Numerikus módszerek

Vizsgatételek 2018/19

1. I. Parciális anyaga

1. Hiba. Relatív hiba. Számítási hibák terjedése.
2. Lineáris egyenletrendszerek numerikus megoldása. Hibaanalízis. (Kondíciószámok)
3. Gauss-elimináció.
4. LU-felbontás.
5. Cholesky-felbontás
6. Lineáris egyenletrendszerek iterációs megoldása
7. Jacobi- és Gauss-Seidel-iteráció (Konvergeniciatétel,bizonyítás).
8. Legjobb négyzetes közelítés (diszkrét, folytonos eset).
9. Ortogonális polinomok(általános tulajdonságok).
10. Legendre-, Elsőfajú Csebisev- polinomok.Tulajdonságok.
11. Peano-tétel (kijelentés, bizonyítás).
12. Lagrange-interpoláció.
13. Lagrange-interpoláció maradéktagja (kijelentés, bizonyítás-egy a három közül).
14. Lagrange-interpolációs polinom Newton alakja.
15. Newille algoritmus. Aitken-módszer.
16. Hermite-interpoláció
17. Kétszeres csomópontú Hermite-polinom.
18. Birkhoff-interpoláció

Feladatok az I parciális anyagához

1. Példa. *Oldjuk meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval, részleges főelemkiválasztással és határozzuk meg a mátrix determinánsát.*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -8 \\ 2 & 4 & -5 \\ -4 & -6 & 5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

1 lépés Mivel $\max\{|a_{11}|, |a_{21}|, |a_{31}|\} = \max\{0, 2, 4\} = 4$, ezért fel kell cserélni az 1 és 3 sort, illetve a 2. sorhoz hozzádjuk az első sor 2/4-ét

$$\begin{bmatrix} -4 & -6 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -4 & -6 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & -5/2 & 11/2 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \end{bmatrix}$$

2.lépés Folytatva a részleges főelemkiválasztást, mivel

$$\max\{|a_{22}|, |a_{23}|\} = \max\{1, 7\} = 7$$

a 3. és 2. sort fel kell cserélni és a 3. sorhoz hozzádjuk a 2. sor -1/7-szeresét.

$$\begin{bmatrix} -4 & -6 & 5 & 9 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & -5/2 & 11/2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -4 & -6 & -5 & 9 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -19/14 & 71/14 \end{bmatrix}$$

Figyelembe véve, hogy két sorcsere volt, így a determináns értéke

$$det(A) = (-4) \cdot 7 \cdot (-19/14) \cdot (-1)^2 = 38.$$

Az utolsó egyenletből $x_3 = -71/19$, illetve fokozatos visszahelyettesítéssel a többi ismeretlen $x_2 = -73/19, x_1 = -22/19$.

Home Page

Title Page

Contents

Go Back

Full Screen

Close

Quit

2. Példa. *Oldjuk meg az $Ax_1 = b_1$ és $Ax_2 = b_2$ lineáris egyenletrendszereket Gauss-elimináció segítségével főelemkiválasztás nélkül.*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>1. lépés</u>
2.sor$-2 \cdot 1$. sor
3.sor$-3 \cdot 1$.sor
4.sor-1.sor

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 8 & 8 \\ 1 & 4 & -1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

<u>2.lépés</u>:
3.sor-2.sor
4.sor-2.sor

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Az $Ax_1 = b_1$ egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, mert ez kompatibilis és határozatlan, a másik egyenletrendszer inkompatibilis.

3. Példa. *Határozd meg Gauss eliminációval (főelemkiválasztás nélkül) a következő mátrix inverzét:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Meg kell határoznunk azt az X mátrixot, melyre igaz, hogy $A \cdot X = I$.
Bevezetjük a következő jelöléseket: $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $I = (e_1, e_2, ..., e_n)$.
Az előbb felírt mátrixegyenlet valójában n darab lineáris egyenletrendszer: $A \cdot x_i = e_i, i = 1, .., n$
Felírjuk a jobb oldallal kiegészített bővített mátrixot és elvégezzük rajta a Gauss eliminációt főelemkiválasztás nélkül:

1. lépés
2.*sor*$-2 \cdot 1$. *sor*
3.*sor*$-(-1) \cdot 1$.*sor*

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to$$

2.lépés:
3.*sor*$-3 \cdot 2$.*sor*

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

Megoldva a háromszögmátrixú egyenletrendszereket a három szabadtagvektorra: $b_1 = [1, -2, 7]^T$, $b_2 = [0, 1, 3]^T$, $b_3 = [0, 0, 1]^T$, a következő megoldásokat kapjuk:

$x_1 = [9, -1, -7]^T$, $x_2 = [-7/2, 1/2, 3]$, $x_3 = [1, 0, -1]^T$, *így az* A *mátrix inverze:*

$$\begin{bmatrix} 9 & -7/2 & 1 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ -7 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Példa. *Számítsd ki az* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ *mátrix kondíciószámát 1 és* ∞ *mátrixnorma esetén, tudva, hogy* $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\|A\|_1 = \max\{4, 9\} = 9, \left\|A^{-1}\right\|_1 = \max\{10, 3\} = 10$$

ahonnan, $cond_1(A) = 9 \cdot 10 = 90$, *illetve*

$$\|A\|_\infty = \max\{3, 10\} = 10, \left\|A^{-1}\right\|_\infty = \max\{9, 4\} = 9$$

és így $cond_\infty(A) = 90$.

5. Példa. *Határozzuk meg a következő mátrix LUP felbontását*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Főelemkiválasztás után az első két sort ki kell cserélni illetve a Gauss eliminációhoz az első sor 1/3-szorosát ki kell vonni a második egyenletből:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1/3 & 5/3 & 10/3 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Home Page

Title Page

Contents

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 7 of 14

Go Back

Full Screen

Close

Quit

A második lépésben nem kell sorcserét végezni, a második sor 3/5-ét kell kivonni a harmadik egyenletből, közben a főátló alá helyezzük az L mátrix elemeit:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1/3 & 5/3 & 10/3 \\ 0 & 3/5 & 6 \end{bmatrix}$$

ahonan következik, hogy

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5/3 & 10/3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 3/5 & 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Példa. *Határozzuk meg a következő mátrix Cholesky-felbontását*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$L =?$ *úgy, hogy* $L \cdot L^t = A$, *vagyis*

$$\begin{bmatrix} .l_1 & 0 & 0 \\ l_2 & l_3 & 0 \\ l_4 & l_5 & l_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_4 \\ 0 & l_3 & l_5 \\ 0 & 0 & l_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Az első oszlop alapján
$l_1^2 = 2 \longrightarrow l_1 = \sqrt{2}$
$l_2 \cdot \cdot l_1 = 1 \longrightarrow > l_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$l_4 \cdot l_1 = 2 \longrightarrow l_4 = \sqrt{2}.$
A második oszlop alapján
$l_2^2 + l_3^2 = 2 \longrightarrow l_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$l_4 \cdot l_2 + l_5 \cdot l_3 = 1 \longrightarrow l_5 = 0$
A harmadik oszlop alapján $l_4^2 + l_5^2 + l_6^2 = 4 \longrightarrow l_6 = \sqrt{2}$

$$L = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

7. Példa. *Határozd meg az alábbi pontokra négyzetesen legjobban illeszkedő egyenest:*

$$(-1,0),(0,1),(1,0),(2,2).$$

Ekkor $g(x) = Ax + B$ *és így*

$$F(A,B) = \sum_{i=1}^{4}(f(x)-Ax-B)^2 = (0+A-B)^2+(1-B)^2+(0-A-B)^2+(2-2A-B)^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial A} &= 2(A-B)-2(-A-B)-4(2-2A-B) = 12A+4B-8=0 \\ \frac{\partial F}{\partial B} &= -2(A-B)-2(1-B)-2(-A-B)-2(2-2A-B) = 4A+8B-6=0 \end{aligned}$$

ahonnan $A = 1/2$ *és* $B = 1/2$, *tehát* $g(x) = 1/2x + 1/2$.

8. Példa. *Adjuk meg azt a legfeljebb harmadfokú polinomot (vagy azt a minimális fokú polinomot), amely áthalad a következő pontokon:*

$$(-1,1),(0,-1),(1,-1),(2,1).$$

Lagrange interpolációt alkalmazunk:

$$(L_3f)(x) = l_0(x)f(x_0) + ... + l_3(x)f(x_3)$$

ahol

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1)(-2)(-3)} = \frac{x(x-1)(x-2)}{-6} \\
l_1(x) &= \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{1(-1)(-2)} = \frac{(x^2-1)(x-2)}{2} \\
l_2(x) &= \frac{(x+1)x(x-2)}{2(-1)} = \frac{x(x+1)(x-2)}{-2} \\
l_3(x) &= \frac{(x+1)x(x-1)}{3\cdot 2} = \frac{x(x^2-1)}{6}
\end{aligned}$$

és így

$$(L_3 f)(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{-6} - \frac{(x^2-1)(x-2)}{2} - \frac{x(x+1)(x-2)}{2} + \frac{x(x^2-1)}{6}$$

