# Véletlenszám-generátorok

6. rész

– egy MATLAB® alapú megközelítés –

Róth Ágoston, Vas Orsolya

Matematika és Informatika Intézet, Babeș-Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár, Románia

(agoston.roth@gmail.com, vas.orsolya@yahoo.com)

6. labor / 2018. november 5–8.

## 1. Értelmezés (Többváltozós normális eloszlású valószínűségi vektor)

Az általános *d-dimenziós* ($d \geq 2$) *normális eloszlású* $X = {}^t[X_i]_{i=1}^d$ valószínűségi vektort az

$$f_{\mathcal{N}_d(\mu,\Sigma)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \sqrt{\det \Sigma}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^t \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)}, \ \mathbf{x} = {}^t[x_i] \in \mathbb{R}^d \qquad (1)$$

sűrűségfüggvénnyel jellemezzük és az $\mathcal{N}_d(\mu, \Sigma)$ szimbólummal jelöljük, ahol a nem feltétlenül független $X_i$ komponensek $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i)$ paraméterű ($\mu_i \in \mathbb{R}, \sigma_i > 0$) normális eloszlású valószínűségi változók,

$$\mu = {}^t[E(X_i)]_{i=1}^d = {}^t[\mu_i]_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d$$

az egyes komponensek várható értékeit tartalmazó vektor,

$$\begin{aligned}\Sigma &= \left[\operatorname{cov}(X_i, X_j)\right]_{i=1,j=1}^{d,d} = \left[E\left((X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)\right)\right]_{i=1,j=1}^{d,d} \\ &= \left[\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j\right]_{i=1,j=1}^{d,d} \in \mathcal{M}_{d,d}(\mathbb{R})\end{aligned}$$

a komponensek közti kovariancia együtthatókból képezett pozitív definit szimmetrikus mátrix, és

$$\left[\rho_{ij}\right]_{i=1,j=1}^{d,d} \in \mathcal{M}_{d,d}([-1,1])$$

a komponensek közti korrelációs együtthatók szimmetrikus mátrixa.

- Kétdimenziós esetben, a $\mu = {}^t[\mu_1, \mu_2]$ és a

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

megválasztással, a $\rho \in [-1, +1]$ korrelációs együtthatójú

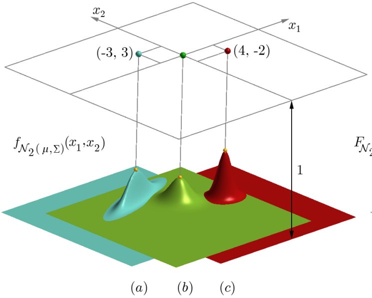
$${}^t[X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1), X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)]$$

binormális eloszlású valószínűségi vektor sűrűségfüggvénye az

$$f_{\mathcal{N}_2(\mu,\Sigma)}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\cdot\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\cdot\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2} + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]},$$

$$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

alakot ölti, amely valójában egy kétváltozós valós értékű függvény, azaz egy domborzatjellegű felület.




1. ábra. Különböző paraméterezésű kétdimenziós normális eloszlások sűrűség- és eloszlásfüggvényeit láthatjuk: (a) $\mu = [\mu_1, \mu_2] = [-3, 3]$, $\sigma_1 = \frac{7}{4}$, $\sigma_2 = \frac{3}{4}$, $\rho = 0,8$ (a komponensek különböző szórásúak és korelláltak); (b) $\mu = [\mu_1, \mu_2] = [0, 0]$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\rho = 0$ (standard normális eloszlás); (c) $\mu = [\mu_1, \mu_2] = [4, -2]$, $\sigma_1 = \frac{3}{4}$, $\sigma_2 = \frac{2}{3}$, $\rho = 0$ (a komponensek függetlenek, de különböző szórásúak).

- A Box–Muller-algoritmus két független $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változót használ fel két független standard normális eloszlású valószínűségi változó generálására [Box, Muller, 1958].

## 1. Tétel (Box–Muller-transzformáció)

Legyen $U_1$ és $U_2$ két független, $(0,1)$ intervallumon értelmezett egyenletes eloszlású valószínűségi változó, valamint tekintsük az ezekből képzett

$$X_1(U_1, U_2) = \sqrt{-2\ln(U_1)}\cos(2\pi U_2)$$
$$X_2(U_1, U_2) = \sqrt{-2\ln(U_1)}\sin(2\pi U_2)$$

valószínűségi változókat! Ekkor az $(X_1, X_2)$ valószínűségi vektor komponensei függetlenek és standard normális eloszlásúak.

