UNIVERSITÄT MANNHEIM

Fachschaft VWL

Repetitorium Analysis & Lineare Algebra A

Kiril Lavrov und Nikolay Danov

22. und 23. Januar 2022

klavrov@mail.uni-mannheim.de, ndanov@mail.uni-mannheim.de

Dieser Foliensatz gilt für Teil 4 des Repetitoriums.

Das Material bitte nicht ohne Nachfrage verbreiten.
Es gilt keine Gewähr auf Vollständigkeit und Richtigkeit aller Angaben in diesem Foliensatz.

Zweite Ableitungen

- Erste Ableitung: Veränderungsrate
- Zweite Ableitung: Veränderung der Veränderungsrate
- Notation $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv f_{xx}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv f_{xy}$

Satz von Schwarz/Clairaut/Young

Die Reihenfolge der Differenzierung spielt bei multivariaten Funktionen keine Rolle, insofern die relevanten Ableitungen existieren.

Das bedeutet, dass immer gilt $f_{xy} = f_{yx}$.

Die Hesse-Matrix

Betrachte eine Funktion am Punkt $a := (x_0, y_0, z_0)$ zwei-mal partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Die Hesse-Matrix ist die Matrix der zweiten Ableitungen von f in a:

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a) & f_{xy}(a) & f_{xz}(a) \\ f_{yx}(a) & f_{yy}(a) & f_{yz}(a) \\ f_{zx}(a) & f_{zy}(a) & f_{zz}(a) \end{pmatrix}$$

Konvexität und Konkavität (1)

Definition: Konvexe Funktion

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \in \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$ heißt konvex, wenn für alle $x, y \in D$ und alle $t \in [0, 1]$ gilt:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

f ist strikt konvex bei strikter Ungleichung.

Äquivalent: der Epigraph

$$\mathrm{Epi}(f) := \{a \in \mathbb{R}^d : a \geq f(x), x \in D\}$$

einer konvexen Funktion ist eine konvexe Menge.

Konvexe und Konkave Funktionen (2)

Definition: Konkave Funktion

Analog heißt f *konkav*, wenn für alle $x, y \in D$ und alle $t \in [0, 1]$ gilt:

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$$

und strikt konkav bei strikter Ungleichung.

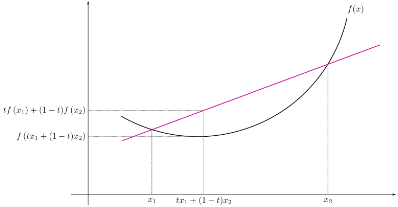
Äquivalent: der Hypograph

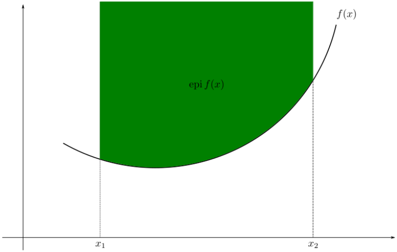
$$\text{Hypo}(f) := \{a \in \mathbb{R}^d : a \leq f(x), x \in D\}$$

einer konkaven Funktion ist eine konvexe Menge.

Der Buckel vom Schaf ist konkav.

Konvexe und Konkave Funktionen (3)





Illustrationen: Eli Osherovich

Konvexe und Konkave Funktionen (4)

Satz

(1) Die Summe konvexer (konkaver) Funktionen ist konvex (konkav).

(2) Wenn f konvex (konkav), dann ist $-f$ konkav (konvex).

Hinreichende Bedingungen für univariate Funktionen.

Satz

Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine 2-mal differenzierbare univariate Funktion mit einem *konvexen Definitionsbereich* $D \in \mathbb{R}$. Es gilt

(1) $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in D \implies f$ konvex

(2) $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in D \implies f$ konkav

(3) $f''(x) > 0$ für alle $x \in D \implies f$ strikt konvex

(4) $f''(x) < 0$ für alle $x \in D \implies f$ strikt konkav

Hinreichende Bedingungen für multivariate Funktionen.

Satz

Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine 2-mal partiell differenzierbare multivariate Funktion mit einem *konvexen Definitionsbereich* $D \in \mathbb{R}^d$ mit $d \geq 2$ und Hesse-Matrix H_f. Es gilt

(1) H_f positiv semidefinit für alle $x \in D \iff f$ konvex

(2) H_f negativ semidefinit für alle $x \in D \iff f$ konkav

(3) H_f positiv definit für alle $x \in D \implies f$ strikt konvex

(4) H_f negativ definit für alle $x \in D \implies f$ strikt konkav

Wir haben leider kein einfaches Mittel (1) und (2) zu überprüfen. (3) und (4) lassen sich einfach mit dem Hauptminorenkriterium feststellen.

Prüfungsfrage 2020/2

5. Gegeben ist die Menge $D = (-5, -2) \cup (2, 5)$. Welche der folgenden Aussagen ist **WAHR**? Eine Funktion mit Definitionsbereich D kann

   A. konvex aber nicht konkav sein.

   B. konkav aber nicht konvex sein.

   C. konvex oder konkav sein.

   D. weder konkav noch konvex sein.

Prüfungsfrage 2020/2

11. Die Funktion $f(x, y) = x^4 + 2x^2 - 2xy + y^2$ ist

    A. streng konvex.

    B. streng konkav.

    C. weder streng konvex, noch streng konkav.

    D. streng konvex und streng konkav.

Hinreichende Bedingung

Weierstrass Extremwertsatz

Es sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine auf der kompakten Menge $K \subset X \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$ stetige Funktion. Dann hat die Funktion f auf K ein Minimum und ein Maximum.

