UNIVERSITÄT MANNHEIM

Fachschaft VWL

Repetitorium Analysis & Lineare Algebra A

Kiril Lavrov und Nikolay Danov

22. und 23. Januar 2022

klavrov@mail.uni-mannheim.de, ndanov@mail.uni-mannheim.de

Wir bedanken uns bei der Fachschaft und Lucía Cerviño für die Organisation dieses Repetitoriums.

Ablauf (1)

- 22. und 23. Januar von 9:00 bis 16:00
- Theorie + Aufgaben aus Klausur 2020/2
- Am Ende Vorrechnen von Klausur 2020/1
- Fragen: mündlich + Chat
- Bitte den Chat ausschließlich für Fragen benutzen
- Pausen bei Bedarf, je eine große Mittagspause
- Denkt aktiv mit und weist uns auf unsere Fehler hin!

Ablauf (2)

Tag 1:

1.1 Mathematische Logik & Mengen (Kiril)
1.2 Funktionen & ihre Eigenschaften (Kiril)
1.3 Ableitungen und Differentiale (Kiril)
1.4 Satz über Implizite Funktionen (Kiril)
2.1 Approximationen (Nikolay)
2.2 Integralrechnung (Nikolay)
2.3 Matrizen & Vektoren (Nikolay)

Tag 2: mehr Lineare Algebra, Optimierung, Klausur 2020/1

Dieser Foliensatz gilt nur für Teil 1 des Vortrags.

Ablauf (3)

Um am meisten vom heutigen Tag mitzunehmen, könnt ihr...

1. eure Kamera anschalten
2. alle Aufgaben mitrechnen
3. das Handy ausstellen
4. Multitasking am Computer vermeiden
5. Fragen stellen
6. in den Pausen entspannen

Analysis ist aufregend! Ihr lernt nicht nur das Handwerkszeug was euch das künftige VWL-Studium leichter macht und euch hilft sich auf die ökonomischen Zusammenhänge zu fokussieren, sondern auch Probleme aus neuen Denkrichtungen (formal und intuitiv) anzugehen.

Hinweise

- Konzepte und Klausuraufgaben
- Keine Wiederholung von Algebra oder Rechenregeln
- Ich empfehle die Ableitungs- und Logarithmusregeln zu wiederholen
- Definitionen beschränkt auf $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^d$
- Konvention: $0 \notin \mathbb{N}$
- Bei Unklarheiten zur Notation, bitte sofort fragen

Rechenregeln Natürlicher Logarithmus

Hinweise

$\ln 1 = 0 \qquad \ln e = 1 \qquad e^{\ln x} = x$

Multiplizieren

$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$

$\ln(e \times b) = \ln e + \ln b = 1 + \ln b$

Dividieren

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = -\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln 1 - \ln x = -\ln x$$

Potenzieren

$\ln(x^n) = n \times \ln x$

$\ln(e^x) = x \ln e = x$

Illustration: https://mathe-ist-einfach.blogspot.com/

“Wörterbuch” logischer Operatoren

$\Longrightarrow$	impliziert / hinreichend für
$\Longleftrightarrow$	“dann und nur dann, wenn” / hinreichend & notwendig
$\wedge$	und
$\vee$	oder
$\neg$	nicht / Negation
$\forall$	“für alle”
$\exists$	“es existiert”

Exkurs Beweismethoden

Keine formalen Beweise in Analysis/LA A, aber hilfreich bei Denkweise.

- Direkter Beweis: Um zu beweisen, dass $A \implies B$, nehme an, dass A wahr und zeige was folgt
- Beweis per Widerspruch: Um zu beweisen, dass $A \implies B$, nehme an, dass B falsch und zeige, dass A falsch
- Gegenbeweis: *ein einziges* Gegenbeispiel reicht
- Wie erfassen wir "alle" Elemente einer Menge ($\forall x \in M$)? Lösung: fixiere ein *beliebiges* Element $x \in M$
- Allgemeine Idee: Definitionen "wörtlich nehmen" und direkt anwenden

Mengen: Definition

Definition: Menge

Eine Menge M ist eine ungeordnete Sammlung eindeutiger Objekte. Wenn x Element von M ist, dann schreiben wir $x \in M$.

