Aitken-algoritmus

1. Lagrange-interpoláció

Legyen $[a, b] \subset R$ és $f : [a, b] \to R$. Adott az m természetes szám, a $x_i \in [a, b], i = 0, 1, ..., m$ páronként különboző interpolációs csomópont vagy alappont és az $f(x_i)$ függvényértékek a csomópontokban.

1. Értelmezés. *A P_m térre és a $\lambda_i(f) = f(x_i), i = 0, 1, ..., m,$ öszszefüggéssel értelmezett funkcionálokra vonatkozó interpolációs feladatot Lagrange-interpolációs feladatnak nevezzük.*

2. Értelmezés. *A feladat megoldását, ha létezik, Lagrange-interpolációs polinomnak nevezzük és $L_m f$-el jelöljük.*

1. Megjegyzés. *A Lagrange-interpolációs polinom annak a minimális fokú polinomnak a meghatározását jelenti, amelyre teljesülnek a $P(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, ..., m$ feltételek, vagyis amely átmegy az $(x_i, f(x_i)), i = 0, 1, ..., m$ koordinátájú pontokon.*

1. Tétel. *A Lagrange-interpolációs feladatnak egyértelmű megoldása van.*

A Lagrange-interpolációs polinom a következő alakú:

$$(L_m f)(x) = \sum_{k=0}^{m} l_k(x) f(x_k) \tag{1}$$

ahol minden $0 \leq k \leq$ m-re az

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_m)}{(x - x_k)(x_k - x_0)(x_k - x_1)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})...(x_k - x_m)}$$

polinomokat fundamentális Lagrange-polinomoknak vagy Lagrange-féle bázis-polinomoknak nevezzük.
Az

$$f = L_m f + R_m f \tag{2}$$

képletet Lagrange-interpolációs képletnek nevezzük, ahol $R_m f$ a maradéktag.
Ha $\alpha = min\{x_0, x_1, ..., x_m\}$, $\beta = max\{x_0, x_1, ..., x_m\}$ és $f \in C^m[\alpha, \beta]$ illetve létezik $f^{(m+1)}$ az (α, β) intervallumon, akkor létezik $\xi \in (a, b)$ úgy, hogy

$$(R_m f)(x) = \frac{u(x)}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi).$$

Legyen $x \neq x_i$, ekkor $f(x) \approx (L_m f)(x)$, ahol a közelítés hibáját $(R_m f)(x)$ adja.
Ha előre megadott $\epsilon > 0$ pontossggal szeretnénk közelíteni, akkor $|(R_m f)(x)| < \epsilon$.
A szükséges fokszám egy adott pontosság eléréséhez általában ismeretlen. Ez a maradéktagból meghatározható, de ehhez ismerni kell $\left\|f^{(m+1)}\right\|_\infty$.
A feladat megoldásához a következő táblázatot generáljuk:

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & Q_{0,0} & & & & \\
x_1 & Q_{1,0} & Q_{1,1} & & & \\
x_2 & Q_{2,0} & Q_{2,1} & Q_{2,2} & & \\
x_3 & Q_{3,0} & Q_{3,1} & Q_{3,2} & Q_{3,3} & \\
x_4 & Q_{4,0} & Q_{4,1} & Q_{4,2} & Q_{4,3} & Q_{4,4}
\end{array}$$

ahol $Q_{i,0} = f(x_i)$, illetve $Q_{i,i} = (L_i f)(x)$

$$Q_{i,j+1} = \frac{(x_i - x)Q_{j,j} - (x_j - x)Q_{i,j}}{x_i - x_j},\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{0, i-1}.$$

Ha az eljárás konvergens, akkor a $Q_{i,i}$ sorozat az $f(x)$ függvényértékhez konvergál, tehát alkalmazhatjuk a következő megállási feltételt:

$$|Q_{i,i} - Q_{i-1,i-1}| < \epsilon.$$

Az algoritmus gyorsításához rendezzük a csomópontokat az $|x_i - x|$ távolságok növekvő sorrendjében ($|x_i - x| < |x_j - x|,\ i < j$).
A fenti módszer az Aitken-algoritmus.

1. Feladat. *Ha adottak az x_i csomópontok és ezekben a függvény értékei $f(x_i)$, közelítsük az $f(x), x \neq x_i$ függvényértéket előre megadott $\epsilon > 0$ pontossággal, Aitken módszerrel. Ha a megadott csomópontszám nem elegendő a kért pontosság eléréséhez közöljük a felhasználóval.*
PÉLDA

x_i	$f(x_i)$
1.0	0.7651977
1.3	0.6200860
1.6	0.4554022
1.9	0.2818186
2.2	0.1103623

az $x = 1.5$ *pontban* $(L_4 f)(1.5) = 0.5118200$, $\epsilon = 10^{-4}$.