Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Προηγμένα Θέματα Αλγορίθμων (Ροή Λ) – Εαρινό Εξάμηνο 2018-2019
Αβραμίδης Κλεάνθης – 03115117

2η Αναλυτική Σειρά Ασκήσεων – Απαντήσεις

➢ Άσκηση 1

Δεδομένων $p, \varepsilon, \delta \in (0,1)$ θέλουμε να βρούμε μια εκτίμηση p' του p τέτοια ώστε να ισχύει:

$$\Pr(|p' - p| \leq \varepsilon p) > 1 - \delta$$

Θεωρώντας Ν το μέγεθος του δείγματος, μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω ανισότητα ως εξής:

$$\Pr(|Np' - Np| \leq \varepsilon Np) > 1 - \delta$$

Για να ισχύει η ανισότητα, αρκεί να ισχύει ότι

$$\Pr(|Np' - Np| < \varepsilon Np) > 1 - \delta \implies \Pr(|Np' - Np| \geq \varepsilon Np) \leq \delta$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η απάντηση κάθε ατόμου του δείγματος είναι μια ανεξάρτητη δοκιμή Poisson (εδώ και Bernoulli, αφού έχουμε 2 συμπληρωματικά ενδεχόμενα και πιθανότητα πραγματοποίησης p). Έστω $X = Np'$ ο αριθμός των θετικών απαντήσεων στις N δοκιμές (p' το ποσοστό). Θα εφαρμόσουμε Chernoff Bound της μορφής

$$\Pr(|X - \mu| \geq \varepsilon\mu) \leq 2e^{-\mu\varepsilon^2/3}$$

όπου $\mu = Np$ η μέση τιμή της διωνυμικής κατανομής $X \sim Bin(N, p)$ που προκύπτει. Συνεπώς:

$$\Pr(|Np' - Np| \geq \varepsilon Np) \leq 2e^{-\frac{Np\varepsilon^2}{3}} \leq \delta \implies -\frac{Np\varepsilon^2}{3} \leq \ln\left(\frac{\delta}{2}\right) \implies Np\varepsilon^2 \geq 3\ln\left(\frac{2}{\delta}\right) \implies N \geq \frac{3\ln\left(\frac{2}{\delta}\right)}{p\varepsilon^2}$$

Για $\varepsilon = 0.02$ και $\delta = 0.05$ λαμβάνουμε $N = \frac{3\ln\left(\frac{2}{\delta}\right)}{p\varepsilon^2} = \frac{3*3.69}{0.004p} = \frac{27666.6}{p}$. Για το δοσμένο διάστημα του p λαμβάνουμε:

$$0.1 \leq p \leq 0.7 \implies 39524 \leq \frac{27666.6}{p} \leq 276666 \implies 39524 \leq N \leq 276666$$

Παρατηρούμε πως πράγματι, ο αριθμός του δείγματος είναι συγκεκριμένος και ανεξάρτητος του πληθυσμού. Θέλουμε τέλος να βρούμε μια εκτίμηση p' ώστε να ισχύει:

$$\Pr(|p' - p| \leq \varepsilon) > 1 - \delta \implies \Pr(|p' - p| > \varepsilon) \leq \delta \implies \Pr\left(|N'p' - N'p| \geq \left(\frac{\varepsilon}{p}\right)N'p\right) \leq \delta$$

Εφαρμόζουμε και πάλι το παραπάνω Chernoff Bound και λαμβάνουμε:

$$\Pr\left(|N'p' - N'p| \geq \left(\frac{\varepsilon}{p}\right)N'p\right) \leq 2e^{-\frac{N'\varepsilon^2}{3p}} \leq 2e^{-\frac{N'\varepsilon^2}{3}} \leq \delta \implies -\frac{N'\varepsilon^2}{3} \leq \ln\left(\frac{\delta}{2}\right) \implies N \geq \frac{3\ln\left(\frac{2}{\delta}\right)}{\varepsilon^2}$$

Για $\varepsilon = 0.02$ και $\delta = 0.05$ λαμβάνουμε $N = \frac{3\ln\left(\frac{2}{\delta}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{3*3.69}{0.004} = 27666$ πολίτες.