Bedingungen erster Ordnung (BEO)

Der Gradient $\nabla f(x)$ ist ein (Spalten-)Vektor der ersten Ableitungen einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ in $x \in D$.

Satz

Es sei $x \in D$ ein lokaler Extrempunkt der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$. Weiterhin sei f differenzierbar [in einer Umgebung um $x \in D$]. Dann ist $\nabla f(x) = 0$.

Wir sagen: $\nabla f(x) = 0$ ist notwendig für die Existenz einer lokalen Extremstelle in $x \in D$, wenn f differenzierbar um x.

Bedingungen zweiter Ordnung (BZO)

Satz:

Ist die Extremstelle $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$ der 2-mal differenzierbaren univariaten Funktion $f : D \to \mathbb{R}$

- ein lokales Maximum, so gilt: $f''(x_0) < 0$;
- ein lokales Minimum, so gilt: $f''(x_0) > 0$.

Satz

Ist die Extremstelle $x_0 \in D \subset \mathbb{R}^d$ der 2-mal partiell differenzierbaren multivariaten Funktion $f : D \to \mathbb{R}$

- ein lokales Maximum, so ist $H_f(x_0)$ negativ definit;
- ein lokales Minimum, so ist $H_f(x_0)$ positiv definit.

Aufpassen: notwendige, nicht hinreichende Bedingungen.

Kritische Punkte (1)

Kritische Punkte einer Funktion sind:

1. Stationäre Punkte $\nabla f(x) = \mathbf{0}$
2. Punkte, an denen mindestens eine partielle Ableitung nicht definiert ist:
   1.1 Knicke
   1.2 Randpunkte, soweit sie zum Definitionsbereich gehören

Achtung! Wie immer auf den Definitionsbereich von f aufpassen. Kritische Punkte müssen im Definitionsbereich liegen.

Kritische Punkte (2)

Stationäre Punkte ($\nabla f(x) = 0$) können sein:

- (lokale) Maxima
- (lokale) Minima
- Wendepunkte
- Sattelpunkte

Prüfungsfrage 2020/2

2. Gegeben sei die stetige Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -(x+2)^2 + 2 & \text{für} \quad -(2+\sqrt{3}) \leq x < -2 \\ (x^2 - 2x)^{\frac{1}{3}} & \text{für} \quad -2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Bestimmen Sie die kritischen Punkte und globalen Extrema der Funktion.

Envelope-Theorem (1)

Definition: Wertfunktion

Es sei $(x^*(\alpha), y^*(\alpha))$ ein Optimum der Funktion f mit einem konstanten Parameter α. Die Funktion

$$V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, V(\alpha) = f(x^*, y^*; \alpha)$$

heißt Wertfunktion.

$V(\alpha)$ ist der maximale/minimale Funktionswert, wenn wir α variieren ("Funktionenschar").

$\rightsquigarrow$ Bsp.: $f(x) = (3x - \alpha)^2 + \alpha x$ hat ein globales Minimum in $x^*(\alpha) = -\frac{3\alpha}{2}$.
Die entsprechende Wertfunktion ist $V(\alpha) = f(x^*(\alpha)) = -\frac{5\alpha}{4}$.

Envelope Theorem ohne Nebenbedingungen

Es sei V differenzierbar. Dann gilt:

$$\frac{dV}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x^*, y^*).$$

Warum? Kettenregel:

$$\frac{dV}{d\alpha}(\alpha) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{=0} \frac{dx^*}{d\alpha}(x^*, y^*; \alpha) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{=0} \frac{dy^*}{d\alpha}(x^*, y^*; \alpha) + \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x^*, y^*; \alpha).$$

Partielle Ableitungen im Optimum sind gleich null.

Optimieren unter Nebenbedingungen (1)

Betrachte die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Das Problem

$$\max_{x,y \in \mathbb{R}^2} f(x, y) \text{ u.d.Nbd. } g(x, y) = c$$

ist äquivalent zum unbeschränkten Optimierungsproblem

$$\max_{x,y \in D} f(x, y),$$

wo $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = c\}$.

Idee: die Nebenbedingung passt den Definitionsbereich über den wir Optimieren an, d.h. es ist so als würden wir nach Maxima der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ suchen.

Optimieren unter Nebenbedingung (2)

Ziel: maximiere $f(x, y)$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = c$.

Ansatz 1: Optimieren der Lagrange-Funktion

Löse das Problem

$$\max_{(x,y,\lambda)} \mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c).$$

Ansatz 2: Substitutionsmethode

Schreibe (i) nach x oder y um und setze sie in $f(x, y)$ ein.
Maximiere die Funktion.

$\rightsquigarrow$ Ansatz 2 praktisch, wenn f eine lineare Komponente enthält.

Optimieren unter Nebenbedingungen (3)

Q&A

- Spielt es eine Rolle, ob wir die Nebenbedingung addieren oder subtrahieren? *Nein, nur für die ökonomische Interpretation.*
- Berücksichtigt die Lagrange-Methode auch Randpunkte? *Ja.*
- Hat das Optimierungsproblem immer eine Lösung? *Wenn die Menge gebildet durch die Nebenbedingungen kompakt ist, dann gilt Weierstrass Extremwertsatz.*
  $\rightsquigarrow$ Bsp.: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ ist kompakt (Warum?)
  $\rightsquigarrow$ Warum ist $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$ nicht kompakt?

Prüfungsfrage 2020/2

1. Finden sie die globalen Extrema (x^*, y^*, λ^*) der Funktion $f(x, y) = 3x + 2y$ unter der Nebenbedingung $3x^2 + 2y^2 = 1$ mittels der Methode von Lagrange.

Ihr habt's geschafft! Fragen?

Meme Credit: u/Bigiebert on r/teenagers