Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Διακριτά Μαθηματικά – 4ο Εξάμηνο 2016-2017
Αβραμίδης Κλεάνθης – ΑΜ: 03115117

2η Γραπτή Εργασία – Απαντήσεις

➢ *Θέμα 1*

a) Η ζητούμενη ιδιότητα έχει νόημα για $n \geq 2$. Εφαρμόζουμε την Αρχή του Περιστερώνα, θεωρώντας πουλιά τους n αριθμούς που επιλέγουμε αυθαίρετα από το σύνολο $\{1,2,\dots,2^n-3,2^n-2\}$ και φωλιές τα υποσύνολα αυτού του συνόλου, για τα οποία ισχύει η ιδιότητα «για κάθε ζευγάρι ο μεγαλύτερος αριθμός είναι μικρότερος ή ίσος από το διπλάσιο του άλλου». Για $n=2$ έχουμε το υποσύνολο $\{1,2\}$. Για $n=3$ έχουμε τα 2 υποσύνολα $\{1,2\}$ και $\{3,4,5,6\}$. Για $n=4$ έχουμε τα 3 υποσύνολα $\{1,2\}$ – $\{3,4,5,6\}$ – $\{7,8,9,10,11,12,13,14\}$. Διαπιστώνεται εύκολα πως ισχύει η ιδιότητα των φωλιών, αφού για κάθε τέτοιο σύνολο όλα τα στοιχεία είναι μικρότερα ή ίσα του διπλάσιου του πρώτου, άρα και του διπλάσιου όλων. Θα αποδείξουμε με επαγωγή πως οι φωλιές είναι σε κάθε περίπτωση $n-1$: Επαγωγική βάση: Για $n=2$ έχουμε πράγματι 1 υποσύνολο/φωλιά όπως δείχθηκε παραπάνω. Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι για $n=k$ έχουμε $k-1$ υποσύνολα/φωλιές. Επαγωγικό βήμα: Για $n=k+1$ στο προηγούμενο σύνολο $\{1,2,\dots,2^k-3,2^k-2\}$ προστίθεται το υποσύνολο των $\{2^k-1,2^k,\dots,2*2^k-2\}$. Παρατηρούμε πως αυτό το υποσύνολο δύναται να είναι φωλιά, αφού όλα τα στοιχεία του είναι μικρότερα ή ίσα του διπλάσιου του πρώτου (που είναι το τελευταίο). Άρα στις $k-1$ φωλιές που είχαμε για $n=k$ προστίθεται άλλη μία για $n=k+1$. Οπότε επιβεβαιώνεται πως σε κάθε περίπτωση θα έχουμε $n-1$ φωλιές. Δείξαμε πως οι φωλιές είναι λιγότερες από τα πουλιά, κάτι που αποδεικνύει πως **για κάθε επιλογή $\mathbf{n}$ αριθμών που θα κάνουμε, θα υπάρχει ζευγάρι που θα ικανοποιεί τη ζητούμενη ιδιότητα (θα μπαίνει στην ίδια φωλιά)**.

b) Αποδεικνύουμε το ζητούμενο για $N=2^n$, καθώς η ιδιότητα διατηρείται στην επέκταση $N>2^n$ (περισσότερα πουλιά στις ίδιες φωλιές σύμφωνα με την Αρχή του Περιστερώνα). Θεωρούμε την κατανομή των n-ψήφιων κωδικών bit (2^n στον αριθμό, ένα bit για κάθε διαφορετικό νούμερο) ως εξής: Με 0 συμβολίζεται η εμφάνιση άρτιου πλήθους καθενός από τους n διαφορετικούς αριθμούς και με 1 η εμφάνιση περιττού πλήθους αυτών. Ξεκινάμε από τη μηδενική εμφάνιση κάθε αριθμού και για κάθε εμφάνιση ανανεώνουμε την ανάθεση κωδικού. Η διαδικασία φαίνεται στο παρακάτω σχήμα για το παράδειγμα της εκφώνησης:

		7	5	3	5	7	5	3	7
3	0	0	**0**	1	1	1	1	0	**0**
5	0	0	**1**	1	0	0	1	1	**1**
7	0	1	**1**	1	1	0	0	0	**1**