## Bizonyítás

A bizonyítás tanulmányozása kötelező házi feladat: lásd a nyomtatott jegyzet 128–130. odalait, vagy a digitális jegyzet 135–137. oldalait.

- Az 1. tétel értelmében a következő algoritmust fogalmazhatjuk meg független standard normális eloszlású valószínűségi változók generálására.

**1. Algoritmus (Box–Muller-transzformáció: független komponensű kétdimenziós standard normál eloszlású vektor generálása)**

- *Bemenet:* az $n \geq 1$ természetes szám, amely a kimeneti mintavételek méretét határozza meg.
- *Kimenet:* az $X_1$ és $X_2$ független standard normális eloszlású valószínűségi változóknak egy-egy $n$-elemű független $\left\{X_{1,i}\right\}_{i=1}^{n}$ és $\left\{X_{2,i}\right\}_{i=1}^{n}$ mintavétele.

1. $T \leftarrow 2\pi$
2. **Minden** $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén **végezd el**:
3. generáld a független $U_1 \sim \mathcal{U}\left((0,1]\right)$ és $U_2 \sim \mathcal{U}\left([0,1]\right)$ valószínűségi változókat
4. $R \leftarrow \sqrt{-2\ln\left(U_1\right)}$
5. $\Theta \leftarrow T \cdot U_2$
6. $X_{1,i} \leftarrow R\cos\left(\Theta\right)$
7. $X_{2,i} \leftarrow R\sin\left(\Theta\right)$.

- Az 1. algoritmusbeli $\ln, \sin$ és $\cos$ függvények kiértékelése költséges műveleteknek számítanak. Az alábbi tulajdonsággal a Box–Muller-transzformációból származó algoritmust hatékonyabbá tehetjük.

## 2. Tétel (Marsaglia polárkoordinátás módszere)

Ha a $(Z_1, Z_2)$ valószínűségi vektorral leírt pont egyenletes eloszlású a

$$Z_1^2 + Z_2^2 \leq 1$$

egységnyi körlemezen, akkor az

$$\begin{cases} X_1(Z_1, Z_2) = \sqrt{-2\ln\left(Z_1^2 + Z_2^2\right)}\dfrac{Z_1}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}} \\[2ex] X_2(Z_1, Z_2) = \sqrt{-2\ln\left(Z_1^2 + Z_2^2\right)}\dfrac{Z_2}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}} \end{cases}$$

transzformációval leírt $(X_1, X_2)$ valószínűségi vektor komponensei függetlenek és standard normális eloszlásúak.

## Bizonyítás

A bizonyítás tanulmányozása kötelező házi feladat: lásd a nyomtatott jegyzet 130–131. odalait, vagy az elektronikus jegyzet 137–138. oldalait.

- A 2. tétel értelmében a Marsaglia-féle polárkoordinátás módszerrel az 1. Box–Muller-algoritmusnak egy hatékonyabb változatát kapjuk.

## 2. Algoritmus (Marsaglia polárkoordinátás módszere)

- *Bemenet:* az $n \geq 1$ természetes szám, amely a kimeneti mintavételek azonos méretét rögzíti.
- *Kimenet:* az $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$ és $X_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$ független valószínűségi változóknak egy-egy $n$-elemű független $\{X_{1,i}\}_{i=1}^{n}$ és $\{X_{2,i}\}_{i=1}^{n}$ mintavétele.

1. **Minden** $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén **végezd el**:
2.     **ismételd:**
3.         generáld a független $U_1 \sim \mathcal{U}([0,1])$ és $U_2 \sim \mathcal{U}([0,1])$ valószínűségi változókat
4.         $Z_1 \leftarrow 2U_1 - 1,\ Z_2 \leftarrow 2U_2 - 1,\ S \leftarrow Z_1^2 + Z_2^2$
5.     **ameddig** $0 < S \leq 1$
6.     $T \leftarrow \sqrt{-\dfrac{2\ln(S)}{S}}$
7.     $X_{1,i} \leftarrow T \cdot Z_1$
8.     $X_{2,i} \leftarrow T \cdot Z_2$.

