Lineáris egyenletrendszerek iterációs megoldása

Legyen A$\in R^{nxn}$ és x,b$\in R^n$. Feltételezzük, hogy az Ax=b alakú lineáris egyenletrendszernek van x$^* \in R^n$ megoldása.

Adott x$^{(0)} \in R^n$ kezdeti vektorból kiindulva, az

$$x^{m+1} = Bx^m + f, \quad m = 0, 1, 2....$$

összefüggéssel, ahol B$\in R^{nxn}$ az úgynevezett iterációs mátrix és f$\in R^n$, egy iterációs sorozatot állítunk elő, amelynek segítségével az egyenletrendszer megoldását egyre jobban megközelítjük.

Értelmezés szerint az iterációs eljárást konvergensnek nevezzzük, ha $\forall$ x$^{(0)} \in R^n$ vektorból kiindulva $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$

Megj.: 1.) kezdeti vektornak válasszuk a nullvektort.
2.) ha $\|B\| < 1$, akkor az iteráció konvergens
3.) meg kell adni egy leállási kritériumot
4.) tanulmányozni kell a közelítés hibáját.

Ha $A = P - Q$, ahol P reguláris,akkor

$$Ax = b \Leftrightarrow x = P^{-1}Qx + P^{-1}b \Rightarrow x^{m+1} = P^{-1}Qx^m + P^{-1}b,$$

tehát

$$B = P^{-1}Q \text{ és } f = P^{-1}b.$$

Legyen $A = D - L - U$, ahol

D=$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & .... & 0 \\ 0 & a_{22} & .... & .0 \\ ... & .... & .... & ... \\ 0 & .... & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$, -U=$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,-L=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & .... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}$

$a_{ii} \neq 0, \forall i = 1, ..., n.$

Ha $P = D$ az úgynevezett Jacobi iterációt kapjuk:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b, k = 0, 1, ...$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{i,j}x_j^{(k)}), i = 1, ..., n$$

Ha $P = D - L$ a Gauss -Seidel iterációt kapjuk:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} + b), k = 0, 1, ..$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}), i = 1, ..., n$$

A Jacobi illetve Gauss-Seidel iteráció akkor konvergens, ha az A mátrix soronként domináns főátlójú, vagyis ha teljesül:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \forall i = 1, ..., n.$$

Ha előre megadott ε pontossággal szeretnénk közelíteni a megoldást, a következő megállási kritériumot használhatjuk:

$$\left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\| \leq \frac{1 - \|B\|}{\|B\|}\varepsilon$$

ahol

$$\|x\| = \max\{|x_i|, i = 1, ..., n\}$$

Feladat:1. Adjon iterációs megoldást adott egyenletrendszerre mindkét módszerrel és irassa ki az az iterációk számát is. Ha nem domináns főátlójú a beadott mátrix jelezze, hogy nem konvergens az iteráció.

2.(választható) Relaxációs eljárás:

A Gauss-Seidel módszert a következőképpen lehet feljavítani egy ω iterációs paraméter bevezetésével:

legyen $\omega \neq 0$

$$\omega(D + L + U)x = \omega b,$$

ennek alapján az A mt́rix a következő alakba írható át:

$$A = (\frac{D}{\omega} - L) - (\frac{1-\omega}{\omega}D + U),$$

ennek alapj án a következő iterációs eljárást kapjuk:

$$(\frac{D}{\omega} - L)x^{(k+1)} = (\frac{1-\omega}{\omega}D + U)x^{(k)} + b, k = 0, 1...$$

Ha A szimmetrikus és pozitív definit, akkor $0 < \omega < 2$ esetén az eljárás konvergens. Ha $\omega > 1$ az eljárást túlrelaxálásnak nevezzük, ha $\omega = 1$ - visszakapjuk a Gauss -Seidel iterációt.