➢ Άσκηση 2

(a) Έστω $\alpha, x \in [0,1]^n$ με $\sum x_i = 1$ (x διάνυσμα πιθανοτήτων) και $k(\varepsilon) = [ln2/2\varepsilon^2]$. Παρατηρούμε πως το διάνυσμα $\alpha * y$ μπορεί να κατασκευαστεί τοποθετώντας $k(\varepsilon)$ ίδια balls σε n διακριτά bins. Έστω X_i η θέση στην οποία πέφτει το i ball. Κάθε bin θα αντιστοιχεί σε ένα a_i και το y_i θα αντιστοιχεί στο πόσες μπάλες πέφτουν στο κουτί i, δια το $k(\varepsilon)$, ώστε να έχουμε ποσοστό. Κατ' αυτό τον τρόπο προκύπτει $k(\varepsilon)$-ομοιόμορφο διάνυσμα πιθανοτήτων y, αφού $k(e)$ balls μοιράζονται σε n θέσεις και υφίστανται κανονικοποίηση. Θα έχουμε:

$$\mathrm{a} * y = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i = \sum_{i=1}^{k(\varepsilon)} X_i / k(\varepsilon)$$

Για την κατανομή των τυχαίων μεταβλητών X_i θα επιλέξουμε $\Pr(X_i = a_i) = x_i$. Τότε:

$$E[a * y] = E\left[\sum_{i=1}^{k(\varepsilon)} X_i / k(\varepsilon)\right] = \frac{1}{k(e)} \sum_{i=1}^{k(\varepsilon)} E[X_i] = \frac{1}{k(e)} \sum_{i=1}^{k(\varepsilon)} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = \frac{1}{k(e)} \sum_{i=1}^{k(\varepsilon)} \alpha * x = a * x$$

Συνεπώς δείξαμε ότι $a * y = \sum_{i=1}^{k(\varepsilon)} \frac{X_i}{k(\varepsilon)} = 1$ και $E[a * y] = \alpha * x$. Κάνουμε χρήση του ακόλουθου Hoeffding Bound στην περίπτωσή μας:

$$\Pr(|X - E[X]| > \varepsilon) \leq 2e^{-2n\varepsilon^2} \;\rightarrow\; \Pr(|a * y - a * x| > \varepsilon) \leq 2e^{-2k(\varepsilon)\varepsilon^2} = 2e^{-2[ln2/2\varepsilon^2]\varepsilon^2} \leq 1$$

Άρα $\Pr(|a * y - a * x| \leq \varepsilon) > 0$ και σύμφωνα με την πιθανοτική μέθοδο, θα υπάρχει y με αυτές τις ιδιότητες.

(b) Θεωρούμε τώρα πίνακα A με $m \times n$ στοιχεία στο [0,1] και διάνυσμα πιθανοτήτων x στο [n]. Έστω ακόμη $k(m, \varepsilon) = [dln(2m)/(2\varepsilon^2\,)]$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $k(m, \varepsilon)$-ομοιόμορφο διάνυσμα πιθανοτήτων y ώστε $\|Ax - Ay\|_\infty \leq \varepsilon$. Ορίζοντας ως a_i τα m διανύσματα γραμμής του A και $x' = [a_1 x \;\ldots\; a_m x]$, θα έχουμε:

$$\|Ax - Ay\|_\infty = \|x' - y'\|_\infty = \|\alpha_1(x - y), a_2(x - y), \ldots, a_m(x - y)\|_\infty \leq |a_1 x - a_1 y| + \cdots + |a_m x - a_m y|$$

Στη λογική του πρώτου ερωτήματος μπορούμε να δείξουμε ότι υπάρχει $k(m, \varepsilon)$-ομοιόμορφο διάνυσμα y τέτοιο ώστε

$$|a_1 x - a_1 y| \leq \frac{\varepsilon}{m}$$

Επομένως $\|Ax - Ay\|_\infty \leq |a_1 x - a_1 y| + \cdots + |a_m x - a_m y| \leq m * \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon$, κάτι που αποδεικνύει το ζητούμενο.