Μας ενδιαφέρει να δείξουμε πως ένας ή περισσότεροι κωδικοί θα εμφανιστούν 2 φορές κατά την ανάθεση. Αυτό σημαίνει πως, ξεκινώντας από την επόμενη θέση της πρώτης εμφάνισης του κωδικού μέχρι και τη θέση της δεύτερης εμφάνισης, θα έχουν μεσολαβήσει άρτιες μεταβολές στον αριθμό εμφάνισης των n αριθμών στην ακολουθία, ικανοποιώντας τη ζητούμενη ιδιότητα για ύπαρξη διαδοχικών γινομένων που είναι τέλεια τετράγωνα. Έχουμε 2^n κωδικούς bit με n ψηφία (φωλιές) και τους αναθέτουμε σε 2^n+1 καταστάσεις (πουλιά), αφού έχουμε 2^n νούμερα στην ακολουθία συν την αρχική «μηδενική» κατάσταση. Από την Αρχή του Περιστερώνα θα υπάρχει ένας τουλάχιστον κωδικός που θα επαναληφθεί κατά τη διαδικασία (δύο καταστάσεις/πουλιά στην ίδια φωλιά/κωδικό). Συνεπώς **αποδείξαμε πως υπάρχει πάντα γινόμενο διαδοχικών στοιχείων ακολουθίας N αριθμών (n διαφορετικά νούμερα ώστε $\mathbf{N \geq 2^n}$) που να είναι τέλειο τετράγωνο.**

➢ *Θέμα 2*

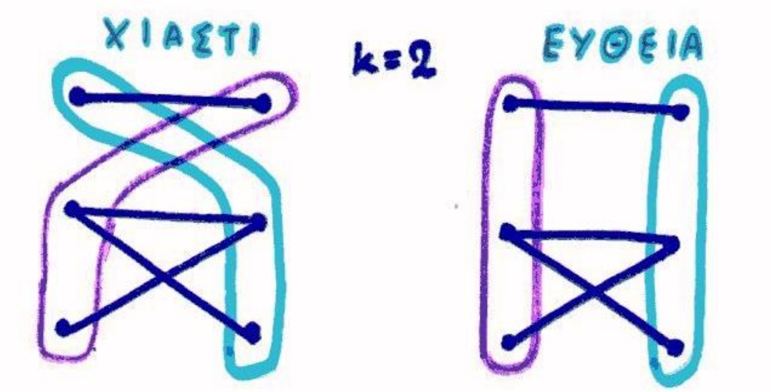
1. Από τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται τα 2 γραφήματα (join) προκύπτει άμεσα πως ο αριθμός των κορυφών του G_1 ισούται με το άθροισμα των κορυφών των επιμέρους γραφημάτων: $\mathbf{V(G_1) = n + m}$. Οι ακμές του νέου

γραφήματος θα είναι το άθροισμα των ακμών του C_n και του K_m συν τις ακμές της ένωσής τους. Οι ακμές του κύκλου με n κορυφές είναι n. Οι ακμές του πλήρους γραφήματος με m κορυφές είναι $\frac{m*(m-1)}{2}$. Οι ακμές της ένωσης των 2 γραφημάτων είναι $n*m$ (m συνδέσεις για κάθε μία από τις n κορυφές του κύκλου ή αντίστροφα). Τελικά: $\mathbf{E(G_1) = n + n*m + \frac{m*(m-1)}{2}}$

