

Einführung in die Kosmologie

Martin Michael Müller

4. Februar 2020

E-Mail-Adresse:

Martin-Michael.Mueller@univ-lorraine.fr
mueller5@univ-lorraine.fr

Termine:

- Dienstags 10:15 Uhr - 11:45 Uhr Vorlesung
- Dienstags 13:00 Uhr - 15:00 Uhr 30 min Vorlesung + Rest Übung

„Engagement in den Übungen ist notwendig um die Klausur schreiben zu dürfen“

Es gibt eine Klausur

Inhaltsverzeichnis

1	Übersicht	2
2	Astronomische Grundlagen	4
2.1	Das elektrische Strahlungsfeld	6
2.2	Strahlungstransport	7
2.3	Schwarzkörperstrahlung	8
2.4	Das Magnitudensystem	10
2.5	Farben & absolute Helligkeit	11
2.6	Eigenschaften von Sternen	13
2.7	Sternentwicklung	15
2.8	Enternungsbestimmungen	17
2.8.1	Trigonometrische Parallaxe	17
2.8.2	Eigenbewegungen	18
2.8.3	Sternstromparallaxe	18
2.8.4	Photometrische Entfernung	20
2.8.5	Visuelle Doppelsterne	22
2.8.6	Entfernung pulsierender Sterne	22
3	Unsere Galaxis	25
3.1	Struktur der Galaxis	25
3.2	Kinematik der Galaxis	27
3.3	Die Rotationskurve der Galaxis	30
3.4	Die Welt der Galaxien	34
3.4.1	Elliptische Galaxien Allgemein	36
3.4.2	Spiralgalaxien	37
3.4.3	Skalengesetze	38
3.4.4	Schwarze Löcher im Zentrum von Galaxien	39
3.5	Extragalaktische Entfernungsbestimmungen	40
4	Homogene Iostrope Weltmodelle	40
4.1	Grundlegende Beobachtungen auf kosmologischen Skalen	41
4.2	Ist das Universum unendlich, euklidisch und statisch?	42
4.3	Ein expandierendes Universum	45
4.3.1	Newtonsche Kosmologie	45
4.3.2	Relativitätstheorie	46
4.3.3	Gekrümmte Räume	47

4.3.4	Modifikation der Newtonschen Kosmologie	49
4.3.5	Die Materiekomponenten des Universums	50
4.3.6	Heuristische Herleitung der Friedmann-Lemaître-Expansionsgleichungen	50
4.3.7	Diskussion der Expansionsgleichungen	52
4.4	Das Hubble'sche Gesetz	56
4.5	Thermische Geschichte des Universums	60
4.5.1	Expansion in strahlungsdominierter Phase	60
4.5.2	Entkopplung der Neutrinos	61
4.5.3	Paarvernichtung	63
4.5.4	Primordiale Nukleosynthese	63
4.5.5	Rekombination	68
4.6	Erfolge und Probleme des Standardmodells	70
5	Galaxienhaufen und -gruppen	74
5.1	Massenabschätzung der lokalen Gruppe	74
5.2	Galaxienhaufen	76
5.3	Röntgenstrahlung von Galaxienhaufen	77
5.4	Entstehung von Inhomogenitäten	78
5.4.1	Mögliche Ursachen	78
5.4.2	Berechnung der Dichtefluktuationen	79
6	Das Finale: die kosmologischen Parameter	86

Literatur

1. P. Schneider, “Extragalaktische Astronomie & Kosmologie“, Springer (2008)
2. T.-P. Cheng, “Relativity, Gravitation and Cosmology“, Oxford Univ. Press (2008)

1 Übersicht

Kosmologie=gr. *κοσμολογία*=Lehre von der Welt als Ganzes

- Ursprung, Entwicklung, Struktur des Universums (=der wahrnehmbaren Welt)
- Grenzbereich der Physik/Astronomie + Einfüsse von Religion und Philosophie
- Beispiele historischer Ideen zur Schöpfung:
 - (a) Sumerer ~ 1800 v. Chr. “Atraharis-Epos“
 - (b) griechische Tradition: Hesiod - “Werke und Tage“ ~ 700 v. Chr., “Gaia“
 - (c) nord-germanische Mythen: Edda
 - (d) altes Testament - Genesis 1, 1-9

Bei aller Verschiedenheit, zwei Gemeinsamkeiten:

1. Die Welt entsteht aus dem Chaos/Nichts/Ungeformten
2. Es gibt einen definierten Anfang

→ Frage: Wie alt ist die Welt?

laut griechischer Mythologie: Prometheus ~ 1600 v. Chr.

traditionelle christliche Antwort:

Erschaffung der Welt am Sonntag den 23. Oktober 4004 v. Chr. um 9:00 Uhr morgens (Chronologie des irischen Bischofs Ussher (1581-1656))

⇒ \simeq 6000 Jahre!?

- Schwierigkeiten: viele geologische + paläontologische + archäologische Befunde weisen klar auf ein höheres Alter hin!
 - * älteste bekannte Schrift ~ 3000 v. Chr. = 5000 BP (=“before present“)
 - * Beginn des Ackerbaus ~ 7000 BP
 - * Ende der letzten Kaltzeit 10000 BP
 - * erster moderner Homo sapiens 160000 BP
 - * erste Homininen ~ 7-9 Mil Jahre
 - * Erdalter ~ 4.5 Mrd Jahre

- * älteste Sterne $\sim 12\text{-}13$ Mrd Jahre
- * heutige Schätzung für Weltalter ~ 13.7 Mrd Jahre
- große Bedeutung der radiometrische Altersbestimmung!
- ⇒ Notwendigkeit einer auf verifizierbaren physikalischen Argumenten aufgebauten Kosmologie!
- Einige historische Daten:
- 2. Jhd. n. Chr. ptolemäisches geozentrisches Weltbild (C. Ptolemäus $\sim 100\text{-}180$)
- 1543 Kopernikus “De revolutionibus orbitum celestium”
- 1609/10 Erfindung des Teleskops (Galilei) → Milchstraße besteht aus Einzelsternen
- 1785 Herschel: erstes Bild vom Aufbau der Milchstraße (in Wahrheit zwei der Spiralarme)
- 1837 Bessel (Struve): erste direkte Entfernungsbestimmung eines Sterns
- 1916 ART
- 1923 erste exagalaktische Entfernungen
- 1927 erste Urknalltheorie (Lemaître)
- 1929 Hubble: Rotverschiebung der Galaxie
- 1932/33 erste Hinweise auf dunkle Materie (Oort/Zwicky) → lange Zeit ignoriert
- 1948 Urknall + Elemententstehung (Alpher, Gamov, Herman) → Vorhersage der Kosmischen Hintergrundstrahlung
- 1964 Penzias & Wilson: Entdeckung der Kosmischen Hintergrundstrahlung im Mikrowellenbereich (schwarze Strahlung, $T \sim 3\text{ K}$)
- 1981 Inflationsszenario (Guth)
- 1986 blasenartige Anordnung von Galaxienhaufen (inhomogen!)
- 1989-93 : genaue Vermessung des Mikrowellenhintergrundes
- 1998 Hinweise auf beschleunigte Expansion → “Dunkle Energie”
- 2001-10 : Satelliten COBE + WMAP
- Energieinhalt des Universums:
- 4.6 % baryonische Materie

23 % dunkle Materie
72 % dunkle Energie

⇒ Wir kennen nur wenige Prozente des Energieinhaltes des Universums

2 Astronomische Grundlagen

Ziel: Einführung in einige simple Fakten und Grundlagen der Astronomie und Astrophysik

→ Eigenschaften der Sterne werden typischerweise mithilfe der Werte für die Sonne ausgedrückt:

⇒ Luminosität: $L_* \sim 10^{-4} - 10^4 L_\odot$

⇒ Massen: $M_* \sim 0.05 - 100 M_\odot$

⇒ Temperaturen $T_* \sim 10^3 - 5 \cdot 10^4 \text{ K}$

⇒ sehr heiße Gaskugeln

→ Sonne:

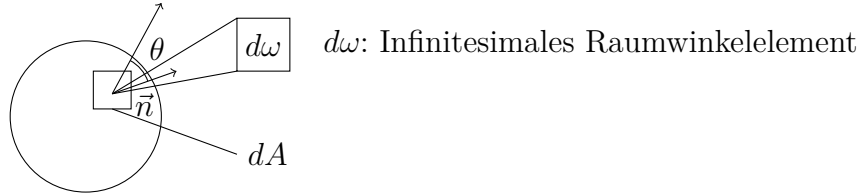
- Radius: $R_\odot = 6.96 \times 10^8 \text{ m} = 6.96 \times 10^{10} \text{ cm}$
nahezu Kugelförmig (Abplattung $\sim 5 \times 10^{-5}$)
- Energiefluss: $L_\odot \text{ tot} \simeq 3.9 \times 10^{26} \text{ J s}^{-1} = 3.9 \times 10^{33} \text{ erg/s}$
im sichtbaren Spektrum: $L_\odot \text{ vis} \sim 0.5 L_\odot \text{ tot}$
der Rest wird hauptsächlich im IR und UV abgestrahlt
- Masse $M_\odot \sim 1.99 \times 10^{30} \text{ kg} = 1.99 \times 10^{33} \text{ g}$
- sichtbare Teile der Sonne:
 - (a) Photosphäre: unterste Schicht der Sonnenatmosphäre emittiert das sichtbare Licht der Sonne
 - (b) Chromosphäre: Gasschicht zwischen Photosphäre und Korona, Dicke $\sim 10 \times 10^3 - 13 \times 10^3 \text{ km}$
während einer totalen Sonnenfinsternis sichtbar
 - (c) Korona: erstreckt sich über mehrere R_\odot , $T \sim 1.5 \times 10^6 \text{ K}$
 - (d) Sonnenflecken: auf der Photosphäre (kühler, recht statisch)

- Rotationsperiode der Sonne wurde so nachgemessen: ca. 25.5 d
- Sonnenfleckenzyklus $\sim 2 \cdot 11$ a
(zw. 0.0 % und 0.4 % der gesamten Oberfläche)
- Sterne finden sich oft im Paar, Sternhaufen und (auf noch größerer Skala) in Galaxien
- Galaxien enthalten zusätzlich Gas und (Sternen)staub

2.1 Das elektrische Strahlungsfeld

→ experimentelle Beobachtungen: Licht/elektromagnetische Strahlung ausgesandt von Sternen

→ während 1000-en von Jahren die einzige Informationsquelle



$dA \cos(\theta) \hat{=}$ in Richtung der einfallenden Strahlung projizierte Fläche

→ spezifische Intensität I_ν (=spektrale Strahlungsdichte):

$$dE = I_\nu dA \cos(\theta) dt d\omega d\nu$$

ν = Frequenz der Strahlung

E = emittierte Energie

I_ν entspricht der Flächenhelligkeit einer (kosmischen) Quelle

$$[I_\nu] = \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{Hz ster s}} \quad (1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J})$$

→ spezifischer Nettofluss:

$$F_\nu = \int_{\Omega} d\omega I_\nu \cos(\theta) \quad , [F_\nu] = \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{Hz s}}$$

der durch das Flächenelement strömt. Typischerweise (kosmologische Quellen) $\Omega \ll 1 \Rightarrow \cos(\theta) \approx 1$ (in diesem Zusammenhang wird F_ν mit S_ν bezeichnet)

→ mittlere spezifische Intensität

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int d\omega I_\nu \quad , \text{Mittelwert von } I_\nu \text{ über alle Winkel}$$

bei isotropem Strahlungsfeld: $J_\nu = I_\nu$

→ spezifische Energiedichte:

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} J_\nu \quad [u_\nu] = \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3 \text{Hz}}$$

Energie des Strahlungsfeldes pro Volumenelement und Frequenzintervall

→ Gesamtenergiedichte der Strahlung: $u = \int_0^\infty d\nu u_\nu$

2.2 Strahlungstransport

$I_\nu = \text{const.}$ entlang der Ausbreitungsrichtung eines Lichtstrahls (falls keine Emissions- oder Absorptionsprozesse stattfinden)

$s = \text{Länge entlang des Strahls}$

$\Rightarrow \frac{dI_\nu}{ds} = \sigma \Rightarrow \text{Flächenhelligkeit einer Quelle ist unabhängig von ihrer Entfernung.}$

Aber: Der beobachtbare Fluss einer Quelle hängt von ihrer Entfernung D ab, weil der von der Quelle eingenommene Raumwinkel abnimmt: $F_\nu \propto \frac{1}{D^2}$

→ inklusive Emission & Absorption (bzw. Streuung von Licht)

$$\frac{dI_\nu}{ds} = - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Absorption} \\ \kappa_\nu: \text{Absorptionskoeffizient} \\ [\kappa_\nu] = \frac{1}{\text{cm}}}}{\kappa_\nu} \cdot I_\nu + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Emission} \\ \text{Emissionskoeffizient} \\ [j_\nu] = \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3 \text{sHz ster}}}}{j_\nu} \quad (*) \quad (\text{Strahlungstransportgleichung})$$

Absorption/Emission = echte Absorption/Emission + Streuung

→ optische Tiefe $\tau_\nu(s) := \int_{s_0}^s ds \kappa_\nu(s')$

$\Rightarrow d\tau_\nu = \kappa_\nu \cdot ds, s_0 : \text{Referenzpunkt auf dem Lichtstrahl}$

$$(*) \Rightarrow \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + \mathcal{S}_\nu \quad (**)$$

wobei: $\mathcal{S}_\nu = \frac{j_\nu}{\kappa_\nu}$ Quellfunktion

→ formale Lösung von (**):

$$I_\nu(\tau_\nu) = \underset{\substack{\text{Abfall der Intensität} \\ \text{aufgrund von Absorption}}}{I_\nu(0)e^{-\tau_\nu}} + \int_0^{\tau_\nu} d\tau'_\nu e^{\tau'_\nu - \tau_\nu} \mathcal{S}_\nu(\tau'_\nu) \quad \underset{\substack{\text{Energiegewinn durch} \\ \text{Emission (inklusive} \\ \text{darauffolgender Absorption}}}{}}$$

formale Lösung, weil Zustand der Materie (von der κ_ν und j_ν abhängen) vom Strahlungsfeld selbst abhängt.

2.3 Schwarzkörperstrahlung

→ Für Materie im thermischen Gleichgewicht:

$$\mathcal{S}_\nu = B_\nu(T)$$

$$\Leftrightarrow j_\nu = B_\nu(T) \cdot \kappa_\nu$$

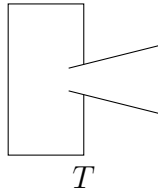
Kirchhoffsches Gesetz

hängt nur von der Temperatur ab (und nicht von I_ν !) und der Zusammensetzung der Materie

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_\nu(\tau) &= I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + B_\nu(T) \cdot \int_0^{\tau_\nu} d\tau'_\nu e^{(\tau'_\nu - \tau_\nu)} \\ &= I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + B_\nu(T) \cdot (1 - e^{-\tau_\nu}) \end{aligned}$$

Für größere τ_ν gilt: $I_\nu \approx B_\nu(T)$

Die Strahlung der Materie im thermischen Gleichgewicht wird durch die Funktion $B_\nu(T)$ beschrieben, wenn die optische Tiefe genügend groß ist.



Hohlraumstrahlung ($\tau_\nu = \infty$, da Wände undurchsichtig)

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_b T}} - 1}$$

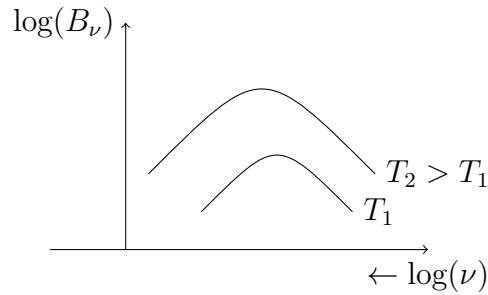
mit:

$h = 6.626 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}$ Plank'sches Wirkungsquantum

$k_B = 1.38 \times 10^{-16} \frac{\text{erg}}{\text{K}}$ Boltzmann-Konstante

Schwarzkörperstrahlung:

$$(**) \Rightarrow \text{falls } \tau_\nu \rightarrow \infty \text{ gilt } I_\nu = \mathcal{S}_\nu \begin{cases} I_\nu = B_\nu(T) \\ \text{thermische Strahlung: } \mathcal{S}_\nu = B_\nu(T) \end{cases}$$



→ Maximum von B_ν bei $\frac{h\nu_{max}}{k_B T} = 2.82$ (Wien'sches Verschiebungsgesetz)
NB: $\nu_{max} \approx T \Rightarrow$ Messung der Temperatur

→ Wg. $B_\lambda(T)d\lambda = B_\nu(T)d\nu$ mit $\lambda = \frac{c}{\nu}$

$$\Rightarrow B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1}$$

Rayleigh-Jeans-Näherung (ergibt sich bereits aus klassischer Elektrodynamik):

$$B_\nu(T) \underset{\frac{h\nu}{k_B T} < 1}{\approx} \frac{2}{c^5} \nu^2 k_B T$$

Wien-Näherung:

$$B_\nu(T) \underset{\frac{h\nu}{k_B T} > 1}{\approx} \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}$$

→ Energiedichte:

$$u = \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty d\nu B_\nu(T) = \underbrace{\frac{8\pi^5 k_B^4}{15c^3 h^3}}_{\approx 7.56 \times 10^{-15} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3 \text{K}^4}} \cdot T^4$$

\Rightarrow Fluss, der von der Oberfläche eines schwarzen Körpers ausgeht:

$$\begin{aligned} F &= \int_0^\infty d\nu F_\nu = \Pi \int_0^\infty d\nu B_\nu(T) \\ &= \sigma \cdot T^4 \text{ mit } \sigma = \text{const} \\ \sigma &= \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} = \text{const} \quad (\text{Stefan-Boltzmann-Konstante}) \end{aligned}$$

2.4 Das Magnitudensystem

→ die scheinbare Helligkeit, die das Auge wahrnimmt, verhält sich in etwa logarithmisch mit dem Strahlungsstrom (vgl. Gehörsinn, Einheit Dezibel)

⇒ seit der Antike Einteilung von Sternen in Größenklassen (qualitativ)

⇒ Einführung eines quantitativen (relativen) Magsystems

Definition Für zwei Quellen, die die Flüsse S_1 und S_2 haben, verhalten sich die scheinbaren Magnituden/scheinbaren Helligkeiten der beiden Quellen m_1 und m_2 wie:

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log \left(\frac{S_1}{S_2} \right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{S_1}{S_2} = 10^{-0.4(m_1 - m_2)}$$

→ NB:

$$\underset{\substack{\text{z.B. } m_1=1 \\ m_2=0}}{\delta m = 1} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} \approx 0.4 \Leftrightarrow \frac{S_2}{S_1} = 2.5 \Rightarrow S_2 > S_1$$

→ je größer die scheinbare Helligkeit, desto schwächer (!) die Quelle.

traditionelle Referenz: Wega $m = 0 \text{ mag}$

heute "Polsequenz" $\Rightarrow m^{\text{Wega}} = 0.03 \text{ mag}$

→ Beispiele:

Sonne: -26.73 mag

Vollmond: -12.73 mag

Sirius: -1.46 mag

Polarstern: 1.97 mag

Uranus: 5.5 mag

Pluto: 13.9 mag

2.5 Farben & absolute Helligkeit

→ Sterne haben verschiedene Farben (besser mit (z. B.) Feldstecher zu beobachten)

→ man misst die scheinbaren Magnituden für verschiedene wohldefinierte Frequenzen (mit Hilfe von Filtersystemen, die zur Beobachtung genutzt werden) und schreibt:

ultraviolett $U = m_U$

blau $B = m_B$

sichtbar $V = m_V$

rot $R = m_R$

infrarot $I = m_I$

etc.