➢ Άσκηση 3

(a) Στην περίπτωση κατά την οποία $k \geq 2^n$ η winning strategy για τον chooser θα είναι να χωρίζει τα tokens κάθε φορά στο μισό. Ο remover θα επιλέγει οποιοδήποτε σετ και έτσι τουλάχιστον k/2 tokens θα παραμείνουν στο τέλος του πρώτου γύρου, k/4 στο τέλος του δεύτερου κτλ. Ο chooser κερδίζει αν καταφέρει να έχει tokens στον n-οστό γύρο, δηλαδή αν $\frac{k}{2^n} > 1$ που ισχύει από υπόθεση. Συνεπώς ο chooser θα κερδίζει πάντα.

(b) Για κάθε πιθανή στρατηγική του chooser, έστω ότι ο remover επιλέγει τυχαία (με ρίψη νομίσματος) ποιο σετ θα αφαιρέσει. Αυτό σημαίνει πως, ανά γύρο, κάθε token έχει πιθανότητα $\leq 1/2$ να προχωρήσει στο παιχνίδι (ισότητα όταν ο chooser τοποθετήσει όλα τα tokens στα σετ). Η πιθανότητα τώρα να φτάσει ένα token στο τέρμα θα είναι $\leq \frac{1}{2^n}$. Από την πιθανοτική μέθοδο, ο αναμενόμενος αριθμός από tokens που θα τα καταφέρουν θα είναι $\frac{k}{2^n} < 1$ άρα ο remover θα κερδίσει. Κι εφόσον θα κερδίζει για κάθε πιθανή στρατηγική του chooser, έχει winning strategy.

➢ Άσκηση 4

(5.3) Θεωρούμε γράφημα G(V,E) και ένα optimal max dicut με ακμές $e_1, \ldots, e_k$. Κάθε ακμή e_i έχει βάρος w_i, ξεκινά από το σύνολο U και καταλήγει στο σύνολο W. Πιθανοκρατικός αλγόριθμος: Επιλέγουμε τυχαία (πχ με ρίψη νομίσματος – πιθανότητα 1/2) το σετ κάθε κόμβου. Για να επιλεγεί μια ακμή από αυτές που βρίσκονται στο optimal max dicut θα πρέπει ο κόμβος από τον οποίο φεύγει η ακμή να βρίσκεται στο U και ο κόμβος στον οποίο καταλήγει να βρίσκεται στο W. Τα ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα, επομένως θα συμβούν με πιθανότητα $1/2 * 1/2 = 1/4$. Το τελικό μας κέρδος θα είναι το βάρος κάθε ακμής, επί την πιθανότητα προφανώς να επιλεχθεί. Συνεπώς:

$$SOL = \sum_{u \in V} w_u \Pr(u = chosen) \geq \sum_{u \in OPT} w_u \Pr(u) = \frac{1}{4} \sum_{u \in OPT} w_u = \frac{1}{4} OPT$$

Βλέπουμε λοιπόν πως ο παραπάνω αλγόριθμος είναι 1/4-προσεγγιστικός για το πρόβλημα max dicut.

(5.6α) Το δοθέν γραμμικό πρόγραμμα επιχειρεί να μεγιστοποιήσει το άθροισμα των $w_{ij}z_{ij}$ για κάθε ακμή $(i,j) \in A$. Το πρόβλημα ισοδυναμεί με το max dicut ως εξής: Το z_{ij} θα είναι 1 όταν $i \in U$ και $j \in W$, αλλιώς 0. Η μεταβλητή x_i του προγράμματος θα είναι 0 όταν επιλέγουμε το σύνολο W και 1 όταν επιλέγουμε το U. Εξετάζουμε 4 συνδυασμούς:

- ✓ $i \in U$ και $j \in U$: Από τις συνθήκες του LP θα έχουμε $x_i = 1$ και $x_j = 1$ και προκύπτει $z_{ij} \leq 0 \equiv 0$. Συνεπώς η ακμή και το βάρος της ορθώς δεν συνυπολογίζεται στο αποτέλεσμα.
- ✓ $\boldsymbol{i \in U}$ **και** $\boldsymbol{j \in W}$: Από τις συνθήκες του LP θα έχουμε $x_i = 1$ και $x_j = 0$ και προκύπτει $z_{ij} \leq 1$. Συνεπώς η ακμή και το βάρος της ορθώς συνυπολογίζεται στο αποτέλεσμα.
- ✓ $i \in W$ και $j \in U$: Από τις συνθήκες του LP θα έχουμε $x_i = 0$ και $x_j = 1$ και προκύπτει $z_{ij} \leq 0 \equiv 0$. Συνεπώς η ακμή και το βάρος της ορθώς δεν συνυπολογίζεται στο αποτέλεσμα.
- ✓ $i \in W$ και $j \in W$: Από τις συνθήκες του LP θα έχουμε $x_i = 0$ και $x_j = 0$ και προκύπτει $z_{ij} \leq 0 \equiv 0$. Συνεπώς η ακμή και το βάρος της ορθώς δεν συνυπολογίζεται στο αποτέλεσμα.

