1. Gauss elimináció

Legyen adott az

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +... & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +... & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +... & +a_{nn}x_n & = b_n \end{array} \tag{1}$$

lineáris egyenletrendszer, vagy mátrix alakban

$$Ax = b, A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b, x \in \mathbb{R}^{n\times 1}, n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

ahol

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{3}$$

A megadott lineáris egyenletrendszer megoldására a Gauss eliminációt két lépésben végezzük el:

1. Az eredeti egyenletrendszer átalakítása egy ekvivalens háromszög mátrixú rendszerré:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}^{(1)}x_1 & +a_{12}^{(1)}x_2 & +... & +a_{1n}^{(1)}x_n & = b_1^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)}x_2 & +... & +a_{2n}^{(2)}x_n & = b_2^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)}x_n & = b_n^{(n)} \end{array} \tag{4}$$

2. Fokozatos visszahelyettesítéssel meghatározni a megoldást.

1.1. Elimináció

Mivel az egyenletrendszer megoldását nem befolyásolja a sorok állandóval való szorzása illetve összeadása az egyenletrendszer (4) alakra való átalakításához a következőképpen járunk el:

-legyen $a_{11} \neq 0$, ekkor kivonjuk az első egyenlet (a_{i1}/a_{11})-szeresét az i-dik egyenletből, $i = 2, 3, ..., n$. Az első lépés után az egyenletrendszer a következő lesz:

$$
\begin{array}{llllll}
a_{11}^{(1)}x_1 & +a_{12}^{(1)}x_2 & +... & +a_{1n}^{(1)}x_n & = b_1^{(1)} \\
 & a_{22}^{(2)}x_2 & +... & +a_{2n}^{(2)}x_n & = b_2^{(2)} \\
 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & a_{n2}^{(2)}x_2 & +... & +a_{nn}^{(2)}x_n & = b_n^{(2)}
\end{array}
\tag{5}
$$

ahol

$$
a_{ij}^{(1)} = a_{ij},\ b_i^{(1)} = b_i,\ i,j = 1,...,n
$$

az eredeti egyenletrendszer együtthatóit illetve szabad tagjait jelöli, és

$$
\begin{aligned}
a_{ij}^{(2)} &= a_{ij}^{(1)} - l_{i1}a_{1j}^{(1)},\ j = 1,...,n, \\
l_{i1} &= a_{i1}^{(1)}/a_{11}^{(1)},\ i = 2,...,n, \\
b_i^{(2)} &= b_i^{(1)} - l_{i1}b_1^{(1)}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Hasonlóképpen, ha $a_{22}^{(2)} \neq 0$, akkor ugyanúgy járunk el a (5) rendszer első sora alatti n-1 egyenletű rendszerrel. Amennyiben $a_{kk}^{(k)} \neq 0, k = \overline{3,n}$ fennakadás nélkül alakítjuk a rendszert a (4) alakra.

Ahhoz, hogy a főátlóra zérótól különböző elem kerüljön főelemet választunk:

-részleges főelemkiválasztás esetén:

$$
a_{i_0p}^{(p)} = \left\{ \max \left| a_{ip}^{(p)} \right|, i = p, ..., n \right\}
$$

-teljes főelemkiválasztás estén:

$$
a_{i_0j_0}^{(p)} = \left\{ \max \left| a_{ij}^{(p)} \right|, i,j = p, ..., n \right\}
$$

Ekkor elvégezzük a megfelelő sor illetve oszlopcserét.

Eljárás

i.) legyen $a_{i_0k}^{(k)} = \max_{k \leq i < n} \left| a_{ik}^{(k)} \right|$, ha $a_{i_0k}^{(k)} \neq 0$ akkor az egyenletrendszer k sorát kicseréljük az i_0 sorral, ellenkező esetben az egyenletrendszer mátrixa szinguláris és hibaüzenettel visszatérünk.

ii.) végrehatjuk az eliminációt.

1.2. A trianguláris rendszer megoldása

Egy $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ mátrixot felső háromszög mátrixnak nevezzük, ha $a_{ij} = 0$, $j < i \leq n$ és általában U-val jelöljük. Az ilyen mátrixú egyenletrendszer megoldása fokozatos visszahelyettesítéssel azonnal meghatározható. Legyen a mi (4) rendszerünkhöz hasonló $Ux = b$ rendszer, ekkor:

$$\begin{array}{llllll} u_{11}^{(1)}x_1 & +u_{12}^{(1)}x_2 & +... & +u_{1n}^{(1)}x_n & = b_1^{(1)} \\ & u_{22}^{(2)}x_2 & +... & +u_{2n}^{(2)}x_n & = b_2^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & u_{nn}^{(n)}x_n & = b_n^{(n)} \end{array} \tag{7}$$

és

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{u_{nn}^{(n)}}, x_{n-1} = \frac{1}{u_{n-1n-1}^{(n-1)}}\left(b_{n-1} - u_{n-1n}^{(n-1)}x_n\right), ...$$

vagyis

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{u_{nn}^{(n)}}, x_i = \frac{1}{u_{ii}^{(i)}}\left(b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}^{(i)}x_j\right), i = n-1, ..., 1.$$

Gauss eliminációval a rendszer kompatibilitása is tanulmányozható. Ha az A mátrix szinguláris és rangja $p-1$, akkor $p-1$ elimináció után az egyenletrendszer mátrixa a következő alakú lesz:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & \dots & a_{1p-1}^1 & a_{1p}^1 & \dots & a_{1n}^1 \\ 0 & a_{22}^2 & \dots & a_{2p-1}^2 & a_{2p}^2 & \dots & a_{2n}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{p-1p-1}^{p-1} & a_{p-1p}^{p-1} & \dots & a_{p-1n}^{p-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

ha $b_i^{(p)} = 0$, $i = \overline{p, n}$, akkor a rendszer kompatibilis és határozatlan, ha $\exists\ q \in \{p, ..., n\}$ úgy, hogy $b_q^{(p)} \neq 0$, akkor inkompatibilis.

Feladat

1.Írjunk egy olyan MatLab függvényt, melynek bemenete az (A, b) páros, kimenete pedig $[U, c]$, ha el tudta végezni az eliminációt, ellenkező esetben hibaüzenet.
(**function** [U,c]=GaussElim(A,b))
2. Írjunk egy MatLab függvényt melynek bemenete az (U, b) páros, kimenete pedig az x megoldásvektor.
(**function** x=UTriangSolve(U,b))
3. 1. és 2. segítségével oldjunk meg egy tetszőleges lineáris egyenletrendszert, ha nem öszeférhető közöljük a felhasználóval (kompatibilitás tanulmányozása).
(**function** GaussElimSolve(A,b))
Három $*.m$ file-t kérek.