



**Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο**  
**Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών**  
**Διακριτές Μέθοδοι για την Επιστήμη των Υπολογιστών**

Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου

**2η Γραπτή Εργασία, Ημ/νια Παράδοσης: 26/5/2017**

---

**Θέμα 1 (Αρχή του Περιστερώνα, 1.8 μον.).** (α) Επιλέγουμε αυθαίρετα  $n$  φυσικούς αριθμούς από το σύνολο  $\{1, 2, 3, \dots, 2^n - 3, 2^n - 2\}$ . Να δείξετε ότι μεταξύ των αριθμών που έχουμε επιλέξει υπάρχει πάντα ένα ζευγάρι όπου ο μεγαλύτερος από τους δύο αριθμούς είναι μικρότερος ή ίσος από το διπλάσιο του άλλου (π.χ., για  $n = 3$ , αν επιλέξουμε τους αριθμούς 1, 3, 6, έχουμε ότι  $6 \leq 2 \cdot 3$ ).

(β) Θεωρούμε μια ακολουθία  $N$  θετικών ακεραίων η οποία περιέχει ακριβώς  $n$  διαφορετικούς αριθμούς. Να δείξετε ότι αν  $N \geq 2^n$ , υπάρχουν τουλάχιστον δύο ή περισσότερες διαδοχικές θέσεις της ακολουθίας τέτοιες ώστε το γινόμενο των αντίστοιχων αριθμών να είναι ένα τέλειο τετράγωνο. Π.χ., στην ακολουθία 7, 5, 3, 5, 7, 5, 3, 7, όπου  $n = 3$  και  $N = 2^3$ , το γινόμενο των έξι τελευταίων διαδοχικών θέσεων είναι τέλειο τετράγωνο.

**Θέμα 2 (Γράφηματα - Βασικές Έννοιες, 1.2 μον.).** Θεωρούμε το γράφημα  $G_1 = C_n * K_m$  που προκύπτει από τη σύνδεση (join) του κύκλου με  $n \geq 3$  κορυφές με το πλήρες γράφημα με  $m \geq 1$  κορυφές.

1. Πόσες κορυφές και πόσες ακμές έχει το γράφημα  $G_1$  (ως συνάρτηση των  $n$  και  $m$ );
2. Για ποιες τιμές των  $n$  και  $m$  το γράφημα  $G_1$  έχει κύκλο Euler;
3. Για ποιες τιμές των  $n$  και  $m$  το γράφημα  $G_1$  έχει κύκλο Hamilton;
4. Ποιος είναι ο χρωματικός αριθμός του  $G_1$ ;

**Θέμα 3 (Διμερή Γράφηματα, 1.8 μον.).** (α) Να δείξετε ότι για κάθε (απλό μη-κατευθυνόμενο) διμερές γράφημα  $G(V, E)$ , υπάρχει μια μοναδική διαμέριση των κορυφών του  $V$  σε δύο ανεξάρτητα σύνολα. Πόσες διαφορετικές διαμερίσεις υπάρχουν αν το  $G$  έχει  $k \geq 2$  συνεκτικές συνιστώσες;

(β) Θεωρούμε ένα απλό μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα  $G(V, E)$  με  $n \geq 2$  κορυφές και  $m \geq 1$  ακμές. Συμβολίζουμε με  $Y(G)$  το γράφημα που προκύπτει από την υποδιαίρεση όλων των ακμών του  $G$ . Για την υποδιαίρεση μιας ακμής  $e = \{u, v\}$ , διαγράφουμε την  $e$  και προσθέτουμε μια νέα κορυφή  $x_e$  που είναι γειτονική μόνο με τα άκρα  $u$  και  $v$  της ακμής  $e$ . (i) Να δείξετε ότι το  $Y(G)$  είναι διμερές γράφημα και να υπολογίσετε το πλήθος των κορυφών και των ακμών του (με δεδομένο ότι το  $G$  έχει  $n$  κορυφές και  $m$  ακμές). (ii) Να δείξετε ότι το  $Y(G)$  έχει κύκλο Hamilton αν και μόνο αν το γράφημα  $G$  είναι ο κύκλος  $C_n$  με  $n$  κορυφές.

**Θέμα 4 (Κύκλος Euler, Κύκλος Hamilton, 1.8 μον.).** (α) Να δείξετε ότι μπορούμε πάντα να προσανατολίσουμε όλες τις ακμές ενός μη-κατευθυνόμενου συνεκτικού γραφήματος  $G$  ώστε για κάθε κορυφή  $u$ , ο προς-τα-έσω βαθμός και ο προς-τα-έξω βαθμός της  $u$  είτε να είναι ίσοι είτε να διαφέρουν κατά 1.