Es existieren mehrer Filtersysteme \Rightarrow verschiedene gebräuchliche Magnitudendefinitionen & Referenzpunkte

→ Absolute Helligkeit:

- Sei L_ν die spezifische Leuchtkraft einer (isotrop emittierenden) Quelle = $\frac{\text{abgestrahlte Energie}}{dt \cdot d\nu}$
 \Rightarrow Fluss $S_\nu = \frac{L_\nu}{4\pi D^2}$, D : Abstand zwischen Quelle und Beobachter
Definition:

Die absolute Magnitude \mathcal{M} (absolute Helligkeit) ist gleich der

scheinbaren Magnitude der Quelle, wenn diese sich im Abstand von 10 pc vom Beobachter befindet. ($1 \text{ pc} = 1 \text{ parsec} \approx 3.089 \times 10^{18} \text{ cm}$)

$$\begin{aligned}
 L_\nu &= 4\pi D^2 S_\nu = 4\pi (10 \text{ pc})^2 S_\nu^{\text{abs}} \\
 &\Leftrightarrow -2.5 \log \left(D^2 \frac{S_\nu}{S_\nu^0} \right) = -2.5 \log \left[(10 \text{ pc})^2 \cdot \frac{S_\nu^{\text{abs}}}{S_\nu^0} \right] \\
 &\Leftrightarrow -2.5 \log \left(\frac{S_\nu}{S_\nu^0} \right) - (-2.5) \log \left(\frac{S_\nu^{\text{abs}}}{S_\nu^0} \right) = -5 + 5 \log \left(\frac{D}{1 \text{ pc}} \right) \\
 &\Leftrightarrow m - \mathcal{M} = 5 \log \left(\frac{D}{1 \text{ pc}} \right) - 5 =: \quad \quad \quad \begin{array}{c} \mu \\ \uparrow \\ \text{Entfernungsmodul} \end{array}
 \end{aligned}$$

z.B.:

$$D = 10 \text{ pc} \Leftrightarrow \mu = 0$$

$$D = 1 \text{ kpc} \Leftrightarrow \mu = 10$$

$$D = 1 \text{ Mpc} \Leftrightarrow \mu = 25$$

→ Die Gesamtleuchtkraft einer Queller:

$$L = \int_0^\infty d\nu L_\nu$$

Gesamtfluss:

$$S = \int_0^\infty d\nu S_\nu$$

⇒ scheinbare bolometrische Helligkeit:

$$m_{bol} = -2.5 \log(S) + \underset{\text{def. über Vergleichsstärke}}{const}$$

absolute bolometrische Helligkeit:

$$\mathcal{M}_{bol} = -2.5 \log(L) + \underset{\text{def. über Vergleichsstärke}}{const}$$

z.B. mit Hilfe der Sonne:

$$\begin{aligned}
 m_{\odot, bol} &= -26.83 \quad \& \quad \mu = -31.47 \quad (D = 1 \text{ AU} \approx 1.5 \times 10^{13} \text{ cm}) \\
 \Rightarrow \mathcal{M}_{\odot, bol} - \mu &= 4.74 \text{ mag}
 \end{aligned}$$

2.6 Eigenschaften von Sternen

→ Sterne: Gaskugeln im hydrostatischen zwischen Gravitation und Druck

⇒ äußeres Erscheinungsbild ist charakterisiert durch

Radius R

Temperatur T

Masse M

→ Falls das Sternspektrum der Sterne durch die Planck-Funktion gegeben wäre, so wäre: $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$ (L : Leuchtkraft des Sterns)

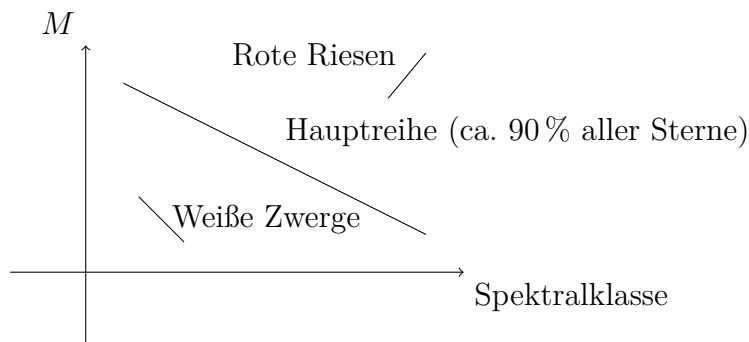
⇒ Definition der Effektivtemperatur T_{eff} eines Sterns:

$$\sigma T_{eff}^4 := \frac{L}{4\pi R^2} \quad (*)$$

$\frac{L}{L_{\odot}} \propto 10^{-4} - 10^5$ (Unterschied kommt entweder durch Variation von R oder T)

Idee: Klassifizierung der Sterne mit Hilfe ihrer absoluten Helligkeit und ihres Spektraltyps

⇒ Hertzsprung-Russel-Diagramm (HRD)



Spektralklassen: O B A F
 $30\,000\text{ K} - 50\,000\text{ K}$, $10\,000\text{ K} - 28\,000\text{ K}$, $7\,500\text{ K} - 9\,750\text{ K}$, $6\,000\text{ K} - 7\,350\text{ K}$,
 G K M
 $5\,000\text{ K} - 5\,900\text{ K}$, $3\,500\text{ K} - 4\,890\text{ K}$, $2\,000\text{ K} - 3\,350\text{ K}$

Sonne: G2

Sirius: A

Betelgeuze: M

→ **Die Eigenschaften von Sternen auf der Hauptreihe werden im wesentlichen nur von einem Parameter bestimmt: der Masse M dieser Sterne!**

→ Riesen: Sterne der gleichen Spektralklasse wie Hauptreihensterne, aber mit viel größerer Leuchtkraft $L \Rightarrow R$ viel größer (vgl. (*))

→ Dieser Größeneffekt ist spektroskopisch zu erkennen: Schwerebeschleunigung eines Stern auf seiner Oberfläche: $g = \frac{\gamma M}{R^2}$ hat Einfluss auf die Breite von Spektrallinien des Sternes

\Rightarrow Zusammenhang zwischen Linienbreite und R

$\Rightarrow L$ mit Hilfe von (*)

→ Basierend auf der Schärfe von Spektrallinien teilt man die Sterne in die Leuchtkraftklassen ein:

I: Überriesen

II: Helle Riesen

III: Riesen

IV: Unterriesen

V: Zwerge

VI: Unterzwerge

→ Kennt man die Entfernung D (und L) kann man mit Hilfe der Linienbreite g ermitteln

\Rightarrow Masse M

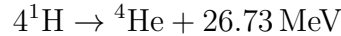
→ empirischer Zusammenhang zwischen L und M für Hauptreihensterne:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{\frac{7}{2}} \quad (**)$$

2.7 Sternentwicklung

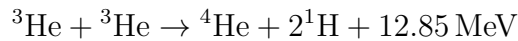
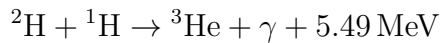
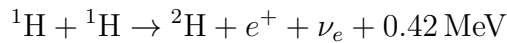
→ Energiequelle: thermonukleare Reaktionen

→ einfachster Prozess:



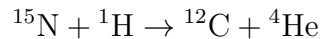
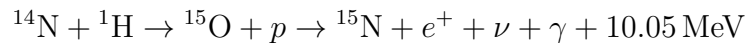
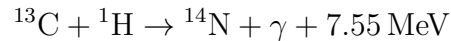
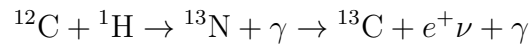
→ zwei Haupt-Reaktionsketten:

(i) pp-Kette ($T < 15 \times 10^6 \text{ K}$)



Energieerzeugungsrate $\propto T^4$

(ii) CNO-Zyklus (Bethe-Weizsäcker):



Energieerzeugungsrate $\propto T^{20}$

→ erzeugte Energie während des zentralen Wasserstoffbrennens:

$$E_{MS} = 0.1 M c^2 \cdot \underset{\text{Effizienz der Energieerzeugung}}{0.007}$$

„main sequence“

⇒ Lebensdauer t_{MS} eines Sterns der Hauptreihe: $E_{MS} = L \cdot t_{MS} \Leftrightarrow$

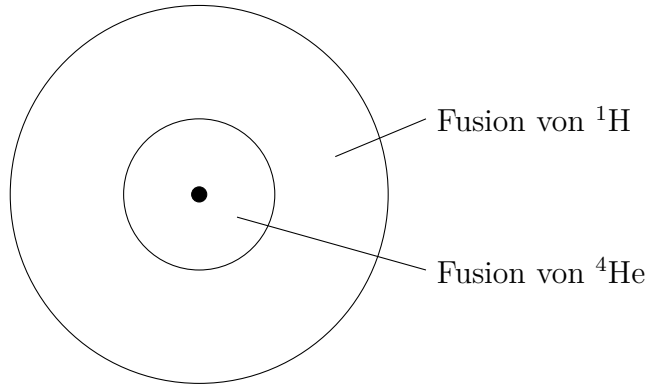
$$t_{MS} = \frac{E_{MS}}{L} = 8 \times 10^9 \cdot \frac{\frac{M}{M_\odot}}{\frac{L}{L_\odot}} \text{ a} \stackrel{(**)}{=} 8 \times 10^9 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-\frac{5}{2}} \text{ a}$$

Stern mit $M \approx 100 M_\odot : t_\odot \propto \underset{\text{astronomischer Zeitskala}}{\underset{\text{kurz auf}}{1 - 3 \text{ Ma}}}$

→ **Sternentwicklung nach der Hauptreihe** in Abhängigkeit von M :

(i) $M < 0.7 M_\odot$: Entwicklung unbekannt, da $t_{ns} > \text{Alter des Universums}$ (befinden sich noch auf der Hauptreihe)

- (ii) $M < 2.5M_{\odot}$: Helumbrennen im Kern ($3^4\text{He} \rightarrow ^{12}\text{C}$) setzt ein und
_{triple- α}
 verläuft explosiv („Helium-Flash“)
 \Rightarrow stabile GG-Konfiguration mit erhöhtem Radius $R \Rightarrow$ Roter
 Riese oder Überriese



Brennen in Form von Pulsen \rightarrow Abstoßung der Hülle des Ster-
 nes \Rightarrow Weißer Zwerg ($M \sim 0.6M_{\odot}$ und $R \sim 5000 \text{ km}$)

- (iii) $2.5M_{\odot} < M < 8M_{\odot}$:
- Zentrale Helium-Brennzone + Fusion von ^1H in Schale
 - Massenverlust durch Sternwind
 \Rightarrow Weißer Zwerg (falls $M_{final} < 1.4M_{\odot}$)
- (iv) $M > 8M_{\odot}$:
- CNO-Zyklus und weitere Fusionen bis zur Erzeugung von Fe im Kern
 - Eisenkern kollabiert, falls $M_{final} > 1.4M_{\odot}$
 \Rightarrow Supernova + Neutronenstern oder schwarzes Loch

Nun bekannte wichtige Formeln:

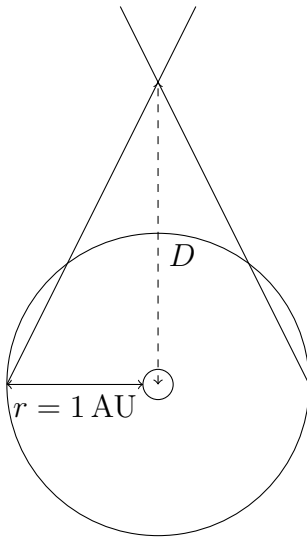
$$\underbrace{\underbrace{\sigma T_{\text{eff}}^4 = \frac{L}{4\pi R^2} \quad S = \frac{L}{4\pi D^2}}_{\Rightarrow L}}_{\Rightarrow R} \quad g = \frac{GM}{R^2}$$

$$\frac{L}{L_{\odot}} \approx \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{\frac{7}{2}}$$

2.8 Enternungsbestimmungen

2.8.1 Trigonometrische Parallaxe

→ rein geometrische Methode



$$1 \text{ AU} = 1.496 \times 10^{13} \text{ cm}$$

(astronomische Einheit)

große Halbachse der Erde

$$\frac{r}{D} = \tan(\varphi) \approx \varphi$$

→ Def: 1 pc ist der Abstand D , der bei einem Winkelunterschied von 1 Bogensekunde vorliegt.

→ Es gilt: $D = \left(\frac{\varphi}{1''} \right)^{-1} \text{ pc}$

⇒ Bessel 1837: Abstand zu „G1Cygni“

\Rightarrow Erdbewegung der Teleskope: $\Delta p \sim 0.01'' \rightarrow D \leq 30 \text{ pc}$
 Satellit HIPPARCOS: $\Delta p \sim 0.001'' \rightarrow D \leq 300 \text{ pc}$
 aktuell: GAIA: $\Delta p \sim 2 \times 10^{-4}''$

2.8.2 Eigenbewegungen

\rightarrow Sterne bewegen sich relativ zur Sonne!

- radiale Komponente der Geschwindigkeit (mit Hilfe von Spektrallinien bestimmbar):

$$v_r = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \cdot c = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \cdot c$$

λ : gemessene Wellenlänge $\neq \lambda_0$ aufgrund der Dopplerverschiebung
 λ_0 : Ruhewellenlänge des atomaren Übergangs (messbar im Labor)

Konnotation:

$v_r > \sigma$ Bewegung von uns weg (Rotverschiebung)

$v_r < \sigma$ Bewegung zu uns hin

\rightarrow tangentielle Komponente:

messbar über die Eigenbewegung μ des Sterns auf der Himmelssphäre
 (in $'' \text{ a}^{-1}$)

$$v_t = D \cdot \mu \Leftrightarrow \frac{v_t}{\text{km s}^{-1}} = 4.74 \left(\frac{D}{1 \text{ pc}} \right) \cdot \left(\frac{\mu}{1'' \text{ a}^{-1}} \right) = \left(\frac{\text{pc}}{''} \right)$$

HIPPARCOS: μ für ca 10^5 Sterne

$\Rightarrow v_t$ sowie D bekannt

\Rightarrow Datenbank mit Sternengeschwindigkeiten

\Rightarrow Struktur der Galaxis

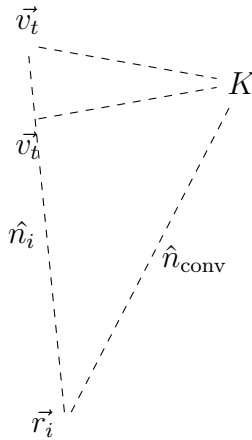
2.8.3 Sternstromparallaxe

\rightarrow Sterne eines offenen Sternhaufens haben alle eine sehr ähnliche Raumgeschwindigkeit \vec{v}

→ Die Position des i -ten Sterns wird beschrieben durch:

$$\vec{r}_i(t) = \vec{r}_i(0) + \vec{v} \cdot t$$

$$\Rightarrow \text{Richtungsvektor: } \vec{n}_i(t) = \frac{\vec{r}_i(t)}{|\vec{r}_i(t)|} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{|\vec{v}|}{|\vec{v}|} \hat{n}_{\text{conv}}$$



Ψ ist die Sternstromparallaxe, gegeben durch den Winkel zwischen \hat{n} und \hat{n}_{conv}

$$\rightarrow \text{Es gilt: } \cos(\Psi) = \hat{n} \cdot \hat{n}_{\text{conv}} = \hat{n} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$\Rightarrow v_r = v \cos(\Psi), \quad v_t = v \sin(\Psi)$$

$$\Rightarrow v_t = v_r \cdot \tan(\Psi)$$

$$\rightarrow \text{Weiterhin gilt: } v_t = D \cdot \mu$$

$$\Rightarrow D = \frac{v_r \tan(\Psi)}{\mu} \Rightarrow \text{Messung von } v_r \text{ und } \Psi \text{ und } \mu \text{ zwischen Beobachter und Sternhaufen}$$

→ Beispiele:

Hyaden: $D \approx 45 \text{ pc}$

Ursa-Major $D \approx 24 \text{ pc}$

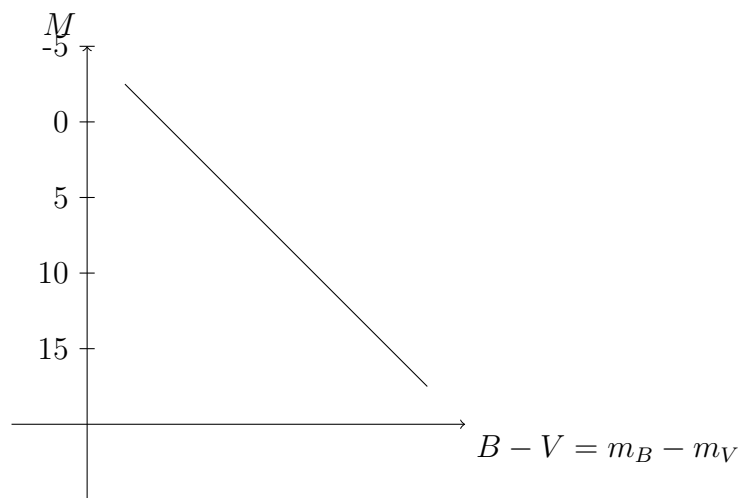
Plejaden $D \approx 130 \text{ pc}$

→ historisch bedeutsam, da Methode für Entfernungen $> 30 \text{ pc}$ (unterste Sprosse der Entfernungsleiter)

2.8.4 Photometrische Entfernung

- Idee: Sterne auf der Hauptreihe habe für eine gegebene Farbe die gleiche Leuchtkraft
- Für einen Sternhaufen (allen Sterne haben \approx gleiche Entfernung D von uns) kann man ein Farben-Helligkeitsdiagramm mit Hauptreihe erhalten, bei dem die scheinbare Helligkeit aufgetragen ist
- In einem zweiten Schritt erhält man das Entfernungsmodul ($m - M$), indem man die Haupreihe mit einer geeichten Hauptreihe (Sternhaufen in der Nähe, z. B. Hyaden) in Übereinstimmung bringt

$$m - M = 5 \log \left(\frac{D}{\text{pc}} \right) - 5$$



→ Probleme:

- Stern wandert auf Hauptreihe während er altert
- HR-Sterne sind Zwerge der Klasse V (schwache Leuchtkraft)
- Extinktion

Extinktion: Die Beziehung zwischen absoluter und scheinbarer Helligkeit wird durch die Absorption und Streuung des Sternenlichtes geändert.

→ Strahlungstransportgleichung (→ 2.2) ohne Emission:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\kappa_\nu I_\nu$$

$$\Rightarrow I_\nu(s) = I_\nu(0) \cdot e^{-\tau_\nu(s)} \text{ mit } \tau_\nu(s) = \int_0^s ds' \kappa_\nu(s') \text{ optische Tiefe}$$

→ $s_\nu = s_\nu(0)e^{-\tau_\nu(s)}$

→ Extinktionskoeffizient:

$$A_\nu := m - m_0 = -2.5 \log \left(\frac{S_\nu}{S_\nu(0)} \right) = 2.5 \log(e) \tau_\nu = 1.086 \tau_\nu$$

mit: m Magnitude mit Absorption und m_0 Magnitude ohne Absorption

⇒ Quelle erscheint schwächer und ihre Farbe ändert sich, da Extinktion von ν abhängt (via κ_ν) → Sterne erscheinen rötler als sie sind

→ Beschreibung mit Hilfe des Farbexzesses (für Filter X und Y)

$$E(X - Y) := A_X - A_Y = (X - X_0) - (Y - Y_0) = (X - Y) - (X - Y)_0$$

→ Verhältnis $\frac{A_X}{A_Y} = \frac{\tau_{\nu,X}}{\tau_{\nu,Y}}$ hängt nur von optischen Eigenschaften des Staubes ab.

$$\Rightarrow E(X - Y) = A_X - A_Y = A_Y \left(\frac{A_X}{A_Y} - 1 \right) = A_Y \cdot \frac{1}{R_Y}$$

üblicherweise: $X = B$ und $Y = V$

$$\Rightarrow A_V = R_V E(B - V)$$

z.B. Staub der Milchstraße (empirisch):

$$A_V = (3.1 \pm 0.1) E(B - V)$$

In der Sonnenumgebung (innerhalb der Scheibe)

$$A_V \sim 1 \text{ mag} \frac{D}{1 \text{ kpc}}$$

⇒ nicht vernachlässigbar bei der photometrischen Entfernungsbestimmung von Sternhaufen

⇒ Prozedur in 2 Schritten:

(i) Erstelle Zweifarben-Diagramm des Sternhaufens

→ Verschiebung der HR des Sternhaufens entlang des Verfärbungsvektors bis zur Übereinstimmung der geeichten HR (ohne Absorption)

$$\Rightarrow E(B - V) \Rightarrow A_V = 3.1E(B - V)$$

(ii) Bestimmung des Entfernungsmoduls durch vertikale Verschiebung der Hauptreihe um Farben-Helligkeits-Diagramm bis zur Übereinstimmung mit einer geeichten HR.

$$m - M = 5 \log \left(\frac{D}{1 \text{ pc}} \right) - 5 + \underset{\substack{\uparrow \\ (m - m_0)}}{A_V}$$

2.8.5 Visuelle Doppelsterne



mit Massen m_1 und m_2
Keplersches Gesetz: $P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)}$

→ Messung von Periode P und Winkeldurchmesser der Bahn 2Θ & Bestimmung von m_1 und m_2 mit Hilfe ihrer spektralen Eigenschaften
⇒ $a \Rightarrow$ Abstand $D = \frac{a}{\Theta}$

2.8.6 Entfernung pulsierender Sterne

→ Verschiedene Arten pulsierender Sterne zeigen periodische Helligkeitsänderungen, wobei ihre Periode mit der Masse (und daher der Leuchtkraft) der Sterne korreliert ist.

→ Man findet (s. Übung)

$$P \sim \bar{\rho}^{-\frac{1}{2}}$$

wobei $\bar{\rho} \sim \frac{M}{R^3}$ mittlere Dichte des Sterns

→ weiterhin gilt: $L \sim M^3$ und $L \sim R^3 \cdot T_{eff}$

$$\Rightarrow P \sim \frac{R^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{M}} \sim L^{\frac{7}{12}}, \text{ falls } T_{eff} = const$$

\Rightarrow drei Sorten pulsierender Sterne:

(i) δ -Cephei (klass. Cepheiden): junge Sterne

$$\mathcal{M}_\nu = -3 \log \left(\frac{P}{1 \text{ d}} \right) - 0.8 \text{ (aus Experimenten)}$$

Zur Minimierung der Extinktion und Streuung Beobachtung der $P - L$ -Relation in Nah-IR besonders nützlich.