2. Για να έχει το νέο γράφημα κύκλο Euler, αρκεί κάθε κορυφή του να έχει άρτιο βαθμό. Το C_n είναι έτσι κι αλλιώς κύκλος Euler. Όταν συνδεθεί όμως με το πλήρες γράφημα, για να διατηρηθεί ο άρτιος βαθμός των κορυφών, απαιτείται το m να είναι άρτιος. Από την άλλη, για το πλήρες γράφημα με άρτιο αριθμό κορυφών, κάθε κορυφή θα έχει προφανώς περιττό βαθμό. Για να γίνει ο βαθμός άρτιος κατά την ένωση, θα πρέπει το C_n με το οποίο θα συνδεθεί να έχει περιττό αριθμό κορυφών. Τελικά πρέπει: **m άρτιος & n περιττός**.
3. Το C_n είναι ήδη κύκλος Hamilton. Το K_m έχει επίσης κύκλο Hamilton αφού κάθε κορυφή συνδέεται με όλες τις υπόλοιπες. Μπορούμε επομένως να διασχίσουμε τον κύκλο Hamilton του C_n , στη συνέχεια περνάμε μέσω μιας ακμής ένωσης στο K_m, διασχίζουμε τον αντίστοιχο κύκλο και επιστρέφουμε μέσω μιας ακμής ένωσης στην κορυφή του C_n από την οποία ξεκινήσαμε. Τελικά, **το $\mathbf{G_1}$ θα έχει πάντα κύκλο Hamilton.**
4. Για τον κύκλο, ο χρωματικός αριθμός είναι προφανώς 2 αν n άρτιος και 3 αν n περιττός. Το πλήρες γράφημα έχει χρωματικό αριθμό ίσο με m αφού κάθε κορυφή συνδέεται με όλες τις υπόλοιπες. Όταν γίνει η σύνδεση, η χρωματική διαφορά θα πρέπει να διατηρείται για κάθε ακμή, επομένως τα χρώματα για τον κύκλο θα είναι διαφορετικά από τα χρώματα για το πλήρες γράφημα. Επομένως: $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{G_1}) = \begin{cases} \mathbf{m+2,} & \mathbf{n \bmod 2 = 0} \\ \mathbf{m+3,} & \mathbf{n \bmod 2 = 1} \end{cases}$

- ***Θέμα 3***

a) Ένα απλό, μη κατευθυνόμενο διμερές γράφημα διαμερίζεται εξ ορισμού σε 2 ανεξάρτητα σύνολα κορυφών. Έστω ότι αυτή η διαμέριση δεν είναι μοναδική. Τότε θα υπάρχει μια δεύτερη, όπου τουλάχιστον 2 κορυφές που βρίσκονταν πριν σε διαφορετικά ανεξάρτητα σύνολα, θα βρίσκονται τώρα στο ίδιο. Τότε όμως, από τον ορισμό του διμερούς γραφήματος, θα υπάρχει εσωτερική ακμή ανάμεσα στις 2 αυτές κορυφές και το σύνολο δε θα είναι ανεξάρτητο, που είναι άτοπο. **Η διαμέριση επομένως είναι μοναδική για το συνεκτικό διμερές γράφημα**. Για γράφημα με 2 συνεκτικές συνιστώσες θα έχουμε 2 διαμερίσεις όπως φαίνεται στο δίπλα σχήμα:



Θα αποδείξουμε με επαγωγή ότι στη γενική περίπτωση γραφήματος με $k \geq 2$ συνεκτικές συνιστώσες, υπάρχουν 2^{k-1} δυνατές διαμερίσεις του σε 2 ανεξάρτητα σύνολα κορυφών. <u>Επαγωγική βάση</u>: Για $k = 2$ όντως υπάρχουν $2^{2-1} = 2$ διαμερίσεις (βλ. σχήμα). <u>Επαγωγική υπόθεση</u>: Υποθέτουμε ότι για k συνεκτικές συνιστώσες υπάρχουν 2^{k-1} δυνατές διαμερίσεις. <u>Επαγωγικό βήμα</u>: Δημιουργούμε νέο γράφημα «προσθέτοντας» μια συνεκτική συνιστώσα στο γράφημα της υπόθεσης. Αυτή μπορεί να ενταχθεί σε κάθε μία από τις διαμερίσεις του προηγούμενου γραφήματος με 2 τρόπους (ευθεία και χιαστί όπως στη περίπτωση $k = 2$). Άρα θα υπάρχουν συνολικά $2 * 2^{k-1} = 2^k$ δυνατές διαμερίσεις, που επαληθεύει την ιδιότητα που υποθέσαμε. Βλέπουμε τέλος πως ο τύπος μπορεί να επεκταθεί και στη περίπτωση $k = 1$. Αποδείχτηκε επομένως πως **κάθε διμερές γράφημα με k συνεκτικές συνιστώσες μπορεί να διαμεριστεί με $\mathbf{2^{k-1}}$ τρόπους σε 2 ανεξάρτητα σύνολα κορυφών.**