- Annak valószínűségét, hogy a $[-1,1] \times [-1,1]$ négyzetből olyan egyenletes eloszlású és független koordinátájú $(Z_1, Z_2)$ pontokat választunk ki, amelyek a $Z_1^2 + Z_2^2 \leq 1$ egységnyi körlemez területére esnek, az egységnyi kör és a szóban forgó négyzet területének $p = \frac{\pi}{4}$ értékű arányaként fejezhetjük ki.
- Ezért 2. algoritmus **ismételd–ameddig** ciklusa várhatóan $\frac{1}{p} = \frac{4}{\pi} \approx 1,27$ iterációt hajt végre, ameddig egy alkalmas $(Z_1, Z_2)$ párt elfogad a két független standard normális eloszlású valószínűségi változó egy-egy mintájának előállítására.

- Az alábbi négy tulajdonság segítségével olyan általános módszert mutatunk be, amely segítségével általános $\mathcal{N}_d\left(\mu, \Sigma\right)$-eloszlású valószínűségi vektorokat generálhatunk az $\mathcal{N}_d\left(\mathbf{0}_d, \mathbb{1}_d\right)$ standard normális eloszlás alapján.

## 3. Tétel (Standard normális eloszlású valószínűségi vektor lineáris transzformációja)

Az 1. értelmezésbeli $X \sim \mathcal{N}_d\left(\mu, \Sigma\right)$ valószínűségi változó eloszlása megegyezik az

$$Y = LZ + \mu$$

valószínűségi változóéval, ahol $Z = [Z_i]_{i=1}^{d} \sim \mathcal{N}_d\left(\mathbf{0}_d, \mathbb{1}_d\right)$, az $L \in \mathcal{M}_{d,d}\left(\mathbb{R}\right)$ invertálható lineáris transzformáció pedig teljesíti az $LL^t = \Sigma$ feltételt.

## Bizonyítás

A bizonyítás tanulmányozása kötelező házi feladat: lásd a nyomtatott jegyzet 132–133. odalait, vagy a digitális jegyzet 139–140. oldalait.

**4. Tétel (Általános normális eloszlású valószínűségi vektor transzformációja)**

Ha az $X$ valószínűségi vektor $\mathcal{N}_d(\mu, \Sigma)$-eloszlású, akkor bármely $A \in \mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$ mátrix esetén az $Y = AX$ valószínűségi változó eloszlása $\mathcal{N}_k(A\mu, A\Sigma A^t)$.

**Bizonyítás**

A bizonyítás tanulmányozása kötelező házi feladat: lásd a nyomtatott jegyzet 133. odalát, vagy az elektronikus változat 140. oldalát.

## 5. Tétel (Cholesky-féle felbontás)

- Ha $A$ szimmetrikus pozitív definit mátrix, akkor létezik olyan $L$ alsó háromszög-mátrix, amelyre teljesül az úgynevezett Cholesky-féle

$$A = LL^t$$

felbontás.

- Továbbá, ha megköveteljük, hogy az $L$ mátrix főátlóját csak nemnegatív számok alkossák, akkor ez a felbontás egyértelmű.

## Megjegyzés

- Az 5. tétel bizonyításával bármely valamirevaló lineáris algebrával, vagy numerikus analízissel (például [W.H. Press et al., 2007]) foglalkozó könyvben találkozhatunk.
- A kijelentés igazolása így nem tartozik a segédlet célkitűzései közé, ettől függetlenül könnyen belátható, hogy az alábbi Cholesky-féle felbontást meghatározó algoritmus megfelelő bemeneti mátrixra helyes eredményt szolgáltat.

## 3. Algoritmus (Cholesky-féle felbontás)

- *Bemenet:* az $A = \left[a_{ij}\right]_{i=1,j=1}^{d,d} \in \mathcal{M}_{d,d}(\mathbb{R})$ szimmetrikus, pozitív definit mátrix.
- *Kimenet:* az $L = \left[\ell_{ij}\right]_{i=1,j=1}^{d,d} \in \mathcal{M}_{d,d}(\mathbb{R})$ alsó háromszög-mátrix, mely teljesíti az $A = LL^t$ egyenlőséget.

