

Verbesserte Schranke der Cover Time für COBRA-Prozesse auf Graphen

Klaus-J. Ziegert

Universität Hamburg
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
Fachbereich Informatik

8. Dezember 2017

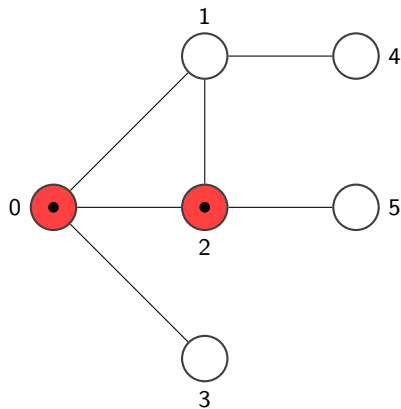
Motivation: Random Walk Verbesserung

COBRA Prozess

- Man beachte einen ungerichteten und zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ mit n Knoten und m Kanten
- Es sei C eine Teilmenge der Knoten, die am Anfang informiert sind und die Nachricht versenden können
- In jeder Runde i wählen die Knoten in C_{i-1} zufällig und gleichverteilt $b \geq 1$ Nachbarn (mit Wiederholung) aus
- Ausgewählte Knoten erhalten eine Nachricht in der nächsten Runde C_{i+1} ; nicht ausgewählte Knoten verlieren u.U. die Information
- Sei $\text{Hit}_C(u)$ die Runde bei dem der Knoten u das erste Mal benachrichtigt wurde, so ist die Cover Time:

$$\text{Cover}(C) = \max \{ \text{Hit}_C(v) : v \in V \}$$

Beispiel COBRA Prozess

Abbildung: $C = \{0, 2\}$, $b = 3$

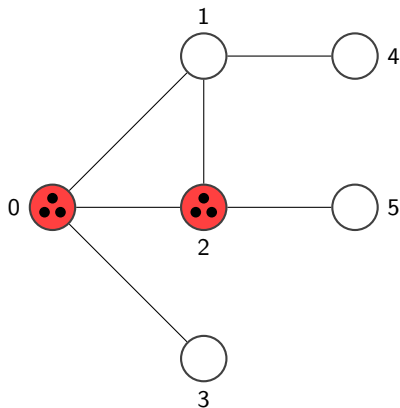
(Runde 0)

Knoten in C_0 hat eine Marke

History

- $C_0 = \{0, 2\}$

Beispiel COBRA Prozess

Abbildung: $C = \{0, 2\}$, $b = 3$

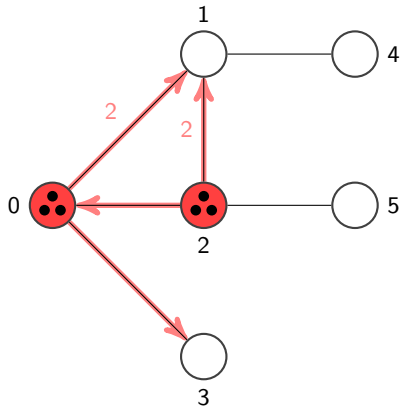
(Runde 1 Phase 1)

Jede Marke teilt sich in b Submarken

History

- $C_0 = \{0, 2\}$

Beispiel COBRA Prozess

Abbildung: $C = \{0, 2\}$, $b = 3$

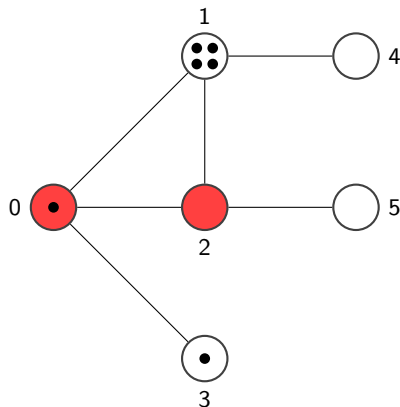
(Runde 1 Phase 2a)