(ii) W Virginis Sterne (Population II, Cepheiden):

massearme, metallarme Sterne
schwerer als Helium

(iii) RR Lyrae-Sterne (ebenfalls Population II)

Metallarm

sehr langsame Perioden $\mathcal{M}_\nu \in [0.5; 1.0]$ mit $\mathcal{M}_F = (-2.0 \pm 0.3) \log \left(\frac{P}{1 \text{ d}} \right) + 0.06 \cdot \left[\frac{\text{Fe}}{\text{H}} \right] - 0.7$

I.a. für ein Element X: $\left[\frac{\text{X}}{\text{H}} \right] = \log \left(\frac{n(\text{X})}{n(\text{H})} \right)_* - \log \left(\frac{n(\text{X})}{n(\text{H})} \right)_\odot$ wobei $n(\text{X})$ =
Anzahl der Spezies X

z.B. $\left[\frac{\text{Fe}}{\text{H}} \right] = -1 \Rightarrow$ Eisen im Stern hat ein zehntel der solaren Häufigkeit
Metallizität Z : Massenzahl aller Elemente schwerer als Helium

z.B.: $Z_\odot = 0.02 \Rightarrow 98\%$ der Sonnenmasse besteht aus H und He

Endergebnis: typische astronomische Distanzen:

Sonne 1 AU $\approx 150 \times 10^6$ km (8 min 15 s für ein Photon)

α Centauri 1.3 pc

Dicke der Galaxie 0.3 kpc

Abstand zum galaktischen Zentrum 8 kpc

Radius der Galaxis 12.5 kpc

nächste Galaxie 55 kpc

Andromeda M31 770 kpc

Größe eines Galaxiehaufens 1 – 5 Mpc

Zentrum des nächsten Superhaufens (Virgo) 20 Mpc

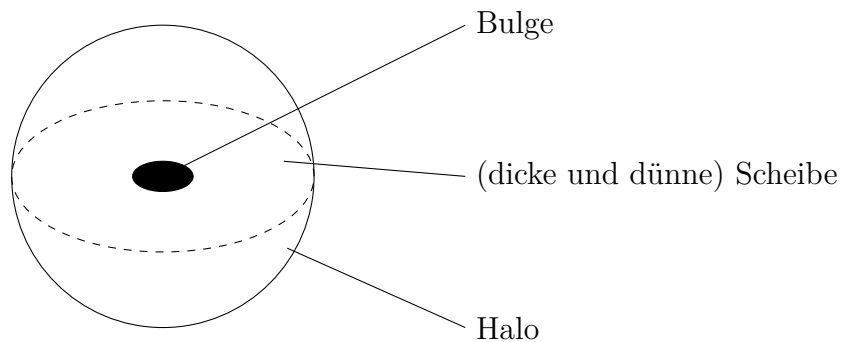
Größe eines Superhaufens 260 Mpc

sichtbares Universum 4000 Mpc

3 Unsere Galaxis

(=Milchstraße= $\lambda\alpha\lambda\alpha\xi\zeta$)

3.1 Struktur der Galaxis



→ stellare Populationen:

Population I (Pop I): Sterne mit Metallizität $Z \sim 0.02 \sim Z_{\odot}$ v.a. in der dünnen Scheibe

Population II (Pop II): metallarm $Z \sim 0.001$ v.a. in der dicken Scheibe, aber auch im Halo und im Bulge

→ Metallizität und Alter:

· extrem alte Sterne: $\left[\frac{\text{Fe}}{\text{H}}\right] = -4.5$

· dicke Scheibe: $\left[\frac{\text{Fe}}{\text{H}}\right] = -6.5$

· dünne Scheibe: $\left[\frac{\text{Fe}}{\text{H}}\right] = -0.5$

· sehr junge Sterne: $\left[\frac{\text{Fe}}{\text{H}}\right] = 1$

→ Hauptursache für die Metellanreicherung im interstellaren Medium: Supernovae!

Supernova (SN): Sternenexplosion mit hoher Leuchtkraft $L \sim 10^9 \cdot L_{\odot}$ (vergleichbar mit L_B einer ganzen Galaxie)

→ historische Klassifizierung anhand der spektralen Eigenschaften:

SN I keine Balmerlinien des Wasserstoffs

SN Ia starkes SiII Emission, $\lambda = 615 \text{ nm}$

SN Ib, Ic keine SiII Emission

SN II mit Balmerlinien

→ heute bekannt:

(i) SNII, SN Ib, c: Sternexplosion mit $M_* \gtrsim 8M_\odot$ abgestrahlte Energie $\sim 3 \times 10^{53} \text{ erg}$ (Neutrinos!)

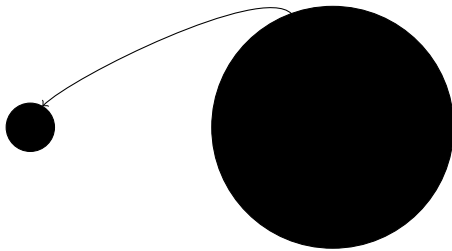
1. (?) Nachweis von 10 Neutrinos der SN1987A

→ Wechselwirkung zw. Neutrino und Sternmaterie (hohe Dichte!)

⇒ Explosion der Sternhülle mit $E_{\text{kin}} \sim 10^{51} \text{ erg} = 1 \text{ foe} = 1 \text{ Bethe}$

⇒ 10^{49} erg umgesetzt in Photonen (nur Bruchteil der Gesamtenergie!)

(ii) SN Ia: Explosion eines weißen Zerges eines Doppelsternsystems



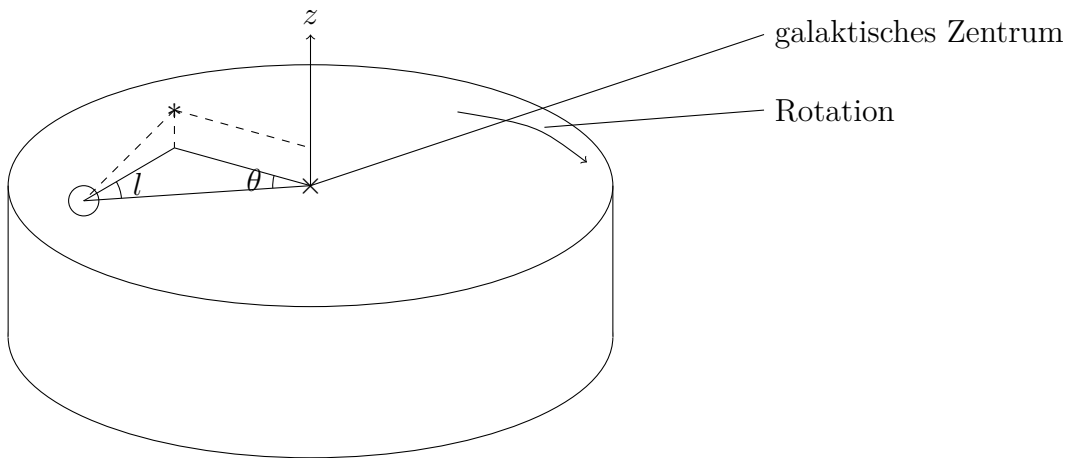
Massentransfer (Akkrektion)
von seinem Begleiter, bis die
Chandrasekhar-Masse $M_{Ch} \approx$
 $1.44 M_\odot$ überschritten wird ⇒ SN Ia

→ homogene Anfangsbedingungen für SN Ia mit etwa gleicher Leuchtkraft

⇒ **Standardkerzen, die weithin sichtbar sind**

	neutrales Gas	dünne Scheibe	dicke Scheibe	Bulge	stellarer Halo	DM Halo
$\frac{M}{10^{10} M_{\odot}}$	0.5	6	0.2 – 0.4	1	0.15	-
$\frac{L_B}{10^{10} L_{\odot}}$	-	1.8	0.02	0.3	0.1	0
$\frac{\frac{M}{L_B}}{\frac{M_{\odot}}{L_{\odot}}}$	-	3	10	3	~ 1	-
Durchmesser (kpc)	50	50	50	2	100	> 200
Form	$e^{-\frac{z}{h_z}}$	$e^{-\frac{z}{h_z}}$	$e^{-\frac{z}{h_z}}$	Balken?	$r^{-3.5}$	$\frac{1}{w^2+r^2}$
Skalenhöhe h_z (kpc)	0.13	0.325	1.5	0.4	3	2.8
Geschwindigkeitsdispersion km/s	7	20	40	120	100	-
$\left[\frac{\text{Fe}}{\text{H}}\right]$	> 0.1	-0.5 – (+0.3)	(-1.6) – (-0.4)	-1 – (-1)	-4.5 – (-0.5)	-

3.2 Kinematik der Galaxis



→ sphärische Galaktische Koordinaten (l, b) mit der Sonne als Zentrum:
 l = galaktische Länge, b = galaktische Breite $b = 90^\circ \hat{=}$ galaktischer Nordpol (NGP)

→ zylindrische Galaktische Koordinaten (R, θ, z) mit Geschwindigkeitskomponenten (U, V, W)

→ Körper mit der Bahnkurve $(R(t), \theta(t), z(t))$ hat die Geschwindigkeitskomponenten:

$$U = \frac{dR}{dt}; \quad V = R \cdot \frac{d\theta}{dt}; \quad W = \frac{dz}{dt}$$

→ fiktives Ruhesystem: Local Standard of Rest (LSR) mit $U_{\text{LSR}} = 0$, $V_{\text{LSR}} = 0$, $W_{\text{LSR}} = 0$
wobei $v_0 = V(R_0)$ Kreisbahngeschwindigkeit am Ort der Sonne entspricht

→ Pekuliargeschwindigkeit (=Geschwindigkeit relativ zum LSR):

$$\vec{v} = (u, v, w) = (U - U_{\text{LSR}}, V - V_{\text{LSR}}, W - W_{\text{LSR}}) = (U, V - V_0, W)$$

\vec{v}_{\odot} : Sonnenbewegung relativ zum LSR

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_{\odot} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Geschwindigkeit eines Sterns relativ zur Sonne}}}{\Delta \vec{v}}$$

→ Mittelwert der Pekuliargeschwindigkeitskomponenten:

$$\langle u \rangle = 0, \langle w \rangle = 0, \langle v \rangle \neq 0$$

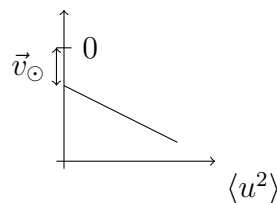
$$\langle v \rangle = -C \cdot \langle u^2 \rangle$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{\odot} = (-\langle \Delta u \rangle, (-C \cdot \langle u^2 \rangle - \langle \Delta v \rangle), -\langle \Delta w \rangle)$$

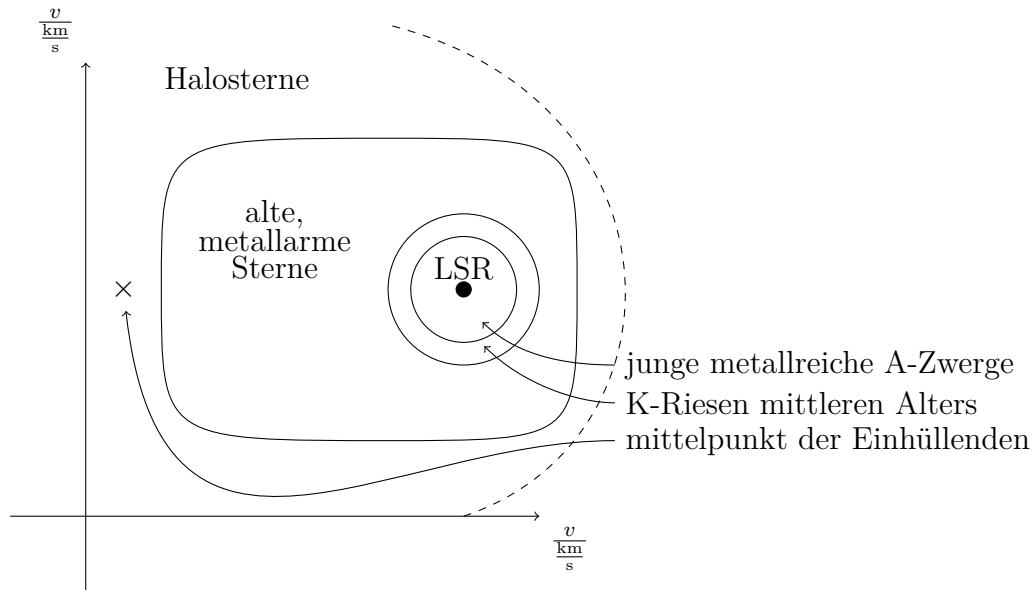
→ Wie kann C gefunden werden? \Rightarrow Messen von $\langle \Delta v \rangle$ und $\langle u^2 \rangle$ von verschiedenen Sternpopulationen

$\langle \Delta v \rangle$

$$\vec{v}_{\odot} = (-10, 7, 5) \text{ km s}^{-1}$$



→ Asymmetrischer Drift:



- (u, v) -Verteilung junger Sterne eng um $u = v = 0$, die für ältere Sterne breiter wird (Dispersion wg. Gravitationswechselwirkungen)
- $v \approx -220 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ Mittelpunkt der kreisförmigen Einhüllenden der Halopopulation (mit der älteren Sterne)
- Annahme: Halo rotiert nicht (oder nur langsam) $\Rightarrow V_0 = V(R_0) = 220 \frac{\text{km}}{\text{s}}$

→ GG-Bedingung für eine Kreisbahn: Zentrifugalkraft=Gravitationskraft

$$\Leftrightarrow \frac{mV^2}{R} = G \frac{mM}{R^2} \text{ mit } M = M(R) = \text{Masse im Inneren der Kugelschale}$$

$$\Rightarrow M(R_0) = \frac{V_0^2 R_0}{G} = 8.8 \times 10^{10} M_\odot$$

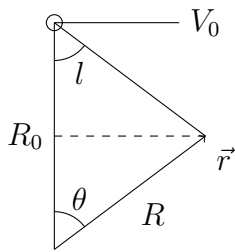
\Rightarrow Umlaufzeit des LSR um die Galaxis:

$$P = \frac{2\pi R_0}{V} = 230 \times 10^6 \text{ a}$$

1. Scheibe: $n(R, z) = n_0 \cdot \left(e^{-\frac{|z|}{h_{\text{thin}}}} + 0.02 \cdot e^{-\frac{|z|}{h_{\text{thick}}}} \right) \cdot e^{-\frac{R}{h_R}}$
 $h_R = 3.5 \text{ kps}$
 $h_{\text{thin}} = 325 \text{ ps}, h_{\text{thick}} = 1.5 \text{ kps}$
2. Bulge:
Skalenhöhe ($\propto e^{-\frac{|z|}{h_z}}$): $h_z = 0.4 \text{ kps}$
 $I(R) = I_e \cdot e^{-7.669 \cdot \left(\left(\frac{R}{R_e} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right)}$ de Vancouleurs-Profil
 R_e : Effektivradius, innerhalb dessen die Hälfte der Leuchtkraft emittiert wird.
3. Stellarer Halo:
 $n(r) \propto r^{-3.5}$ Dichteverteilung
mit de Vancouleurs-Profil: $r_e \approx 3 \text{ kps}$
4. DM Halo:
quasi-isothermal: $n(r) \propto \frac{1}{a^2 + r^2}, a = 12 \text{ kps}$ $\begin{pmatrix} a & \text{definiert} \\ n & \text{bei } r = 0 \end{pmatrix}$
Navarro-Frenk-White Modell: $n_{NFW} \propto \frac{1}{\frac{r}{r_s} \left(1 + \frac{r}{r_s} \right)^2} r_s \approx 12 \text{ kps}$

3.3 Die Rotationskurve der Galaxis

→ Motivitation: Bestimmung der Rotationsgeschwindigkeit $V = V(R)$ as Funktion des Abstands R von galaktischem Zentrum (GC)



→ (kreisförmige) Bewegung in der galaktischen Ebene: $\vec{r} = R \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}, \vec{V} = \dot{\vec{r}} = V(R) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}$

→ Mit Hilfe der Abbildung: $\vec{r} = \begin{pmatrix} D \cdot \sin(l) \\ R_0 - D \cdot \cos(l) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \sin(\theta) = \frac{D}{R} \sin(l) \\ \cos(\theta) = \frac{R_0}{R} - \frac{D}{R} \cos(l)$$

$$\text{mit } \vec{V}_\odot \approx \vec{V}_{\text{LSR}} = \begin{pmatrix} V_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta \vec{V} = \vec{V} - \vec{V}_\odot = \begin{pmatrix} V \frac{R_0}{R} - V \frac{D}{R} \cos(l) - V_0 \\ -V \frac{D}{R} \sin(l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0 - (\Omega - \Omega_0) - \Omega \cdot D \cdot \cos(l) \\ -\Omega D \sin(l) \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \Omega(R) = \frac{V(R)}{R} \text{ der Winkelgeschwindigkeit } \Omega_0 = \frac{V_0}{R_0}$$

→ Komponenten der Relativbewegung zwischen Sonne und Objekten ergibt sich durch Projektion von \vec{V} :

$$v_r = \Delta \vec{V} \cdot \begin{pmatrix} \sin(l) \\ -\cos(l) \end{pmatrix} = (\Omega - \Omega_0) \cdot R_0 \cdot \sin(l) \quad \text{Radialgeschwindigkeit}$$

$$v_t = \Delta \vec{V} \cdot \begin{pmatrix} \cos(l) \\ \sin(l) \end{pmatrix} = (\Omega - \Omega_0) \cdot R_0 \cdot \cos(l) - \Omega \cdot D \quad \text{Tangentialgeschwindigkeit}$$

Messung von l und v_r (Dopplereffekt, siehe 2.8.2) möglich über Eigenbewegung $\mu = \frac{v_t}{D}$ (siehe 2.8.2) erhält man Ω und D

$$\rightarrow R = \sqrt{R_0^2 + D^2 - 2R_0 D \cos(l)}$$

→ Problem: Nicht möglich bei großen D wegen Extinktion in der galaktischen Scheibe ($A_v \sim 28 \text{ mag}$)

→ Für kleine $D \ll R_0$, lineare Näherung:

$$(\Omega - \Omega_0) \approx \left(\frac{d\Omega}{dR} \right) |_{R_0} \cdot (R - R_0) + \dots$$

$$\Rightarrow v_r = (R - R_0) \frac{d\Omega}{dR} |_{R_0} \cdot R_0 \sin(l)$$

$$= (R - R_0) \frac{d}{dR} \left(\frac{V}{R} \right) |_{R_0} \cdot \sin(l)$$

$$\approx \left(\left(\frac{dV}{dR} \right)_{R_0} - \frac{V_0}{R_0} \right) \cdot \sin(l) (R - R_0)$$

$$\text{und } v_t = \left(\left(\frac{dV}{dR} \right) |_{R_0} - \frac{V_0}{R_0} \right) \cdot (R - R_0) \cos(l) - \Omega_0 \cdot D$$

Für $(R - R_0) \ll R_0 \Rightarrow R_0 - R \approx D \cos(l)$

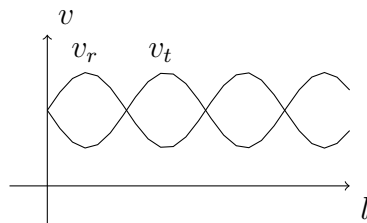
$$\Rightarrow v_r = AD \sin(l), \quad v_t = AD \cos(2l) + B \cdot D$$

mit den Oortschen Koordinaten:

$$A := -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{dV}{dR} \right)_{R_0} - \frac{V_0}{R_0} \right]$$

$$B := -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{dV}{dR} \right)_{R_0} + \frac{V_0}{R_0} \right]$$

$$\Rightarrow \Omega_0 = \frac{V_0}{R_0} = A - B, \quad \left(\frac{dV}{dR} \right)_{R_0} = -(A + B)$$

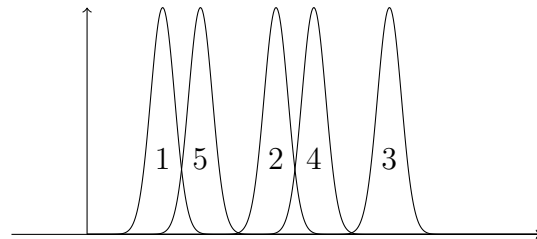
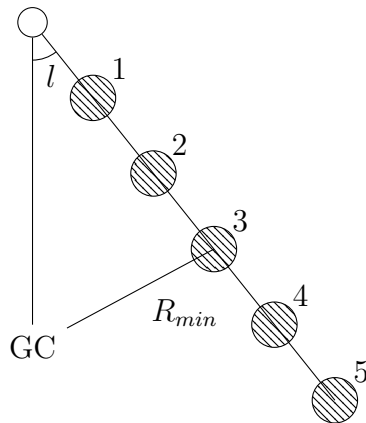


Messung ergibt:

$$A = (14.8 \pm 0.8) \frac{\text{km}}{\text{s}} \frac{1}{\text{kps}}$$

$$B = (-12.4 \pm 0.6) \frac{\text{km}}{\text{s}} \frac{1}{\text{kps}}$$

→ Bestimmung von $V(R)$ für $R < R_0$:



⇒ Messung von v_r mit Hilfe der 21 cm Emissionslinie von neutralem Wasserstoff (galaktische Scheibe transparent für Radiowellen) mit Hilfe des Doppler-Effekts

→ Unter der Annahme, dass sich das Gas der Galaxis auf Kreisbahnen um das GC bewegt, ist zu erwarten, dass für die Wolke im Tangentialpunkt (Wolke 3 im Bild) die gesamte Geschwindigkeit auf v_r projiziert wird und sie daher die größte Radialgeschwindigkeit aufweist:

$$D = R_0 \cos(l), R_{\min} = R_0 \sin(l) \text{ und}$$

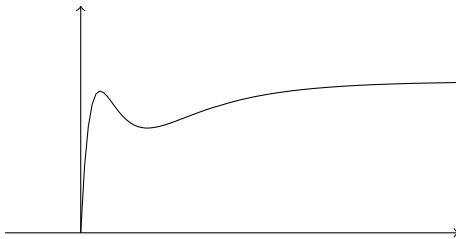
$$V_{r,max} = (\Omega(R_{\min}) - \Omega_0) R_0 \sin(l) = V(R_{\min}) - V_0$$

$$\Rightarrow V(R) = \frac{R}{R_0} + V_0 + V_{r,max}|_{\sin(l)=\frac{R}{R_0}}$$

$A \neq 0 \Rightarrow$ Galaxis rotiert nicht starr.

→ Bestimmung von $V(R)$ für $R > R_0$: v_r Messung an Objekten deren Entfernung D_{max} bestimmen kann, z.B. Cepheiden

Resultat:



→ Die Rotationskurve fällt nach außen hin ab, trotz einer Stern- und Gasdichte, die exponentiell abfällt:

$$n(R, z) \approx n_0 e^{-\frac{|z|}{h_z}} e^{-\frac{R}{h_R}} \text{ mit } h_z \approx 0.3 \text{ kps}, h_R \approx 3.5 \text{ kps}$$

→ wenn es nur sichtbare Materie gäbe, würde Ian + Kepler gelten: $V(R) \sim R^{-\frac{1}{2}}$

→ aber man erhält $V(R) \sim \text{const.} \Rightarrow M(R) \sim R$
 ⇒ „dunkle Materie“ (?)

