Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Διακριτά Μαθηματικά – 4^{ο} Εξάμηνο 2016-2017
Αβραμίδης Κλεάνθης – ΑΜ: 03115117

3^{η} Γραπτή Εργασία – Απαντήσεις

➢ *Θέμα 1*

1. Ψάχνουμε με πόσους τρόπους μπορούν 100 μη διακεκριμένοι επιβάτες να κατέβουν σε 12 σταθμούς. Πρόκειται για διανομή $k = 100$ μη διακεκριμένων αντικειμένων σε $n = 12$ διακεκριμένες υποδοχές. Επομένως οι δυνατοί τρόποι δίνονται από τη σχέση $C(n+k-1,k) = C(111,100) = \frac{\mathbf{111}!}{\mathbf{11}!\,\mathbf{100}!}$.
2. Έχουμε πλέον διακεκριμένους επιβάτες και δεν παίζει ρόλο η σειρά. Οι δυνατοί τρόποι είναι τότε $n^k = \mathbf{12^{100}}$.
3. Αν τώρα παίζει ρόλο η σειρά, ουσιαστικά ψάχνουμε τις δυνατές μεταθέσεις της περίπτωσης 1, που είναι $100!$. Οι δυνατοί τρόποι είναι επομένως $100! * C(111,100) = \frac{\mathbf{111}!}{\mathbf{11}!}$.
4. Αν έχουμε 45 μη διακεκριμένους άνδρες και 55 μη διακεκριμένες γυναίκες (δεν παίζει ρόλο η σειρά), ουσιαστικά έχουμε συνδυασμό (κανόνας γινομένου) 2 προβλημάτων της περίπτωσης 1, όπου μη διακεκριμένοι επιβάτες κατεβαίνουν σε 12 σταθμούς. Οι δυνατοί τρόποι: $C(11+45,45) * C(11+55,55) = \frac{\mathbf{66}!*\mathbf{56}}{\mathbf{11}!\,\mathbf{11}!\,\mathbf{45}!}$.
5. Αν στην περίπτωση 4 παίζει ρόλο η σειρά, ουσιαστικά έχουμε την περίπτωση 3, όπου όμως θα πρέπει να μην προσμετρήσουμε τις μεταθέσεις των 45 ανδρών και των 55 γυναικών, καθώς δεν είναι διακεκριμένοι, ήτοι 45! και 55! μεταθέσεις αντίστοιχα. Τελικά, οι δυνατοί τρόποι είναι $\frac{\mathbf{111}!}{\mathbf{11}!\,\mathbf{55}!\,\mathbf{45}!}$.
6. Θεωρούμε ότι σε κάθε σταθμό αποβιβάζεται κάποιος. Στην περίπτωση 1, αφαιρώντας τους «σίγουρους» που είναι 12, μένουν 88 μη διακεκριμένοι επιβάτες για να κατέβουν σε 12 σταθμούς. Με την ίδια διαδικασία έχουμε: $C(99,88) = \frac{\mathbf{99}!}{\mathbf{11}!\,\mathbf{88}!}$. Στην περίπτωση 3 έχουμε διακεκριμένους επιβάτες όπου παίζει ρόλο η σειρά, άρα θα πρέπει να συμπεριλάβουμε όλες τις δυνατές μεταθέσεις του αποτελέσματος που μόλις βρήκαμε, που είναι 100!. Οι τρόποι βρίσκονται επομένως $\frac{\mathbf{99}!\,\mathbf{100}!}{\mathbf{11}!\,\mathbf{88}!}$.

➢ *Θέμα 2*

a) Ψάχνουμε τους δυνατούς τρόπους για 40 (διακεκριμένα) παιδιά να καθίσουν σε 4 τραπέζια όμοιων καθισμάτων με πληθάριθμο 10 το καθένα, άρα τις σχετικές μεταθέσεις ($\frac{40!}{10!10!10!10!}$) πολλαπλασιασμένες επί τις δυνατές μεταθέσεις των παιδιών στο κάθε τραπέζι $(9!\,9!\,9!\,9!)$. Τελικά οι δυνατοί τρόποι: $\frac{\mathbf{40}!}{\mathbf{10^4}}$.

b) Τοποθετούμε τα k επιλεγμένα βιβλία με τη σειρά και θεωρούμε τα μεταξύ τους k-1 (+2 ακριανά) κενά σαν υποδοχές. Βάζουμε υποχρεωτικά k-1 βιβλία ανάμεσα στα επιλεγμένα και μένουν n-k-(k-1) βιβλία για να μοιραστούν σε k+1 υποδοχές. Πρόκειται για συνδυασμούς με επανάληψη $\binom{[k+1]+[n-2k+1]-1}{[n-2k+1]} = \binom{\boldsymbol{n-k+1}}{\boldsymbol{n-2k+1}}$.

