty} (\alpha^{-1}z)^{-r}(\alpha^{-1}z)^{-5} = \frac{\alpha^5}{z^5}\sum_{r=0}^{\infty}(\alpha^{-1}z)^{-r} = \frac{\alpha^5}{z^5}\left(\frac{1}{1-\alpha^{-1}z}\right)$$
$$= \frac{\alpha^5}{z^5}\left(\frac{\alpha}{\alpha - z}\right)$$

$X(z)$ konvergerer dersom $|z| > |\alpha|$

b. $x(n+5) = \alpha^{n+5}u(n+5)$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^{n+5}u(n+5)\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{5} \alpha^{n}\, z^{-n} = \sum_{n=-5}^{\infty} (\alpha^{-1}z)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} (\alpha^{-1}z)^{-r+5}$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty} (\alpha^{-1}z)^{-r}(\alpha^{-1}z)^{5} = \frac{z^5}{\alpha^5}\sum_{r=0}^{\infty}(\alpha^{-1}z)^{-r} = \frac{z^5}{\alpha^5}\left(\frac{1}{1-\alpha^{-1}z}\right) = \frac{z^5}{\alpha^5}\left(\frac{\alpha}{\alpha - z}\right)$$

$X(z)$ konvergerer dersom $|z| > |\alpha|$

c. $x(-n) = \alpha^{-n}u(-n)$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^{-n}u(-n)\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{0} \alpha^{-n}\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z)^{n} = \frac{1}{a - \alpha z}$$

$X(z)$ konvergerer dersom $|z| < \frac{1}{|\alpha|}$

d. $(-1)^n x(n) = (-1)^n \alpha^n u(n)$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n\alpha^n u(n)\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{0} (-1)^n\alpha^n\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{0} (-\alpha)^n\, z^{-n}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} ((-\alpha)^{-1}z)^{-n} = \frac{\alpha}{\alpha - (-z)}$$

$X(z)$ konvergerer dersom $|z| > |\alpha|$

e. $a^n x(n) = \alpha^{2n}u(n)$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^{2n}u(n)\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{0} \alpha^{2n}\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^{-2}z)^{-n} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - z}$$

$$X(z) \text{ konvergerer dersom } |z| > |\alpha^2|$$

Oppgave 2 — Oppgave 4.18 fra Ambardar: Egenskaper, z-transf.

a. $X(-z)$

$$X(-z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n)(-z)^n =$$

Oppgave 3 — Oppg. 3.1 fra Manolakis

OBS! Re(z) og Im(z) står på feil akser, se bort ifra det.

a. $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n (u[n] - u[n-10])$

Vi finner z-transformasjon:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (u[n] - u[n-10])\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{9} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{9} \left(\frac{1}{2z}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2z}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2z}}$$

$$= \frac{(2z)^{10} - 1}{(2z)^{10} - (2z)^9} = \frac{(2z)^{10} - 1}{(2z)^9 (2z - 1)}$$

Vi har «zeros» for

$$z = \frac{1}{2} \text{ og } z = -\frac{1}{2}$$

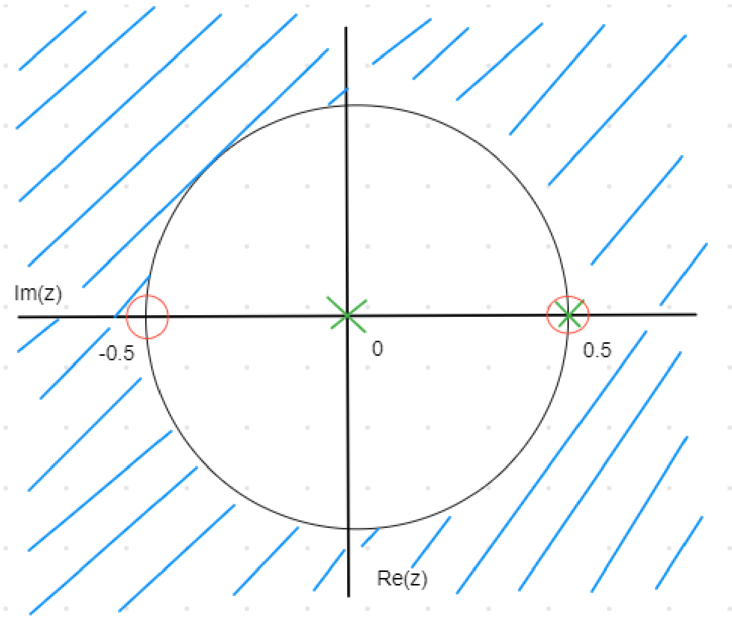
Og «poles» for

$$z = \frac{1}{2} \text{ og } z = 0$$

Og ROC for:

$$|z| < 2|z|^2$$

Vi skisserer plottet og markerer zeros med O, poles med X og ROC med streker |



b. $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$

Vi finner z-transformasjon:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} z^{-n} = \frac{2z}{2z - 1}$$

Vi har «zeros» for

$$z = 0$$

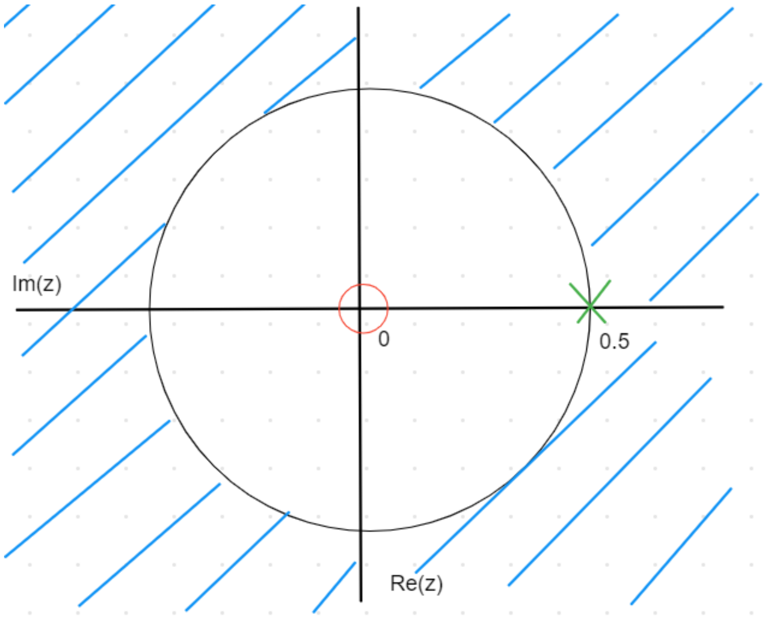
Og «poles» for

$$z = \frac{1}{2}$$

Og ROC for:

$$|z| < \frac{1}{2}$$

Vi skisserer plottet og markerer zeros med O, poles med X og ROC med streker |



c. $x[n] = 5^{|n|}$

Vi finner z-transformasjon:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 5^{|n|} z^{-n} = \frac{z}{z-5}$$

Vi har «zeros» for

$$z = 0$$

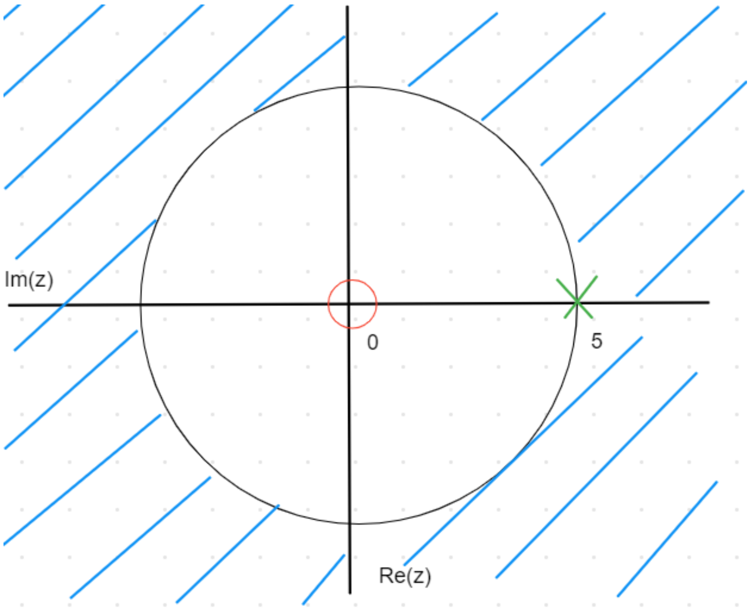
«poles» for

$$z = 5$$

Og ROC for:

$$|z| < 5$$

Vi skisserer plottet og markerer zeros med O, poles med X og ROC med streker |



d. $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) u[n]$

Vi finner z-transformasjon:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) u[n]\, z^{-n} = \frac{z(4z-1)}{4z^2 - 2z + 1}$$