3.4 Die Welt der Galaxien

- Erkenntnis, dass die Milchstraße nur eine Galaxie von viele ist ~ 100 Jahre alt
- vorher: Katalog von Charles Messier (1730-1817)
- enthält 103 diffuse Objekte (z.B. M31: Andromeda-Galaxie)
- 19. Jhd.: NGC=New General Catalogue, John Preyer (1852-1926)
- 1925: Beobachtung von Cepheiden in M31 durch Edwin Hubble

$$\Rightarrow D = 285 \text{ kps (Aktueller: 770 kps)}$$

1928: Beobachtung des Auseinanderstrebens der Galaxien

Hubble'sche Gesetz:

$$v = H_0 \cdot r \text{ mit } H_0 \simeq 72 \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot \frac{1}{\text{Mps}} \text{ der Hubble'schen Konstante}$$

- Morphologische Klassifizierung (Hubble-Sequenz)

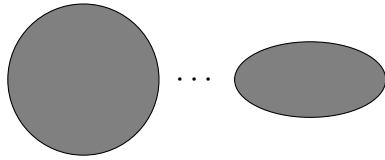


Abbildung 1: $E_0 \dots E_7$

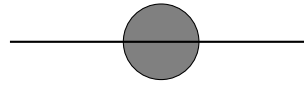


Abbildung 2: S_0

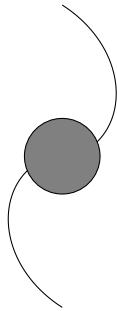


Abbildung 3: S_a

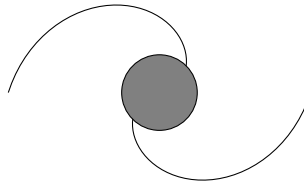


Abbildung 4: S_b

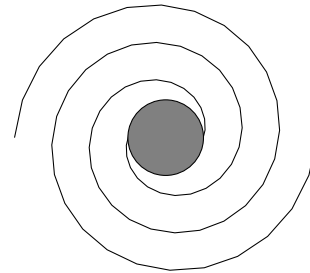


Abbildung 5: S_c

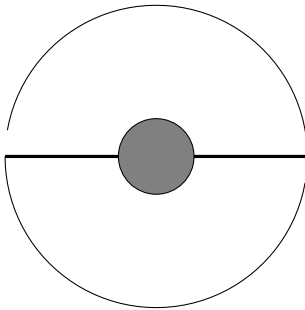


Abbildung 6: S_{Ba}

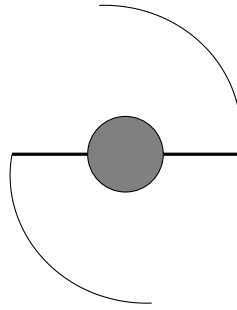


Abbildung 7: S_{Bb}

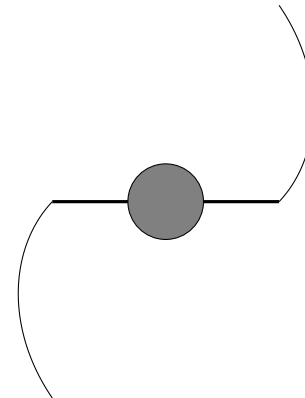


Abbildung 8: S_{Bc}

Elliptische Galaxien E

Spiralgalaxien mit und ohne Balken (S,SB)

Irreguläre Galaxien I

Milchstraße S_{Bbc}

3.4.1 Elliptische Galaxien Allgemein

Normale Ellipsen: E mit Elliptizität $0 \leq \epsilon \leq 0.7$

E_n wobei $n = 10 \epsilon \Rightarrow E_0 - E_7$

→ S_0 Galaxien: Übergang zwischen Elliptischen und Spiralgalaxien (linsenförmig mit Bulge und Scheibe ohne Spiralarme)

→ CD Galaxien elliptische Riesengalaxien

	E	S_0	CD
Absolute Helligkeit	$-15 - (-23)$	$(-17) - (-22)$	$(-22) - (-25)$
$\frac{M}{M_0}$	$100 - 10^{13}$	$10^{10} - 10^{12}$	$10^{13} - 10^{14}$
$\frac{2R}{\text{kps}}$	$1 - 200$	$10 - 100$	$300 - 1000$
$\frac{\frac{M}{L_B}}{\frac{M_\odot}{L_\odot}}$	$10 - 100$	~ 10	> 100

→ Leuchtkraft: de Vancouleurs-Profil: $\log \left(\frac{I(R)}{I_0} \right) = -3.3307 \left(\left(\frac{R}{R_e} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right)$

$I(R)$: Flächenhelligkeit in $\frac{L_\odot}{\text{ps}^2}$

R_l : Effektivradius, mit $\int_0^{R_l} dR R I(R) = \frac{1}{2} \int_0^\infty dR R I(R)$

→ woher kommt die Abplattung der Elliptischen Galaxie?

i) Rotation? In diesem Fall gelte: $\frac{rot}{\sigma} \approx \sqrt{\frac{\epsilon}{1-\epsilon}}$

Aber: Beobachtet $v_r \ll \sigma$

ii) Selbst gravitierendes Gleichgewichtssystem (Elliptizität ergibt sich aus den Anfangsbedingungen) Zeitlich stabil? → „thermalisierung“ durch 2er Stöße?

→ Betrachte Relaxationszeit durch 2er Stöße in einem System von N Sternen der Masse m (Gesamtmasse $M = N \cdot m$) der Ausdehnung R :

$$t_{relax} = \frac{R}{v} \cdot \frac{N}{\ln(N)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{charakteristische Zeit} \\ \text{eines Sterns beim durchqueren}}}{t_{cross}} \cdot \frac{N}{\ln(N)}$$

charakteristische Zeit, in der ein Stern durch 2er-Stöße seine Richtung um 90° ändert

für eine Galaxie $N \sim 10^{12}$, $t_{cross} \approx 10^8 \text{a} \Rightarrow t_{relax} \approx 14 \times 10^9 \text{a}$ (älter als Universum) \Rightarrow stabil

3.4.2 Spiralgalaxien

	S_a	S_b	S_c	S_d
M_B	$-17 - (-23)$	$-17 - (-23)$	$(-10) - (-22)$	$(-15) - (-20)$
$\frac{M}{M_\odot}$	$10^9 - 10^{12}$	$10^9 - 10^{12}$	$10^9 - 10^{12}$	$10^8 - 10^{10}$
$\frac{L_B}{L_\odot}$	6.0 ± 0.6	4.5 ± 0.4	2.6 ± 0.2	-1
$\frac{L_{Bulge}}{L_{tot}}$	0.3	0.13	0.05	$-$
$\frac{2R}{kps}$	$5 - 100$	$5 - 100$	$5 - 100$	$0.5 - 50$
$\frac{v_{max}}{(\frac{km}{s})}$	300	220	175	$-$

Profil des Bulges folgt einem de Vancouleurs-Profil:

Mit Flächenhelligkeit $U \sim 2.5 \log(I)$:

$$M_{Bulge}(R) = U_e + 8.326 \cdot \left(\left(\frac{R}{R_e} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right)$$

$$M_{Scheibe}(R) = U_0 + 1.09 \left(\frac{R}{n_R} \right)$$

Ian Freeman: U_0 ist konstant für verschiedene Spiralgalaxien

$$S_a - S_c: U_0 = 21.5 \pm 0.39 \frac{\text{mag}}{\text{arcs}^2}$$

$$S_d: U_0 = 22.07 \pm 0.4 \frac{\text{mag}}{\text{arcs}^2}$$

→ Rotationsachsen von Spiralgalaxien verlaufen nicht wie durch die Lichtverteilung erwartet für $R \geq n_R$, sondern im wesentlichen flach, (vgl. Kap 3.3)

⇒ Spiralgalaxien sind von einem Halo dunkler Materie umgeben!
Es gilt (Gleichgewicht zwischen Zentrifugal- und Gravitationskraft):

$$V^2(R) = \frac{G \cdot M(R)}{R} \quad \text{Gesamtmasse von } R$$

für sichtbare Materie:

$$V_{enm}^2 = \frac{GM_{enm}(R)}{R} \Rightarrow V_{dark}^2 = V^2 - V_{enm}^2 = \frac{G \cdot M_{dark}}{R}$$

$$\Rightarrow M_{dark}(R) = \frac{R}{G} (V^2(R) - V_{enm}^2(R))$$

- Problem: äußerer Radius ist Halo und daher nicht klar
Sterne: $R \geq 40 \text{ kps}$
Satelliten: $R \geq 140 \text{ kps}$

Zusammensetzung:

Elliptische Galaxien: alte Sterne (orange und rot)

Spiralgalaxien: Bulge ähnlich wie elliptische Galaxien, Spiralarme mit geringem blauanteil

3.4.3 Skalengesetze

Tully-Fisher (177)

$$L \sim V_{max}^4$$

- Korrelation zwischen maximaler Rotationsgeschwindigkeit von Spiralen und Leuchtkraft

⇒ recht genaue Abschätzung der Leuchtkraft aus der Rotationskurve der Galaxie

- Durch Vergleich mit scheinbarer Helligkeit ⇒ Abstand

- heuristische Herleitung:

Rotationskurve bei $V(R) = const.$ impliziert

$$M = \frac{V_{max}^2 \cdot R}{G} \Rightarrow L = \left(\frac{M}{L}\right)^{-1} \cdot \frac{V_{max} \cdot R}{G}$$

mittlere Flächenhelligkeit: $\langle I \rangle = \frac{L}{R^2}$

$$\Rightarrow L = \left(\frac{M}{L}\right)^{-1} \cdot \frac{V_{max} \cdot R}{G \cdot M} \cdot \frac{V_{max} \cdot R}{G} = \left(\frac{M}{L}\right)^{-2} \cdot \frac{V_{max}}{G} \cdot \frac{1}{\langle I \rangle}$$

Freeman: $\langle I \rangle \sim const.$ für Spiralgalaxien

$\frac{M}{L}$ variiert nur wenig ⇒ $L \sim V_{max}^4$

(kein Beweis, aber macht Skalengesetz plausibel)

3.4.4 Schwarze Löcher im Zentrum von Galaxien

→ Was ist ein schwarzes Loch?

Laplace (1795) Fluchtgeschwindigkeit eines Objektes von der Oberfläche eines Himmelskörpers der Masse M und Radius R :

$$v_{\text{Flucht}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Bei genügend kleinem Radius $v_{\text{Flucht}} = c = \text{Lichtgeschwindigkeit}$

→ Schwarzschildradius: $R = \frac{2GM}{c^2} \leadsto 3 \cdot 10^4 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \text{ cm}$

z.B. für Sonne: $3 \cdot 10^5 \text{ cm}$ (3 km)

Definition: Ein Schwarzes Loch hat einen Radius von $R < R_{BH}$

Nachweis schwarzer Löcher?

indirekt über Detektion kompakter Massenkonzentration

M_0 mit Geschwindigkeitsdispersion σ

Charakteristische Rotationsgeschwindigkeit im Abstand R :

$$V \sim \sqrt{\frac{G \cdot M_0}{R}} \text{ für Abstände } R \leq R_{BH} := \frac{GM}{\sigma^2} \sim 0.4 \left(\frac{M_0}{10^6 M_{\odot}} \right) \left(\frac{\sigma}{100 \frac{\text{km}}{\text{s}}} \right)^{-2} \text{ ps}$$

wird der Einfluss des SMBH auf die Kinematik der Systeme bemerkbar

$$\Rightarrow \text{zugehöriger Winkel} = \theta_{BH} = \frac{R_{BH}}{D} \sim 0.1 \left(\frac{M_0}{10^6 M_{\odot}} \right) \left(\frac{\sigma}{100 \frac{\text{km}}{\text{s}}} \right)^{-2} \left(\frac{D}{\text{Mpc}} \right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \sigma \text{ steigt an wie } \sqrt{R} \text{ für } R \leq R_{BH}$$

Empirisch findet man:

$$M = 1.2 \times 10^8 M_{\odot} \left(\frac{\sigma}{200 \frac{\text{km}}{\text{s}}} \right)^{3.75}$$

kann für relativ nahe Galaxien detektiert werden

3.5 Extragalaktische Entfernungsbestimmungen

- \exists Methoden für verschiedene Längenskalen
- 1. Schritt: Bestimmung der Entfernung zur großen Magellanschen Wolke (LMC)
- Supernova SN1987A \Rightarrow beleuchtet einen elliptischen Ring
Ring der aus Material stammt, das vom Vorläuferstern der SN herausgeschleudert wurde
Elliptizität aufgrund geometrische Projektion (intrinsisch Kreisförmig)
Aufleuchten des Rings nicht gleichförmig, da uns das Licht von dem Teil des Rings, der näher ans uns ist, früher erreicht $\Rightarrow \frac{\text{Licht auf Verzögerung}}{\text{Licht an Verzögerung}}$ &
Inklinationswinkel des Rings \Rightarrow Durchmesser des Rings \Rightarrow Abstand
 $D_{LMC} = 51.8 \text{ kps} \pm 6 \%$
Aktuell (2019) $49.59 \pm 0.09(\text{tot}) \pm 0.54(\text{system}) \text{ kps} (\pm 0.8 \%)$
- Eichung der Perioden-Leuchtkraft-Relation der Cepheiden (28.6) mit Hilfe der LMC, zur Entfernungsmessung weiter entfernter Galaxien
- sekundäre Entfernungsindikatoren (Entfernungsindikatoren Entfernungsverhältnis z.B. über Skalengesetz Tully-Fischer, Farber-Jackson)

4 Homogene Isotrope Weltmodelle

- **Ziel:** Verständnis des Universums auf großen Skalen
- Schwierigkeiten:
 - \exists nur ein Universum
 - große Entfernung \Rightarrow lichtschwache Quellen
 - \Rightarrow Erkenntnisgewinn durch Entwicklung großer Teleskope ($\varnothing > 8 \text{ m}$)
- **wichtigster Aspekt** für Beobachtungen: endliche Lichtgeschwindigkeit \Rightarrow Beobachtungen von entfernten Objekten erlauben in die Vergangenheit zu schauen!

4.1 Grundlegende Beobachtungen auf kosmologischen Skalen

- (I) Nachts ist es dunkel (Olders Paradoxon)
- (II) Lichtschwache (weiter entfernte) Galaxien sind am Himmel Gleichförmig verteilt
- (III) Spektrallinien in Spektren von Galaxien zeigen eine systematischen Verschiebung

$$z := \frac{\lambda_B - \lambda_0}{\lambda_0} \quad \lambda := \text{Wellenlänge der Spektrallinie im Ruhesystem (Laborsystem)}$$

λ_B := von Beobachtern gemessene Wellenlänge

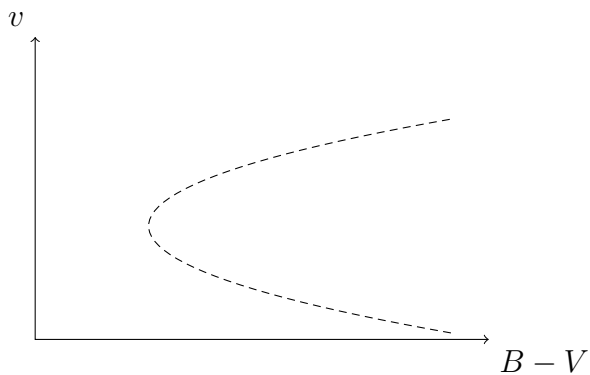
$\Rightarrow \lambda_B = (1 + z)\lambda_0$ i.d. $z > 0 \rightarrow$ Rotverschiebung (Ausnahme: Gleichgewicht nahe Galaxien, M31) f+r kleinere z gilt für die Relativgeschwindigkeit $v \approx z \cdot c$

Hubble-Gesetz: $v = \overset{\substack{\uparrow \\ \text{Hubble-Konstante}}}{H_0} \cdot D$ zur Galaxie

$$\Rightarrow D \approx 1000 \cdot z h^{-1} \text{Mps (falls } z \ll 1)$$

- (IV) In fast allen Kosmischen Objekten beträgt der Massenanteil von Helium etwa 25 – 30 %
- (V) Die ältesten Sternhaufen in unserer Galaxis haben ein Alter von $\sim 12 \times 10^9$ a

\rightarrow mit Hilfe des Hertzsprung-Russel-Diagramms



Sterne der Masse, für die das Lebensalter der Hauptreihe gleich dem Alter des Sternhaufens ist \rightarrow Alter des Sternhaufens durch Vergleich mit theoretischem Modell der Sternentwicklung

- (VI) \exists eine Mikrowellenstrahlung (kosmischen Mikrowellenhintergrundstrahlung, im B) isolation bis auf fluktuation der relativen Stärke $\sim 10^{-5}$
- (VII) Spektrum dieser Hintergrundstrahlung entspricht einer perfekten Schwarzkörperstrahlung mit Temperatur $T = 2.728 \pm 0.004 \text{ K}$
- (VIII) Die Anzahl dicht von Radioquellen mit Fluss folgt mit den einfachen Gesetzen $N(> s) \propto s^{-\frac{3}{2}}$ (Beobachtet bei hoher galaktischen Breite) um Quellen der Milchstraße auszuschließen

Ziel: Entwicklung eines kosmologischen Modells, das diese Beobachtungen erklärt

4.2 Ist das Universum unendlich, euklidisch und statisch?

\rightarrow Naive Annahme eines

- räumliche unendlichen
- euklidischen
- statischen

Universums ist im Widerspruch zu (I) und (VIII)

Zu (I) Olbers-Paradoxon:

Der Nachthimmel in solch einem Universum wäre (ungemütlich) hell!

- Betrachte dazu:

n_* : mittlere Anzahldichte der Sterne

R_* : mittlerer Radius eines Sterns

- Eine Kugelschale mit Radius r und Dicke dr um die \odot enthält $4\pi r^2 n_* dr$ Sterne, jeder mit Raumwinkel $\frac{\pi R_*^2}{r^2} \Rightarrow$ gesamter von $*$ eingenommener Raumwinkel:
 $d\omega = 4\pi r^2 dr n_* \frac{\pi R_*^2}{r^2} = 4\pi^2 n_* R_*^2 dr$ unabhängig von $r \Rightarrow$ im gesamten Universums $\omega = \int_0^\infty dr \frac{d\omega}{dr} = 4\pi^2 n_* R_*^2 \int_0^\infty dr = \infty !$
- Offensichtlich haben wir den Effekt von sich überlappenden Sternscheiben an der Sphäre nicht berücksichtigt
 \Rightarrow Jedoch zeigt diese Betrachtung, dass der Himmel von Sternscheiben vollständig gefüllt wäre
 \Rightarrow Der Himmel wäre so hell wie die Oberfläche eines typischen Sterns (z.B. die Sonne)

zu (VIII)

- Sei $n(> L)$ die räumliche Anzahldicke von Radioquellen mit Leuchtkräften $> L$.
- eine Kugelschale mit Radius r und Dicke dr um die \odot enthält wiederum $4\pi r^2 dr n(> L)$ Quellen
- $L = 4\pi r^2 \cdot S$, mit S : beobachteter Fluss
 $\Rightarrow dN(> S) = 4\pi r^2 dr n(> (4\pi r^2 S))$
 $\Rightarrow N(> S) = \int_0^\infty dr 4\pi r^2 n(> (4\pi r^2 S)) \underset{r=\sqrt{\frac{L}{4\pi S}}}{=} \int_0^\infty \frac{dL}{2\sqrt{4\pi L S}} \frac{L}{4\pi S} n(> L)$
 $= \frac{1}{16\pi^{\frac{3}{2}}} S^{-\frac{3}{2}} \int_0^\infty DL \sqrt{L} n(> L) \propto S^{-\frac{3}{2}}$
 \Rightarrow Wenigstens eine der drei Ausgangshypothesen ist falsch.
 Rotverschiebung der Galaxien/Hubble-Gesetz \Rightarrow nicht-statisches Universum

zu (V) \Rightarrow Alter des Universums $> 12 \times 10^9$ a zu (II) und (IV) \Rightarrow Das Universum scheint auf ausreichend großen Skalen isotrop zu sein.

\rightarrow Falls unser Standort im Kosmos nicht ausgezeichnet ist

\Rightarrow Das Universum ist auch homogen.

Kosmologisches Prinzip: Das Universum ist homogen und Isotrop

- Homogenität ist nicht direkt beobachtbar und auf kleinen Skalen hin-fällig (bis zu $\sim 100 \text{ h}^{-1} \text{ Mpc}$), allerdings bisher keine Hinweise auf Struk-turen $\gg 100 \text{ h}^{-1} \text{ Mpc}$
- Dies ist klein im Vergleich zum Hubble-Radius (= charakteristische Größe des beobachtbaren Universums)

$$R_H = \frac{c}{H_0} = 3000 \text{ h}^{-1} \text{ Mpc}$$

\Rightarrow Homogenität und Isotropie auf Skalen von $(100-3000) \text{ h}^{-1} \text{ Mps}$
 \uparrow
 1. Annäherung (später zu präzisieren)

4.3 Ein expandierendes Universum

→ Betrachte eine homogene Kugel der Massendichte $\rho = \rho(t)$

→ Ort eines Volumenelements:

$$\vec{r}(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Skalenfaktor} \\ a(t_0)=1, t_0 \hat{=} \text{heute}}}{a(t)} \vec{r}(t_0)$$

⇒ Position eines mitbewegten Beobachters mit Weltlinie $(\vec{r}, t) = (a(t) \cdot \vec{r}_0, t)$ und Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{r} = \frac{da}{dt} \cdot \vec{r}_0 = \frac{\dot{a}}{a} \cdot \vec{r}(t) =: H(t) \cdot \vec{r}(t)$$

↪ Expansionsrate: $H(t) := \frac{\dot{a}}{a}$

→ insbesondere Relativgeschwindigkeit zweier mitbewegter Punkte:

$$\Delta \vec{v} = \vec{c}(\vec{r} + \Delta \vec{r}, t) - \vec{v}(\vec{r}, t) = H(t) \cdot \Delta \vec{r}$$

≡ Verallgemeinerung des Hubble-Gesetzes, für das gilt: $H(t_0) = H_0$

4.3.1 Newtonsche Kosmologie

→ Radius $\vec{r}(t) \equiv a(t)r$ einer Kugel der Masse:

$$M(r_0) = \frac{4\pi}{3} \rho_0 r_0^3 = \frac{4\pi}{3} \rho(t) (a(t) \cdot r_0)^3$$

$$\Rightarrow \rho(t) = \rho_0 \cdot a(t)^{-3}$$

→ Bewegungsgleichung:

$$r''(t) = -\frac{G \cdot M(r_0)}{r^2} = -\frac{4\pi G}{3} \frac{\rho_0 \cdot r_0^3}{r^2}$$

$$\ddot{a} = \frac{\ddot{r}}{r} = -\frac{4\pi G}{3} \rho \cdot a \quad \text{unabhängig von } r_0$$

→ „Energieerhaltung“:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 \frac{1}{a} - K \cdot c^2$$

$$= \frac{8\pi G}{3} \rho(t) \cdot a(t) - K c^2$$

mit $K \propto$ Gesamtenergie eines mitbewegten Teilchens

- wenn $K < 0 \Rightarrow \dot{a} > 0 \Rightarrow$ Universum expandiert ewig
- wenn $K > 0 \Rightarrow \dot{a} < 0 \Rightarrow$ bei größeren $t \Rightarrow$ Universum rekollabiert
- wenn $K = 0 \Rightarrow$ kritische Dichte:

$$\left(\frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_0$$

$$\Rightarrow \rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \approx 1.88 \times 10^{-29} \text{ h}^2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

$$\Rightarrow \text{Dichteparameter: } \Omega_0 := \frac{\rho_0}{\rho_c}$$

4.3.2 Relativitätstheorie

→ **Relativitätsprinzip** (Einstein 1905):

Die Naturgesetze haben in allen Inertialsystemen die selbe Form.