1. $L \leftarrow \mathbf{0}_{d,d}$
2. **Minden** $i = 1, 2, \ldots, d$ esetén **végezd el**:
3. $\quad \ell_{ii} \leftarrow \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik}^2}$
4. $\quad$ **minden** $j = i+1, i+2, \ldots, d$ esetén **végezd el**:
5. $$\ell_{ji} \leftarrow \frac{1}{\ell_{ii}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik}\ell_{jk} \right).$$

## 6. Tétel (Többváltozós normális eloszlású valószínűségi vektor generálása)

Tekintsük a $\Sigma = LL^t$ Cholesky-felbontású pozitív definit szimmetrikus mátrixot és a $\mu = {}^t[\mu_i]_{i=1}^d \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ vektort! Ekkor bármely $X \sim \mathcal{N}_d(\mathbf{0}_d, \mathbb{1}_d)$ standard normális eloszlású valószínűségi vektorból az $Y = \mu + LX$ transzformációval nyert valószínűségi vektor $\mathcal{N}_d(\mu, \Sigma)$-eloszlást követ.

## Bizonyítás

A bizonyítás tanulmányozása kötelező házi feladat: lásd a nyomtatott jegyzet 134. odalát, vagy a digitális változat 141. oldalát.

## 4. Algoritmus ($\mathcal{N}_d(\mu, \Sigma)$-eloszlású valószínűségi vektorok generálása)

- *Bemenet:* a generálandó valószínűségi vektor $d \geq 2$ dimenziója, a $\mu = {}^t[\mu_i]_{i=1}^d \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ várható érték vektor, a $\Sigma \in \mathcal{M}_{d,d}((0,\infty))$ szimmetrikus, pozitív definit mátrix, valamint az $n \geq 1$ természetes szám, amely a kimeneteli mintavétel méretét határozza meg.
- *Kimenet:* a $\Sigma = LL^t$ Cholesky-felbontást biztosító $L = [\ell_{ij}]_{i=1,j=1}^{d,d} \in \mathcal{M}_{d,d}(\mathbb{R})$ alsó háromszög-mátrix, továbbá az $Y \sim \mathcal{N}_d(\mu, \Sigma)$ valószínűségi vektornak egy $n$-elemű $\{Y_k\}_{k=1}^n$ mintavétele.

1. Határozd meg a $\Sigma$ mátrix $LL^t$ alakú Cholesky-felbontását a 3. algoritmus segítségével.
2. **Minden** $k = 1, 2, \ldots, n$ indexre **végezd el**:
3. generáld a független komponensű, $d$-dimenziós $X = {}^t[X_i]_{i=1}^d$ standard normális eloszlású valószínűségi vektort
4. hajtsd végre az $Y_k \leftarrow \mu + LX$ transzformációt.

## Megjegyzés

- A 4. algoritmus 3. sorában a független $[X_i]_{i=1}^{d}$ standard normális eloszlású valószínűségi változók generálására bármely eddigi ilyen eloszlást biztosító számgenerátort használhatjuk:
  - például a Laplace-féle, vagy a Cauchy sűrűségfüggvényre épülő elutasítás módszerét;
  - a Cauchy sűrűségfüggvényen alapuló közrefogás módszerét;
  - vagy a Box–Muller-féle transzformációt alkalmazó 1. és 2. algoritmusok közül válogathatunk.

- Tekintsünk a 6. tétel és az 1. Box–Muller-transzformáció együttes alkalmazására egy példát!
- Tegyük fel, hogy egy kétdimenziós $N_2(\mu, \Sigma)$ normális eloszlású $Y = [Y_1, Y_2]^t$ valószínűségi vektort szeretnénk generálni a $\mu = [\mu_1, \mu_2]^t$ várható érték vektorral és a
$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$
kovarianciamátrixszal, ahol
$$\rho = \rho_{12} = \frac{\operatorname{cov}(Y_1, Y_2)}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{\operatorname{cov}(Y_2, Y_1)}{\sigma_2\sigma_1} = \rho_{21} \in [-1, 1]$$
az $Y_1$ és $Y_2$ komponensek korrelációs együtthatóját jelöli ($\rho_{11} = \rho_{22} = 1$), a $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ és a $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ paraméterek pedig az $Y_1$ és $Y_2$ valószínűségi változók $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$-, illetve $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$-eloszlását rögzítik!