Jede Submarke wählt zufällig und gleichverteilt einen Nachbarn

History

- $C_0 = \{0, 2\}$

Beispiel COBRA Prozess

Abbildung: $C = \{0, 2\}$, $b = 3$

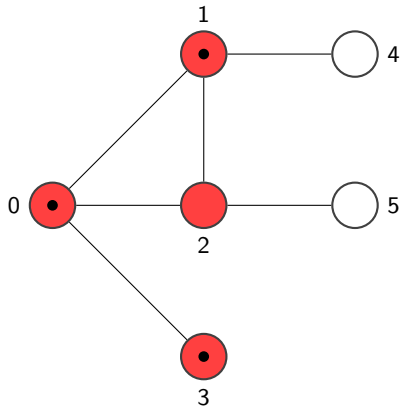
(Runde 1 Phase 2b)

Submarken gehen zum ausgewählten
Nachbarn über

History

- $C_0 = \{0, 2\}$

Beispiel COBRA Prozess

Abbildung: $C = \{0, 2\}$, $b = 3$

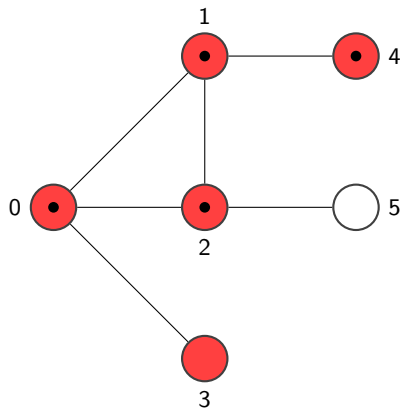
(Runde 1 Phase 3)

Submarken werden oder verschmelzen
ggf. zu einer Marke

History

- $C_0 = \{0, 2\}$
- $C_1 = \{0, 1, 2, 3\}$

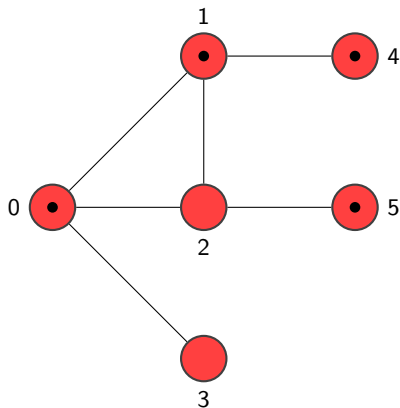
Beispiel COBRA Prozess

Abbildung: $C = \{0, 2\}$, $b = 3$

History

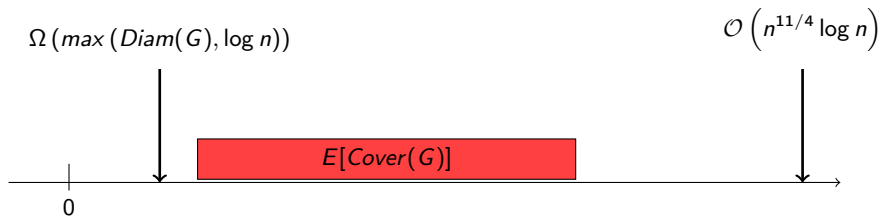
- $C_0 = \{0, 2\}$
- $C_1 = \{0, 1, 2, 3\}$
- $C_2 = \{0, 1, 2, 4\}$

Beispiel COBRA Prozess

Abbildung: $C = \{0, 2\}$, $b = 3$

History

- $C_0 = \{0, 2\}$
- $C_1 = \{0, 1, 2, 3\}$
- $C_2 = \{0, 1, 2, 4\}$
- $C_3 = \{0, 1, 4, 5\}$
- ...
- $Cover(C) = Hit_C(5) = 3$

Bekannte Schranken der $E[\text{Cover}(G)]$ für beliebige GraphenAbbildung: Schranken des Erwartungswertes der Cover Time für beliebige Graphen G

Neue obere Schranken der $E[\text{Cover}(G)]$ für beliebige Graphen

Theorem 1.1:

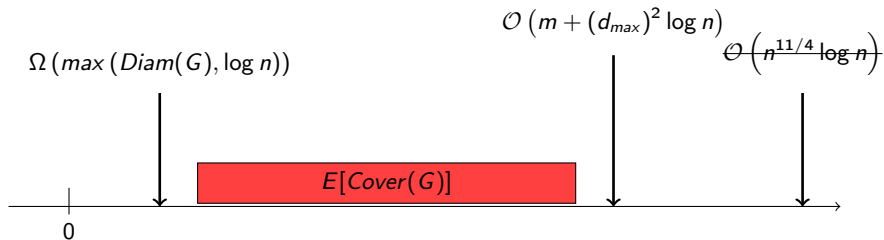
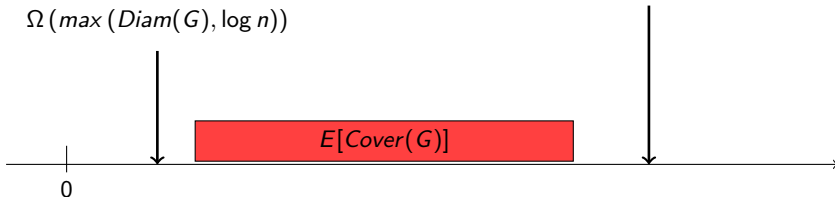


Abbildung: Schranken des Erwartungswertes der Cover Time für beliebige Graphen G

Bekannte Schranken der $E[\text{Cover}(G_r)]$ für reguläre Graphen

$$\mathcal{O}\left(\frac{r^4}{\phi^2} \log^2 n\right)$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{(1-\lambda)^3} \log n\right) \quad , \text{ falls } 1 - \lambda > C\sqrt{\frac{\log n}{n}}$$

Abbildung: Schranken des Erwartungswertes der Cover Time für r -reguläre Graphen G

Neue obere Schranke für $E[\text{Cover}(G_r)]$ für reguläre Graphen

$$\mathcal{O}\left(\frac{r^4}{\phi^2} \log^2 n\right)$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{(1-\lambda)^3} \log n\right) \quad , \text{ falls } 1-\lambda > C\sqrt{\frac{\log n}{n}}$$

Theorem 1.2: $\mathcal{O}\left(\left(\frac{r}{(1-\lambda)} + r^2\right) \log n\right) \quad , \text{ falls } 1-\lambda > C\sqrt{\frac{\log n}{n}}$

$$\Omega(\max(\text{Diam}(G), \log n))$$

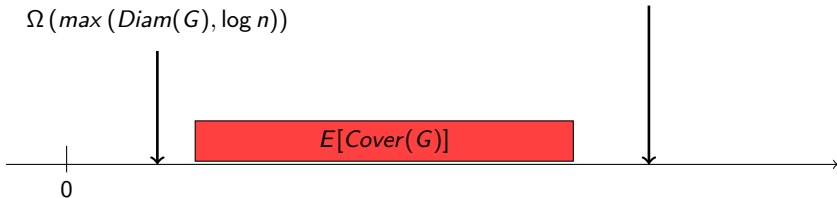


Abbildung: Schranken des Erwartungswertes der Cover Time für r -reguläre Graphen G

Resultate des Papers

Theorem 1.1

Sei G ein zusammenhängender Graph mit n Knoten, m Kanten und den Maximalgrad d_{\max} . Die Cover Time $\text{cover}(u)$ eines COBRA-Prozesses mit $b = 2$ auf dem Graphen G ist m.h.W. für alle Knoten $u \in V$:

$$\mathcal{O} \left(m + (d_{\max})^2 \log n \right)$$

Theorem 1.2

Sei G ein zusammenhängender r -regulärer Graph mit n Knoten, der die Bedingung $1 - \lambda > C \sqrt{\frac{\log n}{n}}$ für eine angemessen große Konstante C erfüllt. Die Cover Time $\text{cover}(u)$ eines COBRA-Prozesses mit $b = 2$ auf dem Graphen G ist m.h.W. für alle Knoten $u \in V$:

$$\mathcal{O} \left(\left(\frac{r}{1 - \lambda} + r^2 \right) \log n \right)$$

Vorgehen des Papers

Vorgehen des Papers