c) Προτασιακός τύπος με n προτασιακές μεταβλητές έχει 2^n αναθέσεις τιμών (Α ή Ψ). Οι κλάσεις διαμέρισης ορίζονται ως τα σύνολα των ταυτολογικά ισοδύναμων προτασιακών τύπων, εκείνων δηλαδή που έχουν ταυτόσημες τις 2^n αναθέσεις. Η εύρεση επομένως του αριθμού των κλάσεων είναι ισοδύναμο πρόβλημα με την εύρεση του αριθμού των αναθέσεων για 2^n μεταβλητές, δηλαδή $\mathbf{2^{2^n}}$ διαφορετικές κλάσεις διαμέρισης. Για να αληθεύει η δοσμένη συνεπαγωγή αρκεί ο ψ να αληθεύει πάντα (1 κλάση) ή να είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με τον τύπο στα αριστερά της συνεπαγωγής όταν είναι ψευδής (3+3+3+1 κλάσεις). Συνολικά **11 κλάσεις**.

➢ *Θέμα 3*

a) Έχουμε 500 διακεκριμένους φοιτητές να χωρίζονται σε 4 διακριτά πανομοιότυπα τμήματα, το καθένα από τα οποία έχει 50-200 άτομα. Η ΓΣ για να βρούμε τους δυνατούς τρόπους χωρίσματος στην πρώτη περίπτωση όπου η σειρά τοποθέτησης δεν παίζει ρόλο είναι εκθετική λόγω διακρισιμότητας και συγκεκριμένα δίνεται από τον τύπο: $\left(\frac{\mathbf{x^{50}}}{\mathbf{50}!} + \frac{\mathbf{x^{51}}}{\mathbf{51}!} + \cdots + \frac{\mathbf{x^{200}}}{\mathbf{200}!}\right)^{\mathbf{4}}$. Η λύση είναι ο συντελεστής του όρου $\frac{\mathbf{x^{500}}}{\mathbf{500}!}$. Στην δεύτερη περίπτωση όπου η σειρά παίζει ρόλο, αρκεί κάθε όρο της προηγούμενης ΓΣ να τον πολλαπλασιάσουμε με τις δυνατές μεταθέσεις των φοιτητών. Η νέα ΓΣ: $\left(\mathbf{50}!*\frac{\mathbf{x^{50}}}{\mathbf{50!}}+\mathbf{51}!*\frac{\mathbf{x^{51}}}{\mathbf{51!}}+\cdots+\mathbf{200}!*\frac{\mathbf{x^{200}}}{\mathbf{200!}}\right)^{\mathbf{4}}$. Η λύση είναι και πάλι ο συντελεστής του όρου $\frac{\mathbf{x^{500}}}{\mathbf{500!}}$ αφού έχουμε συνολικά 500 φοιτητές.

b) Έχουμε πρόβλημα μεταθέσεων, οπότε η ΓΣ θα είναι εκθετική. Σύμφωνα με τους περιορισμούς που δίνονται ο απαριθμητής του 0 είναι ο $\mathrm{e^x}-1$ (εμφανίζεται τουλάχιστον 1 φορά), ο απαριθμητής του 1 είναι ο $\frac{\mathrm{e^x+e^{-x}}}{2}$ (άρτιος αριθμός εμφανίσεων), ο απαριθμητής του 2 είναι ο $\frac{\mathrm{e^x-e^{-x}}}{2}$ (περιττό πλήθος εμφανίσεων) και του 3 ο $\mathrm{e^x}$, αφού δεν έχει περιορισμούς. Η ΓΣ είναι η $(\mathbf{e^x-1})\left(\frac{\mathbf{e^x+e^{-x}}}{\mathbf{2}}\right)\left(\frac{\mathbf{e^x-e^{-x}}}{\mathbf{2}}\right)\mathbf{e^x}$. Η λύση βρίσκεται έχοντας δεδομένο ότι $\mathrm{e^x}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$ στον συντελεστή του όρου $\frac{\mathbf{x^n}}{\mathbf{n!}}$ της ΓΣ.

- ***Θέμα 4***

a) Θεωρώντας $\mathrm{x^1}$ την σωστή απάντηση ενός φοιτητή και $\mathrm{x^0}$ την λανθασμένη, οι πιθανότητες για τον i-οστό φοιτητή είναι $(1-\mathrm{p_i})\mathrm{x^0}+\mathrm{p_i x^1}=1-\mathrm{p_i}+\mathrm{p_i x}$. Για n φοιτητές, η ΓΣ είναι η $(\mathbf{1-p_i+p_i x})^{\mathbf{n}}$. Η πιθανότητα να έχουν απαντήσει k φοιτητές σωστά δίνεται από τον συντελεστή του όρου $\mathbf{x^k}$.

b) Για να δομήσουμε την πιθανότητα να έχουν απαντήσει σωστά το πολύ k φοιτητές, παίρνουμε την ακολουθία μερικών αθροισμάτων $\gamma_n=\sum_{j=0}^{n}a_i$ των συντελεστών της ΓΣ. Η αντίστοιχη ΓΣ της γ_nείναι η $\Gamma(x)=\frac{A(x)}{1-x}=\frac{(\mathbf{1-p_i+p_i x})^{\mathbf{n}}}{\mathbf{1-x}}$. Εδώ η ζητούμενη πιθανότητα βρίσκεται προφανώς στον όρο $\mathbf{x^k}$.

