MEK1100

Obligatorisk oppgave 1 av 2

Oppgave 1: Skalering

a) For å finne tiden setter vi $y(t_m) = 0$ og får:

$$0 = v_0 t_m \sin\theta - \frac{1}{2} g t_m^2$$

Vi løser likningen med hensyn på t_m:

$$v_0 t_m \sin\theta - \frac{1}{2} g t_m^2 = 0$$

$$t_m \left(v_0 \sin\theta - \frac{1}{2} g t_m \right) = 0$$

Vi får:

$$t_m = 0 \qquad \text{og} \qquad v_0 \sin\theta - \tfrac{1}{2} g t_m = 0$$

$$v_0 \sin\theta = \frac{1}{2} g t_m$$

$$t_m = \frac{2 v_0 \sin\theta}{g}$$

$t_m = 0$ er ikke en løsning, siden det er tiden ballen kastes ut, og vi skulle finne tiden t_m når ballen faller ned på bakken, derfor har vi

$$\boxed{t_m = \frac{2 v_0 \sin\theta}{g}}$$

For å finne posisjonen setter vi utrykket for tiden t_m i $x(t)$ og får:

$$x(t_m) = x_m = v_0 t_m \cos\theta = v_0\left(\frac{2v_0\sin\theta}{g}\right)\cos\theta = \frac{v_0^2\sin(2\theta)}{g}$$

Altså:

$$x_m = \frac{v_0^2\sin(2\theta)}{g}$$

b) Vi skalerer x og y med posisjonen til ballen x_m, og t med tiden t_m. Da får vi to nye dimensjonsløse variabler:

$$x^* = \frac{x}{x_m}$$

$$t^* = \frac{t}{t_m}$$

$$y^* = \frac{y}{x_m}$$

Vi setter $x = x^*(x_m)$ og $t = t^*(t_m)$ inn i ligningen for $x(t)$, og får:

$$x = x(t) = x^*(x_m) = v_0 t\cos\theta = v_0 t^*(t_m)\cos\theta$$

Vi bruker utrykkene for t_m og x_m fra oppgave a):

$$x^* = \frac{v_0 t^*(t_m)\cos\theta}{x_m} = \frac{v_0 t^*(\frac{2v_0\sin\theta}{g})\cos\theta}{\frac{v_0^2\sin(2\theta)}{g}} = \frac{2t^*\sin\theta\cos\theta}{\sin(2\theta)}$$

$$= \frac{2t^*(\frac{1}{2}\sin 2\theta)}{\sin(2\theta)} = t^*$$

Altså:

$$x^* = t^*$$

Setter vi $y = x_m y^*$ og $t = t^*(t_m)$ inn i ligningen for $y(t)$, så får vi:

$$y = y(t) = x_m y^* = v_0 t^*(t_m)\sin\theta - \frac{1}{2}g\left(t^*(t_m)\right)^2$$

Vi bruker utrykkene for t_m og x_m fra oppgave a):

$$y^* = \frac{v_0 t^*(t_m)\sin\theta - \frac{1}{2}g\left(t^*(t_m)\right)^2}{x_m}$$

$$= \frac{v_0 t^*\left(\frac{2v_0\sin\theta}{g}\right)\sin\theta - \frac{1}{2}g\left(t^*\left(\frac{2v_0\sin\theta}{g}\right)\right)^2}{\frac{v_0^2\sin(2\theta)}{g}}$$

$$= \frac{v_0 t^*(2v_0\sin\theta)\sin\theta - \frac{1}{2}\left(t^*(2v_0\sin\theta)\right)^2}{v_0^2\sin(2\theta)}$$

$$= \frac{t^*(2\sin\theta)\sin\theta - \frac{1}{2}\left(t^*(2\sin\theta)\right)^2}{\sin(2\theta)}$$

$$= \frac{t^*(2\sin\theta) - \frac{1}{2}t^{*2}(4\sin^2\theta)}{\sin(2\theta)}$$

$$= \frac{t^*(2\sin^2\theta) - t^{*2}(2\sin^2\theta)}{2\sin(\theta)\cos(\theta)} = \frac{t^*(\sin\theta) - t^{*2}(\sin\theta)}{\cos(\theta)}$$

$$= \tan(\theta)\,t^* - t^{2*}\tan(\theta) = -t^*(t^*-1)*\tan(\theta)$$

Altså:

$$y^* = -t^*(t^*-1)*\tan(\theta)$$

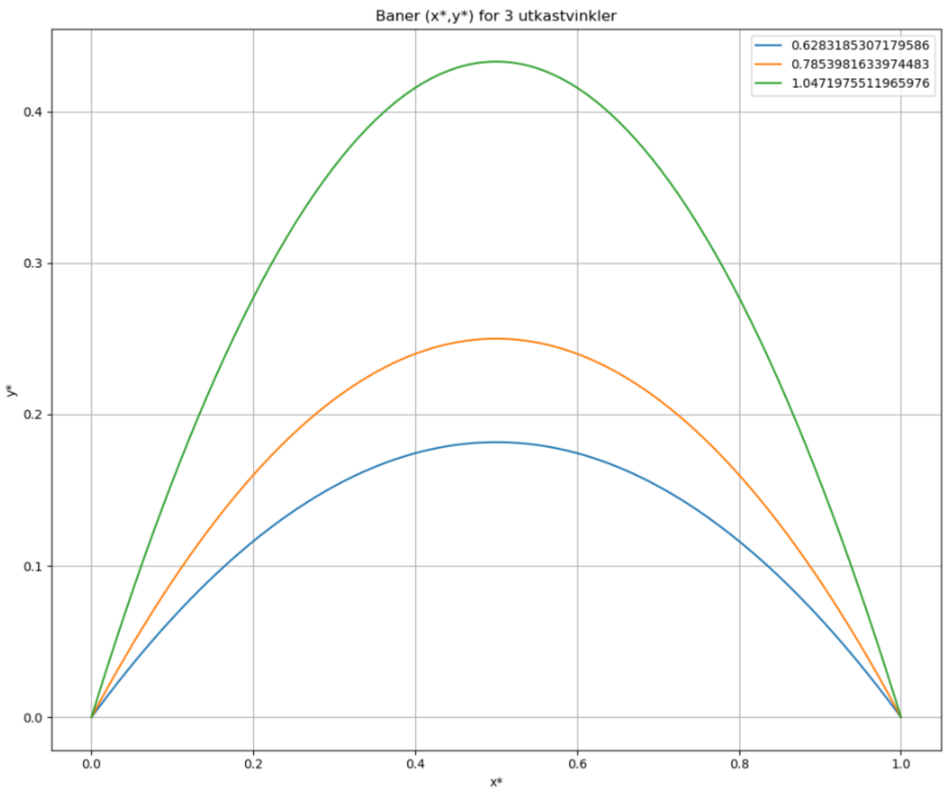
Det er ikke behov for å skalere vinkelen θ siden den er enhetssløs.

c) Vi skriver følgende program i Python:

```
from math import pi
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(0, 1, 200)
theta = [pi/5, pi/4, pi/3]

for i in theta:
```

```
plt.plot(x, -x*(x-1)*np.tan(i), label=i)

    plt.title('Baner (x*,y*) for 3 utkastvinkler')
    plt.xlabel('x*')
    plt.ylabel('y*')
    plt.legend()
    plt.grid()
    plt.show()
```

Og vi får:



Vi ser fra grafen at 1. banen (blå) svarer til $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$, 2. banen (oransje) svarer til $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$, og 3. banen (grønn) svarer til $\theta_3 = \frac{\pi}{5}$. Disse diagrammene kan brukes til å finne ballens baner siden disse vil ha samme form, bare med en ulikt skalaen.

Oppgave 2: Strømlinjer til et todimensjonal hastighetsfelt

a) Vi finner strømlinjene etter kravet at:

$$\vec{v} \times d\vec{r} = 0$$

Med posisjonsvektor $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ blir differensialet d$\vec{r} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$. Vi regner ut dette vektorproduktet og får:

$$\vec{v} \times d\vec{r} = \begin{bmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ xy & y & 0 \\ dx & dy & dz \end{bmatrix} = \vec{\imath}(ydz) + \vec{\jmath}(-xydz) + \vec{k}(xydy - ydx) =$$

$$ydz\,\vec{\imath} - xydz\,\vec{\jmath} + (xydy - ydx)\vec{k} = 0$$

Vi løser denne likningen komponentvis og vi får:

$$ydz = 0 \qquad -xydz = 0 \qquad xydy - ydx = 0$$

Første likning har løsning y = 0 eller z = konstant.