Vi har «zeros» for

$$z = 0 \text{ og } z = \frac{1}{4}$$

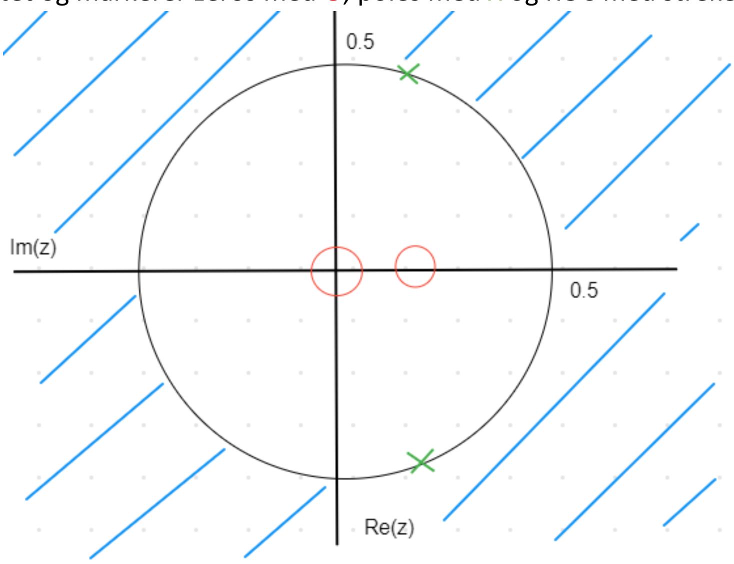
«poles» for

$$z = \frac{1}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{4} \text{ og } z = \frac{1}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4}$$

Og ROC for:

$$|z| < \frac{1}{4} + \left|\frac{i\sqrt{3}}{4}\right|$$

Vi skisserer plottet og markerer zeros med O, poles med X og ROC med streker |



Oppgave 4— Tidligere eksamensoppgave

a. Vi sjekker om disse stemmer

$$Z[x[n]] = X[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Derfor stemmer

$$x[n] \overset{z}{\leftrightarrow} X[z]$$

Videre sjekker vi om følgende egenskap stemmer

$$x[n-k] \overset{z}{\leftrightarrow} z^{-k}X[z]$$

Og vi får

$$Z[x[n-k]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-k]z^{-n}$$

$$n-k = p \rightarrow n = p+k$$

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} x[p]z^{-(p+k)} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[p]z^{-p}z^{-k} = z^{-k}\sum_{p=-\infty}^{\infty} x[p]z^{-p} = z^{-k}X[z]$$

Vi har dermed vist denne egenskapen

b. Vi finner z-transformen til signalet

$$X(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n)\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}\, z)^{-n} = -\frac{z}{\alpha - z}$$

Vi regner ut energien til signalet

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a^n|^{\,2} = \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n} = \frac{1}{1-a^2}$$

Så vi får at

$$0 < E < \infty$$

Derfor har vi et energi-signal

c. Vi finner z-transformen til signalet

$$X(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (u(n) - u(n-N))z^{-1} = \frac{z - z^{1-N}}{z-1}$$

Oppgave 5— Exam task in 2012: Z-transform and region of convergence (ROC)

a. Vi finner z-transformen til signalet

$$X(n) = \sum_{n=-2}^{2} \frac{1}{n} = \frac{1}{-2}z^2 + \frac{1}{-1}z^1 + 1 + \frac{1}{1}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} = -\frac{1}{2}z^2 - z^1 + 1 + z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}$$

$X(z)$ konvergerer dersom $z = 0$ og $z = \infty$

b. Vi finner z-transformen til signalet

$$X(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n2^{n-1}u(n-1)\, z^{-n} = \frac{z}{(z-2)^2}$$

$X(z)$ konvergerer for $|z| = 2$

c.