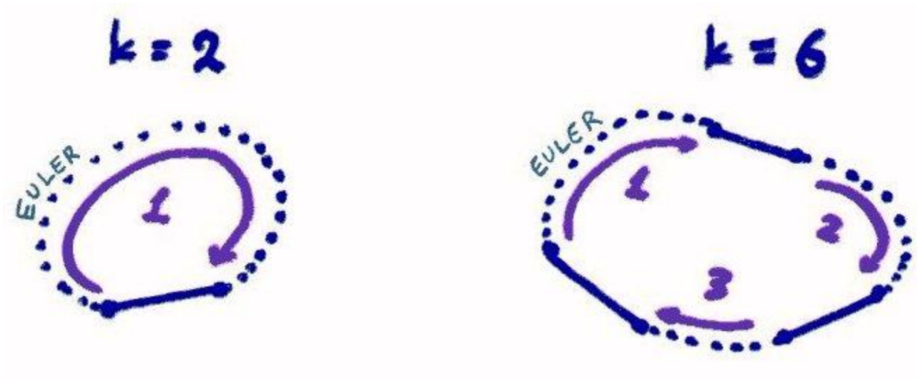
b) Το γράφημα Y(G) θα είναι διμερές αν το σύνολο των κορυφών του μπορεί να διαιρεθεί σε 2 ανεξάρτητα υποσύνολα. Στην περίπτωσή μας, το πρώτο υποσύνολο θα περιέχει τις κορυφές που προϋπήρχαν στο G και το δεύτερο τις νέες κορυφές που προέκυψαν από την υποδιαίρεση των ακμών. Εφόσον σε κάθε ακμή «παρεμβάλαμε» μια νέα κορυφή, οι κορυφές του G θα συνδέονται πλέον αποκλειστικά με νέες κορυφές. **Το Y**

είναι επομένως διμερές. Εκ κατασκευής, οι κορυφές του θα είναι το άθροισμα των κορυφών του G (n) και των νέων κορυφών που είναι όσες οι ακμές (m). Επομένως $\mathbf{V_Y = n + m}$. Επίσης, αφού το G είχε m ακμές και κάθε ακμή αντικαταστάθηκε από 2, προκύπτει $\mathbf{E_Y = 2m}$. Θέλουμε τώρα να δείξουμε πως $Y\ έχει\ κύκλο\ Hamilton \leftrightarrow G\ είναι\ ο\ C_n$. Το αντίστροφο της ισοδυναμίας ισχύει προφανώς, αφού κατά την υποδιαίρεση των ακμών του G, ο κύκλος παραμένει και προφανώς είναι κύκλος Hamilton. Αποδεικνύουμε τώρα το ορθό: Το Y είναι διμερές με ανεξάρτητα σύνολα τις n κορυφές του γραφήματος G και τις m νέες κορυφές και έχει κύκλο Hamilton. Αυτό συνεπάγεται πως m=n. <u>Απόδειξη</u>: Αν χβγ $\mathrm{n > m}$ και ο κύκλος ξεκινά από το σύνολο των n, θα περάσει εναλλάξ τα σύνολα και μετά από 2m ακμές θα έχει προσπελάσει όλες τις m κορυφές. Η επόμενη διαθέσιμη ακμή οδηγεί αναπόφευκτα σε κορυφή που έχει ήδη προσπελαστεί. Άρα δεν υπάρχει κύκλος Hamilton, άτοπο. Το Y έχει τώρα 2n κορυφές και 2n ακμές. Οι n νέες κορυφές του Y έχουν εκ κατασκευής βαθμό ίσο με 2, άρα εμπεριέχονται σε όλες τις 2n ακμές του γραφήματος. Επομένως, το Y είναι προφανώς ο $\mathrm{C_{2n}}$ και το G (το φτιάχνουμε αφαιρώντας τις νέες κορυφές και ενώνοντας τις αντίστοιχες ακμές) θα είναι ο $\mathrm{C_n}$. **Αποδείχθηκε η ζητούμενη ισοδυναμία**.