9. Példa. *Határozzuk meg az $f(x) = \log_2(x)$ függvényt az 1,2,4 pontokban interpoláló polinomot, adjuk meg $f(\frac{1}{3})$ közelítését és becsüljük meg a hibát.*
Írjuk fel az interpolációs polinom Newton-alakját, ehhez először az osztottdifferencia táblázatot:

$$\begin{array}{llll}
x_0 = 1 & 0 & & \\
x_1 = 2 & 1 & \frac{1-0}{2-1} = 1 & \\
z_2 = 4 & 2 & \frac{2-1}{4-2} = 1/2 & \frac{1/2-1}{4-1} = -\frac{1}{6}
\end{array}$$

Az átlón kapott értékek alapján akkor a Newton-polinom:

$$L_2 f(x) = 0 + (x-1) + (x-1)(x-2)(-\frac{1}{6})$$

Az $f(3) = \log_2(3)$ *közelítő értéke*

$$L_2 f(3) = (3-1) - \frac{1}{6}(3-1)(3-2) = 2 - 1/3$$

$$R_2 f(3) = \frac{u(3)}{3!} f^{(3)}(\xi) \leq \frac{u(3)}{3!} M_3 f,$$

ahol $u(3) = (3-1)(3-2)(3-4) = -2, M_3 f = \max_{x\in[1,4]} |f^{(3)}(x)|$
$\log_2(x) = \frac{\ln x}{\ln 2}$, $f'(x) = \frac{1}{\ln 2} x^{-1}, \ldots, f'''(x) = \frac{2}{\ln 2} x^{-3}$, *ahonnan* $x \in [1,4]$ *esetén* $M_3 f = \frac{2}{\ln 2}$

$$|R_2 f(x)| \leq \frac{|u(x)|}{3!} M_3 f \leq \frac{2}{3 \ln 2}$$

10. Példa. *Az* $f(x) = \frac{1}{x+3}$ *függvényt interpoláljuk az* $\{x_0^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}\}$ *különböző pontokból álló pontrendszeren, ahol az alappontok kifeszítik a* $[0,1]$ *intervallumot, ha* $n \to \infty$. *Egyenletesen konvergál-e az interpolációs polinomok sorozata a függvényhez?*
$|f(x) - L_n f(x)| = |R_n f(x)| \leq \frac{|u(x)|}{(n+1)!} \parallel f^{(n+1)} \parallel_\infty$ *Számítsuk ki az* f *függvény deriváltjait:*

$$f'(x) = -(x+3)^{-2}, f''(x) = 2(x+3)^{-3}, f'''(x) = -6(x+3)^{-4}, ..$$

Indukcióval igazolható, hogy

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k k!(x+3)^{-(k+1)} = \frac{(-1)^k k!}{(x+3)^{k+1}}, k \in \mathbb{N}$$

$$\parallel f^{(n+1)} \parallel_\infty = \max\{|f^{(n+1)}(x)|, x \in [0,1]\} = \frac{(n+1)!}{3^{n+2}}$$

De $u(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i^{(n)})$, mivel $|x - x_i^{(n)}| < 1, \forall i = 0, 1, ..., n$

$$|u(x)| = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i^{(n)}) < 1.$$

A hibabecslésbe helyettesítve

$$|f(x) - L_n f(x)| = |R_n f(x)| \leq \frac{(n+1)!}{(n+1)!3^{n+2}} = \frac{1}{3^{n+2}} \longrightarrow 0, n \to \infty.$$

11. Példa. *Legyen* $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $T_n f$ *az n-ed fokú Taylor polinom az* $x_0 = 0$ *pontra. Határozzuk meg az* α *paramétert úgy, hogy ha az* f *függvényt* $T_3 f$ *harmadfokú Taylor polinommal közelítjük a* $[0, \alpha]$ *intervallumon, az abszolút hiba* $\leq 10^{-6}$.

Ha az alappont $x_0 = 0$, akkor a Taylor polinom:

$$(T_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0),$$

illetve a maradéktag:

$$(R_n f)(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Ha harmadfokú Taylor polinommal közelítünk, akkor a maradéktag

$$(R_3 f)(x) = \frac{x^4}{4!} f^{(4)}(\xi),$$

ahol viszont

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, f'''(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}, f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5},$$

és így

$$|(R_3 f)(x)| \leq \frac{x^4}{4!}\frac{24}{1} = x^4,$$

tehát $x^4 \leq 10^{-6} \Rightarrow x \leq 10^{-3/2} \Rightarrow \alpha = 10^{-3/2}$.