- Először a $\Sigma$ szimmetrikus pozitív definit mátrix Cholesky-felbontását határozzuk meg. A $\Sigma = LL^t$ egyenlőséget kielégítő $L$ alsó háromszög-mátrix meghatározásához a következőképpen járhatunk el. Legyen

$$L = \begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{bmatrix},$$

ahol az $\ell_{11}, \ell_{21}$ és $\ell_{22}$ számok pillanatnyilag ismeretlenek. Az

$$\begin{aligned} L \cdot L^t &= \begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{21} \\ 0 & \ell_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \ell_{11}^2 & \ell_{11}\ell_{21} \\ \ell_{11}\ell_{21} & \ell_{21}^2 + \ell_{22}^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \\ &= \Sigma \end{aligned}$$

mátrixegyenlet megoldásával az

$$\begin{aligned} \ell_{11} &= \sigma_1, \\ \ell_{21} &= \rho\sigma_2, \\ \ell_{22} &= \sqrt{1-\rho^2} \cdot \sigma_2 \end{aligned}$$

értékeket kapjuk.

- Ekkor, a 6. tétel értelmében, ha az $X = [X_1, X_2]^t$ valószínűségi vektor komponensei függetlenek és standard normális eloszlásúak, akkor az

$$\begin{aligned} Y &= \mu + LX \\ &= \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \rho\sigma_2 & \sqrt{1-\rho^2}\cdot\sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mu_1 + \sigma_1 X_1 \\ \mu_2 + \sigma_2\left(\rho X_1 + \sqrt{1-\rho^2}\cdot X_2\right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

  transzformáció során kapott valószínűségi vektor $\mathcal{N}_2(\mu, \Sigma)$-eloszlású.

- A fenti számítások függvényében az 1. Box–Muller-transzformációra épülő algoritmust a következőképpen módosíthatjuk kétdimenziós korrelált normális eloszlású valószínűségi vektorok generálására.

## 5. Algoritmus (Korrelált kétdimenziós normális eloszlású valószínűségi vektorok generálása)

- *Bemenet:* a $\rho \in [-1, 1]$ korrelációs együtthatótól függő $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ és $X_2 \sim (\mu_2, \sigma_2)$ valószínűségi változók ($\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$), valamint az $n \geq 1$ természetes szám, amely a kimeneteli mintavétel méretét rögzíti.
- *Kimenet:* az $Y \sim \mathcal{N}_2(\mu, \Sigma)$ valószínűségi vektornak egy $n$-elemű $\{Y_k\}_{k=1}^n$ mintavétele, ahol $\mu = [\mu_1, \mu_2]^t$ és $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$.

1. $\mu \leftarrow \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$
2. $\Sigma \leftarrow \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$
3. $L \leftarrow \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \rho\sigma_2 & \sqrt{1-\rho^2} \cdot \sigma_2 \end{bmatrix}$
4. $T \leftarrow 2\pi$

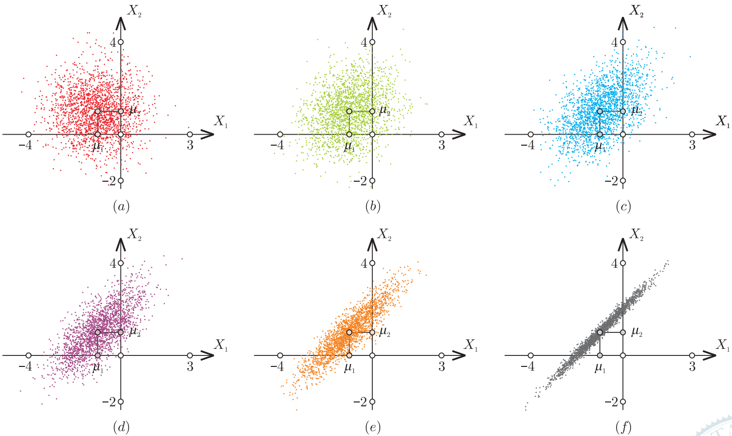
## 5. Algoritmus (folytatás)

5. **Minden** $k = 1, 2, \ldots, n$ esetén **végezd el**:
6. generáld a független $U_1 \sim \mathcal{U}((0,1])$ és $U_2 \sim \mathcal{U}([0,1])$ valószínűségi változókat
7. $R \leftarrow \sqrt{-2\ln(U_1)}$
8. $\Theta \leftarrow T \cdot U_2$
9. $X \leftarrow \begin{bmatrix} R\cos(\Theta) \\ R\sin(\Theta) \end{bmatrix}$
10. $Y_k \leftarrow \mu + LX$.