➢ ***Θέμα 4***

a) Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις: Αν το γράφημα G αποτελείται μόνο από κορυφές άρτιου βαθμού, τότε θα έχει κύκλο Euler και μπορεί να προσανατολιστεί ώστε ο έξω βαθμός κάθε κορυφής να ισούται με τον έσω-βαθμό (μισές ακμές θα έρχονται και μισές θα φεύγουν). Αν το γράφημα περιέχει κορυφές περιττού βαθμού, αυτές θα είναι σίγουρα άρτιου πλήθους, αφού το άθροισμα των βαθμών όλων των κορυφών είναι άρτιος αριθμός (ίσος με το διπλάσιο του αριθμού των ακμών). Τις κορυφές αυτές μπορούμε να τις συνδέσουμε ανά ζεύγη με ακμή. Έτσι αναγόμαστε στην πρώτη περίπτωση, όπου έχουμε μόνο κορυφές άρτιου βαθμού και προσανατολίζουμε κατάλληλα το γράφημα. Στη συνέχεια αφαιρώντας τις επιπλέον ακμές που βάλαμε πριν, κάθε κορυφή περιττού μήκους θα μεταβάλει το «ισοζύγιο» έσω και έξω βαθμών κατά ± 1. **Άρα μπορούμε να προσανατολίσουμε τις ακμές κάθε γραφήματος G ώστε ο έσω και ο έξω βαθμός κάθε κορυφής να διαφέρουν το πολύ κατά 1**.

b) Το k θα είναι άρτιος, όπως δείχθηκε πριν. Συνδέουμε με ακμή τις κορυφές αυτές (συνολικά k/2 επιπλέον ακμές), ώστε να προκύψει γράφημα που έχει κύκλο Euler. Θα αποδείξουμε με επαγωγή πως αφαιρώντας τις επιπλέον ακμές, ο κύκλος Euler «κόβεται» σε k/2 μονοκονδυλιές. <u>Επαγωγική βάση</u>: Για $\mathrm{k = 2}$ έχουμε μια επιπλέον ακμή, την οποία αν αφαιρέσουμε, ο κύκλος Euler γίνεται 1 μονοκονδυλιά (μονοπάτι Euler). <u>Επαγωγική υπόθεση</u>: Υποθέτουμε ότι για k κορυφές περιττού βαθμού προκύπτουν k/2 μονοκονδυλιές. <u>Επαγωγικό βήμα</u>: Για $\mathrm{k + 2}$ κορυφές περιττού βαθμού προκύπτουν k/2+1 ακμές, μία παραπάνω σε σχέση με πριν. Αυτή η επιπλέον ακμή θα παρεμβάλλεται σε μια από τις k/2 μονοκονδυλιές που προκύπτουν από τον κύκλο Euler σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση. Άρα αφαιρώντας τη διαιρούμε μια μονοκονδυλιά σε 2 νέες. Έχουμε έτσι k/2+1 μονοκονδυλιές, ο τύπος που υποθέσαμε αποδείχθηκε. Σημειώνουμε πως οι k/2 μονοκονδυλιές δεν έχουν κοινές ακμές καθώς προκύπτουν από διαφορετικά κομμάτια του ίδιου κύκλου Euler. Δείχθηκε επομένως ότι **τα συνεκτικά γραφήματα με k κορυφές περιττού βαθμού διαμερίζονται σε k/2 ανεξάρτητες μονοκονδυλιές.** Ο τρόπος εύρεσης των μονοκονδυλιών φαίνεται στα παρακάτω σχήματα:



c) Οι κορυφές u και v συνδέονται έμμεσα, ώστε να φτιάχνεται ο κύκλος Hamilton για το G-x. Αν τις συνδέσουμε άμεσα, το G-x έχει κύκλο Hamilton που περνάει από την μεταξύ τους ακμή, αφού οι 2 κορυφές θα συνδέονται ακόμα μόνο με την x καθώς και με μια ακμή με το υπόλοιπο γράφημα. Εφόσον όμως ο κύκλος θα περνάει από την ακμή αυτή που υποδιαιρείται χρησιμοποιώντας την x, **θα υπάρχει κύκλος Hamilton για το G** που θα περνά από αυτή την «υποδιαίρεση». Αν τώρα δεν υπάρχει αυτή η ακμή, οι u και v θα έχουν 2 ακμές προς το υπόλοιπο γράφημα και θα συνδέοντα έμμεσα. Άρα ο κύκλος Hamilton δεν θα μπορεί να περάσει από την x αν αυτή συνδέεται μόνο με τις u, v. Δηλαδή **το G δεν έχει απαραίτητα κύκλο Hamilton**.

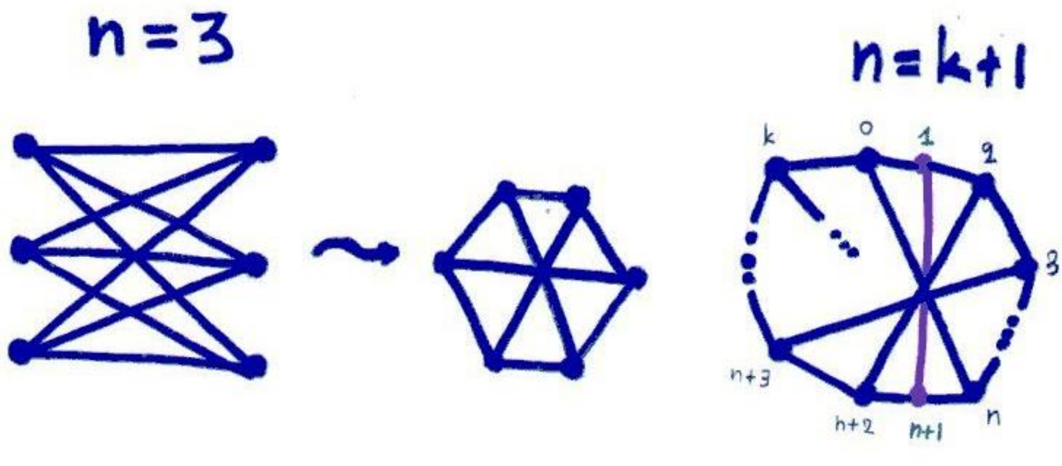
➢ ***Θέμα 5***

a) Αποδεικνύουμε πρώτα το ορθό της ισοδυναμίας μέσω επαγωγής. <u>Επαγωγική βάση</u>: Για $\mathrm{n} = 2$ έχουμε $\mathrm{d}_1 + \mathrm{d}_2 = 2$. Υπάρχει δέντρο με αυτή την ιδιότητα (μία ρίζα και ένας απόγονος), συνεπώς η βάση ισχύει. <u>Επαγωγική υπόθεση</u>: Υποθέτουμε ότι για $\mathrm{n} = \mathrm{k} - 1$ υπάρχει δέντρο με άθροισμα βαθμών κορυφών $2(\mathrm{k} - 2)$. <u>Επαγωγικό βήμα</u>: Για $\mathrm{n} = \mathrm{k}$ ακεραίους παρατηρούμε πως σίγουρα θα ισχύει $\mathrm{d}_1 = 1$ (χβγ) αφού αν ήταν όλοι οι αριθμοί μεγαλύτεροι του 1, το άθροισμα θα ήταν τουλάχιστον 2k, άτοπο. Επίσης θα ισχύει $\mathrm{d}_2 \geq 2$ (χβγ) αφού αν $\mathrm{d}_\mathrm{i} = 1\ \forall \mathrm{i}$ τότε το άθροισμα θα ήταν ίσο με k, άτοπο. Έχουμε: $\mathrm{d}_1 + \mathrm{d}_2 + \cdots + \mathrm{d}_\mathrm{k} = 2(\mathrm{k} - 1) \leftrightarrow (\mathrm{d}_2 - 1) + \cdots + \mathrm{d}_\mathrm{k} = 2(\mathrm{k} - 1) - 1 - 1 = 2(\mathrm{k} - 2)$. Έχουμε δηλαδή $\mathrm{k} - 1$ θετικούς ακεραίους με άθροισμα $2(\mathrm{k} - 2)$ και τη ζητούμενη ιδιότητα για το δέντρο από επαγωγική υπόθεση. Κάνοντας το επαγωγικό βήμα, προσθέτουμε μία κορυφή στο δέντρο αυτό (την d_1) στην $\mathrm{d}_2 - 1$ κι έτσι έχουμε δέντρο με βαθμούς $\mathrm{d}_1,\ \mathrm{d}_2,\ \ldots,\ \mathrm{d}_\mathrm{k}$ για $\mathrm{n} = \mathrm{k}$. Άρα η ζητούμενη ιδιότητα θα ισχύει γενικά. Αποδεικνύουμε τώρα το αντίστροφο. Έστω ότι υπάρχει δέντρο T με κορυφές βαθμών $\mathrm{d}_1,\ \mathrm{d}_2,\ \ldots,\ \mathrm{d}_n$. Ισχύει πως σε κάθε δέντρο με n κορυφές υπάρχουν $\mathrm{n} - 1$ ακμές, καθώς και ότι το άθροισμα των βαθμών των κορυφών κάθε γραφήματος είναι ίσο με το διπλάσιο του αριθμού των ακμών. Στη περίπτωσή μας: $\mathrm{d}_1 + \mathrm{d}_2 + \cdots + \mathrm{d}_n = 2(\mathrm{n} - 1)$. **Αποδείχθηκε έτσι η ισοδυναμία**.