Επομένως, το δοθέν ακέραιο πρόγραμμα μοντελοποιεί επακριβώς το πρόβλημα max dicut.

(5.6b) Κάνουμε randomized rounding της (optimal) λύσης του LP με χρήση του αλγορίθμου που προτείνεται στην εκφώνηση. Σύμφωνα με αυτόν, ο κόμβος i θα ανήκει στο σύνολο U με πιθανότητα $1/4 + x_i/2$. Επομένως, μια ακμή θα είναι στο cut με πιθανότητα που δίνεται ως εξής:

$$\Pr\big((i,j) \in CUT\big) = \Pr(i \in U, j \in W) = \Pr(i \in U)\Pr(j \notin U) = \left(\frac{1}{4} + \frac{x_i}{2}\right)\left(1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{x_j}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{4} + \frac{x_i}{2}\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{1 - x_j}{2}\right)$$

Σύμφωνα με τις συνθήκες του γραμμικού προγράμματος, μπορούμε να γράψουμε το εξής:

$$\Pr\big((i,j) \in CUT\big) = \left(\frac{1}{4} + \frac{x_i}{2}\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{1 - x_j}{2}\right) \geq \left(\frac{1}{4} + \frac{z_{ij}}{2}\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{z_{ij}}{2}\right) = \left(\frac{1}{4} + \frac{z_{ij}}{2}\right)^2 \geq \frac{z_{ij}}{2}$$

Έστω OPT το μέγιστο βάρος ενός cut που δίνεται από τη λύση του ακέραιου προγράμματος της εκφώνησης και έστω OPT_{LP} το αποτέλεσμα που επιστρέφει το LP relaxation του $x \in \{0,1\}$ σε $0 \leq x \leq 1$. Σύμφωνα με τον παραπάνω αλγόριθμο, το αναμενόμενο μέγιστο βάρος του cut θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\mathrm{E}[w] = \sum_{(u,v)\in E} \Pr\big((u,v) \in CUT\big) * w_{uv} \geq \sum_{(u,v)\in E} \frac{\mathrm{z_{uv}} w_{uv}}{2} \geq \frac{1}{2} * \max\left\{\sum_{(u,v)\in E} z_{uv} w_{uv}\right\} = \frac{OPT_{LP}}{2} \geq \frac{OPT}{2}$$

Συνεπώς, ο προτεινόμενος αλγόριθμος είναι 1/2 – προσεγγιστικός για το πρόβλημα maximum directed cut.

➢ Άσκηση 5

Θέλουμε να βρούμε έναν truthful μηχανισμό για το πρόβλημα Public Project, δηλαδή έναν μηχανισμό που θα οδηγεί τον πολίτη σε μέγιστη ωφέλεια αν και μόνο αν προβεί σε ειλικρινή δήλωση. Το utility του πολίτη i θα είναι $u_i - p_i$ αν το έργο πραγματοποιηθεί και 0 αν δεν πραγματοποιηθεί. Το έργο κόστους C θα πραγματοποιηθεί προφανώς αν ισχύει $\sum_{i=1}^{n} u_i \geq C$. Εφόσον η εισφορά p_i βασίζεται στο δηλωμένο utility u'_i, θα πρέπει να σχεδιαστεί έτσι ο μηχανισμός, ώστε να αποφεύγονται ανειλικρινείς δηλώσεις. Μια αναλογική πχ σχέση μεταξύ u_i, p_i θα οδηγούσε τον πολίτη i σε δήλωση $u'_i < u_i$ έτσι ώστε να πληρώσει $p'_i < p_i$ και να αποκομίσει μεγαλύτερο τελικό όφελος $u_i - p'_i > u_i - p_i$.