→ betrifft Wechsel zwischen Bezugssystemen mit konstanter Relativgeschwindigkeit (\Rightarrow spezielle Lorentz-Transformation)

→ daraus folgende Vorhersagen wurden spektakulär nachgewiesen (Längenkontraktion, Zeitdilatation, etc.) und betrifft alle Untergebiete der modernen Physik

→ Für die Kosmologie muss die Gravitation miteinbezogen werden, da es die einzige **bekannte** Kraft ist, die auf kosmischen Distanzen wirkt

→ **Äquivalenzprinzip** (Einstein 1914):

In jedem Punkt der Raumzeit (mit und ohne Gravitationsfelder) kann man ein (in Zeit und Raum) **lokales** Inertialsystem so wählen, dass die physikalischen Gesetze denen eines unbeschleunigten kartesischen Bezugssystems entsprechen

→ Mathematisch kann gezeigt werden, dass die Gravitation die Geometrie der Raumzeit beeinflusst

(i) **ohne** Gravitation:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

(ii) **mit** Gravitation:

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad \text{mit } x^\mu = (c \cdot t, x, y, z)$$

→ Der metrische Tensor $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ bestimmt die geometrischen Eigenschaften der Raumzeit

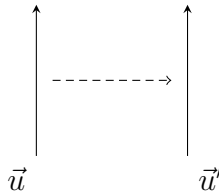
→ $g_{\mu\nu}$ ergibt sich aus den Einstein'schen Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie → 10 nichtlineare, partielle, gekoppelte Differentialgleichungen für die 10 unabhängigen Komponenten der Metrik

$$\begin{array}{ccccc} G_{\mu\nu} & = & \kappa & \cdot & T_{\mu\nu} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{Einstein-Tensor} & & \text{Konstante} & & \text{Energieimpulstensor} \\ \text{enthält } g_{\mu\nu} \text{ und} & & \text{(ergibt sich aus} & & \\ \text{ihre 1. und 2. Ableitungen)} & & \text{dem gewählten} & & \\ & & \text{Einheitensystem)} & & \\ & & \kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \text{ [SI]} & & \end{array}$$

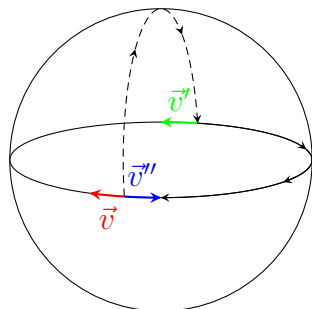
$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \\ R_{\mu\nu} &= \sum_{\alpha=0}^3 R_{\mu\alpha\nu}^\alpha \quad R = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ R_{\nu\sigma\tau}^\mu &= \partial_\sigma \Gamma_{\nu\tau}^\mu - \partial_\tau \Gamma_{\nu\sigma}^\mu + \sum_{\alpha=0}^3 \Gamma_{\sigma\alpha}^\mu \Gamma_{\nu\tau}^\alpha - \sum_{\alpha=0}^3 \Gamma_{\tau\alpha}^\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \\ \Gamma_{\mu\nu}^\sigma &= \sum_{\alpha=0}^3 \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} (\partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

4.3.3 Gekrümmte Räume

→ Die Ebene ist flach, Vektoren können parallel verschoben werden, ohne dass sie ihre Richtung ändern

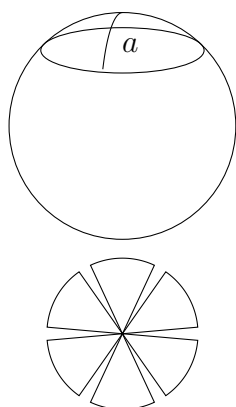


→ Ist die Kugel flach?

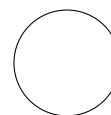
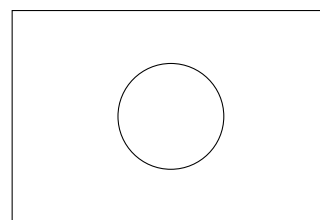


Parallelverschiebung von \vec{v} liefert nach Abschluss des gestrichelten Weges den Vektor \vec{v}' und dann mit Verschiebung entlang des Äquators den Vektor $\vec{v}'' = -\vec{v}$

→ Weitere Beispiele:



$$C < 2\pi a$$



$$C = 2\pi a$$

→ Wie kann man Krümmung messen?

to Vergleich von Kreisumfang C und Kreisfläche A eines Kreises mit Radius a

Kugel	$C < 2\pi a$	$A < \pi a^2$	positiv
Ebene	$C = 2\pi a$	$A = \pi a^2$	null (=flach)
Sattel	$C > 2\pi a$	$A > \pi a^2$	negativ

Krümmung ist eine intrinsische Eigenschaft!

d.h. man kann nie messen, ohne den „Raum“ zu verlassen (essentiell in der Kosmologie)

4.3.4 Modifikation der Newtonschen Kosmologie

(a) Äquivalenz von Masse und Energie ($E = mc^2$)

$\Rightarrow \rho$ in den kosmologischen Bewegungsgleichungen enthält nicht nur die Materiedichte

(b) Die Einsteinschen Feldgleichungen der ART erlauben einen zusätzlichen Term, die **Kosmologische Konstante** Λ

(c) Die Interpretation der Expansion des Kosmos ändert sich: Das Universum ist keine expandierende Kugel, sondern der **Raum selbst expandiert**

\Rightarrow Die Rotverschiebung ist eine Eigenschaft der expandierenden Raumzeit ($a = a(t)$ = Skalenfaktor)

\rightarrow **Erster Hauptsatz der Thermodynamik**

$$\begin{array}{ccccc} dU & = & - & P & \cdot & dV \\ \uparrow & & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{Änderung der} & & & \text{Druck} & & \text{(adiabatische)} \\ \text{inneren Energie} & & & & & \text{Volumenänderung} \end{array}$$

Aus den Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie folgt eine analoge Relation für einen homogenen und isotropen Kosmos:

$$\frac{d}{dt} \left(\underbrace{c^2 \rho}_{\text{Energiedichte}} a^3 \right) = -P \cdot \frac{d(a^3)}{dt}$$

(d.h. für „normale“ Materie ist ρ die Massendichte, P der Druck der Materie und $V = a^3(t) \cdot V_0$ das Volumen)

\rightarrow Die Friedmann-Lemaître Expansionsgleichung:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (F1)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right) + \frac{1}{3} \quad (F2)$$

· Unterschiede zu Newton:

(i) zusätzlicher Druckterm um (F2)

(ii) kosmologische Konstante

→ Die **Kosmologische Konstante**: NB: Falls $\Lambda = 0$, gibt es keine Lösung der Friedmann-Lemaître-Gleichungen mit $\dot{a} = 0$ (siehe Übungsblatt 7, Aufgabe 2)

⇒ $\Lambda \neq 0$ eingeführt von Einstein um das statische Universum zu retten"

1923 Eddington diskutiert die Möglichkeit eines nicht statischen Universums

1929 Hubble beobachtet eine systematische Expansion

Quantenfeldtheorie: auch das Vakuum enthält eine nicht verschwindende Energie

⇒ mathematisch äquivalent zu $\Lambda \neq 0$ (aber Größenordnungen stimmen nicht!)

4.3.5 Die Materiekomponenten des Universums

→ Druckfreie Materie („Staub“)

$$P_m = 0$$

Druck eines Gases \propto thermische Bewegung

z.B. Moleküle der Luft mit $v \sim v_{\text{Schall}} \sim 300 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow P_m \ll \rho_m c^2$

→ Strahlung $P_r = \frac{1}{3} \rho_r c^2$

z.B. Photonen des CMB

→ Vakuumenergie

$$P_V = - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aus dem 1. HS (s.o.)} \\ \text{mit } \rho_V = \text{const.}}}{\rho_V} c^2$$

Das Vakuum übt einen negativen Druck aus

4.3.6 Heuristische Herleitung der Friedmann-Lemaître-Expansionsgleichungen

IVB: Eine korrekte Herleitung ergibt sich direkt aus der ART!

→ Hier nutzen wir die Newtonschen Gleichungen und reinterpretieren die „Energieerhaltung“

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho a^2 - Kc^2 \stackrel{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} 2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8\pi G}{3} (\dot{\rho}a^3 + 2\rho a\dot{a})$$

→ 1. HS $\left(\frac{d}{dt}(c^2\rho a^3) = -P\frac{d(a^3)}{dt}\right)$

$$\begin{aligned}\dot{\rho}a^3 + 3\rho a^2\dot{a} &= -3\frac{P}{c^2}a^2\dot{a} \\ \Rightarrow \dot{\rho} &= -3\rho\frac{\dot{a}}{a} - 3\frac{P}{c^2}\frac{\dot{a}}{a} \quad \text{und einsetzen ergibt:} \\ \Rightarrow \dot{a}\ddot{a} &= \frac{4\pi G}{3} \left(-\rho\dot{a}a - 3\frac{P}{c^2}\dot{a}a\right) \Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right)\end{aligned}$$

→ neu dabei:

$$\begin{array}{ccccc}\rho & = & \rho_m & + & \rho_r & + & \rho_V \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \text{Materie} & & \text{Strahlung} & & \text{Vakuum} \\ & & & & \text{(Photonen)} & & \\ P & = & \sigma & + & P_r & + & P_V \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \text{Materie} & & \text{Strahlung} & & \text{Vakuum} \\ & & & & \text{(Photonen)} & & \end{array}$$

Schreibe $\rho_V = \frac{1}{8\pi G}$ und $\rho = \rho_m + \rho_r$, $P = P_R P_V = -\rho_V c^2$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} + \frac{\Lambda}{8\pi G} - \frac{3}{c^2} \left(\frac{\Lambda}{8\pi G}\right) \cdot c^2\right) \\ &= -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) + \frac{\Lambda}{3}\end{aligned}$$

→ Und schließlich in der Energieerhaltung:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3} \left(\rho_m + \rho_r + \frac{\Lambda}{8\pi G}\right) - \frac{Kc^2}{a^2} \\ &= \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \Rightarrow \text{(F1) und (F2)} \square\end{aligned}$$

N.B: Wert von Λ lässt sich bisher nicht aus mikroskopischen Theorien herleiten.

⇒ Eines der großen Rätsel der heutigen Physik

4.3.7 Diskussion der Expansionsgleichungen

→ Entwicklung der kosmischen Dichte (folgt aus dem 1. Hauptsatz)

$$\cdot \text{ „Staub“: } P_m = 0 \Rightarrow \rho_m(t) \sim a(t)^{-3}$$

$$\cdot \text{ „Strahlung“: } P_r = \frac{1}{3}\rho_r c^2 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\rho_r a^3) = -\frac{1}{3}\rho_r \frac{da^3}{dt}$$

$$\dot{\rho}_r a^3 = -4a^2 \dot{a} \rho_r \Rightarrow \frac{\dot{\rho}_r}{\rho_r} = -4 \frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow \rho_r(t) \sim a(t)^{-4}$$

Vakuum: $\rho_V = \text{const.}$

$$\Rightarrow \rho_m(t) = \rho_{m,0} a(t)^{-3}, \rho_r(t) = \rho_{r,0} a(t)^{-4}, \rho_V(t) = \rho_V$$

→ Grund für $\rho_r \sim a^{-4}$: Nicht nur die Anzahldichte der Photonen nimmt ab (mit $a^{-3}(t)$), sondern auch ihre Energie (Rotverschiebung)

$$E = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} \quad \text{mit} \quad \lambda \sim a(t) \Rightarrow \rho_r(t) \sim a^{-3}(t) \cdot a^{-1}(t) = a^{-4}(t)$$

→ Falls $\rho_V \neq 0$ wird die Vakuumdichte ab einem gewissen Zeitpunkt dominant!

→ dimensionslose Dichteparameter:

$$\Omega_m := \frac{\rho_{m,0}}{\rho_c}, \quad \Omega_r := \frac{\rho_{r,0}}{\rho_c}, \quad \Omega_\Lambda := \frac{\Lambda}{3H_0^2}$$

mit der kritischen Dichte $\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$

→ heutige Werte:

Staub:

Galaxien (inklusive ihrer dunklen Halos): $\Omega_m \gtrsim 0.02$

Galaxienhaufen $\Omega_m \gtrsim 0.1$

Kosmologie $\Omega_m \sim 0.3$

Strahlung: Photonen der CMB + Neutrinos aus dem frühen Universum $\Omega_r \sim 4.2 \times 10^{-5} \cdot h^{-2}$

\parallel
 ≈ 0.72

Vakuum: $\Omega_\Lambda \sim 0.7$

→ Da $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ und $\rho = \rho_{m,0} \cdot a^{-3}(t) + \rho_{r,0} \cdot a^{-4}(t)$

$$\Rightarrow H^2(t) = H_0^2 \left[a^{-4}(t) \cdot \Omega_r + a^{-3}(t) \Omega_m - a^{-2}(t) \frac{K \cdot c^2}{H_0^2} + \Omega_\Lambda \right]$$

→ Für $t = t_0$ (heute) mit $a(t_0) = 1$ ergibt sich (mit $H(t_0) = H_0$):

$$K = \left(\frac{H_0}{c} \right)^2 \cdot \left(\Omega_m + \underbrace{\Omega_r}_{\substack{\text{vernachlässigbar} \\ (\text{für } t = t_0)}} + \Omega_\Lambda - 1 \right)$$

und schließlich:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = H^2(t) = H_0^2 \left(a^{-4}(t) \cdot \Omega_r + a^{-3}(t) \cdot \Omega_m + a^{-2}(t) \cdot (1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda) + \Omega_\Lambda \right) \quad (*)$$

→ **Diskussion:**

- Für $a \ll 1$ dominiert der erste (strahlungsdominiertes Universum)

- Für etwasa größeres a dominiert der zweite Term, der Staub- (oder Materie)-Term
- Für $K \neq 0$ wird für größere a der dritte Term dominieren
- Falls $\Lambda \neq 0$, dominiert die Kosmologische Konstante für $a \gg 1$

→ DGL (*) ist nicht analytisch lösbar

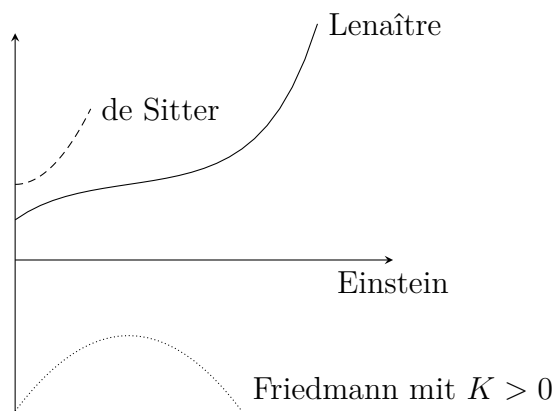
→ Einige wichtige Spezialfälle:

Einstein (1917) $K > 0, \Lambda \sim a^{-2}$ statisch

de Sitter (1917) $K = \sigma, \Lambda > \sigma$

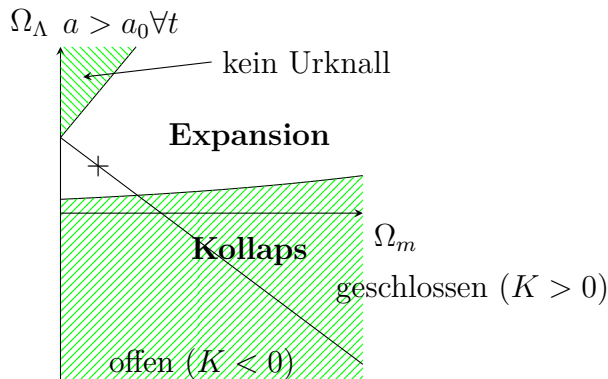
Lenaître (1950) $K > 0, \Lambda > a^{-2}$

Friedmann (1922) $K \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} \sigma, \Lambda = \sigma$



⇒ viele Möglichkeiten

Klassifikation in Abhängigkeit von Ω_Λ und Ω_m



→ Im Gegensatz zur Newtonschen Kosmologie sind offen & Expansion bzw. geschlossen & Kollaps nicht mehr identisch
 Für $\Omega_\Lambda < 1$ gilt immer $H^2 > 0 \forall a \leq 1$

⇒ \exists ein Zeitpunkt in der Vergangenheit mit $a(t) \rightarrow 0$

⇒ „Größe“ des Universums verschwindend klein

⇒ **Urknall**

N.B

Die Möglichkeit $\Omega_\Lambda > 1$ ohne Urknall kann inzwischen durch Beobachtungen ausgeschlossen werden

→ **Abbremsparameter**

$$q_0 := - \frac{\ddot{a} \cdot a}{a^2} \Big|_{t=t_0} \stackrel{(F1)(F2)}{=} \frac{1}{2} \Omega_m - \Omega_\Lambda$$

- Für den Fall $\Omega_\Lambda = 0$ ist $q_0 > 0, \ddot{a} < 0$, d.h. die Expansion wird abgebremst
- Falls Ω_Λ genügend groß ist $\Rightarrow q_0 < 0 \Rightarrow \ddot{a} > 0$
 ⇒ **beschleunigte Expansion** (wg. negativem Druck der Vakuumenergie)
- Beobachtungen deuten darauf hin, dass dies tatsächlich seit einigen Ga passiert

→ **Weltalter**

$$dt = \frac{da}{\left(\frac{da}{dt}\right)} = \frac{da}{a \cdot H}$$

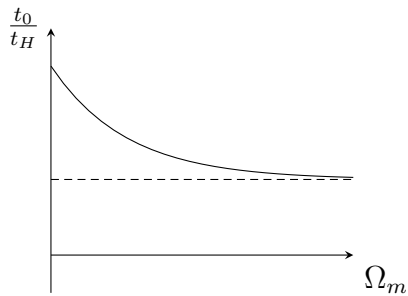
$$\Rightarrow t(a) = \frac{1}{H_0} \int_0^a da' \left[(a')^{-2} \cdot \Omega_r + (a')^{-1} \Omega_m + (1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda) \cdot (a')^{-2} + (a')^2 \Omega_\Lambda \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$t_0 = t(1)$$

$$= \frac{1}{H_0} \int_0^1 da' \left[(a')^{-2} \cdot \Omega_r + (a')^{-1} \Omega_m + (1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda) \cdot (a')^{-2} + (a')^2 \Omega_\Lambda \right]^{-\frac{1}{2}}$$

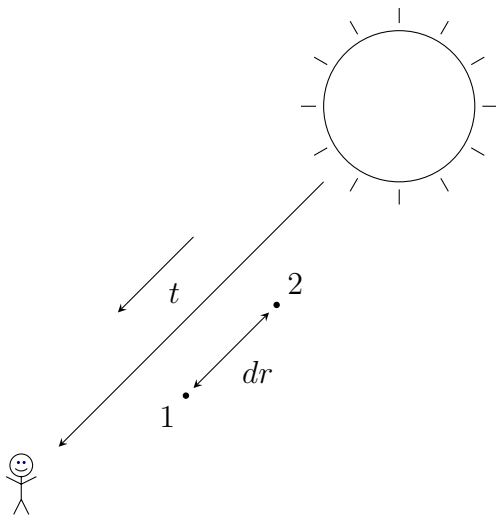
→ Zwei wichtige Familien von Modellen:

- (i) $\Omega_\Lambda = 0$ (da keine „vernünftige“ Begründung für $\Lambda \neq 0$)
- (ii) $\Omega_r + \Omega_\Lambda = 1$, d.h. $K = 0$, flache Universen → bevorzugt in Inflationstheorien (s.u.)



4.4 Das Hubble'sche Gesetz

Ziel: Zusammenhang zwischen der Rotverschiebung z (bzw. der radialen Komponente der Relativgeschwindigkeit) und dem Skalenfaktor $a = a(t)$



→ fiktiver mitbewegter Beobachter bei 1 und 2 mit relativer Entfernung dr und relativer Bewegung $dv = H(z)dr$

→ Dies messen sie als Rotverschiebung des Lichtes:

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = z = \frac{dv}{c}$$

→ Das Licht benötigt die Zeit $dt = \frac{dv}{c}$ um von einem zum anderen Beobachter zu gelangen.