Andre likning har løsning x = 0/y = 0 eller z = konstant.

Tredje likning er en separabel differensiallikning:

$$xy\,dy = y\,dx$$

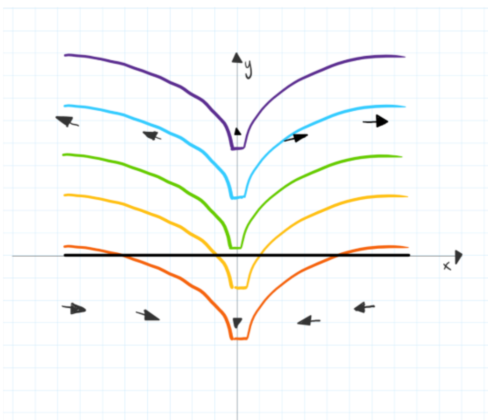
Vi deler på y på begge sidene og vi tar integralet:

$$\int x\,dy = \int 1\ dx$$

Som gir:

$$y = ln|x| + C$$

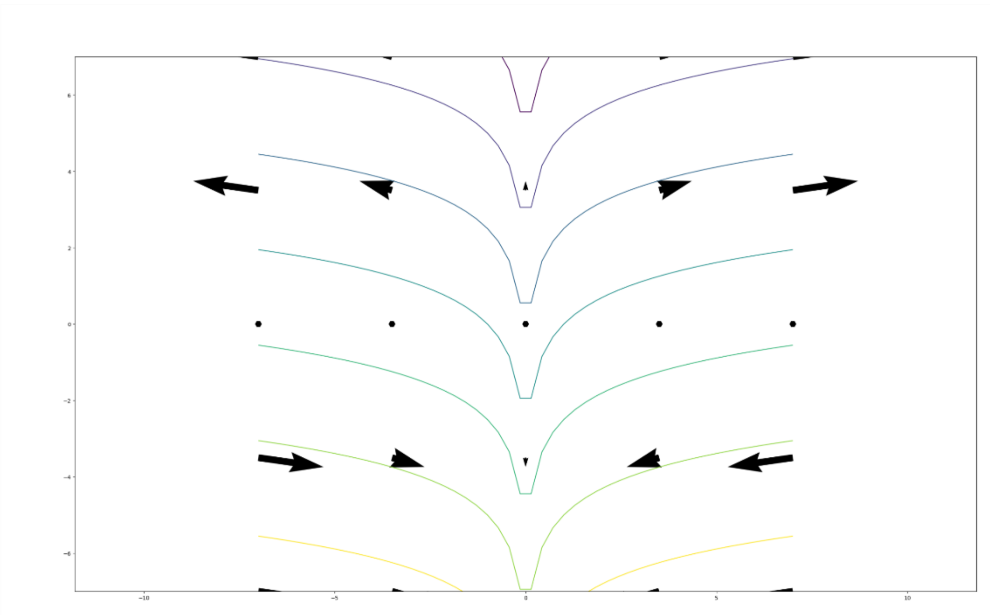
b) Vi tegner strømlinjene forhånd og får (dersom vi setter xy = 0 og y= 0, gir dette y = 0, det betyr at x-aksen blir “stagnasjonspunkt”):



Vi tegner strømlinjene ved hjelp av Python (Vi bruker forskjellig rutenett for **quiver** og **contour**, for å lage rutenettet finere, og at antallet på pilene ikke skal vær så høy):

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

k = np.linspace(-7, 7, 50)
[x,y] = np.meshgrid(k, k)
f = np.log(np.abs(x))-y
plt.contour (x, y, f)

l = np.linspace(-7, 7, 5)
[x, y]= np.meshgrid(l, l)
vx = x*y
vy = y
plt.quiver(x,y,vx,vy)
plt.axis("equal")
plt.show()
```

Og vi får:



c) Vi finner først divergensen:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

Siden $\frac{\partial v_x}{\partial x} = y$ og $\frac{\partial v_y}{\partial y} = 1$, får vi at:

$$\nabla \cdot \vec{v} = y + 1$$

Vi ser at $\nabla \cdot \vec{v} \neq 0$, det betyr at en strømfunksjon ψ ikke eksisterer.

Oppgave 3: Et annet todimensjonalt strømfelt

a) Vi finner først divergensen:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

Siden $v_x = \cos(x)\sin(y)$, og $v_y = -\sin(x)\cos(y)$, vet vi at:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial(\cos(x)\sin(y))}{\partial x} = -\sin(x)\sin(y)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial(-\sin(x)\cos(y))}{\partial y} = \sin(x)\sin(y)$$

Dermed:

$$\nabla \cdot \vec{v} = -\sin(x)\sin(y) + \sin(x)\sin(y) = 0$$

Divergensen blir:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Vi finner virvlingen:

$$\nabla \times \vec{v} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Siden $v_x = \cos(x)\sin(y)$, og $v_y = -\sin(x)\cos(y)$, vet vi at:

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial(-\sin(x)\cos(y))}{\partial x} = -\cos(x)\cos(y)$$

$$\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial(\cos(\mathrm{x})\sin(\mathrm{y}))}{\partial \mathrm{y}} = \cos(x)\cos(y)$$

Dermed:

$$\nabla \times \vec{\mathrm{v}} = (-\cos(x)\cos(y) - \cos(x)\cos(y))\vec{\mathrm{k}} = (-2\cos(x)\cos(y))\vec{\mathrm{k}}$$

Virvlingen blir:

$$\nabla \times \vec{\mathrm{v}} = (-2\cos(x)\cos(y))\vec{\mathrm{k}}$$

b) Vi velger verdiene i intervallet [-2, 2] for å finne strømvektorer. Strømvektorer langs y-aksen er gitt ved x = cos(0)sin(y), setter vi inn verdiene så får vi:

$$y = -2 \qquad x = \cos(0)\sin(-2) = -0.9093$$

$$y = -1 \qquad x = \cos(0)\sin(-1) = -0.84147$$

$$y = 0 \qquad x = \cos(0)\sin(-2) = 0$$

$$y = 1 \qquad x = \cos(0)\sin(-2) = 0.84147$$

$$y = 2 \qquad x = \cos(0)\sin(-2) = 0.9093$$

Strømvektorer langs x-aksen er gitt ved y = - cos(0)sin(x):

$$x = -2 \qquad x = -\sin(-2)\cos(0) = 0.9093$$

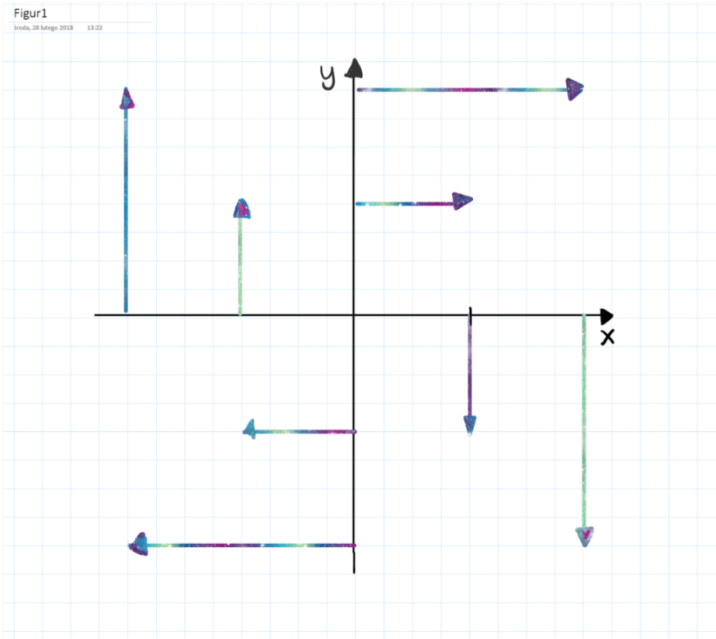
$$x = -1 \qquad x = -\sin(-1)\cos(0) = 0.84147$$

$$x = 0 \qquad x = -\sin(0)\cos(0) = 0$$

$$x = 1 \qquad x = -\sin(1)\cos(0) = -0.84147$$

$$x = 2 \qquad x = -\sin(2)\cos(0) = -0.9093$$

Tegner vi opp strømvektorer så får vi:



c) For å finne sirkulasjonen om randa til kvadratet bruker vi linjeintegralet langs sidekantene av kvadratet som deles opp i 4 deler:

$$\Delta C = \oint \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{AB} \vec{v} \cdot d\vec{r} + \int_{BC} \vec{v} \cdot d\vec{r} + \int_{CD} \vec{v} \cdot d\vec{r} + \int_{DA} \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

Vi løser den første integralet, langs sidekanten AB er $d\vec{r} = \vec{j}dy$, med grense $\frac{\Delta x}{2} = \frac{\pi}{2}$, og vi får at:

$$\int_{AB} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (v_x + v_y) d\vec{r} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin(y)\vec{i} - \sin(x)\cos(y)\vec{j}\ \vec{j}dy$$

$$= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\mathrm{x}) \cos(y)\, dy = -[\sin(x)\sin(y)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -2$$

Vi løser andre integralet, langs sidekanten BC er $d\vec{r} = -\vec{i}dx$, med grense y $= \frac{\Delta y}{2} = \frac{\pi}{2}$, og vi får :