Διαισθητικά, ένας φιλαλήθης μηχανισμός θα πρέπει να συσχετίζει τη δήλωση του κάθε πολίτη με το ουσιαστικό δίλημμα της κατασκευής ή όχι του έργου. Αν η εισφορά που πληρώνει ο καθένας είναι κρίσιμη για αυτή την απόφαση, τότε θα εξαναγκαστεί να δηλώσει την πραγματική του επιθυμία. Θεωρούμε λοιπόν τα εξής:

$$p_i = C - \sum\nolimits_{j\neq i} u'_j \quad if \ \sum\nolimits_{j\neq i} u'_j < C \ and \ \sum\nolimits_{j} u'_j \geq C$$

$$p_i = 0 \quad if \ \sum\nolimits_{j\neq i} u'_j \geq C \ \ or \ \ \sum\nolimits_{j} u'_j < C$$

Δηλαδή, κάθε πολίτης πληρώνει μόνο αν η εισφορά του επιτρέπει τελικά την κατασκευή του έργου. Παρατηρούμε πως $u'_i + \sum_{j \neq i} u'_j \geq C \;\rightarrow\; u'_i \geq C - \sum_{j \neq i} u'_j$ δηλαδή κάθε κρίσιμος «παίκτης» δε θα έχει ποτέ αρνητικό utility από αυτή τη διαδικασία συνεπώς δεν «εξαναγκάζεται» η συμμετοχή του. Θεωρούμε $U = \sum_{i=1}^{n} u'_i$ με τον πολίτη i να κάνει ειλικρινή δήλωση και θα αποδείξουμε πως ο μηχανισμός είναι truthful διακρίνοντας τις 2 περιπτώσεις για τον i:

- ✓ Κρίσιμος Παίκτης: Αν δηλώσει $u'_i < u_i$ τότε είτε το έργο δε θα γίνει (μηδενικό utility) είτε θα αρκεί για να πραγματοποιηθεί, ωστόσο το utility θα παραμείνει ίσο με U. Αν δηλώσει $u'_i > u_i$ το έργο θα γίνει και το utility θα είναι και πάλι ίσο με U, όσο δηλαδή αν έκανε ειλικρινή δήλωση.
- ✓ Αδιάφορος Παίκτης: Σε περίπτωση που $U \geq C$, είτε δηλώσει $u'_i < u_i$ είτε $u'_i > u_i$ το utility θα παραμείνει αμετάβλητο και μηδενικό. Σε περίπτωση τώρα που $U < C$, αν δηλώσει $u'_i > u_i$ και αυτό επιτρέψει την κατασκευή του έργου, ο παίκτης θα έχει προφανώς αρνητικό utility. Αν πάλι δεν αρκεί για να κατασκευαστεί το έργο, το utility παραμένει αμετάβλητο και μηδενικό.

Επομένως, η βέλτιστη στρατηγική/δήλωση για τον κάθε παίκτη είναι πάντα η $u'_i = u_i$ (truthful μηχανισμός).

➢ Άσκηση 6

(a) Έχουμε μια δημοπρασία m αντικειμένων και n παίκτες. Κάθε παίκτης διατηρεί μια συνάρτηση προσωπικής αξίας $u_i(S_i)$ για κάθε υποσύνολο των αντικειμένων S_i και καλείται να επιλέξει το σύνολο εκείνο που μεγιστοποιεί την

$$f = u_i(S_i) - \sum\nolimits_{j \in S_i} p_i^j$$

Προφανώς η f συνιστά μια συνάρτηση ωφέλειας για το συγκεκριμένο πρόβλημα και από τη μεγιστοποίησή της προκύπτει το βέλτιστο σύνολο αντικειμένων, αυτό που έχει τη μεγαλύτερη συνολική αξία συμπεριλαμβανομένης της τιμής των αντικειμένων του, προκειμένου ο παίκτης να το επιλέξει. Ο μηχανισμός λοιπόν είναι truthful αφού ωθεί τους παίκτες να εκφράζουν την πραγματική τους ωφέλεια ως dominant strategy για τη μεγιστοποίηση της ωφέλειάς τους.