→ Da $\dot{a} = \frac{da}{dt} = H \cdot a \Rightarrow dt = \frac{da}{H \cdot a}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d\lambda}{\lambda} &= \frac{dv}{c} = \frac{H}{c} dv = H \cdot dt = \frac{da}{a} \Leftrightarrow \frac{d\lambda}{d a} = \frac{\lambda}{a} \\ \Rightarrow \lambda(a) &= c \cdot a \end{aligned}$$

„Heute“ $a = 1 \Rightarrow \lambda(1) = C = \lambda_{\text{obs}}$ mit λ_{obs} heute beobachtbare Wellenlänge

$$\Rightarrow \lambda(a) = a \cdot \lambda_{\text{obs}}, \quad \lambda_e = a(t_e) \cdot \lambda_{\text{obs}}$$

↑
Wellenlänge bei Emission

Da $1 + z = \frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_e} \Rightarrow 1 + z = \frac{1}{a} \quad (**)$

Ergebnis ist kompatibel mit dem lokalen Hubble-Gesetz ($z \ll 1$):

- Mit $v \approx z \cdot c$ gilt $z = \frac{H_0 \cdot D}{c}$

- Der Abstand D entspricht einer Lichtlaufzeit von $\Delta t = \frac{D}{c} \Rightarrow \Delta a = 1 - a \approx H_0 \cdot \Delta t$ (wobei $a = a(t_0 - \Delta t)$ und $a(t_0) = 1$)
 $\Rightarrow D \approx (1 - a) \cdot \frac{c}{H_0}$ und $z = (1 - a) \cdot \frac{c}{H_0} \cdot \frac{H_0}{c} = 1 - a$

$$\Leftrightarrow a = 1 - z \approx \left(1 + z + \mathcal{O}(z^2)\right)^{-1}$$

\Rightarrow Die allgemeine Relation (**) enthält Hubble-Gesetz als Spezialfall

\rightarrow Konsequenzen für den kosmischen Mikrowellenhintergrund

- Nehmen wir an, dass das Universum zum Zeitpunkt t_1 eine Schwarzkörperstrahlung der Temperatur T_1 enthalten hat.
 \Rightarrow Anzahldichte dN_ν von Photonen in Frequenzintervall ν und $\nu + d\nu$:

$$\frac{dN_\nu}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{h_p\nu}{k_B T}\right) - 1}$$

- Zum Zeitpunkt $t_2 > t_1$ hat sich das Universum um einen Faktor $\frac{a(t_1)}{a(t_2)}$ ausgedehnt
 \Rightarrow Rotverschiebung der Photonen:

$$1 + z = \frac{a(t_2)}{a(t_1)}$$

\Rightarrow Photon mit Frequenz ν bei t_1 wird mit der Frequenz $\nu' = \frac{\nu}{1+z}$ bei t_2 gemessen $= d\nu' = \frac{d\nu}{1+z}$

- Weiterhin gilt $dN'_\nu = dN_\nu \cdot \overset{\substack{\uparrow \\ \text{Volumenausdehnung}}}{(1+z)^{-3}}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{dN'_{\nu'}}{d\nu'} &= \frac{dN_\nu \cdot (1+z)^{-3}}{d\nu \cdot (1+z)^{-1}} \\ &= \frac{1}{(1+z)^2} \cdot \frac{8\pi[(1+z)\nu']^3}{c^3} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{h_p(1+z)\nu'}{k_B T_1}\right) - 1} \\ &= \frac{8\pi\nu'^3}{c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{h_p\nu'}{k_B T_2}\right) - 1} \quad \text{mit } T_2 = \frac{T_1}{1+z} \end{aligned}$$

⇒ Planck-Verteilung der Photonen bleibt während der kosmischen Expansion erhalten. Nur die Temperatur wird um den Faktor $(1+z)^{-1}$ reduziert.

heute $T_0 = T_{CMB} \approx 2.7 \text{ K}$ (Strahlung aus der Frühphase des Kosmos)

⇒ „Temperatur des Universums“: $T(z) = T_0(1+z) = \frac{T_0}{a}$

→ Energiedichte:

$$\rho_r = \sigma_{SB} \cdot T^4 = \left(\frac{\pi^2 k_b^4}{15 \hbar_p^3 c^3} \right) T^4 \sim (1+z)^4 = \underset{\text{wie erwartet}}{a^{-4}}$$

4.5 Thermische Geschichte des Universums

→ wegen $T \propto 1 + z$ war das Universum früher heißer:

$$z = 0 \text{ (heute)} \quad T \approx 2.7 \text{ K}$$

$$z = 1100 \quad T = 3000 \text{ K}$$

$$z = 10^9 \quad T \sim 3 \times 10^9 \text{ K heißer als das innere von Sternen}$$

⇒ energetische Prozesse wie z.B. Kernfusion im frühen Universum

Ziel: Extrapolation der physikalischen Gesetze für das frühe Universum, um dieses zu beschreiben (Annahme Naturgesetze haben sich zeitlich nicht geändert)

→ Vorbemerkungen:

- $1 \text{ eV} \approx 1.1905 \times 10^4 \text{ k}_B \text{ K}$
- Anzahldichte und Energieverteilung von Teilchen im thermodynamischen und chemischen Gleichgewicht hängt allein von ihrer Temperatur ab
- Die Elementarteilchenphysik ist für Energien $\lesssim 1 \text{ GeV}$ sehr gut verstanden und wird durch die Quantenmechanik beschrieben
- Notwendige Bedingung zum Erreichen eines chemischen Gleichgewichts ist die Möglichkeit der Paarerzeugung- und vernichtung, z.B. $2\gamma \mapsto e^+ + e^-$

4.5.1 Expansion in strahlungsdominierter Phase

→ Für $z \gg z_{\text{eq}} = a_{\text{eq}}^{-1} - 1 \approx 23\,900 \Omega_{\text{m}} h^2$ ist die Energiedichte der Strahlung $\rho_r \sim T^4 \Leftrightarrow \rho \sim a^{-4}$ dominant.

→ (F1) wird zu:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \cdot \text{const} \cdot a^{-4} + \text{vernachlässigbare Terme}$$

→ Lösung durch Ansatz $a(t) \sim t^\beta \Rightarrow t^{-2} \sim t^{-4\beta} \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow a(t) \sim t^{\frac{1}{2}}, t \sim T^{-2}, t \sim \rho^{-\frac{1}{2}}$$

wobei die Proportionalitätskonstante von der Anzahl der relativistischen Teilchen abhängt

- Unter der Annahme des thermodynamischen Gleichgewichts (Hypothese!) ist diese Anzahl bekannt \Rightarrow Verlauf der frühen Expansion komplett bekannt

4.5.2 Entkopplung der Neutrinos

- Beginn der Betrachtung bei $T = 10^{12} \text{K} \hat{=} 100 \text{ MeV}$
 Proton, $m_p \approx 938.3 \frac{\text{MeV}}{c^2}$
 Neutron, $m_n \approx 936.6 \frac{\text{MeV}}{c^2}$
 Elektron, $m_e \approx 0.511 \frac{\text{MeV}}{c^2}$
 Myon, $m_\mu \approx 140 \frac{\text{MeV}}{c^2}$
- Protonen und Neutronen (Baryonen) sind zu schwer um bei der betrachteten Temperatur erzeugt zu werden, sie müssen vorher erzeugt worden sein
- **Alle** Baryonen, die es heute gibt, müssen damals schon vorhanden gewesen sein
- Auch Paare von Myonen können nicht mehr effizient in der Reaktion $\gamma + \gamma \mapsto \mu^+ + \mu^-$ erzeugt werden (μ^\pm sind instabil mit $\tau \sim 2 \mu\text{s}$)
- \Rightarrow relativistische Teilchensorte, die zur Strahlungsdichte beitragen:
- Elektronen/Positronen e^-/e^+
 - Photonen γ
 - Neutrinos/Antineutrinos $\nu/\bar{\nu}$ mit $m_\nu < 1 \text{ eV} \approx 0$ (Grenze aus der Kosmologie)
- \Rightarrow nichtrelativistische Teilchen, die zu ρ_m beitragen:
- Protonen/Neutronen p/n
 - Konstituenten der dunklen Materie WIMPs (?) mit Masse $\gtrsim 100 \text{ GeV}$
- Die Reaktionen:
- | | |
|---|--------------------------------|
| $e^\pm + \gamma \leftrightarrow e^\pm + \gamma$ | Comptonstreuung |
| $e^+ + e^- \leftrightarrow \gamma + \gamma$ | Paarerzeugung und Annihilation |
| $\nu + \bar{\nu} \leftrightarrow e^+ + e^-$ | Neutrino-Antineutrino-Streuung |
| $\nu + e^\pm \leftrightarrow \nu + e^\pm$ | Neutrino-Elektro-Streuung |

halten die relativistischen Teilchen im Gleichgewicht.

→ Energiedichte zu dieser Zeit:

$$\rho = \rho_r = 10.75 \frac{\pi^2}{30} \cdot \frac{(k_B T)^4}{\hbar \cdot c^3} \Rightarrow t = 0.3 \text{ s} \cdot \left(\frac{T}{1 \text{ MeV}} \right)^{-2}$$

→ Damit die Teilchen im Gleichgewicht bleiben, müssen die obigen Reaktionen genügend häufig ablaufen, d.h. die mittlere Zeit zwischen zwei Reaktionen muss sehr viel kürzer sein als die Zeitskala, auf der sich die Gleichgewichtsbedingungen aufgrund der Expansion ändern (Reaktionsraten müssen größer als $H(t)$ sein)

→ insbesondere Neutrinos interagieren nur per schwacher Wechselwirkung

→ Reaktionsrate: $\Gamma \sim n\sigma$

Anzahldichte: $n \sim a^{-3} \sim t^{-\frac{3}{2}}$

Wirkungsquerschnitt für Neutrinos: $\sigma \sim E^2 \sim T^2 \sim a^{-2}$

$$\Rightarrow \Gamma \sim n\sigma \sim a^{-3} \cdot a^{-2} = a^{-5} \sim t^{-\frac{5}{2}} \sim T^5$$

→ Zu Vergleichen mit Expansionsrate $\frac{\dot{a}}{a} = H(t) \sim t^{-1} \sim T^2$

→ Aus σ der schwachen Wechselwirkung kann man den Zeitpunkt bzw. die Temperatur des Übergangs berechnen:

$$\frac{\Gamma}{H} \sim \left(\frac{T^3}{1.6 \times 10^{10} \text{ K}} \right)$$

⇒ Für $T \lesssim 10^{10} \text{ K}$ sind die Neutrinos nicht mehr mit den anderen Teilchen im Gleichgewicht. Nach diesem Zeitpunkt ($t = 1 \text{ s}$) bewegen sie sich ohne weitere Wechselwirkung bis zum heutigen Tage. heute: $n_\nu = 113 \text{ cm}^{-3}$ für jede Neutrinoart

$$T_\nu = 1.9 \text{ K} \quad (\text{s.u.})$$

↪ leider sehr schwach nachweisbar

4.5.3 Paarvernichtung

→ Für $T \lesssim 5 \times 10^9 \text{ K}$ bzw. $k_B T \lesssim 500 \text{ keV}$ dominiert die Annihilation $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$ über die Paarerzeugung.

⇒ Dichte der e^+e^- - Paare nimmt sehr schnell ab

⇒ Photonengas wird erhitzt (Neutrinos nicht, da sie bereits entkoppelt sind)

$$T_\gamma = \left(\frac{11}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \underset{\text{vor Annihilation}}{\overset{\uparrow}{T}} = \left(\frac{11}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Temperatur der} \\ \text{entkoppelten Neutrinos}}}{T_\nu} \rightarrow \text{siehe Übung}$$

→ Nach der Annihilation gilt das Expansionsgesetz $t = 0.55 \text{ s} \left(\frac{T}{1 \text{ MeV}} \right)^{-2}$ und das Verhältnis von Baryondichte und Photonendichte bleibt konstant: $\eta := \left(\frac{n_b}{n_\gamma} \right) = 2.74 \times 10^{-8} \Omega_b h^2_{=0.02}$

→ Nach der Annihilation sind **fast** alle Elektronen zerstrahlt, aber eine kleine Zahl $n_e = n_p$ muss übrig bleiben, damit das Universum elektrisch neutral bleibt $\Rightarrow \frac{n_{e^-}}{n_\gamma} = 0.8\eta$ (η beinhaltet Protonen und Neutronen)

4.5.4 Primordiale Nukleosynthese

→ Entstehung von Atomkernen aus p und n im frühen Universum

→ wichtigste Reaktionen im chemischen Gleichgewicht:

$$p + e^- \leftrightarrow n + \nu_e, \quad p + \bar{\nu}_e \leftrightarrow n + e^+, \quad n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

Zerfallszeit des freien Neutrons: $\tau_n = 887 \text{ s}$

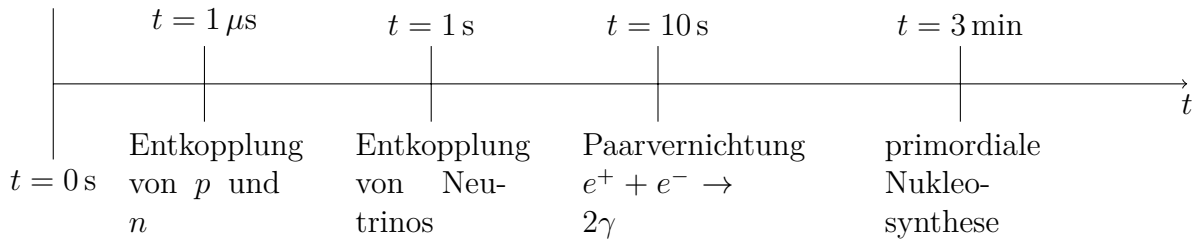
$$\rightarrow \text{im thermischen Gleichgewicht: } \frac{n_n}{n_p} = \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{\Delta m c^2}{k_B T}} \quad (*)$$

mit $\Delta m = m_n - m_p = 1.293 \frac{\text{MeV}}{c^2}$

→ Gleichgewichts-Reaktionen werden selten, nachdem die Neutrinos ausgefroren sind. Dies geschieht bei $T \approx 0.8 \text{ MeV}$

$$\Rightarrow \frac{n_n}{n_p} \approx e^{-\frac{1.3 \text{ MeV}}{0.8 \text{ MeV}}} \approx 0.2$$

→ Nach der Entkopplung von n und p wird ihr Verhältnis nicht mehr durch (*) beschrieben, sondern nur noch durch den Zerfall der freien Neutronen auf der Zeitskala τ_n modifiziert \Rightarrow heutige Neutronen wurden schnell in Atomkerne gebunden



(1) Deuteriumbildung $D = {}^2\text{H}$

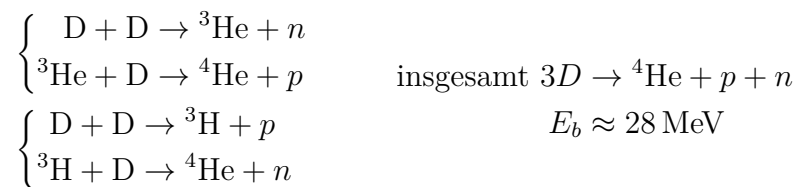


→ Aber: Erst wenn $k_B T \approx E_b$ kann Deuterium in größeren Mengen vorhanden sein, da bei höheren Temperaturen Photodissoziation dominiert

→ Dies geschieht bei $T \sim 8 \times 10^8 \text{ K}$ bzw. $t = 3 \text{ min}$

→ Zu diesem Zeitpunkt beträgt das Verhältnis $\frac{n_n}{n_p} \approx \frac{1}{7}$, danach werden praktisch alle Neutronen in D gebunden

(2) Helium-Häufigkeit:



Praktisch alle vorhandenen Neutronen werden so in ${}^4\text{He}$ gebunden. ($t = 3 \text{ min}$)

→ Anzahldichte von ${}^4\text{He}$:

$$n_{\text{He}} = \frac{1}{2} n_n \text{ (da e Neutronen in jedem } {}^4\text{He)}$$

$$n_{\text{H}} = n_e - n \text{ Anzahldichte von Protonen nach Bildung von } {}^4\text{He}$$

⇒ Massenanteil von ${}^4\text{He}$ an der Baryondichte:

$$y = \frac{4n_{\text{He}}}{4n_{\text{He}} + n_{\text{H}}} = \frac{2n_n}{n_p + n_n} = \frac{2 \cdot \frac{n_n}{n_p}}{1 + \left(\frac{n_n}{n_p}\right)} \approx 0.25$$

Etwa $\frac{1}{4}$ der baryonischen Materie im Universum sollte als ${}^4\text{He}$ gebunden sein! Dies ist eine robuste Vorhersage der Big-Bang-Modelle und in Übereinstimmung mit Beobachtung VI, Abschnitt (4.1)!

(3) Der Baryonenanteil im Universum



→ ${}^5\text{Li}$, ${}^8\text{Be}$ keine stabilen Kerne

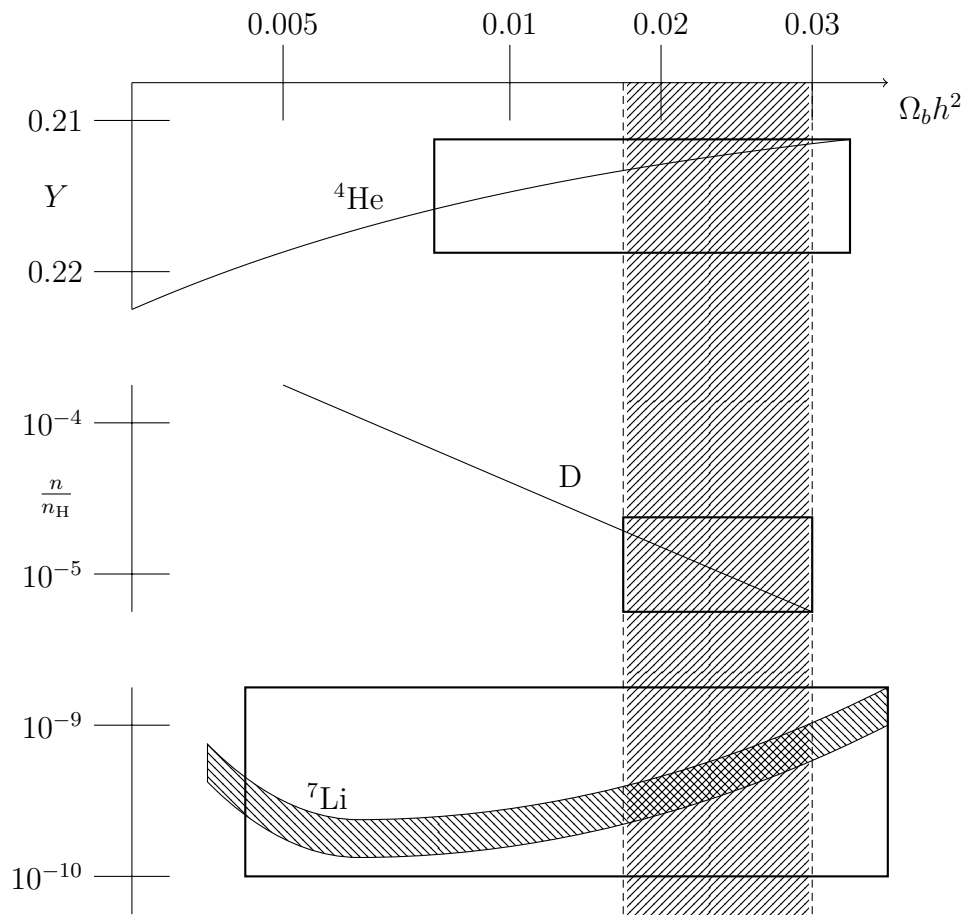
⇒ ${}^4\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow$ instabil

⇒ ${}^4\text{He} + p \rightarrow$ instabil

⇒ Nach 4 Minuten: 25 % ${}^4\text{He}$, 75 % p und Spuren von D , ${}^3\text{He}$, ${}^7\text{Li}$

→ Dichte von ${}^4\text{He}$ und D hängt von Ω_b ab:

- je größer Ω_b , desto größer η , desto früher kann sich D bilden, desto größer $\frac{n_n}{n_p}$ und Y
- je größer Ω_b , desto größer ist n_b und desto effektiver die Umwandlung von D in ${}^4\text{He}$ ⇒ weniger D



→ bemerkenswerte Übereinstimmung zwischen Theorie und Messungen für die drei Kerne

→ bisher beste Messung für D:

$$0.012 \leq \Omega_b h^2 \leq 0.019$$

$$\Rightarrow \Omega_b \approx 0.03 - 0.04$$

→ Aber $\Omega_m > 0.1 \Rightarrow$ größter Teil der Materie ist nicht-baryonische dunkle Materie!

→ Neutrinos ein Kandidat für dunkle Materie?

