1. LUP dekompozíció

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egy mátix, vagyis

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

ekkor létezik A-nak egy $PA = LU$ alakú felbontása, ahol L az átlóján egyeseket tartalmazó alsóháromszög mátrix, U felsőháromszög mátrix, P pedig egy permutációs mátrix ($P_\sigma = [e_{\sigma(1)}, ..., e_{\sigma(n)}]$). A felbontás előnye, hogy könnyebbé teszi az egyenletrendszer megoldását, amikor azt több különböző szabadtag vektorra kell megoldani.
A Gauss elimináció k-dik lépésében kapott mátrix legyen A_k, ekkor

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)}0 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & 0 & \ddots & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Legyen $a_{i_0k}^{(k)} = \left\{\max\left|a_{ik}^{(k)}\right|, i = k, ..., n\right\}$ és $P_k = P_{\sigma_{i_0}k}$, ekkor P_k az A_k mátrix i_0 és k sorát cseréli ki, a főelemkiválasztás szerint. Az elimináció pedig a következőképpen valósul meg. Ha

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & -\frac{a_{k+1k}}{a_{kk}} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{a_{nk}}{a_{kk}} & 0 \end{pmatrix}, L_kP_kA_k = A_{k+1}$$

látható, hogy az A_k mátrixot balról L_kP_k-val szorozva, az elimináció egy lépését végeztük el, így $n-1$ lépés után a következőt kapjuk

$$L_{n-1}P_{n-1}...L_1P_1A = U.$$

Mert a $P_iL_j = L'_jP_i, i > j$ után az L_i alakja nem változik csupán a nem nulla elemeket tartalmazó oszlopában cserélődik fel két elem, a fenti összefüggést a

$$L_{n-1}L'_{n-2}...L'_1P_{n-1}...P_1A = U$$

alakra hozhatjuk, majd a $(L_{n-1}L'_{n-2}...L'_1)^{-1} = (L'_1)^{-1}...L_{n-1}^{-1}$, $P_{n-1}...P_1 = P$ jelölésekkel következik a $PA = LU$ felbontás.
U egy felső háromszög mátrix, amely a Gauss elimináció végén kapott egyenletrendszer együtthatóiból áll:

$$U = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & ... & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & ... & a_{2n}^{(2)} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}.$$

A L mátrix az elimináció elvégzéséhez szükseges l_{ik} hányadosokból áll.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & 0 \\ l_{21} & 1 & . & . \\ . & . & . & 0 \\ l_{n1} & . & l_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Az A mátrix LUP felbontása alapján, az $Ax = b$ egyenletrendszer három lépésben oldható meg:
1- létrehozzuk az $PA = LU$ faktorizációt
2- megoldjuk az $Ly = Pb$ egyenletrendszert
3- megoldjuk az $Ux = y$ egyenletrendszert

2. Cholesky felbontás

Legyen adott az $L \in \mathbb{R}^{n\times n}, n \in \mathbb{N}$ négyzetes mátrix, ha A pozitív definit ($x^TAx > 0, x \in \mathbb{R}$) és szimmetrikus ($A^T = A$), akkor létezik az A-nak egy $LL^T = A$ alakú felbontása, ahol L alsó háromszögmátrix,

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \vdots & 0 \end{pmatrix}, L^T = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & \dots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & \dots & l_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & l_{nn} \end{pmatrix}.$$

Tehát

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik}l_{jk} = \sum_{k=1}^{\min\{i,j\}} l_{ik}l_{jk}, \; i,j = 1,...,n.$$

A fenti egyenletekből egyértelműen meghatározhatjuk az L mátrixot. Először az L első sorát számoljuk, majd a másodikat és így tovább, ekkor az l_{ij} számolásához minden tag a rendelkezésünkre fog állni:

$$l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}}(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}l_{ik}),\ l_{ii}^2 = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2,\ i,j = 1,...,n$$

Mivel A pozitív definit az átlón lévő elemek is kiszámíthatóak.
FELADAT:
Egy m-filet kérek egy tetszőleges mátrix LUP felbontására.
(+) Cholesky felbontás implementálása.