- ***Θέμα 5***

a) Έχουμε 1000 φοιτητές, 200 σε κάθε έτος και 1000 μπλουζάκια (300 κόκκινα & 700 πράσινα) να μοιράσουμε με όλους τους δυνατούς τρόπους. Αν οι φοιτητές θεωρηθούν διακεκριμένοι, πρόκειται για αριθμό ίσο με τις μεταθέσεις των 1000 ρούχων που ανήκουν σε 2 ομάδες με πληθάριθμο αντίστοιχα 300 και 700. Άρα, οι τρόποι είναι $\frac{\mathbf{1000!}}{\mathbf{700!\,300!}}$. Αν δεν θεωρηθούν διακεκριμένοι, αλλά μας ενδιαφέρει μόνο τι μοιράστηκε σε κάθε έτος, αρκεί να επικεντρωθούμε στη μία κατηγορία (έστω τα $\mathrm{k}=300$ κόκκινα) καθώς ό,τι απομείνει θα καλυφθεί από την άλλη και να εξετάσουμε τους δυνατούς τρόπους να μοιραστούν σε $\mathrm{n}=5$ έτη. Πρόκειται για διανομή k μη διακεκριμένων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές, οπότε οι δυνατοί τρόποι μοιράσματος θα είναι $\mathrm{C(n+k-1,k)=C(304{,}300)}=\frac{304!}{4!300!}$. Εδώ εισάγουμε και τον περιορισμό των 200 φοιτητών ανά έτος: Θα πρέπει από το νούμερο που βρήκαμε να αφαιρέσουμε τις περιπτώσεις κατά τις οποίες μοιράζονται πάνω από 200 κόκκινα μπλουζάκια σε κάποιο έτος. Σε αυτή την περίπτωση σίγουρα μοιράζεται ένα παραπάνω μπλουζάκι σε κάποιο έτος, συνολικά 201. Μένουν 99 που πρέπει να μοιραστούν σε 5 έτη με $\mathrm{C}(103{,}99)=\frac{103!}{4!99!}$ τρόπους. Κάνουμε την ίδια διαδικασία για τα υπόλοιπα έτη. Οι ζητούμενοι τρόποι μοιράσματος είναι $\frac{\mathbf{304!}}{\mathbf{4!300!}}-\mathbf{5}*\frac{\mathbf{103!}}{\mathbf{4!99!}}$.

b) Μοιράζουμε σε κάθε έτος τουλάχιστον 2 και άρτιο πλήθος από κόκκινα και πράσινα μπλουζάκια. Θεωρώντας μη διακεκριμένους τους φοιτητές και ενδιαφερόμενοι μόνο για το πόσα χβγ κόκκινα μοιράστηκαν σε κάθε έτος, η ΓΣ και για τα 5 έτη είναι η $\left(\boldsymbol{x^2+x^4+\cdots+x^{200}}\right)^{\mathbf{5}}$, ίσως και με περιττούς όρους που δεν μας επηρεάζουν. Η λύση βρίσκεται στον συντελεστή του όρου $\boldsymbol{x^{300}}$. Θεωρώντας τώρα διακεκριμένους τους φοιτητές το πρόβλημα μετατρέπεται σε διατάξεων. Συγκεκριμένα, θα πρέπει κάθε όρος της παραπάνω ΓΣ να πολλαπλασιαστεί με το πλήθος των δυνατών μοιρασμάτων των ρούχων ανάμεσα στους 200 κάθε έτους. Η νέα ΓΣ είναι επομένως η $\left(\binom{\mathbf{200}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x^2}+\binom{\mathbf{200}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{x^4}+\cdots+\binom{\mathbf{200}}{\mathbf{200}}\boldsymbol{x^{200}}\right)^{\mathbf{5}}$. Η λύση βρίσκεται και πάλι στον συντελεστή του όρου $\boldsymbol{x^{300}}$.

c) Μπορούμε να ερμηνεύσουμε το δοθέν ανάπτυγμα σύμφωνα με την συγκεκριμένη εφαρμογή ως τους δυνατούς τρόπους να μοιραστεί άρτιος αριθμός από κόκκινα και πράσινα μπλουζάκια στα 5 έτη (μη διακεκριμένοι φοιτητές), μόνο που τώρα αντί για αναλογία 300-700 έχουμε 400-600. Είναι προφανές πως η κατανομή του ενός χρώματος στα 5 έτη δεν αφήνει επιλογές για την μοιρασιά του άλλου χρώματος, το οποίο δίνεται με ένα τρόπο στους φοιτητές. Έτσι, είτε μετρήσουμε πώς δόθηκαν τα πράσινα είτε τα κόκκινα, είναι το ένα και το αυτό. **Θα πρέπει λοιπόν οι συντελεστές των όρων $\boldsymbol{x^{400}}$ & $\boldsymbol{x^{600}}$ που μας δίνουν το ζητούμενο να είναι ίσοι.**