→ siehe Übung

→ bester Kandidat als Konstituent für dunkle Materie: WIMPs (=weakly interacting massive particles)

→ experimenteller Nachweis steht (noch?) aus

4.5.5 Rekombination

→ Nach ca. 3 min ist die primordiale Nukleosynthese abgeschlossen $T \sim 8 \times 10^8 \text{ K}$

→ Bei $z \approx z_{eq} \approx 23\,900 \Omega_m h^2$ beginnt die Materie (d.h. der Staub) zu dominieren. Dhaer wird (F1) zu:

$$H^2(t) \approx H_0^2 \frac{\Omega_m}{a^3}$$

→ Ansatz $a(t) \sim t^\beta$ ergibt $\beta = \frac{2}{3}$ und damit:

$$a(t) = \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_m} \cdot H_0 \cdot t \right)^{\frac{2}{3}}$$

für $a_{eq} \ll a \ll 1$

→ nächste wichtige Schwelle: $T \sim 3000 \text{ K} (\hat{=} t \sim 3 \times 10^5 \text{ a})$
Rekombination $p + e^- \rightarrow$ neutraler Wasserstoff

→ Aber: Rekombination Konkurriert mit der Ionisation neutraler Atome durch energetische Photonen

→ Rekombination findet über einen Zwei-Photonen-Zerfall statt \Rightarrow diese Photonen sind nicht energetisch genug, um ein Atom vom Grundzustand anzuregen

→ Reaktionsrate des 2γ -Zerfalls $= 10^{-8}$. Reaktionsrate des direkten $\text{Ly}\alpha$ -Übergangs

\Rightarrow Rekombination findet erst spät statt (bei $T \approx 3000 \text{ K}$)
($E_{\text{ion}}(\text{H}) = 13.6 \text{ eV} \hat{=} T = 1.6 \times 10^5 \text{ K}$)

→ Ionisationsgrad:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\text{Anzahldichte der freien } e^-}{\text{Anzahldichte der insgesamt vorhandenen Protonen}} \\ &= 2.4 \times 10^{-3} \cdot \sqrt{\frac{\Omega_m h^2}{\Omega_b h^2}} \cdot \left(\frac{z}{1000} \right)^{12.75} \end{aligned}$$

zwischen $800 \leq z \leq 1200$

x ändert sich sehr schnell in Abhängigkeit von z (von $x = 1$ zu $x \sim 10^{-4}$)

→ $x \sim 10^{-4}$ bleibt übrig aufgrund der Expansion (Dichte des Universums wird zu klein)

→ Das Universum wird **transparent** für Photonen der Energie

$$E_\gamma \leq 13.6 \text{ eV} \quad (\text{bzw. } \lambda \geq 121.6 \text{ nm})$$

→ optische Tiefe für die Thomson-Streuung

$$\tau(z) = 0.37 \cdot \left(\frac{z}{1000} \right)^{14.25}$$

⇒ Photonen mit $z \leq 1000$ breiten sich bis heute aus ohne wesentlich mit Materie zu wechselwirken (Dicke des Übergangs $\Delta z \approx 60$)

⇒ Mit Hilfe von Photonen können wir das Universum nur bis $z \lesssim 1000$

⇒ Kosmischer Mikrowellenhintergrund, der isotrop ist (siehe Beobachtung VI und VII, Abschnitt 4.1)

→ Zwischen $z \sim 1000$ und $z \sim 6$ muss eine Reionisation des intergalaktischen Mediums stattgefunden haben, sonst würden wir keine UV-Photonen von Quellen mit hohem z erhalten (sonst hätte man Absorption durch Photoionisation von neutralem Wasserstoff)

→ Reionisation passierte (vermutlich) bei $z \sim 17$ durch eine erste Generation von Sternen

4.6 Erfolge und Probleme des Standardmodells

→ Standardmodell des Friedmann-Lemaître-Universums hat viele beeindruckende Erfolge vorzuweisen

→ Vorhersagen:

- Hubblesches Gesetz: Absorption von Strahlung von Quellen mit Rotverschiebung z erfolgt nur bei $z' < z$
(experimentell bisher kein Gegenbeispiel gefunden)
- Wenig prozessiertes (d.h. metallarmes) Gas hat einen Heliumanteil von 25 % (passt hervorragend zu den Beobachtungen, vgl. (IV) Abschnitt 4.1)
- \exists Mikrowellenhintergrund
- Es sagt die richtige Anzahl von Neutrino-Familien vorher ($N_\nu = 3$), wie durch den Zerfall des Z-Boson (CERN) bestätigt wurde

$$t \propto \frac{1}{\sqrt{\rho}} \text{ im strahlungsdominierten Universum}$$

Falls $N_\nu > 3 \Rightarrow$ Expansion verläuft schneller

\Rightarrow weniger Zeit bis zum Abkühlen auf T_D

\Rightarrow mehr freie Neutronen

\Rightarrow höherer ^4He -Gehalt

- Neutrinomassen sind $\lesssim 1 \text{ eV}$ (inzwischen $\lesssim 0.1 \text{ eV}$)
 $\lesssim 1.1 \text{ eV}$ KATRIN

→ Nicht erklärt:

- Anfangswerte bei $t \sim 1 \text{ s}$
- Homogenität und Isotropie

Welche physikalischen Prozesse liegen dahinter?

→ Insbesondere zwei Probleme des Standardmodells:

(1) Horizontproblem

→ Im Zeitintervall dt legt das Licht die Strecke $dr = cdt$ zurück

\Rightarrow mitbewegtes Längenintervall $dx = \frac{cdt}{a(t)}$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mitbewegte vom} \\ \text{Licht zurückgelegte} \\ \text{Entfernung von Urknall} \\ \text{bis zur Rotverschiebung } z}}{r_H(z)} = \int_0^t \frac{cdt'}{a(t')} = \int_0^{(1+z)^{-1}} \frac{cda}{a^2 H(a)}, \quad dt = \frac{da}{\dot{a}} = \frac{da}{a \cdot H}$$

$$\Rightarrow r_H = \begin{cases} \frac{2c}{H_0} \cdot \sqrt{\frac{1}{(1+z) \cdot \Omega_m}} & \text{für } 0 \ll z \ll z_{\text{eq}} \\ \frac{c}{H_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\Omega_r(1+z)}} & \text{für } z_{\text{eq}} \ll z \end{cases}$$

\rightarrow Zum Zeitpunkt der Rekombination $z \approx z_{\text{eq}} \sim 1000$

$$\text{Eigenlänge } r_{\text{eq}} = a \cdot r_H = 2 \frac{c}{H_0} \frac{1}{(1+z_{\text{eq}})^{\frac{3}{2}} \sqrt{\Omega_m}}$$

$$\hat{=} \text{Winkel am Himmel: } \Omega_{H, \text{rec}} = 1^\circ \cdot \left(\frac{\Omega_m}{0.3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{z_{\text{rec}}}{1000}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

\Rightarrow CMB ist bis auf kleine Anisotropien der relativen Amplitude $\sim 10^{-5}$ isotrop \nlessdot (?)

\rightarrow Universum isotrop und homogen?

(2) Krümmung

\rightarrow totaler Dichteparameter für eine beliebige Rotverschiebung

$$\Omega_0(z) = \frac{\rho_m(z) + \rho_r(z) + \rho_v}{\rho_c(z)}$$

$$\text{mit kritischer Dichte } \rho_c(z) = \frac{3H^2(z)}{8\pi G}$$

$$\Rightarrow \Omega_0(z) = \left(\frac{H_0}{H}\right)^2 \left(\frac{\Omega_m}{a^3} + \frac{\Omega_r}{a^4} + \Omega_\Lambda\right)$$

und mit den Lemaître-Friedmann-Gleichungen:

$$1 - \Omega_0(z) = F(z)(1 - \Omega(0))$$

$$\text{mit } F(z) = \left(\frac{H_0}{a \cdot H(a)}\right)^2 > 0$$

Ω_0 : totaler Dichteparameter heute:

- falls $\Omega(0) = 1 \Rightarrow \Omega_0(z) = 1 \forall z$
- falls $\Omega(0) < 1 \Rightarrow \Omega_0(z) > 1$ bzw. $\Omega(0) < 1 \Rightarrow \Omega(z) < 1$
da $\Omega(z) - 1 \sim \text{Krümmung } K \Rightarrow \forall z$ bleibt K erhalten.
 $F(z)$ charakterisiert die Abweichung von einem flachen Universum

→ Beispiel: für strahlungsdominiertes Universum

$$F(z) \approx [\Omega_r \cdot (1+z)^2]^{-1} \underset{\substack{\text{bei } z \sim 10^{10} \text{ (Ausfrieren} \\ \text{der Neutrinos)}}}{\sim} 10^{-15}$$

→ Aus Beobachtungen (CMB) wissen wir, dass:

$$0.97 < \Omega(0) < 1.04 \Rightarrow |\Omega(0) - 1| \lesssim 0.04 \Rightarrow |\Omega_0(10^{10}) - 1| \lesssim 10^{-15}$$

⇒ Flachheitsproblem: Damit der totale Dichteparameter heute von der Größenordnung 1 sein kann, muss er zu sehr frühen Zeiten extrem nahe bei 1 gewesen sein!

→ Wie war eine solch präzise Feinabstimmung dieser Größe möglich? (sehr spezielle Anfangsbedingungen bei $t = 1 \text{ s}$) → anthropisches Prinzip? → unbefriedigend

⇒ (spekulative) Erweiterung des Standardmodells: **Inflation** (A. Guth, 1980)

→ Teilchenphysik erwartet neue Phänomene (GUT = grand unified theories) bei $T \sim 10^{14} \text{ GeV} \hat{=} t \sim 10^{-34} \text{ s}$

→ Szenario der Inflation: Ω_Λ bei sehr frühen Zeiten viel größer als heute

$$\Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} \approx \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \Rightarrow \text{exponentielle Expansion des Universums}$$

$$\Leftrightarrow a(t) \propto e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \cdot t}$$

→ Annahme: Nach einer Phase der Expansion kommt es zu einem Phasenübergang, bei dem die Vakuumenergiedichte in normale Materie und Strahlung umgewandelt wird

$$\text{zu (1): } r_M(a_1, a_2) \sim \Omega_\Lambda^{-\frac{1}{2}} \int_{a_1}^{a_2} \frac{c da}{a} \gg 1 \quad \text{falls } a_1 \ll 1$$

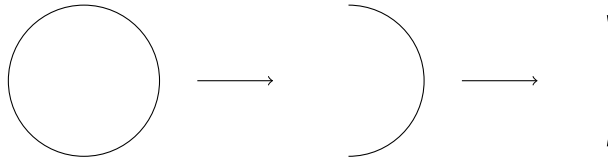
⇒ Das gesamte beobachtbare Universum war in Kausalem Kontakt ⇒ Homogenität und Isotropie.

zu (2):

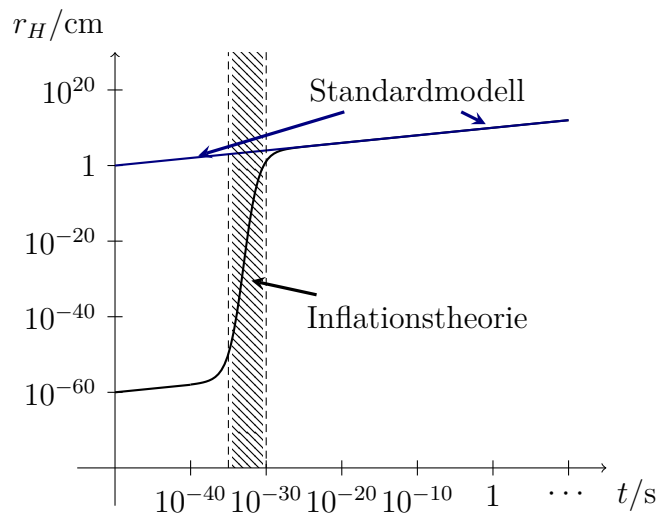
→ Durch die gewaltige Ausdehnung wird jede ursprüngliche Krümmung "weggeglättet":

$$H(t) = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \Rightarrow \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} = 1 \Rightarrow \Omega_0(1)$$

⇒ Das Universum ist flach und auch heute gilt noch sehr genau $\Omega_0 = 1$



→ Weiterhin bietet Inflation eine Erklärung für den Ursprung der Dichteschwankungen im Universum (Keime der Strukturbildung): Quantenfluktuationen (Quantengravitation)



Ausdehnung während Inflation: Faktor $\sim 10^{40}$ von $ct_i \sim 10^{-24}$ cm auf $ct_s = 10^{18}$ cm von $t_i \sim 10^{-34}$ s auf $t_s \sim 10^{-32}$ s weitere "normale" kosmische Expansion: Faktor 10^{25} auf 10^{41} cm

5 Galaxienhaufen und -gruppen

→ Milchstraße ist Mitglied der lokalen Gruppe (local group): 35 Galaxien (+ ~ 20 zusätzlich sehr lichtschwache (gefunden mit dem SDSS)) innerhalb $\lesssim 1$ Mpc

→ wichtige Mitglieder:

- Magellansche Wolke (LMC, SMC) sind irreguläre Galaxien
- 3 Spiralgalaxien:

Milchstraße ($\mathcal{M}_B = -20$)

Andromeda (M31, $\mathcal{M}_B = -20$)

Dreiecksgalaxie (M33, $\mathcal{M}_B = -18.9$)

5.1 Massenabschätzung der lokalen Gruppe

→ M31 im Abstand von $D = 770$ kpc ist eine der wenigen Galaxie mit einer Planverschiebung $v \approx -120 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ zwischen den Zentren

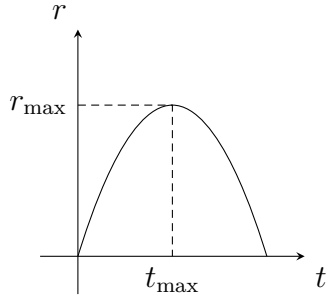
⇒ Kollision auf einer Zeitskala von 6×10^9 a

→ Milchstraße + M31 $\hat{=}$ 90 % der Leuchtkraft der lokalen Gruppe

⇒ Dynamik sollte von diesen Galaxien dominiert sein (falls Massedichte \sim Lichtverteilung)

⇒ Abschätzung der Gesamtmasse der lokalen Gruppe:

- (i) M31 und Milchstraße waren einander sehr nahe in der Frühzeit des Universums
- (ii) daraufhin haben sie sich durch die kosmologische Expansion voneinander entfernt
- (iii) **Aber:** Gravitation bremst relative Fluchtgeschwindigkeit ab, bis zum Stillstand $t = t_{\text{max}}$
- (iv) Für $t > t_{\text{max}}$ bewegen sie sich aufeinander zu



Aus der Energieerhaltung folgt:

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{GM}{r} - C$$

mit M = Gesamtmasse Milchstraße + M31 und C zu bestimmende Integrationskonstante

Bei $t = t_{\max}$ ist $r = r_{\max}$ und $r = \delta \Rightarrow C = \frac{G}{M} r_{\max}$

$$\Rightarrow \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = 2 \cdot G \cdot M \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{\max}} \right)$$

da $v = \frac{dr}{dt}$ (Radialgeschwindigkeit) und $r(0) = 0$

$$\Rightarrow \text{Lösung: } t_{\max} = \int_0^{t_{\max}} dt = \int_0^{r_{\max}} \frac{dr}{\sqrt{2GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{\max}} \right)}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r_{\max}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2GM}}$$

- DGL ist symmetrisch bzgl. $v \rightarrow -v \Rightarrow$ Kollision bei $t = 2t_{\max}$
- vereinfachende Abschätzung: Relativgeschwindigkeit von heute bis zur Kollision ist Konstant, d.h:

$$\frac{r(t_0)}{v(t_0)} = \frac{D}{V} = \frac{770 \text{ kpc}}{120 \frac{\text{km}}{\text{s}}} \Rightarrow 2t_{\max} = \overset{\text{Alter des Universums}}{\underset{t_0}{\downarrow}} + \frac{D}{V}$$

und schließlich:

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{GM}{r} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi GM}{t_{\max}} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Mit $r = r(t_0) = D$ und $v = v(t_0)$ erhält man ($t_0 \approx 14 \text{ Ga}$):

$$M \approx 3 \times 10^{12} M_{\odot} \Rightarrow \frac{M}{L} \sim 70 \frac{M_{\odot}}{L_{\odot}}$$

Aber:

$$\frac{M}{L} \sim 3 - 5 \frac{M_{\odot}}{L_{\odot}} \text{ (vgl. Tabelle, Abschnitt)}$$

für S_{bc} Spiralgalaxien

⇒ **Nur etwa 5 % der gravitativen Masse der lokalen Gruppe kann direkt beobachtet ("gesehen") werden ⇒ weitere Hinweise auf dunkle Materie!**

5.2 Galaxienhaufen

$\gtrsim 50$ Mitglieder, $\gtrsim 1.5 \text{ h}^{-1} \text{ Mpc}$

→ dynamische Zeitskala (Zeit, die eine typische Galaxie benötigt, um den Haufen einmal zu durchqueren):

$$t_{\text{cross}} \approx \frac{1.5 \text{ h}^{-1} \text{ Mpc}}{\sigma_v} \approx 1.5 \times 10^9 \text{ h}^{-1} \text{ a} \ll t_0 = 14 \text{ Ga}$$

\uparrow
 $\sigma_v = 1000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ 1D
Geschwindigkeitsdispersion

⇒ gravitativ gebundenes System ⇒ Massenabschätzung möglich, da viriales Gleichgewicht vorhanden

→ Virialtheorem (s. Übung 1, Aufgabe 1):

$$2\bar{T} + \bar{V} = 0(*)$$

wobei $T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2$, $V = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{G m_i m_j}{r_{ij}}$

→ Gesamtmasse $M = \sum_i m_i$, massengewichtete Geschwindigkeitsdispersi-

on $\langle v^2 \rangle := \frac{1}{M} \cdot \sum_i m_i v_i^2$, gravitativer Radius: $r_G := 2M^2 \left(\sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \right)^{-1}$

$$\Rightarrow T = \frac{M}{2} \langle v^2 \rangle$$

$$\Rightarrow V = -\frac{GM^2}{r_G}$$

$$\Rightarrow M \stackrel{(*)}{=} \frac{r_G \cdot \langle v^2 \rangle}{G} \quad \underset{\uparrow}{\approx} \quad 1.1 \times 10^{15} \text{ m}_\odot \cdot \left(\frac{\sigma_v}{1000 \frac{\text{km}}{\text{s}}} \right)^2 \cdot \left(\frac{R_G}{1 \text{ Mpc}} \right)$$

$$\langle v^2 \rangle = 3\sigma_v^2$$

$$r_G = \frac{\pi}{2} R_G$$

$$= \frac{\pi}{2} 2M^2 \cdot \left(\sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{R_{ij}} \right)^{-1}$$

mit R_{ij} = projezierter Abstand zwischen Galaxien i und j

$\Rightarrow M \sim 10^{15} \text{ M}_\odot$ für massenreiche Galaxienhaufen und wiederum:

$$\frac{M}{L} \sim 300 \text{ h} \left(\frac{\text{M}_\odot}{\text{L}_\odot} \right) \text{ Masse-Leuchtkraft-Verhältnis}$$

übersteigt das $\frac{M}{L}$ -Verhältnis von Frühtyp-Galaxien um mindestens einen Faktor 10 \Rightarrow missing mass problem (Fritz Zwicky, 1933, Coma-Haufen)

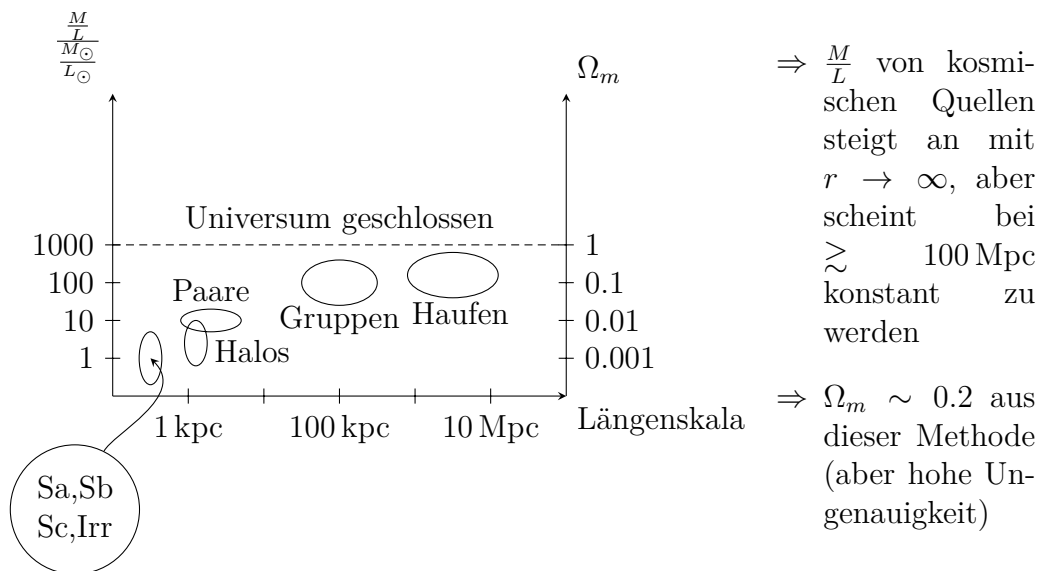
Die in Galaxien sichtbaren Sterne machen weniger als etwa 5 % der Gesamtmasse von Galaxienhaufen aus.

5.3 Röntgenstrahlung von Galaxienhaufen

- \rightarrow Röntgenstrahlung stammt aus einem heißen, diffus verteilten Gas (intra-cluster Gas): Bremsstrahlung + Linien-Emission ($\text{Ly}\alpha$ etc.)
- \rightarrow Aus dem radialen Verlauf von Dichte und Temperatur des Gases lässt sich das Massenprofil $M(r)$ bestimmen

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Masse von Galaxienhaufen:} \\ \sim 3\% \text{ direkt beobachtbare Sterne in Galaxien} \\ \sim 15\% \text{ intergalaktisches Gas} \\ \sim 80\% \text{ "dunkle Materie"} \end{array} \right]$$

→ Masse-zu-Leuchtkraftverhältnis $\frac{M}{L}$ als Funktion der Längenskala kosmischer Objekte:



5.4 Entstehung von Inhomogenitäten

5.4.1 Mögliche Ursachen

→ auf kleinen Skalen ist das Universum inhomogen, z.B. ein massereicher Galaxiehaufen mit $\varnothing = 1.5 h^{-1} \text{Mpc}$ enthält mehr als 200 mal so viel Masse wie eine mittlere Kugel der gleichen Größe im Universum

→ **Idee:** anfängliche Dichtefluktuation

- ⇒ Dichte wächst lokal
- ⇒ zusätzliches Gravitationsfeld
- ⇒ Kosmologische Expansion wird lokal abgebremst
- ⇒ Dichtekontrast wächst an

⇒ Dichte wächst lokal

⇒ ...

⇒ **gravitative Instabilitäten!**

→ **Problem:** Um die heutigen Strukturen (Galaxienhaufen, -gruppen, etc.) zu erklären, müssten die CMB-Fluktuationen von der Größenordnung $\frac{\Delta T}{T} \sim 10^{-3}$ ($\frac{1}{2}$ zur Beobachtung $\frac{\Delta T}{T} \sim 10^{-5}$!)