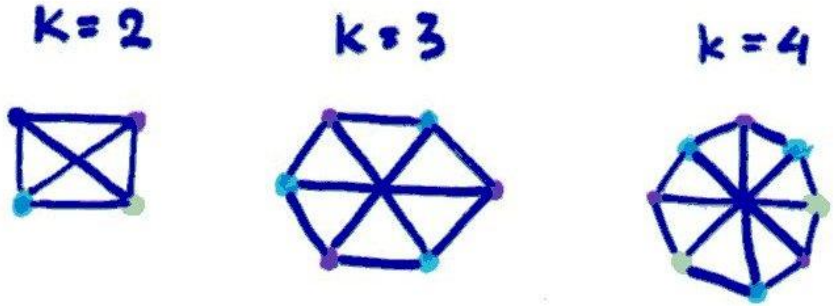
b) Αποδεικνύουμε το ζητούμενο με απαγωγή σε άτοπο. Έστω x το βάρος της βαρύτερης ακμής του μονοπατιού p και y το βάρος της βαρύτερης ακμής του p* που ανήκει στο ΕΣΔ. Υποθέτουμε ότι $y > x$. Τα 2 μονοπάτια από την u στη v σχηματίζουν κύκλο. Στο ΕΣΔ του γραφήματος δεν μπορεί να ενταχθεί η βαρύτερη κορυφή που υπάρχει στον κύκλο, δηλαδή αυτή με βαθμό y. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού η y ανήκει στο p* και άρα στο ΕΣΔ. Αποδείχθηκε επομένως ότι **η βαρύτερη ακμή του p* θα είναι ελαφρύτερη ή ίση με την βαρύτερη ακμή οποιοδήποτε άλλου μονοπατιού p από την κορυφή u στη v**.