- Ordnung: $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$
- Eindeutigkeit: $\{1, 1, 2\}$ ist keine Menge

Definition: Tupel

Ein Tupel ist eine geordnete Sammlung (Liste) von Objekten.

- Ein n-Tupel ist eine Liste aus n Elementen
- $a := (1, 1, 2)$ und $b := (2, 1, 1)$ sind 3-Tupel mit $a \neq b$
- $\mathbb{R}^2$ ist eine Menge von Tupeln (x, y) mit $x, y \in \mathbb{R}$

Mengen: Notation

Etwas Mengennotation...

- $[a, b]$ ist ein geschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$
  $\rightsquigarrow \forall x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b \iff x \in [a, b]$
- (a, b) ist ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$
- $[a, b)$ ist ein halboffenes Intervall in $\mathbb{R}$
- $\{1, 2, 3\}$ eine Menge mit 3 Elementen in $\mathbb{N}$
- $\{x \in X : A\}$ ist eine Menge von Elementen $x \in X$, für die Aussage A gilt
  $\rightsquigarrow$ Beispiel: $\{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 3\} = \{x \in (1, 3)\} = (1, 3)$
- $X \subset$ Y - "X ist eine Teilmenge von Y"

Mengen: Operationen (1)

Im Folgenden seien X & Y Mengen mit Grundmenge $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$.

Definition: Vereinigungsmenge

Die Vereinigungsmenge von X und Y ist gegeben durch

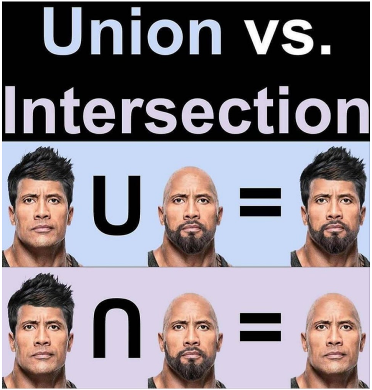
$$X \cup Y := \{x \in \mathbb{R}^d : x \in X \lor x \in Y\}.$$

Definition: Schnittmenge

Die Schnittmenge von X und Y ist gegeben durch

$$X \cap Y := \{x \in \mathbb{R}^d : x \in X \land x \in Y\}.$$

Mengen: Operationen (2)



Meme Credit: u/bixaomemo33 auf r/engineermemes

Mengen: Operationen (3)

Definition: Komplement

Es sei X eine Menge. Das relative Komplement von X in Y ist gegeben durch

$$Y \setminus X := \{x \in \mathbb{R}^d : x \in Y \wedge x \notin X\}.$$

Das Komplement von X ist gegeben durch $X^c := \mathbb{R}^d \setminus X$.

Wir unterteilen die Grundmenge $\mathbb{R}^d$ in M und das Komplement M^c. Jedes Element in $\mathbb{R}^d$ liegt *entweder* in M oder in M^c:

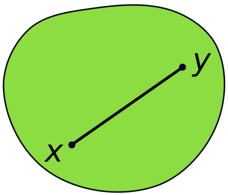
$$M \cup M^c = \mathbb{R}^d \text{ und } M \cap M^c = \emptyset.$$

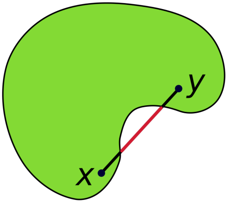
Mengen: Eigenschaften (1)

Definition: Konvexe Menge

Eine Menge $M \in \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$ heißt konvex, wenn für alle $x, y \in M$ sowie alle $t \in [0, 1]$ gilt:

$$tx + (1 - t)y \in M.$$





Illustrationen: Oleg Alexandrov

Mengen: Eigenschaften (2)

Definition: Randpunkt

Es sei $M \in \mathbb{R}$ eine Menge. x ist ein Randpunkt von M, wenn für alle $\varepsilon > 0$ das offene Intervall $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ nichtleere Schnittmengen mit M und M^c hat, bzw.

$$\forall \varepsilon > 0 : ((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap M \neq \emptyset) \wedge ((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap M^c \neq \emptyset).$$

- $x \in M$ ist ein innerer Punkt, wenn er kein Randpunkt ist
- Beachte: Randpunkte müssen nicht in der Menge liegen
- Definition lässt sich leicht auf höhere Dimensionen erweitern (Wie?)

Mengen: Eigenschaften (3)

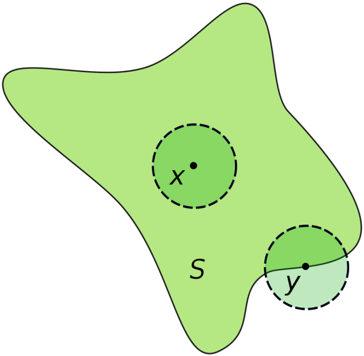


Illustration: Oleg Alexandrov

Prüfungsfrage 2020/2

4. Bestimmen Sie die Randpunkte der folgenden Menge

$$A = (-\infty, -3) \cup [-3, 5) \cup (5, 9] \cup (8, \infty)$$

A. $\{-3, 5, 8, 9\}$

B. $\{-3, 5\}$

C. $\{5\}$

D. Die Menge hat keine Randpunkte

Prüfungsfrage 2020/2

6. Welche der folgenden Mengen ist (sind) *konvex*?

   A. Eine Tangentialebene

   B. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

   C. Der Epigraph von $f(x) = x^2$

   D. Alle unter A.-C. genannten Mengen sind konvex.

Mengen: Eigenschaften (4)

Definition: Offene Menge

Eine Menge $M \in \mathbb{R}$ heißt offen, wenn für jedes Element $x \in M$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass alle $y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ in M liegen, bzw.

$$\forall x \in M, \exists \varepsilon > 0 : y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \implies y \in M.$$

Definition: Abgeschlossene Menge

Eine Menge M heißt abgeschlossen, wenn sie alle ihre Randpunkte enthält.

Einige Beispiele:

- $[0,1]$ ist geschlossen. Warum?
- $(0,1)$ ist offen. Warum?
- $(0,1]$ ist weder offen noch abgeschlossen. Warum?
- $\mathbb{R}$ und $\emptyset$ sind offen und abgeschlossen. Warum?

Was gilt für den "Strahl" $[0,+\infty)$?
Was ist die Einpunktmenge $\{a\} \subset \mathbb{R}$?

Mengen: Eigenschaften (6)

Satz von Heine-Borel

Eine Menge M heißt kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Zum Schluss ein paar Beobachtungen:

- Komplemente abgeschlossener Mengen sind offen
- Endliche Schnitte offener Mengen sind offen
- Endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen
- Schnitte beschränkter Mengen sind beschränkt

Prüfungsfrage 2020/2

12. Betrachten Sie folgende Menge $L = \{(x, y) \in R^2 : 3 < x \leq 5, -2 \leq y \leq 4)$. Die Menge ist

   A. offen.

   B. kompakt.

   C. nicht geschlossen.

   D. weder geschlossen, noch beschränkt

Funktionen: Definition

Definition: Funktion

Eine Funktion $f : X \to Y$ ist eine Regel, welche jedem Element in X *genau ein* Element in Y zuweist. Wir nennen X die Definitionsmenge und Y die Zielmenge der Funktion f.

- $f(x)$ ist der Wert der Funktion an der Stelle $x \in X$
- Die Menge $\{f(x) : x \in X\}$ ist die Bildmenge von f
- Achtung, uneinheitliche Terminologie: “Wertebereich” kann entweder Zielmenge oder Bildmenge bezeichnen
- Eine Regel, die einem $x \in X$ mehrere $y \in Y$ zuweist, ist keine Funktion $\rightsquigarrow$ Bsp.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x^2 + f(x)^2 = 1$
- Eine Regel, die einem $x \in X$ kein $y \in Y$ zuweist, ist keine Funktion $\rightsquigarrow$ Bsp.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-1}$

Funktionen: Eigenschaften (1)

Definition: Injektive Funktion

Eine Funktion $f : X \to Y$ ist injektiv, wenn sie jedem Element $y \in Y$ höchstens ein Element $x \in X$ zuordnet:

$$\begin{aligned} & \forall x, x' \in X : f(x) = f(x') \implies x = x'; && (1) \\ \iff & \forall x, x' \in X : x \neq x' \implies f(x) \neq f(x'). && (2) \end{aligned}$$

- höchstens ein Element = null oder eins
- Definitionen (1) und (2) sind äquivalent (Warum?)
- Beispiel: $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist injektiv
- Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist nicht injektiv

Funktionen: Eigenschaften (2)

Definition: Surjektive Funktion

Eine Funktion $f : X \to Y$ ist surjektiv, wenn sie jedem Element $y \in Y$ mindestens ein Element $x \in X$ zuordnet:

$$\forall y \in Y, \exists x \in X : y = f(x).$$

- mindestens ein Element = eins oder mehr
- Intuition: zu jedem Element in Y existiert ein Wert $f(x)$
- Beispiel: $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $f(x) = x^2$ ist surjektiv
- Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist nicht surjektiv

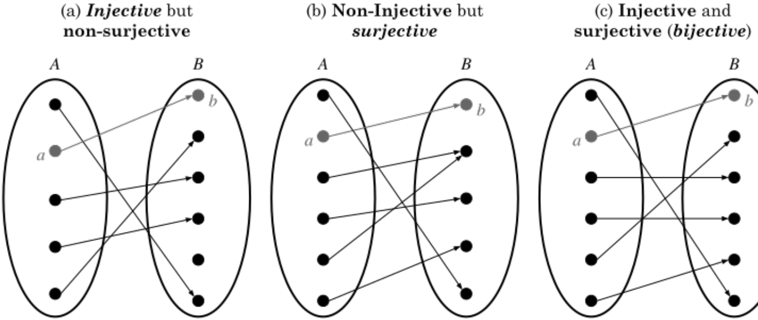
Funktionen: Eigenschaften (3)

Definition: Bijektive Funktion

Eine Funktion $f : X \to Y$ mit $X, Y \subset \mathbb{R}$ ist bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

- Eine Funktion ist entweder
  1. injektiv, aber nicht surjektiv;
  2. surjektiv, aber nicht injektiv;
  3. injektiv und surjektiv ($\equiv$ bijektiv);
  4. weder injektiv noch surjektiv.
- Um zu zeigen, dass eine Funktion bijektiv ist, müsst ihr zeigen, dass sie injektiv und surjektiv ist

Funktionen: Eigenschaften (4)



Achtung: nicht vergessen, dass es den vierten Fall gibt!

Illustration: Musical Inquisit

Prüfungsfrage 2020/2

14. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \ln x + 12$. Bestimmen Sie für welchen Wertebereich (W) und Definitionsbereich (D) die Funktion bijektiv ist

    A. $D = \mathbb{R}^+$ und $W = \mathbb{R}$

    B. $D = \mathbb{R}$ und $W = [\sqrt{12}, \infty)$

    C. $D = \mathbb{R}^+$ und $W = [12, \infty)$

    D. $D = [\sqrt{12}, \infty)$ und $W = \mathbb{R}^+$

Funktionen: Eigenschaften (5)

Wir betrachten für einen Moment nun multivariate Funktionen.

Definition: Homogene Funktion

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^2$ ist homogen vom Grad $k \in \mathbb{R}$, wenn für alle $(x, y) \in D$ und alle $t > 0$ gilt:

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y).$$

- Verfahren zum Nachweis: einfach tx und ty als Variablen einsetzen und t ausklammern
- Beispiel: $f(x, y) = 2\sqrt{xy}$ ist homogen vom Grad $k = 1$.

Prüfungsfrage 2020/2

10. Die Funktion $f(x, y) = x^3/3 + y^4/x$ ist

    A. nicht homogen.

    B. homogen von Grad 3.

    C. homogen von Grad 2.

    D. homogen von Grad 1.

Funktionen: Grenzwerte (1)

Definition: Grenzwert einer Funktion

Es sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $X \subset \mathbb{R}$. $x_0 \in \mathbb{R}$ ist der funktionale Grenzwert von f, wenn

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0) < \varepsilon|.$$

Funktionen: Grenzwerte (2)

Einige einfache Tricks zur Berechnung von funktionalen Grenzwerten:

1. Einsetzen (falls möglich)
2. Vereinfachen von Brüchen, “intelligente Eins”
3. Satz von L’Hôpital
4. Faktorzerlegung
5. Rechts- und Linksseitige Grenzwerte bestimmen

Beispiel für 2, 3, 5: nächste Folie

Beispiel für 4: Klausur 2020/2 Aufgabe 19

Beispiel für 1: Klausur 2020/2 Aufgabe 29

Satz von L'Hôpital

Es seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) \in \{0, \pm\infty\}$$

sowie $g'(x) \neq 0$ für alle $x \neq x_0$ in (a, b). Weiterhin existiere der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Der Satz ist nur anwendbar wenn der Grenzwert nicht bestimmbar ist mit der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Funktionen: Grenzwerte (4)

Für die Beispiele, siehe Foliensatz mit Notizen.

Prüfungsfrage 2020/2

19. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \to a} \frac{ax^2 - 2xa^2 + a^3}{2(a-x)}$ für $a \in \mathbb{R}$.

   A. 0

   B. a^2

   C. a

   D. Der Grenzwert existiert nicht.

Prüfungsfrage 2020/2

29. Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert (insofern er existiert)

$$\lim_{x \to 3} \left[\left(\frac{1}{x^2} \right) \left(\sqrt{3x} \right) \right]$$

A. 0

B. 1

C. $\frac{1}{3}$

D. Der Grenzwert existiert nicht.

Taschenrechner

Meme Credit: u/Battleboi0406 auf r/mathmemes

Definition: Stetigkeit

Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit $X \subset \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in X$, wenn der funktionale Grenzwert von f in x_0 existiert, bzw.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

f heißt stetig, wenn sie stetig in allen $x \in X$ ist.

Prüfungsfrage 2020/2

18. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{für} \quad -3 < x < -2 \\ -x-2 & \text{für} \quad -2 \leq x < 0 \\ x+2 & \text{für} \quad 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

Welche der folgenden Aussagen ist dann **WAHR**?

A. Die Funktion ist an $x = -3$ stetig.

B. Die Funktion ist an $x = -2$ stetig.

C. Die Funktion ist an $x = 0$ stetig.

D. Die Funktion ist stetig.

Ableitung: Intuition (1)

Betrachte eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(y)}{x - x_0} =: \frac{df(x_0)}{dx} \equiv f'(x_0)$$

Differenz zwischen $f(x)$ und $f(y)$.

Ableitung: Intuition (2)

Betrachte eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: \frac{du(x_0)}{dx} \equiv f'(x_0)$$

Durchschnittliche Differenz zwischen $f(x)$ und $f(x_0)$ auf dem Intervall zwischen $[x, x_0]$ bzw. $[x_0, x]$. $\rightsquigarrow$ Steigungsdreieck

Ableitung: Intuition (3)

Betrachte eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: \frac{du(x_0)}{dx} \equiv f'(x_0)$$

"Unendlich kleines" Steigungsdreieck um x_0.