→ **Mögliche Lösung:** Dunkle Materie dominiert, ihr (postuliert) größerer Dichtekontrast führt zur Strukturbildung

- (a) heiße dunkle Materie = relativistische Teilchen kann ausgeschlossen werden, da $\frac{1}{2}$ in den Beobachtungen (kleinere Strukturen werden durch das freie Strömen der relativistischen Teilchen ausgewaschen)
- (b) kalte dunkle Materie = nicht-relativistisch (eventuell mit einer kleinen heißen Komponente, wie z.B. kosmologische Neutrinos)
⇒ scheint sehr gut zu funktionieren

5.4.2 Berechnung der Dichtefluktuationen

→ relativer Dichtekontrast:

$$\delta(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t) - \bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}(t)}$$

mit $\bar{\rho}(t)$: mittlere kosmische Materiedichte zur Zeit t

→ Da $\frac{\Delta T}{T} \sim 10^{-5}$ zur Zeit der Rekombination bei $z \approx 1100$ sollte $\delta \ll 1$ für $z \rightarrow \infty$

→ heute $\delta \sim 1$ (auf ~ 10 Mpc) bzw. $\delta \gg 1$ (auf ~ 2 Mpc)

→ Idee (s.o.): Dort wo die Dichte größer als im Mittel ist, d.h. $\delta > 0$ ist das Gravitationsfeld größer ⇒ langsamere Expansion

⇒ δ steigt weiter ⇒ Instabilitäten wachsen mit der Zeit

→ Vereinfachtes Modell für kleines δ :

· Radius der Struktur $R \ll$ Hubble-Radius $R_H = \frac{c}{H_0} = 3000 h^{-1} \text{Mpc}$

- Bewegungen nicht-relativistisch
 - nur Staubteilchen, durch die Flüssigkeitsnäherung (Kontinuum)
- ⇒ Newtonsche Mechanik eines Fluids der Dichte $\rho(\vec{r}, t)$ mit Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r}, t)$ mit $\vec{r}(t) = a(t) \cdot \vec{x}$

⇒ Bewegungsgleichungen:

(1) Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$

(2) Euler-Gleichung $\underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}}_{\text{Zeitliche Ableitung von } \vec{v},}$ $= -\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla \Phi$

die von einem mitbeweg-

ten Beobachter gemessen

wird

mit Druck P (null, denn wir betrachten Staub) und Gravitationsfeld Φ

(3) Poisson-Gleichung

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

→ Gesucht: Kosmologisch relevante Lösungen von (1)-(3)

Im Newtonschen Grenzfall ist $\Lambda = 0$ und daher:

$$\rho(t) = \rho_0 a^{-3}(t) \quad \ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} \rho(t) a(t)$$

mit $a(t)$ dem Skalenfaktor und $\vec{r}(t) = a(t) \cdot \vec{x}$
 \uparrow
 Konstant für Materieteilchen im homogenen Kosmos (mitbewegte Koordinaten)

→ **Einfache Lösung:** $\rho = \rho(t)$ (homogen und $\vec{v}(\vec{r}, t) = H(t) \cdot \vec{r}$)
Beweis:

zu (1):

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \vec{\nabla}_r (\rho \vec{v}) &= \rho_0 \partial_t (a^{-3}(t)) + \rho_0 a^{-3}(t) \vec{\nabla}_r \cdot \vec{v} \\ &= \rho_0 \left(-3a^{-4} \dot{a} + a^{-3} \frac{\dot{a}}{a} \cdot \nabla_r \cdot \vec{r} \right) = 0 \checkmark \end{aligned}$$

zu (2):

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{v}|_r &= \partial \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \cdot \vec{r} = - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \cdot (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_r) \cdot \vec{r} - \nabla_r \Phi \\ \Leftrightarrow \frac{\ddot{a} \cdot a - \dot{a}^2}{a^2} \vec{r} &= - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \underbrace{(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_r) \cdot \vec{r}}_{=\vec{r}} - \vec{\nabla}_r \Phi \\ \Leftrightarrow \frac{\ddot{a}}{a} \vec{r} &= - \vec{\nabla}_r \Phi \\ \Leftrightarrow \frac{\ddot{a}}{a} \underbrace{\vec{\nabla}_r \cdot \vec{r}}_{=3} &= - \nabla_r^2 \Phi \\ \Leftrightarrow -3 \cdot \frac{4\pi G}{3} \rho &= - \nabla_r^2 \Phi \quad (3) \quad \text{qed.} \end{aligned}$$

→ **Lösung mit Inhomogenität:** Setze:

$$\vec{r} = a(t) \cdot \vec{x}$$

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{\dot{a}}{a} \cdot \vec{r} + \underbrace{\vec{u}}_{\text{Pekuliargeschwindigkeit}} \left(\frac{\vec{r}}{a}, t \right) \quad (0)$$

und weiterhin:

$$\begin{aligned}\rho(\vec{r}, t) &:= \rho(a \cdot \vec{x}, t) \\ \Phi(\vec{r}, t) &= \frac{2\pi}{3} G \bar{\rho}(t) |\vec{r}|^2 + \Phi(\vec{x}, t)\end{aligned}$$

Im mitbewegten Bezugssystem gilt dann $\tilde{\rho} = \bar{\rho} \cdot (1 + \delta)$ und (1)-(3):

$$\begin{aligned}(1') \quad & \partial_t \tilde{\rho}|_x + \frac{3\dot{a}}{a} + \tilde{\rho} + \frac{1}{a} \nabla_x \cdot (\tilde{\rho} \vec{u}) = 0 \\ \Leftrightarrow (1'') \quad & \partial_t \delta|_x + \frac{1}{a} \vec{\nabla}_x \cdot ((1 + \delta) \vec{u}) = 0 \\ (2') \quad & \partial_t \vec{u}|_x + \frac{1}{a} (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}_x) \vec{u} + \frac{\dot{a}}{a} \vec{u} = -\frac{1}{\tilde{\rho} a} \vec{\nabla}_x P - \frac{1}{a} \vec{\nabla}_x \Phi \\ (3') \quad & \nabla_x^2 \Phi = 4\pi a^2 \tilde{\rho} \delta(\vec{x}, t)\end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\partial_t \rho(\vec{r}, t)|_r &= \partial_t \tilde{\rho} \left(\frac{\vec{r}}{a(t)}, t \right) \Big|_r \\ &= \partial_t \tilde{\rho}(\vec{x}, t)|_x - \frac{\dot{\vec{r}}}{a^2} \cdot \dot{a} \cdot \vec{\nabla}_x \tilde{\rho}(\vec{x}, t) \\ &= \partial_t \tilde{\rho}(\vec{x}, t)|_x - \frac{\dot{a}}{a} \vec{x} \cdot \vec{\nabla}_x \tilde{\rho}(\vec{x}, t) \quad (*)\end{aligned}$$

Ersetzen in Kontinuitätsgleichung (1) ergibt:

$$\begin{aligned}\partial_t \rho(\vec{r}, t)|_{\vec{r}} &\stackrel{(*)}{=} \partial_t \tilde{\rho}(\vec{x}, t)|_x - \frac{\dot{a}}{a} \vec{x} \cdot \vec{\nabla}_x \tilde{\rho}(\vec{x}, t) \\ &\stackrel{(1),(0)}{=} -\frac{1}{a} \vec{\nabla}_x \cdot (\tilde{\rho}(\vec{x}, t) (\dot{a} \vec{x} + \vec{u}(\vec{x}, t))) \\ &= -\frac{1}{a} \vec{\nabla}_x (\tilde{\rho}(\vec{x}, t) \cdot \vec{u}(\vec{x}, t)) - \frac{\dot{a}}{a} \vec{\nabla}_x (\tilde{\rho} \cdot \vec{x}) \\ &\Rightarrow \partial_t \tilde{\rho}|_x + 3 \frac{\dot{a}}{a} \tilde{\rho} + \frac{1}{a} \vec{\nabla}_x \cdot (\tilde{\rho} \vec{u}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (1') \quad \text{qed.}\end{aligned}$$

bzw. für den relativen Dichtekontrast $\tilde{\rho} = \bar{\rho}(t) \cdot (1 + \delta(\vec{x}, t))$ $\bar{\rho} = \rho_0 \cdot a^{-3}$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow -3 \frac{\dot{a}}{a} \rho_0 (1 + \delta) + \rho_0 a^{-3} \cdot \dot{\delta} + 3 \frac{\dot{a}}{a^4} \rho_0 (1 + \delta) + \frac{\rho_0}{a^4} \vec{\nabla}_x \cdot ((1 + \delta) \vec{u}) = 0 \\ &\Rightarrow \dot{\delta} + \frac{1}{a} \vec{\nabla}_x \cdot ((1 + \delta) \vec{u}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (1'')\end{aligned}$$

zu (3):

$$\begin{aligned}
\nabla_r^2 \Phi(\vec{r}, t) &= \frac{2\pi}{3} G\bar{\rho}(t) \underbrace{\nabla_r^2 |\vec{r}|^2}_{=2 \cdot 3} + \vec{\nabla}_r^2 \Phi(\vec{x}, t) \\
&= \frac{2\pi}{3} G\bar{\rho} \cdot 2 \cdot 3 + \nabla_r^2 \Phi(\vec{x}, t) \\
&= 4\pi G\bar{\rho} + \frac{1}{a^2} \nabla_x^2 \Phi \\
&\stackrel{(3)}{=} 4\pi G\rho = 4\pi G\bar{\rho}(1 + \delta) \\
\Leftrightarrow \nabla_x^2 \Phi(\vec{x}, t) &= 4\pi G\bar{\rho}a^2 \delta(\vec{x}, t) \quad \Rightarrow \quad (3')
\end{aligned}$$

zu (2):

$$\begin{aligned}
\partial_t \vec{v}(\vec{r}, t)|_r &\stackrel{(0)}{=} \partial_t \left(\frac{\ddot{a}}{a} \vec{r} + \vec{u} \left(\frac{\vec{r}}{a}, t \right) \right) \Big|_r \\
&= \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \vec{r} + \partial_t \vec{u}|_{\vec{x}} - \frac{\dot{a}}{a^2} \vec{r} \cdot \nabla_x \vec{u}(\vec{x}, t)
\end{aligned}$$

und weiterhin:

$$\begin{aligned}
\partial_t \vec{v}|_{\vec{r}} &\stackrel{(2)}{=} - \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_r \right) \vec{v} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla}_r P - \vec{\nabla}_r \Phi \\
&\stackrel{(0)}{=} - \left[\left(\dot{a} \cdot \vec{x} + \vec{u}(\vec{x}, t) \right) \cdot \frac{1}{a} \cdot \vec{\nabla}_x \right] \left(\frac{\dot{a}}{a} + \vec{u}(\vec{x}, t) \right) - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla}_r P - \vec{\nabla}_r \Phi \\
&= - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \left(\vec{x} \cdot \vec{\nabla}_x \right) \vec{r} - \frac{\dot{a}}{a} \left(\vec{x} \cdot \vec{\nabla}_x \right) \vec{u} - \frac{\dot{a}}{a^2} \vec{u} \cdot \vec{\nabla}_x (a \cdot \vec{x}) \\
&\quad - \frac{1}{a} \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}_x \right) \vec{u} - \frac{1}{\tilde{\rho}a} \vec{\nabla}_x P - \frac{1}{a} \vec{\nabla}_x \Phi - \frac{2\pi}{3} G\bar{\rho} \cdot 2 \cdot \vec{r} \\
&\Rightarrow \frac{\ddot{a} \cdot a}{a^2} \cdot \vec{r} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \vec{r} + \partial_t \vec{u}|_x - \frac{\dot{a}}{a} \left(\vec{x} \cdot \vec{\nabla}_x \right) \vec{u} \\
&= - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \vec{r} - \frac{\dot{a}}{a} \left(\vec{x} \cdot \vec{\nabla}_x \right) \vec{u} - \frac{\dot{a}}{a} \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}_x \right) \vec{c} - \frac{1}{a} \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} - \frac{1}{\tilde{\rho}a} \vec{\nabla}_x P \\
&\quad - \frac{1}{a} \vec{\nabla}_x \Phi - \underbrace{\frac{4\pi}{3} G\bar{\rho} \vec{r}}_{=-\frac{\dot{a}}{a}} \\
&\Rightarrow \partial_t \vec{u}|_x + \frac{\dot{a}}{a} \underbrace{\left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}_x \right) \vec{x}}_{\vec{u}} + \frac{1}{a} \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}_x \right) \vec{u} + \frac{1}{\tilde{\rho}} a \vec{\nabla}_x P + \frac{1}{a} \vec{\nabla}_x \Phi = 0 \quad \Rightarrow \quad (2')
\end{aligned}$$

⇒ Differentialgleichungen, die beschreiben, wie sich die Ausdehnung des Kosmos auf den Dichtekontrast auswirkt ⇒ schwierig zu lösen ⇒ **Linearisierung**

(a) homogener Fall: kein Dichtekontrast

$$\Rightarrow \delta = 0, \vec{u} = 0, \Phi = 0, \tilde{\rho} = \bar{\rho}$$

(b) lineare Störung: Betrachte nur Terme der Gleichungen die von 1. Ordnung in δ und \vec{u} sind

$$(1'') \Rightarrow (1''') \quad \dot{\delta} + \frac{1}{a} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

$$(2') \Rightarrow (2'') \quad \partial_t \vec{u} \frac{\dot{a}}{a} + \frac{1}{a} \vec{\nabla} \Phi = 0 \quad (\text{für Staub mit } P = 0)$$

$$(3') \Rightarrow (3'') \quad \nabla^2 \Phi = 4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta$$

$$\partial_t [(1''')] \Rightarrow \ddot{\delta} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot [(2'')] &\Rightarrow \partial_t (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = -\frac{\dot{a}}{a} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \frac{1}{a} \nabla^2 \Phi \\ &\stackrel{(3'')}{=} -\frac{\dot{a}}{a} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - 4\pi G a \bar{\rho} \delta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ddot{\delta} - 2 \cdot \frac{\dot{a}}{a} \cdot \underbrace{\frac{1}{a} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}}_{\stackrel{(1''')}{=} -\dot{\delta}} - 4\pi G \bar{\rho} \delta = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\delta} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \cdot \dot{\delta} = 4\pi G \bar{\rho} \delta$$

Diese Gleichung besitzt Lösungen der Form: $\delta(\vec{x}, t) = D(t) \cdot \delta(\vec{x})$

 \uparrow
beliebige
Funktion
des Ortes

$$\Rightarrow \ddot{D}(t) + \frac{2\dot{a}}{a} \dot{D}(t) - 4\pi G \bar{\rho} D(t) = 0$$

Diese Differentialgleichung hat zwei unabhängige Lösungen:

$$D_-(t) \text{ mit } D_-(t) \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty \text{ (hier irrelevant)}$$

Wachstumsfaktor $D_+(t)$ wächst mit steigendem t und kann so normiert werden, dass $D_+(t_0) = 1$

$$\Rightarrow \delta(\vec{x}, t) = D_+(t) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dichtekontrast} \\ \text{bei } t = t_0}}}{\delta_0(\vec{x})}$$

→ In der lineare Störungstheorie ist die räumliche Form der Dichtefluktuation eingefroren und nur ihre Amplitude wächst.

Beispiel: Einstein-de-Sitter-Universum

$$\Omega_m = 1, \Omega_r = 0, \Omega_\Lambda = 0$$

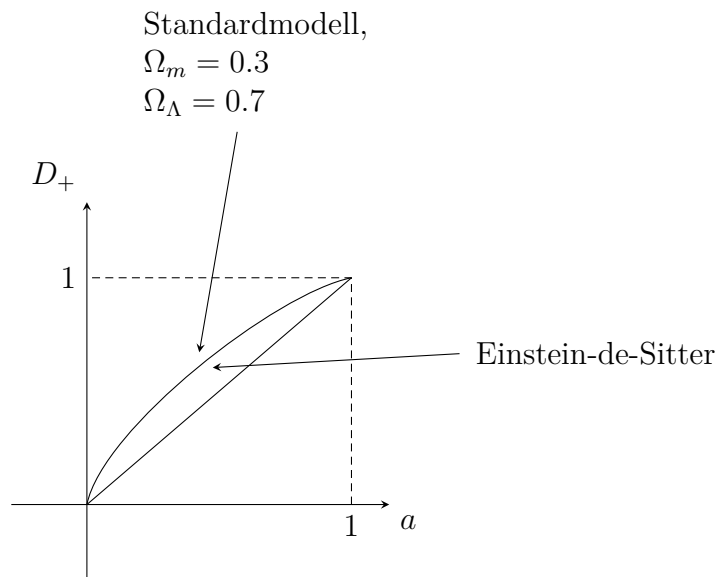
$$\begin{aligned} a(t) &= \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} \\ \Rightarrow H(t) &= \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{2}{3t}, \quad \bar{\rho}(t) = \rho_c \cdot a^{-3}(t) = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \cdot \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2} \\ \Rightarrow \ddot{D} + \frac{4}{3t}\dot{D} + \frac{2}{3t^2}D &= 0 \\ \text{Ansatz: } D(t) &= D_0 \cdot t^\lambda \\ \Rightarrow \lambda(\lambda - 1) + \frac{4}{3}\lambda - \frac{2}{3} &= 0 \\ \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}, \quad \lambda = -1 \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \\ \text{beschreibt} & D(t) & \text{ab-} \\ \text{Wachstum} & \text{fallend} & \text{für} \\ & t \rightarrow \infty & \end{array} \end{aligned}$$

Normalisierung $D_+ = 1$ heute $\Rightarrow D(t_0) = 1$

$$\Rightarrow D_+(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} = a(t)$$

NB: Im allgemeinen gilt in linearer Ordnung:

$$D_+(a) \propto \frac{H(t)}{H_0} \int_0^a \frac{da'}{\frac{\Omega_m}{a'} + \frac{\Omega_\Lambda}{a'} - (\Omega_m + \Omega_\Lambda - 1)^{\frac{3}{2}}}$$



Konsequenzen:

- heute: $\delta \gtrsim 1$ bei $z = 0$
- Im Moment der Rekombination bei $z = 1100$ sollte laut Rechnung gelten $\delta \sim 10^{-3}$ (da $1 + z = \frac{1}{a} \propto \frac{1}{D_+}$)
 \nmid zur Beobachtung des CMB mit $\frac{\Delta T}{T} \sim \delta \sim 10^{-5}$

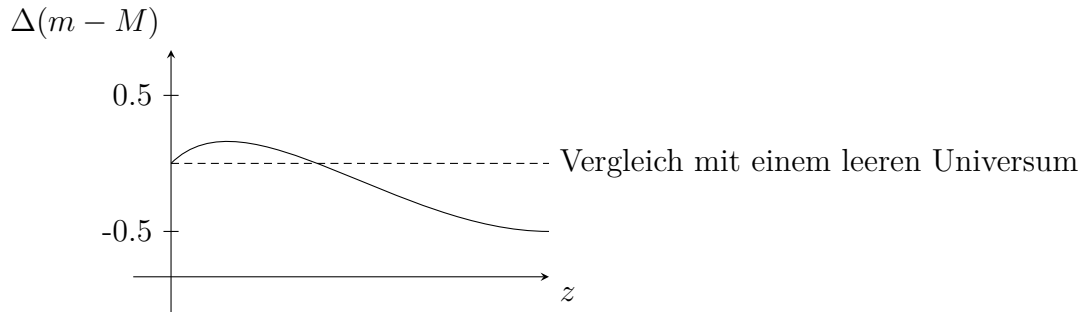
Mögliche Lösung: Dunkle Materie, die bei der Rekombination einen größeren Dichtekontrast hatte und Potentialtöpfe bildete in die die Baryonen nach der Rekombination hineinfallen konnten.

6 Das Finale: die kosmologischen Parameter

→ Messung durch mehrere unabhängige Methoden

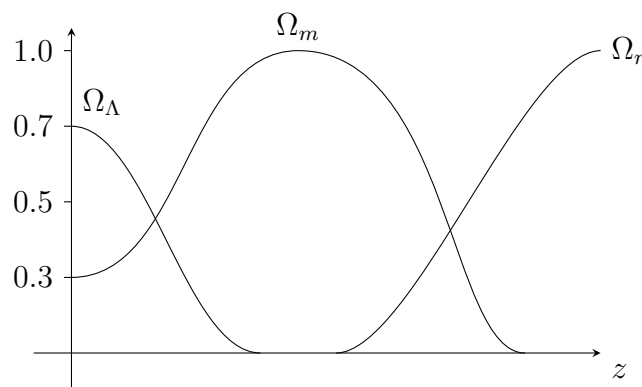
- Verteilung der sichtbaren Materie auf großen Skalen
- Supernovae Typ Ia
- Gravitationslinsen
- intergalaktische Materie (Ly- α -Wald)
- Winkelfluktuationen in CMP

- Supernovae vom Typ Ia explodieren immer auf die gleiche Weise ⇒ **gleiche** intrinsische Leuchtkraft (nach einigen empirischen Korrekturen) sehr hell, daher auch in großen Entfernungen sichtbar
Messungen ab 1998 ergaben Überraschend



Für $z \leq 1$ leuchten die SNIa schwächer als in einem leeren Universum
⇒ Universum expandierte früher langsamer als heute ⇒ beschleunigte Expansion

- ⇒ formale Beschreibung mit Hilfe der kosmologischen Konstanten $\Lambda > 0$
Man findet $\boxed{\Omega_m \sim 0.3, \Omega_\Lambda \sim 0.7}$ (Nobelpreis 2011)
- Hinweis auf eine unbekannte Naturkraft, die nur auf kosmologischen Skalen zu spüren ist ("dunkle Energie"). Ihre Herkunft ist unbekannt.
Seit dem Urknall:



heute: $a(t) = e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}$ „seit kurzem wird das Universum von der dunklen Energie dominiert“

→ weitere Quelle: CMB, Analyse der Multipolentwicklung der Winkelfluktuationen \Rightarrow gemischte Bestimmung der Parameter
Aktuelle Daten: Plank 2018 paper:

