

Véletlenszám-generátorok

5. rész

– egy MATLAB® alapú megközelítés –

Róth Ágoston, Vas Orsolya

Matematika és Informatika Intézet, Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár, Románia

(agoston.roth@gmail.com, vas.orsolya@yahoo.com)

5. labor / 2018. október 29. – november 1.



- Az elutasítás módszerének alapértelmezett változata azt feltételezte, hogy az $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ sűrűségfüggvényű $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ valószínűségi vektor esetén létezik egy olyan $g : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ sűrűségfüggvény és egy olyan $c \geq 1$ elutasítási konstans, amelyek esetén teljesül az

$$f(x) \leq cg(x), \forall x \in \mathbb{R}^d \quad (1)$$

egyenlőtlenség.

- A 4. labor számgenerátoraiban, az (1)-es egyenlőtlenségre épülő elutasítás módszerének alkalmazása során, az $\frac{f}{cg}$ arányt N -szer értékeltük ki, ahol az N geometriai eloszlású valószínűségi változó a bemutatott algoritmusok **ismételd–ameddig** ciklusainak lépésszámát mérte. Azt is kimutattuk, hogy az N várható értékét éppen az elutasítási konstans határozza meg, azaz

$$E(N) = c.$$

- Általában az $\frac{f}{cg}$ arány kiértékelése egy lassú és költséges művelet, mert az f sűrűségfüggvény alakja feltehetően bonyolult, ellenben találtunk volna más módszert is ilyen sűrűségfüggvényű valószínűségi változók mintavételezésére. Mi több előfordulhat, hogy az f explicit alakja nem ismert, mert vagy integrálalakban, vagy valamilyen nemlineáris egyenlet megoldásaként adott. Ilyen esetekben **célszerű hatékonysági szempontok miatt az $\frac{f}{cg}$ tört kiértékelését vagy teljesen elkerülni, vagy használatát minimálisra csökkenteni.**
- Ebben a részben a George Marsaglia által bevezetett **[Marsaglia, 1977]** **közrefogás módszerét** ismertetjük, amely elkerüli az $\frac{f}{cg}$ arány nagy valószínűséggel történő kiértékelését.



- A módszer valójában abból áll, hogy egy adott $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ sűrűségfüggvény esetén találjunk két olyan könnyen kiértékelhető $h_1, h_2 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyre fennáll a

$$0 \leq h_1(x) \leq f(x) \leq h_2(x) \leq cg(x), \forall x \in \mathbb{R}^d \quad (2)$$

egyenlőtlenség.

- Ha a (2)-es feltételt sikerül biztosítani, akkor az alábbi algoritmushoz hasonlóan járhatunk el f sűrűségfüggvényű valószínűségi változók generálására.



1. Algoritmus (A közrefogás módszere)

- **Bemenet:** a (2)-es feltételt kielégítő $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ sűrűségfüggvények és a $h_1, h_2 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ határoló függvények, valamint az $n \geq 1$ természetes szám, amely a kimeneti mintavétel méretét határozza meg.
- **Kimenet:** az f sűrűségfüggvényű valószínűségi változónak egy n -elemű független $\{X_i\}_{i=1}^n$ mintavétele.

- 1 Minden $i = 1, 2, \dots, n$ index esetén **végezd el:**
- 2 **ismételd:**
- 3 generáld az $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$, valamint az ettől független g sűrűségfüggvényű Y valószínűségi változót
- 4 $W \leftarrow Ucg(Y)$
- 5 $L \leftarrow [W \leq h_1(Y)]$
- 6 **ha** $[L == \text{hamis}]$
- 7 **akkor ha** $W \leq h_2(Y)$, **akkor** $L \leftarrow [W \leq f(Y)]$
- 8 **ameddig** $[L == \text{igaz}]$
- 9 $X_i \leftarrow Y$.

- Az 1. algoritmusban egy L nevű logikai változót vezettünk be arra számítva, hogy igaz értéket legtöbbször a $W \leq h_1(Y)$ összehasonlítás (úgynevezett *gyors elfogadási lépés*) során vesz fel. A fennmaradt esetekben az úgynevezett *gyors elutasítási lépést* ($W > h_2(Y)$) használjuk, továbbá csak azon ritka esetekben értékeljük ki a költséges $W \leq f(Y)$ összehasonlítást, amikor $h_1(Y) \leq W \leq h_2(Y)$.
- A gyors elfogadási és gyors elutasítási lépések elhagyásával a klasszikus elutasítás módszeréhez jutunk vissza a $W = U_{cg}(Y) \leq f(Y)$ leállási feltétel alkalmazásával. Vegyük észre, hogy minden egyes minta generálása várhatóan $E(N) = c$ lépésig tart, akár csak a klasszikus elutasítás módszerére alapuló algoritmusok esetén!
- A továbbiakban az N_f valószínűségi változót tanulmányozzuk, mely azt számolja, hogy hány alkalommal értékeltük ki a költséges f sűrűségfüggvényt egy minta generálásakor.