(β) Έστω μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα  $G$  το οποίο έχει  $k \geq 2$  κορυφές περιττού βαθμού. Να δείξετε ότι το σύνολο των ακμών του  $G$  μπορεί να διαμεριστεί σε  $k/2$  μονοκονδυλίες που δεν έχουν κοινές ακμές μεταξύ τους.

(γ) Έστω γράφημα  $G$  και έστω  $x$  μια κορυφή του  $G$  τέτοια ώστε το  $G - x$  να έχει κύκλο Hamilton. Υποθέτουμε ότι το  $G$  έχει δύο κορυφές  $u$  και  $v$  που έχουν βαθμό 3 και είναι γειτονικές με την  $x$ . (i) Να δείξετε ότι αν οι  $u$  και  $v$  συνδέονται μεταξύ τους, τότε και το  $G$  έχει κύκλο Hamilton. (ii) Να δείξετε ότι αν οι  $u$  και  $v$  δεν συνδέονται μεταξύ τους, τότε το  $G$  δεν έχει απαραίτητα κύκλο Hamilton.

**Θέμα 5 (Δέντρα, 1.6 μον.).** (α) Έστω  $n \geq 2$  θετικοί ακέραιοι  $d_1, \dots, d_n$ . Να δείξετε ότι  $d_1 + \dots + d_n = 2(n - 1)$  αν και μόνο αν υπάρχει δέντρο  $T$  με  $n$  κορυφές και βαθμούς κορυφών  $d_1, \dots, d_n$ .

(β) Θεωρούμε ένα απλό μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα  $G(V, E, w)$  με θετικά βάρη  $w : E \rightarrow \mathbb{N}^*$  στις ακμές και ένα Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο (ΕΣΔ)  $T$  του  $G$ . Για κάθε ζευγάρι κορυφών  $u, v$ , συμβολίζουμε με  $p_{uv}^*$  το μοναδικό  $u - v$  μονοπάτι στο  $T$ . Να δείξετε ότι για κάθε ζευγάρι κορυφών  $u, v$  και για κάθε  $u - v$  μονοπάτι  $p_{uv}$  στο  $G$ , ισχύει ότι  $\max_{e \in p_{uv}^*} \{w(e)\} \leq \max_{e \in p_{uv}} \{w(e)\}$  (δηλ. αν θεωρήσουμε ως “κόστος” ενός  $u - v$  μονοπατιού  $p_{uv}$  το βάρος της βαρύτερης ακμής του, το μοναδικό  $u - v$  μονοπάτι  $p_{uv}^*$  στο ΕΣΔ  $T$  ελαχιστοποιεί αυτό το κόστος για όλα τα ζευγάρια κορυφών  $u, v$ ).

**Θέμα 6 (Επιπεδότητα, Χρωματικός Αριθμός, 1.8 μον.).** (α) Για κάθε φυσικό  $n \geq 2$ , ορίζουμε το απλό μη-κατευθυνόμενο γράφημα  $H_n$  με σύνολο κορυφών  $V_n = \{0, 1, \dots, 2n - 1\}$  και σύνολο ακμών

$$E_n = \{\{i, i + 1\} : i \in \{0, 1, \dots, 2n - 2\}\} \cup \{\{2n - 1, 0\}\} \cup \{\{i, i + n\} : i \in \{0, 1, \dots, n - 1\}\}$$

(i) Να δείξετε ότι το  $H_n$  είναι επίπεδο αν και μόνο αν  $n = 2$ . (ii) Να προσδιορίσετε τον χρωματικό αριθμό του  $H_n$  για κάθε τιμή του  $n \geq 2$ .

(β) Ένα επίπεδο γράφημα λέγεται *εξωεπίπεδο* (outerplanar) αν μπορεί να σχεδιαστεί στο επίπεδο ώστε οι ακμές του να μην τέμνονται και όλες οι κορυφές του να βρίσκονται στην εξωτερική όψη. Να αποδείξετε ότι κάθε απλό εξωεπίπεδο γράφημα με  $n$  κορυφές έχει το πολύ  $2n - 3$  ακμές.

**Παράδοση.** Οι εργασίες πρέπει να παραδοθούν στο μάθημα της Παρασκευής 26/5.

**Καλή Επιτυχία!**