12. Példa. *Ha tudjuk, hogy* $f(0) = -1, f'(0) = -4,\ f(2) = -1$ *és* $f'(2) = 4$, *határozd meg a függvény értékének egy közelítését az* $x = 1/2$ *pontban, megfelelő interpolációs polinomot használva.*
$x_0 = 0, x_1 = 2,\ r_0 = 1, r_1 = 1,$ *tehát* $n = 3$.
Hermite interpolációt kell használni.

$$H_3 f(x) = h_0(x)f(0) + h_1(x)f'(0) + h_2(x)f(2) + h_3(x)f'(2)$$

Hermite polinom osztott differenciás alakját használva:

$$H_3 f(x) = f(z_0) + (x-z_0)[z_0,z_1;f] + (x-z_0)(x-z_1)[z_0,z_1,z_2;f] + (x-z_0)(x-z_1)(x-z_2)[z_0,z_1,z_2,z_3;$$

ahol $z_0 = x_0, z_1 = x_0, z_2 = x_1, z_3 = x_1$ *Az osztott differenciatáblázat :*

$$\begin{array}{llllll}
z_0 = x_0 & 0 & -1 & & & \\
z_1 = x_0 & 0 & -1 & -4 & & \\
z_2 = x_1 & 2 & -1 & \frac{-1-(-1)}{2-0} = 0 & \frac{0-(-4)}{2-0} = 2 & \\
z_3 = x_1 & 2 & -1 & 4 & \frac{4-0}{2-0} = 2 & \frac{2-2}{2-0} = 0
\end{array}$$

$$H_3 f(x) = -1 - 4x + 2x^2 + 0x^2(x-2) = 2x^2 - 4x - 1$$

vagyis $f(1/2) \approx H_3 f(1/2) = 1/2 - 2 - 1 = -5/2$

13. Példa. *Tekintsük az* $f(x) = \frac{1}{x+1}$ *függvényt és a* $0, 1$ *alappontokat.*
a.) Írjuk fel az f-et interpoláló kétszeres alappontú Hermite polinomot

b.) Becsüljük a polinom hibáját az $\frac{1}{3}$ pontban.
A Hermite-polinom Newton alakjához készítsük el az osztottdifferencia táblázatot:

$z_0 = x_0$	0	1			
$z_1 = x_0$	0	1	-1		
$z_2 = x_1$	1	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	
$z_3 = x_1$	1	$1/2$	$-1/4$	$1/4$	$-1/4$

$$H_3f(x) = 1+(-1)(x-0)+1/2(x-0)(x-0)+(-1/4)(x-0)(x-0)(x-1) = -\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{4}x^2-x+1$$

b.) $H_3f(1/3) = 1 - 1/3 + 1/18 - 1/36(-2/3) = \frac{20}{27} = 0.7407$, *és* $f(1/3) = 3/4 = 0.75$

$$R_3f(x) = \frac{u(x)}{4!}f^{(4)}(\xi),\ \ \xi \in (0,1)$$

Mivel $f(x) = (x+1)^{-1}$, $f^{(4)}(x) = 24(1+x)^{(-5)}$, *ahonnan*

$$M_4f = \| f^{(4)} \|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f^{(4)}(x)| = 24 = 4!$$

$$u(1/3) = (1/3-0)^2(1/3-1)^2 = \frac{4}{81}$$

$$|R_3f(\frac{1}{3})| \le \frac{|u(1/3)|}{4!}M_4f = \frac{4}{81}$$

14. Példa. *Határozzuk meg az* $f : [0,h] \to \mathbb{R}, h \in \mathbb{R}_+$ *függvénynek és az* $f(0), f'(h)$ *információknak megfelelő interpolációs képletet.*
Birkhoff interpolációt kell alkalmazni:

$$f = B_1f + R_1f, I_0 = \{0\}, I_1 = \{1\}$$

$$(B_1f)(x) = b_{00}(x)f(0) + b_{11}(x)f'(h).$$

Mivel $(B_1 f)(0) = f(0)$ *és* $(B_1 f)'(h) = f'(h)$ *következnek a fundamentális Bernstein polinomokra a következő összefüggések:*

$$\begin{aligned} b_{00}(0) &= 1, \quad b_{11}(0) = 0 \\ b'_{00}(h) &= 0, \quad b'_{11}(h) = 1 \end{aligned}$$

ahonnan, mivel $b_{00}(x) = ax + b, \Rightarrow b = 1, a = 0,$ *vagyis* $b_{00}(x) = 1$.
Hasonlóan $b_{11}(x) = cx + d, \Rightarrow c = 1, d = 0,$ *tehát* $b_{11}(x) = x$.

$$(B_1 f)(x) = f(0) + x f'(h),$$

a maradéktag

$$(R_1 f)(x) = \int_0^h \varphi(x,t) f''(t) dt,$$

ahol

$$\varphi(x,t) = R_1^x[(x-t)_+] = (x-t)_+ - (0-t)_+ - x(h-t)'_+ = (x-t)_+ - x,$$

ahonnan $\varphi(x,t) = -t$, *ha* $t \le x$, *illetve* $\varphi(x,t) = -x$, *ha* $t > x$.