➢ ***Θέμα 6***

a) Το αντίστροφο αποδεικνύεται εύκολα, καθώς για $\mathrm{n} = 2$ προκύπτει κατασκευαστικά το K_4 που είναι επίπεδο. Για να αποδείξουμε το ευθύ αρκεί να δείξουμε πως τα γραφήματα που προκύπτουν για $\mathrm{n} > 2$ περιέχουν ως υπογράφημα ομοιομορφικό του $\mathrm{K}_{3,3}$, άρα σύμφωνα με το Θ. Kuratowski δεν είναι επίπεδα. Το δείχνουμε αυτό με επαγωγή. <u>Επαγωγική βάση</u>: Για $\mathrm{n} = 3$ προκύπτει κατασκευαστικά το $\mathrm{K}_{3,3}$ που δεν είναι επίπεδο. <u>Επαγωγική υπόθεση</u>: Για $\mathrm{n} = \mathrm{k}$ προκύπτει το H_k που έστω ότι είναι ομοιομορφικό με το $\mathrm{K}_{3,3}$. <u>Επαγωγικό βήμα</u>: Θεωρούμε γράφημα για $\mathrm{n} = \mathrm{k} + 1$ το οποίο προκύπτει από το H_k προσθέτοντας 2 ακόμα κορυφές. Αυτές μπορώ σύμφωνα με τον τύπο για τις ακμές να τις τοποθετήσω αντιδιαμετρικά, πχ τη μία ανάμεσα στις κορυφές 0, 1 και την άλλη ανάμεσα στις n, n+1, οπότε και τις συνδέω. Προκύπτει το $\mathrm{H}_{\mathrm{k}+1}$ το οποίο όμως είναι ομοιομορφικό με το H_k με απλοποίηση της ακμής αυτής, άρα και με το $\mathrm{K}_{3,3}$. Δείχθηκε λοιπόν πως κάθε H_n για $\mathrm{n} > 2$ δεν είναι επίπεδο. Συνεπώς **αποδείχθηκε η ισοδυναμία**. Η διαδικασία του επαγωγικού βήματος καθώς και το $\mathrm{K}_{3,3}$ φαίνονται στα ακόλουθα σχήματα:



Για την εύρεση του χρωματικού αριθμού των H_n διακρίνουμε 3 περιπτώσεις: <u>Για $n = 2$</u> έχουμε το K_4 το οποίο ως πλήρες έχει $\boldsymbol{\chi(H_2) = 4}$. <u>Για $n > 2$ περιττό</u> έχουμε $\boldsymbol{\chi(H_n) = 2}$ διότι όλες οι κορυφές συνδέονται με την προηγούμενη και την επόμενή τους στον κύκλο που σχηματίζεται και επίσης με την αντιδιαμετρική τους, η οποία θα βρίσκεται σε περιττή απόσταση αφού n περιττός. Επομένως, μπορούμε να χρωματίσουμε εναλλάξ τις κορυφές του γραφήματος με 2 χρώματα. <u>Για $n > 2$ άρτιο</u> ακολουθούμε την ίδια διαδικασία εναλλάξ χρωματισμού αλλά παρατηρούμε πως η κορυφή 0 θα έχει το ίδιο χρώμα με την κορυφή n με την οποία συνδέεται και απέχει άρτια απόσταση. Την χρωματίζουμε με τρίτο χρώμα και συνεχίζουμε από την επόμενη τον εναλλάξ χρωματισμό. Η «παράλειψη» της κορυφής n μας επιτρέπει να συνεχίζουμε έτσι μέχρι την κορυφή $2n - 1$ η οποία θα χρωματιζόταν τώρα με το χρώμα της πρώτης κορυφής. Δεν έχουμε άλλη επιλογή παρά να την χρωματίσουμε με το τρίτο χρώμα. Άρα $\boldsymbol{\chi(H_n) = 3}$. Βλέπουμε ένα παράδειγμα για κάθε περίπτωση:



b) Ένα εξωεπίπεδο γράφημα n κορυφών θα περιέχει n ακμές λόγω του «εξωτερικού» κύκλου, ενώ μια κορυφή του θα συνδέεται το πολύ με κάθε άλλη κορυφή του γραφήματος, δηλαδή n-1 ακμές. Αφαιρώντας τις ακμές με τις γειτονικές κορυφές της στον κύκλο που έχουμε διπλομετρήσει, μένουν συνολικά 2n-3 ακμές. Πλέον όμως έχουν δημιουργηθεί εσωτερικές όψεις τρίτου βαθμού και καμιά επιπλέον ακμή δε μπορεί να χαραχθεί εντός του κύκλου που να μην τέμνει τις ακμές-σύνορα των όψεων (εκτός του κύκλου δεν μπορεί έτσι κι αλλιώς να χαραχθεί ακμή όταν το γράφημα είναι εξωεπίπεδο). Επομένως, **ο μέγιστος αριθμός ακμών είναι 2n-3**. Ο λόγος φαίνεται εποπτικά στο δίπλα σχήμα.