Lagrange interpoláció

Lagrange interpolációs polinom Newton alakja

Tekintsük az $x_0, x_1, ..., x_m \in [a,b]$ csomópontokat és legyen f egy tetszőleges az $[a,b]$ intervallumon értelmezett függvény. Az $x_0, x_1, ..., x_k$ csomópontokhoz tartozó Lagrange polinom legyen $L_k f$, illetve $(L_0 f)(x_k) = f(x_k), k = 0, 1, ..., m$

1. Lemma. *Egyértelműen létezik olyan $\alpha_k \in R$ konstans,amellyel*

$$(L_k f)(x) = (L_{k-1} f)(x) + \alpha_k (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{k-1}). \tag{1}$$

Az α_k konstans a $L_k f$ Lagrange polinom x^k tényező együtthatóját adja meg. Ezen konstansokra új jelöléseket vezetünk be, legyen $[x_0, x_1, ..., x_k; f] = \alpha_k$.

2. Lemma.

$$[x_0, x_1, ..., x_k; f] = \frac{[x_1, x_2, ..., x_k; f] - [x_0, x_1, ..., x_{k-1}; f]}{x_k - x_0}, \forall k \geq 1 \tag{2}$$

$$[x_i; f] = f(x_i), i = 0, 1, ..., k.$$

3. Értelmezés. *A $[x_0, x_1, ..., x_k; f]$ valós számokat az f fügvény $x_0, x_1, ..., x_k$ csomópontokra vonatkozó osztott differenciájának nevezzük.*

A (1) összefüggés alapján a $L_m f$ interpolációs polinom felírható a következő módon is:

$$(L_m f)(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{m} [x_0, x_1, ..., x_i; f](x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1}) \tag{3}$$

amelyet a *Lagrange polinom Newton alakjá*nak nevezzük. Ennek alapján a Lagrange polinom meghatározásához az $[x_0, x_1, ..., x_i; f], i = 0, 1, ..., m$ osztott differenciákat kell kiszámítani. Az osztott differenciák kiszámítására a következő táblázat írható fel:

$$\begin{array}{llllllll}
x_0 & [x_0;f] & \to & [x_0,x_1;f] & \to & [x_0,x_1,x_2;f] & \to & [x_0,x_1,x_2,x_3;f]\\
 & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
x_1 & [x_1;f] & \to & [x_1,x_2;f] & \to & [x_1,x_2,x_3;f] & & \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
x_2 & [x_2;f] & \to & [x_2,x_3;f] & & & & \\
 & & \nearrow & & & & & \\
x_3 & [x_3;f] & & & & & & \\
\vdots & & & & & & &
\end{array}$$

A táblázat második oszlopában az f függvény csomópontbeli értékei találhatók, a táblázat többi eleme a 2. Lemmában megadott rekurzív összefüggéssel határozható meg.

Az osztott differenciák ismeretében a Newton polinom értékét egy x pontban a (3) képlet segítségével számíthatjuk ki.

FELADAT:

Írjunk egy m-filet amely egy adott csomópont vektorra és a csomópontokban a függvényértékek ismeretében, kiszámítja -a Lagrange polinom Newton alakját használva- az interpolációs polinom értéket egy tetszőleges pontban, majd ennek segítségével ábrázoljuk ugyanazon grafikus képernyőn a Lagrange polinomot és az approximálandó f függvényt.
Alkalmazzuk ezt a Runge függvényre: $f : [-5, 5] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.