$$\int_{BC} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (v_x + v_y) d\vec{r}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin(y)\vec{\imath} - \sin(x)\cos(y)\vec{\jmath}\ \overrightarrow{(-\imath)} dx$$

$$= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\mathrm{x})\sin(y)\,dx = -[\sin(x)\sin(y)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -2$$

Vi løser de andre integraler på tilsvarende måte :

$$\int_{CD} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (v_x + v_y) d\vec{r} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin(y)\vec{\imath} - \sin(x)\cos(y)\vec{\jmath}\ \vec{\imath} dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\mathrm{x})\cos(y)\,dy = -[\sin(x)\sin(y)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -2$$

$$\int_{DA} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (v_x + v_y) d\vec{r} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin(y)\vec{\imath} - \sin(x)\cos(y)\vec{\jmath}\ \vec{\imath} dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\mathrm{x})\sin(y)\,dx = -[\sin(x)\sin(y)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -2$$

Legger vi disse integralene sammen så får vi:

$\Delta C = -2 + (-2) + (-2) + (-2) = -8$

d) Dersom divergensen $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, vet vi at det eksisterer en strømfunksjon, og siden $\vec{v}$ er et todimensjonelt felt vet vi at stromfunksjonen har egenskapen $v_x = -\frac{\partial \psi_1}{\partial y}$ og $v_y = \frac{\partial \psi_2}{\partial x}$ og vi får at:

$$v_x = -\frac{\partial \psi_1}{\partial y} = \cos(x)\sin(y)$$

$$v_y = \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = -\sin(x)\cos(y)$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial y} = -\cos(x)\sin(y)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x} = -\sin(x)\cos(y)$$

$$\psi_1 = \int -\cos(x)\sin(y)dy$$

$$\psi_2 = \int -\sin(x)\cos(y)dx$$

$$\psi_1 = \cos(x)\cos(y) + C_1$$

$$\psi_2 = \cos(x)\cos(y) + C_2$$

$$\psi = \cos(x)\cos(y) + C_1 = \cos(x)\cos(y) + C_2$$

Altså:

$$\psi = \cos(x)\cos(y)$$

e) For å finne tilnærmende strømlinjer nær origo, bruker vi Taylorutvikling av andre orden. For å gjøre dette, trenger vi først å finne verdiene på $\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$ og $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$ i punktet (0,0). Disse er:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\sin(x)\cos(y) \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{0,0} = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\sin(y)\cos(x) \rightarrow \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{0,0} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\cos(x)\cos(y) \rightarrow \quad \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)_{0,0} = -1$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -\cos(y)\cos(x) \;\rightarrow\; \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)_{0,0} = -1$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} = \sin(y)\sin(x) \;\rightarrow\; \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\right)_{0,0} = 0$$

Taylor-approksimasonen (tilnærmende strømlinjer nær origo) blir dermed :

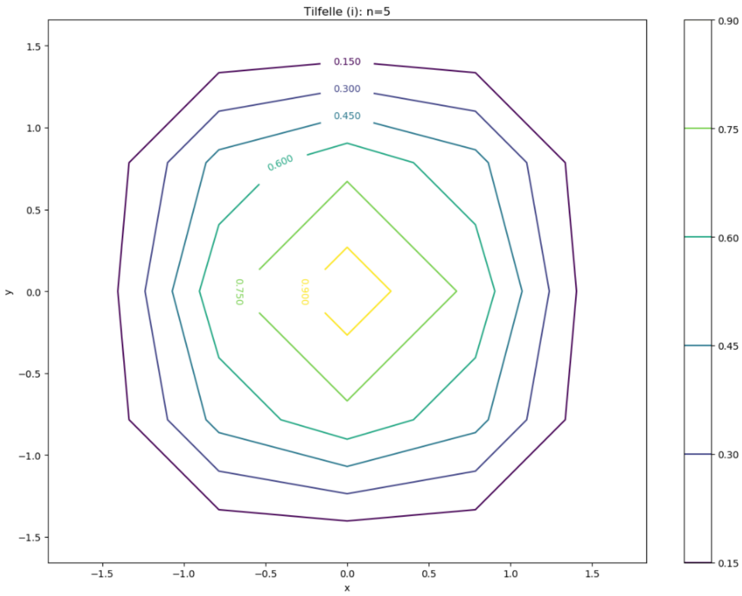
$$\psi(x,y) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$$

Oppgave 4: Strømlinjer og hastighetsfelt i Matlab eller Python

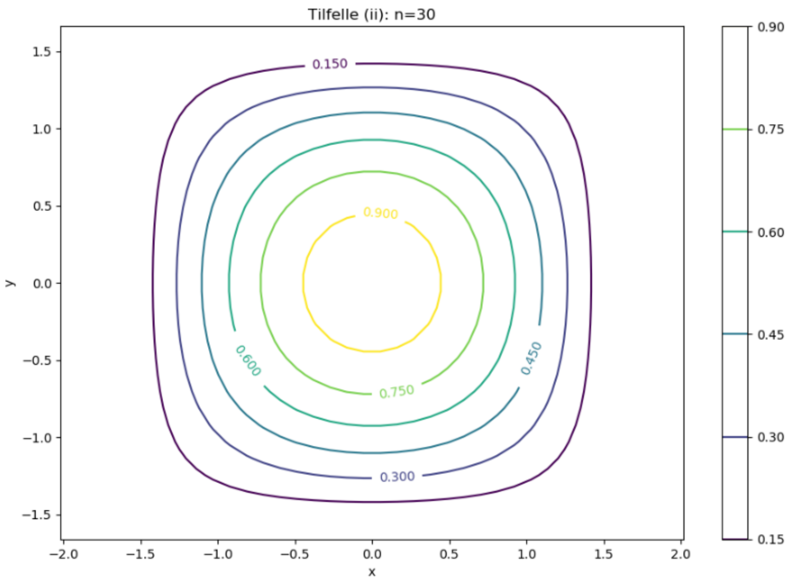
a) Vi skriver følgende kode i python:

```
from streamfun import streamfun
import matplotlib.pyplot as plt

#Tilfelle (i): n=5

x,y,psi=streamfun(5)
C = plt.contour(x, y, psi)
plt.clabel(C)
plt.axis("equal")
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.colorbar()
plt.title("Tilfelle (i): n=5")
plt.show()

#Tilfelle (ii): n=30

x,y,psi=streamfun(30)
C = plt.contour(x, y, psi)
plt.clabel(C)
plt.axis("equal")
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.colorbar()
plt.title("Tilfelle (ii): n=30")
plt.show()
```

For tilfelle (i): n=5, får vi:



Og for tilfelle (ii): n=30, får vi:



Dersom vi nå sammeligner plottene med resultatene fra oppgave 3e), vil vi se at resultatene fra 3e) er mer rundere enn de plottene vi har nå laget, og at for lavere n-verdi blir resultatene "hakkete" .Vi kan også se sammenhengen at vi for høyere n-verdi får mer nøyaktige konturer enn det vi få for lavere n-verdi.

b) Vi skriver funksjonen "velfield" i Python:

```python
from numpy import pi, linspace, meshgrid, cos, sin

def velfield(n):
    x = linspace(-0.5*pi,0.5*pi, n)
    [X,Y] = meshgrid(x,x)
    u = cos(X)*sin(Y)
    v = -sin(X)*cos(Y)
    return X,Y,u,v
```

Og bruker denne i et skript som tegner et vektorplott av hastighetsfeltet:

```python
from velfield import velfield

x,y,u,v = velfield(8)
plt.quiver(x,y,u,v)
plt.show()
```

Og vi får (for n = 8):