- A 2. ábrán az 5. algoritmus kimenetét látjuk rögzített $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ és $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ paraméterek, de változó $\rho \in [-1, 1]$ korrelációs együttható mellett.

# Többdimenziós normális eloszlás

## Példa kétváltozós, nem feltétlenül független komponensű, normális eloszlású valószínűségi vektor generálása




**2. ábra.** Az ábrák egy-egy olyan $Y^{\rho} = [\mu_1, \mu_2]^t + L_{\rho} X = \left[Y_1^{\rho}, Y_2^{\rho}\right]^t \sim \mathcal{N}_2\left(\mu, \Sigma_{\rho} = L_{\rho} L_{\rho}^t\right)$ valószínűségi vektor mintavételezését szemléltetik, ahol az $X = [X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1 = -1, \sigma_1 = 1), X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2 = 1, \sigma_1 = 1)]^t$ valószínűségi vektor független komponensei rögzített normális eloszlásúak, viszont az $Y_1^{\rho}$ és $Y_2^{\rho}$ komponensek $\rho \in [-1, 1]$ korrelációs együtthatója és $\Sigma_{\rho} = \left[\sigma_1^2, \rho\sigma_1\sigma_2; \rho\sigma_1\sigma_2, \sigma_2^2\right]$ kovarianciamátrixa változik. Az $(a)$–$(f)$ esetekben a $\rho$ korrelációs együtthatót rendre a $0$, a $0,25$, a $0,50$, a $0,75$, a $0,90$, végül pedig a $0,99$ értékkel inicializáltuk. Vegyük észre, ahogy $\rho \nearrow 1$, az $Y^{\rho}$ valószínűségi vektor komponensei közti lineáris függőségi kapcsolat egyre inkább szorosabbá válik! Hasonló jelenség fogalmazható meg a $\rho \searrow -1$ esetben is.

## 1. feladat

Kódoljátok a 2. és 5. algoritmusokat, jelenítsétek meg az általuk generált síkbeli pontfelhőket, valamint azok háromdimenziós hisztogramát!

## 2. feladat

Az elutasítás módszerének segítségével generáljatok

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi^2} \cdot \sin^2(x+y), & (x,y) \in (0,\pi) \times (0,\pi), \\ 0 & (x,y) \notin (0,\pi) \times (0,\pi) \end{cases}$$

együttes sűrűségfüggvényű $(X, Y)$ valószínűségi vektorokat! Jelenítsétek meg (a plot3, hist3, meshgrid és mesh/surf parancsok segítségével) a kapott síkbeli pontfelhőt, annak háromdimenziós hisztogramát és az adott sűrűségfüggvény alakját is a $(0,\pi) \times (0,\pi)$ tartományon!

**Opcionális feladat ($1 + 1 = 2$ pont elméleti megoldással együtt)**

- Határozzátok meg és ábrázoljátok is a 2. feladatban adott kétdimenziós $(X, Y)$ valószínűségi vektor *perem-sűrűségfüggvényeit* és *perem-eloszlásfüggvényeit* is a 2. labor 13–17. oldalán ismertetett értelmezések és tulajdonságok alapján!
- Implementáljátok a 4. algoritmust három- és négydimenziós korrelált, normális eloszlású valószínűségi vektorok generálására! Jelenítsétek is meg a mintavételezés során kapott háromdimenziós pontfelhőt, valamint a négydimenziós pontfelhő háromdimenziós vetületeit is!

G.E.P. Box, M.E. Muller, **1958**.
*A Note on the Generation of Random Normal Deviates*,
Annals of Mathematical Statistics, **29**(2):610–611.

W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, **2007**.
*Numerical recipes. The art of scientific computing, 3rd Edition*,
Cambridge University Press.