(b) Υποθέτουμε ότι σε κάποιο στάδιο του μηχανισμού ένα αντικείμενο j θα έχει δοθεί σε k αντίγραφα. Τότε, στο επόμενο στάδιο θα επιλεγεί από τον παίκτη i αν η προστιθέμενη αξία που προσφέρει στο σύνολο της επιλογής του είναι μεγαλύτερη της τιμής του, όπως αυτή έχει πολλαπλασιαστικά αυξηθεί ανά τους γύρους:

$$u_i(S_i) - u_i(S_i \backslash \{j\}) \geq p_i^j = \frac{L}{m} r^k$$

Παρατηρούμε πως η τιμή του αντικειμένου θα γίνει L μετά από $\log_r m$ πωλήσεις (αντιγράφων). Μετά από αυτό τον αριθμό, μόνο ο παίκτης με αξία μεγαλύτερη του L θα μπορεί να το αγοράσει. Συνυπολογίζοντας και το αρχικό, καταλήγουμε στο ότι ο μηχανισμός θα πρέπει να διαθέτει το πολύ $2 + \log_r m$ αντίγραφα από κάθε αντικείμενο.

(c) Έστω ότι το αντικείμενο j επιλέγεται k_j φορές. Τότε, από τη σχέση αθροίσματος γεωμετρικής προόδου θα έχουμε την ακόλουθη σχέση για κάθε αντικείμενο (και παίκτη i) όταν ολοκληρωθεί ο μηχανισμός (n γύροι):

$$\sum_i u_i(S_i) \geq \frac{L}{m}\left(\frac{r^{k_1}-1}{r-1} + \frac{r^{k_2}-1}{r-1} + \cdots \frac{r^{k_m}-1}{r-1}\right) = \frac{L}{m(r-1)}\left(r^{k_1} + r^{k_2} + \cdots + r^{k_m} - m\right) \rightarrow$$

$$(r-1)\sum_i u_i(S_i) \geq \sum_j \frac{L}{m} r^{k_j} - L = \sum_j p_{n+1}^j - L$$

Θεωρούμε τώρα ότι στη βέλτιστη λύση V^* ο παίκτης i έχει επιλέξει το σύνολο S_i, ανεξάρτητο από άλλες επιλογές με βάση την εκφώνηση. Αν τώρα ο παίκτης επιλέξει το σύνολο S'_i θα ισχύει το εξής:

$$u_i(S'_i) - \sum_{j \in S'_i} p_i^j \geq u_i(S_i) - \sum_{j \in S_i} p_i^j \;\rightarrow\; u_i(S'_i) - u_i(S_i) \geq \sum_{j \in S'_i \backslash S_i} p_i^j - \sum_{j \in S_i \backslash S'_i} p_i^j \geq -\sum_{j \in S_i \backslash S'_i} p_{n+1}^j \geq -\sum_{j \in S_i} p_{n+1}^j$$

Εφόσον πρόκειται για ξένα σύνολα, αθροίζοντας για κάθε παίκτη i λαμβάνουμε:

$$\sum_i u_i(S_i) \geq V^* - \sum_j p_{n+1}^j$$

Συνδυάζοντας τέλος τα παραπάνω αποτελέσματα λαμβάνουμε το ζητούμενο:

$$r\sum_i u_i(S_i) \geq \sum_i u_i(S_i) + \sum_j p_{n+1}^j - L \geq V^* - L \geq \frac{V^*}{2} \;\rightarrow\; \sum_i u_i(S_i) \geq \frac{V^*}{2r}$$

➢ Πηγές & Βιβλιογραφία

[1] M. Mitzenmacher and E. Upfal: Probability and Computing: Randomized Algorithms and Probabilistic Analysis. Chapters 4,6. Cambridge University Press, 2005

[2] D.P. Williamson and D.B. Shmoys. The Design of Approximation Algorithms. Chapter 5. Cambridge University Press, 2010

[3] Prahladh Harsha, Limits of Approximation Algorithms (MAXCUT and Introduction to Inapproximability)

[4] Christos Papadimitriou, CS294 P29: Algorithmic Game Theory (Mechanism Design)

[5] Avrim Blum, Algorithms, Games and Networks (Lecture 14), February 2013

[6] Δημήτρης Φωτάκης, Διαφάνειες Μαθήματος