- Jelölje W_j egy adott minta generálásakor az **ismételd–ameddig** ciklus j -edik iterációjában ($j = 1, 2, \dots, N$) kapott W valószínűségi változót, valamint legyen Y_j az ugyanebben az iterációban generált g sűrűségfüggvényű Y valószínűségi változó!
- Ekkor az

$$N_f = \sum_{j=1}^N \mathbb{1}_{[h_1(Y_j) < W_j < h_2(Y_j)]} \quad (3)$$

egyenlőséget kapjuk, ahol $\mathbb{1}_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ az A eseményhez tartozó indikátor függvényt jelöli, azaz

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \omega \in A, \\ 0, & \text{ha } \omega \notin A. \end{cases}$$



- A továbbiakban a következőképpen gondolkodhatunk:

$$\begin{aligned}
 E(N_f) &= E(N) E(\mathbb{1}_{[h_1(Y_1) < W_1 < h_2(Y_1)]}) \\
 &= E(N) P(h_1(Y_1) < W_1 < h_2(Y_1)) \\
 &= E(N) \int_{\mathbb{R}^d} P(h_1(Y_1) < W_1 < h_2(Y_1) | Y_1 = y) g(y) dy \\
 &= c \int_{\mathbb{R}^d} P(h_1(y) < Ucg(y) < h_2(y)) g(y) dy \\
 &= c \int_{\mathbb{R}^d} \frac{h_2(y) - h_1(y)}{cg(y)} g(y) dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} (h_2(y) - h_1(y)) dy,
 \end{aligned}$$

ahol az utolsó előtti lépésében felhasználtuk a (2)-es egyenlőtlenséget, valamint azt a tényt, hogy az U valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon.



- Amennyiben $h_1(x) \equiv 0$ és $h_2(x) \equiv cg(x)$, vagyis az f sűrűségfüggvényt nem fogjuk közre, akkor

$$E(N_f) = E(N) = c,$$

mert a klasszikus elutasítás módszeréhez kerülünk vissza.

- Ha viszont csak egy gyors elfogadási lépésünk van, azaz ha

$$0 \leq h_1(x) \leq f(x) \leq h_2(x) = cg(x), \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

akkor

$$E(N_f) = c - \int_{\mathbb{R}^d} h_1(x) dx.$$



- Egy $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ alakú sűrűségfüggvény közrefogásához szükséges könnyen kiértékelhető alsó és felső becslőfüggvények szerkesztéséhez például az f Taylor-féle sorbafejtését használhatjuk.
- Ha az f sűrűségfüggvény n -szer folytonosan deriválható, akkor

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2!} f^{(2)}(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\xi), \quad (4)$$

ahol ξ az x paraméter előjelének függvényében egy $[0, x]$, vagy $[x, 0]$ intervallumbeli szám, és $f^{(r)}(x) = \frac{d^r}{dx^r} f(x)$, $r = 0, 1, \dots, n$.

- A (4)-es sorbafejtés utolsó tagját tanulmányozva, az f sűrűségfüggvény számára polinomiális alsó és felső becslőfüggvényeket szerkeszthetünk.



- Példaként térjünk vissza a standard normális eloszlás

$$f_{\mathcal{N}(0,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}$$

sűrűségfüggvényéhez!

- Vegyük észre, hogy az

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + (-1)^n \frac{x^n}{n!} e^{-\xi}$$

függvény minden $x \geq 0$ érték esetén a jól ismert

$$e^{-x} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^j}{j!}$$

sorbafejtés két egymás utáni tagja között húzódik!

- Ezért sajátosan teljesül az

$$1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}, \forall x \geq 0$$

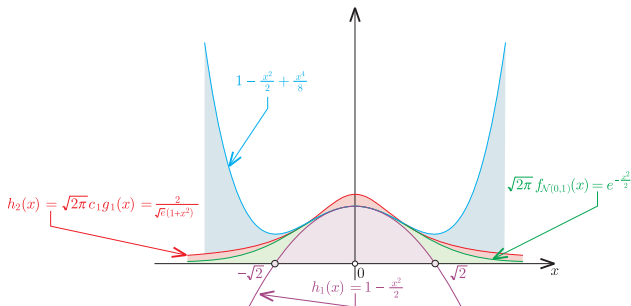
egyenlőtlenség is, amit a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényének az

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \sqrt{2\pi} f_{\mathcal{N}(0,1)}(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}, \forall x \geq 0$$

alakú közrefogására használhatunk fel (az x paramétert az $\frac{x^2}{2}$ törttel helyettesítettük).



- Tekintsük a $c_1 = \sqrt{\frac{2\pi}{e}}$ optimális elutasítási konstanst és a $\theta = 1$ paraméterű Cauchy-féle $g_1(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$ sűrűségfüggvényt, amelyeket a 4. labor 5. algoritmusához szerkesztettünk!
- Tanulmányozzuk az 1. ábrát és a $W = \sqrt{2\pi}c_1 U g_1(Y)$ valószínűségi változót, ahol Y Cauchy-eloszlású $\theta = 1$ paraméterrel, U pedig egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumban!



