

GraphMotivation

September 27, 2023

1 *Graphen*, eine kurze Einführung

Da war der Herr Euler, ein Mathematiker, wohnte im frühen 18-ten Jahrhundert in Königsberg. Königsberg wird durch den Fluss Pregel in vier Stadtteile getrennt, die - damals - über insgesamt 7 Brücken verbunden waren.

Herr Euler stellte sich die Frage, ob es einen Weg gibt, bei dem man alle sieben Brücken genau einmal überquert. Und, wenn ja, ob auch ein Rundweg möglich ist, bei dem man wieder zum Ausgangspunkt gelangt. Das war die Geburtsstunde

Das war die Geburtsstunde der *Graphentheorie*.

Man kann die Situation abstrahieren:

1.1 *Graphen*

Ein *Graph* ist eine abstrakte mathematische Struktur, die aus einer Menge von Knoten (engl.: vertices) und einer Menge von Kanten (engl. edges) besteht. Dabei repräsentieren die Kanten gewisse Beziehungen zwischen je zwei Knoten.

Graphen werden in vielen Bereichen der Mathematik, Informatik, Ingenieurwissenschaften, Biologie und anderen Wissenschaften verwendet, um komplexe Systeme zu modellieren und zu analysieren.

Es gibt verschiedene Arten von Graphen: - gerichtete und ungerichtete Graphen - Haben die Kanten eine Richtung (Einbahnstraßen) oder ist das für die aktuelle Anwendung unerheblich? - gewichtete und ungewichtete Graphen - Haben die Kanten z.B. eine Art Länge, oder spielt das keine Rolle für die aktuelle Anwendung?

Die Graphentheorie beschäftigt sich mit der Untersuchung von Graphen und deren Eigenschaften.

Ein typisches Beispiel aus dem täglichen Leben sind Straßenkarten, bei denen Kreuzungen und Straßen die Knoten bzw. Kanten des Graphen darstellen. Oft sind die Straßenabschnitte nur in einer Richtung zu befahren und haben eine Länge. Oder es ist bekannt, wie lange man für die Fahrt auf einem diesem Abschnitt benötigt. Dann ist also diese Straßenkarte ein *gerichteter, gewichteter* Graph.

Hier sieht man einige abstrakte Beispiele für die unterschiedlichen Typen von Graphen:

- ungerichtet, ungewichtet:
 - Beispiel: Die Knoten sind Personen, die genau dann verbunden sind, wenn sie sich kennen.
- ungerichtet, gewichtet:

- Beispiel: Die Knoten sind Städte, die Kanten sind (in beiden Richtungen befahrbare) Straßen mit angegebener Länge
- gerichtet, ungewichtet:
 - Beispiel: Die Knoten sind Personen. Eine gerichtete Kante verläuft von X nach Y, wenn die Person X die Person Y mag.
- gerichtet, gewichtet:
 - Beispiel: Die Knoten sind Hafenstädte. Eine Kante von X nach Y mit Gewicht g besagt, dass von X nach Y ein Container mit Gewicht g verschifft wird.

In diesem Notebook werden ausschließlich **ungerichtete, gewichtete** Graphen betrachtet. Ggf. werden in späteren Abschnitten auch andere Typen behandelt.

Weitere Einschränkungen: - Es gibt in den hier betrachteten Graphen keine *Schlingen* (eine Kante, deren Anfangs- und Endknoten identisch sind). - Es gibt keine *Mehrfachkanten* (mehrere Kanten zwischen gleichen Knoten).

Graphen ohne Schlingen und ohne Mehrfachkanten heißen *einfach*.

- Die Graphen haben nur *positive Kantengewichte*.

1.1.1 Bemerkung zu dem Begriff **gewichtet**

Das Gewicht einer Kante in einem Graph ist ein Sonderfall eines sogenannten ***Kantenattributs**.

Häufig kommt es vor, dass sowohl Kanten als auch Knoten mit Attributen versehen werden:

- In einer Landkarte findet man Städte (die Knoten). In einer Anwendung kann es z.B. interessant sein zu wissen, wie viele Einwohner die jeweilige Stadt hat. Dann hat in diesem Graphen der Knoten mit dem Namen *Köln* das **Knotenattribut Einwohner** mit dem Wert 1 084 831. Oder neben der Länge der Straße zwischen *Köln* und *Bonn* (**Kantenattribut Länge** mit Wert 35 Kilometer) ist die Zeit relevant, die man mit dem Auto benötigt (**Kantenattribut Zeit** mit Wert 30 Minuten).

Die hier benutzen Graphen sind in diesem Sinne also **attributierbar**, alle Knoten und alle Kanten können beliebig viele Attribute bekommen.

1.2 Problemstellungen rund um Graphen

Das Eulersche Brückenproblem war das erste von vielen Problemen, die mit Hilfe von Graphen zu behandeln sind. Viele heute relevante Fragestellungen und deren Lösungen benutzen Graphen:

- Navigationssysteme und Auskunftssysteme z.B. der Bahn beantworten die Frage nach kürzesten Verbindungen zwischen zwei Knoten.
- Gesucht ist ein möglichst kostengünstiges Gerüst eines Graphen, so dass jeder Knoten mit jedem andere Knoten (i.d.R. über mehrere Zwischenstationen) verbunden ist.
- In Transportunternehmen möchte man für einen LKW eine kürzeste Route durch alle Knoten des Graphen.

Das erstgenannte Problem werden wir exemplarisch in dem folgenden Jupyter-Notebook behandeln.