Notiz: x_0 ist fix. x ist beliebig und konvergiert von beiden Seiten gegen x (denkt an die Definition des Grenzwerts).

Ableitung: Definition

Und nun etwas formaler...

Definition: Ableitung

Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $D \subset \mathbb{R}$. Die Ableitung von f in $x_0 \in D$ ist

$$\frac{df(x_0)}{dx} \equiv f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Die Ableitung von f auf $C \subset D$ ist die Funktion $f : C \to \mathbb{R}, f'(x)$.

f ist differenzierbar auf C, wenn $f'(x)$ für alle $x \in C$ existiert.
$f : D \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar, wenn f differenzierbar auf D ist.

Interpretation: "Momentane" Veränderungsrate/ Steigungsgerade/ Tangente in $x \in D$

Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Satz

Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $D \subset \mathbb{R}$. Wenn f in $x \in D$ differenzierbar ist, dann ist f stetig in $x \in D$.

Wenn f differenzierbar, dann ist f stetig.

- Ergo: Differenzierbarkeit $\implies$ Stetigkeit
- Stetigkeit $\not\Longrightarrow$ Differenzierbarkeit (Gegenbsp.: $f(x) = |x|$)
- "Stetigkeit ist notwendig aber nicht hinreichend für Differenzierbarkeit"

Ableitungen höherer Ordnung

- Die 2. Ableitung von $f : D \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x \in X$ ist nichts weiter als die Ableitung von f'
- Es gelten die selben Regeln und Zusammenhänge (so mit Stetigkeit)
- Wenn die n-te Ableitung von f in x existiert, heißt f n-mal differenzierbar
- Multivariate Funktionen: Hesse-Matrix

Prüfungsfrage 2020/2

1. Gegeben sei eine auf $\mathbb{R}$ stetige reelle Funktion $f(x)$. Welche der folgenden Aussagen ist FALSCH?
   A. $f(x)$ ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar.
   B. $f(x)$ ist auf $\mathbb{R}$ definiert.
   C. An jedem $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
   D. Der funktionale Grenzwert der Funktion existiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

Exkurs Betrag

Es sei $x \in \mathbb{R}$. Der Betrag von x ist gegeben durch

$$|x| := \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Wir können diese Definition nutzen um Betragsfunktionen umzuschreiben. Beispiel:

$$f(x) = \frac{|x-2|}{x-2} = \begin{cases} \frac{x-2}{x-2} & \text{für } x-2 \geq 0 \\ \frac{-(x-2)}{x-2} & \text{für } x-2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 2 \\ -1 & \text{für } x < 2 \end{cases}$$

Die Funktion lässt sich nun einfach auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit überprüfen.

Prüfungsfrage 2020/2

15. Gegeben sei die Funktion $f(x) = |3x - 10|$. Welche der folgenden Aussagen ist **WAHR**? Die Funktion ist am Punkt

    A. $x_0 = \frac{10}{3}$ nicht differenzierbar und somit nicht stetig.

    B. $x_0 = 0$ stetig aber nicht differenzierbar.

    C. $x_0 = 0$ stetig und differenzierbar.

    D. $x_0 = \frac{10}{3}$ nicht definiert.

Partielle Ableitungen und Differential

Wir betrachten multivariate Funktionen $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $d \geq 2$.

Definition: Partielle Ableitung

Es sei $f : D \to R$ eine Funktion mit $D \subset \mathbb{R}^2$. Die partielle Ableitung von f nach x in (x_0, y_0) ist

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \equiv f_x(x_0, y_0) := lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

- Wir fixieren $y = y_0$ und tun so als wäre f univariat $\rightsquigarrow$ behandeln wir die anderen Variablen einfach wie Konstanten
- Differential von f: $df(x, y) = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$

Partielle Ableitungen und Differential

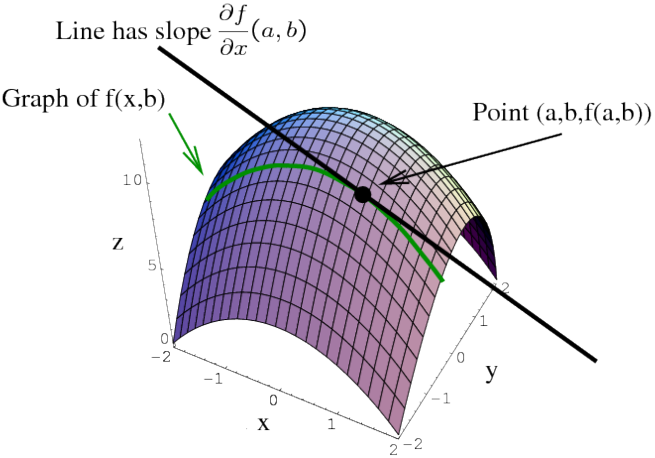


Illustration: https://mathinsight.org

Prüfungsfrage 2020/2

13. Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = e^{\ln\left(x^2 y\right)}$. Welche der folgenden Antwortmöglichkeiten stellt eine der partiellen Ableitung von $f(x,y)$ dar?

    A. $e^{\ln\left(x^2 y\right)} \frac{1}{x^2 y} 2xy$

    B. $2xy$

    C. x^2

    D. Alle Antworten sind partielle Ableitungen der Funktion.

Prüfungsfrage 2020/2

8. Bestimmen Sie das Differential der Funktion $z = \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right)$

   A. $dz = \frac{1}{x+y}\left(\frac{x}{y}dx - dy\right)$

   B. $dz = \frac{1}{x+y}\left(dx \quad \frac{x}{y}dy\right)$

   C. $dz = -\frac{1}{\frac{y}{x^2}+\frac{y^2}{x^3}}dx + \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{y}{x^2}}dy$

   D. $dz = -\frac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{y}{x}}dx + \frac{x}{1+\frac{y}{x}}dy$

Recap: Wichtige Zusammenhänge

- Differenzierbarkeit $\implies$ Stetigkeit
- M abgeschlossen + beschränkt $\iff$ M kompakt
- $\lim_{x \to c} f(x) = y \in \mathbb{R} \iff \lim_{x \nearrow c} f(x) = y = \lim_{x \swarrow c} f(x)$
- Bei Injektivität, Surjektivität, Bijektivität, Stetigkeit und Differenzierbarkeit hängt die Antwort häufig von Definitions- und Wertebereich ab!

Implizites Differenzieren (1)

Im Folgenden betrachten wir eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

- Satz über implizite Funktionen: es existiert *lokal* um $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ eine Funktion $y = g(x)$, sodass

$$f(x, g(x)) = f(x, y) = c$$

- Betrachte hierfür als Bsp. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ mit $c = 0$. Die Höhenlinie in $f(x, y) = 0$ ist $x^2 + y^2 = 1$ (Warum?)
- $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, x^2 + f(x)^2 = 1$ ist keine Funktion
- $f : [0, 1] \to [0, 1], x^2 + f(x)^2 = 1$ ist eine Funktion

Implizites Differenzieren (2)

Wir brauchen die Funktion aber gar nicht kennen um ihre Steigung in (x_0, y_0) zu bestimmen!

Satz über implizite Funktionen (2)

Es $f(x, y) = c$ eine implizite Funktion um (x_0, y_0) mit $y = g(x)$. Es gilt:

$$\frac{dg(x_0)}{dx} = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}.$$

Hinweis: für die Ableitungsfunktion $g'(x)$ ist es egal, welches $c \in \mathbb{R}$ wir wählen, da es weder f_x noch f_y beeinflusst (allerdings den Bereich, in welchem (x_0, y_0) liegen kann)

Pause!

Zeit für eine Pause! Gleich gehts weiter mit Teil 2 ☕

Meme Credit: u/logicaleuler on r/mathmemes