ábra. Az (5)-ös egyenlőtlenségben, valamint a $W = \sqrt{2\pi}c_1 U g_1(Y)$ valószínűségi változóban szereplő függvények alakja.

- Az 1. ábrán feltüntetett függvények alakjából következik, hogy a

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} \leq \sqrt{2\pi}c_1g_1(x)$$

egyenlőtlenség nem teljesül minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, így a közrefogási módszer által igényelt h_2 függvényt csak a

$$h_2(x) = \sqrt{2\pi}c_1g_1(x), x \in \mathbb{R}$$

alakban választhatjuk meg, vagyis a közrefogás algoritmusból hiányozni fog a $W > h_2(Y)$ gyors elutasítási lépés.

- A $W \leq h_1(Y)$ gyors elfogadási lépéshez szükséges h_1 függvényt viszont megválaszthatjuk a

$$h_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

alakban, amennyiben $|x| \leq \sqrt{2}$.

- Tehát a 4. labor 5. algoritmusához képest a közrefogás módszerével egy valamivel gyorsabb standard normális eloszlású számgenerátort implementálhatunk az 1. algoritmus alábbi módosított változatával.



2. Algoritmus (Közrefogás módszerén alapuló $\mathcal{N}(0, 1)$ -eloszlású számgenerátor)

- **Bemenet:** az $n \geq 1$ természetes szám, amely a kimeneti mintavétel méretét rögzíti.
- **Kimenet:** az $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ valószínűségi változónak egy n -elemű független $\{X_i\}_{i=1}^n$ mintavétele.

$$\textcircled{1} \quad \alpha \leftarrow \frac{1}{\sqrt{e}}, \beta \leftarrow \frac{1}{2}, \gamma \leftarrow \sqrt{2}$$

$\textcircled{2}$ Minden $i = 1, 2, \dots, n$ index esetén **végezd el:**

$\textcircled{3}$ **ismételd:**

$\textcircled{4}$ generáld a független $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$ és $V \sim \mathcal{U}([0, 1])$ valószínűségi változókat

$$\textcircled{5} \quad Y \leftarrow \tan(\pi V)$$

$$\textcircled{6} \quad S \leftarrow \beta Y^2$$

$$\textcircled{7} \quad W \leftarrow \frac{\alpha U}{\beta + S}$$



2. Algoritmus (folytatás)

- 8 **ha** $|Y| > \gamma$
- 9 **akkor** $L \leftarrow \text{hamis}$
- 10 **máskülönben** $L \leftarrow [W \leq 1 - S]$
- 11 **ha** $[L == \text{hamis}]$, **akkor** $L \leftarrow [W \leq e^{-S}]$
- 12 **ameddig** $[L == \text{igaz}]$
- 13 $X_i \leftarrow Y.$

- Ekkor minden egyes mintavételi érték generálásakor a standard normális eloszlás $f_{\mathcal{N}(0,1)}$ sűrűségfüggvényét várhatóan

$$c_1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x| \leq \sqrt{2}} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) dx = \sqrt{\frac{2\pi}{e}} - \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \approx 0,76809$$

alkalommal értékeljük ki.



- Megjegyezzük, hogy számos más véletlenszám-generátor is létezik, és ezek változó hatékonyságú algoritmusai más és más elméleti eredményekre épülhetnek.
- A mostani és az előző laborokon ismertetett inverziós, elutásítás és közrefogás módszerén alapuló algoritmusokkal csak egy rövid bepillantást szerettünk volna nyújtani a nemegyenletes eloszlású diszkrét és folytonos valószínűségi változók mintavételezésébe.
- Az érdeklődő hallgatók számára a [Devroye, 1986, W.H. Press et al., 2007] munkákat ajánlhatjuk.



1. feladat

- Implementáljátok a közrefogás módszerét használó 2. algoritmust és teszteljétek, hogy hány lépés alatt fogadunk el egy mintát, illetve, hogy hányszor értékeljük ki a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényét!

Opcionális feladat (+1 pont elméleti megoldással együtt)

- Határozzátok meg az $\alpha > 0$ paraméter értékét úgy, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \cdot (\cos(x) + 2), & x \in [-\pi, \pi], \\ 0, & x \notin [-\pi, \pi] \end{cases}$$

leképezés egy abszolút folytonos (kompakt tartományon értelmezett) valószínűségi változó sűrűségfüggvénye legyen, majd alkalmazzátok a közrefogás módszerét az adott valószínűségi változó mintavételezésére. Hasonlítsátok össze az így kapott mintavétel hisztogramát a korrigált sűrűségfüggvény alakjával!

- Az algoritmusotok várhatóan hányszor értékeli ki a mintavételezett valószínűségi változó sűrűségfüggvényét egy-egy minta generálásakor?



G. Marsaglia, **1977**.

The squeeze method for generating gamma variates,
Computers and Mathematics with Applications, 3(4):321–325.



L. Devroye, **1986**.

Non-Uniform Random Variate Generation,
Springer-Verlag New York Inc.



W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, **2007**.

Numerical recipes. The art of scientific computing, 3rd Edition,
Cambridge University Press.

