



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Διακριτά Μαθηματικά

Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου

3η Γραπτή Εργασία, Ημ/νια Παράδοσης: 6/7/2017

Θέμα 1 (Συνδυαστική, 2.6 μον.). Θεωρούμε 100 επιβάτες του προαστιακού, οι οποίοι έχουν επιβιβαστεί στο Αεροδρόμιο, και αποβιβάζονται σε κάποιους από τους επόμενους 12 σταθμούς (σε κάθε σταθμό, αποβιβάζονται κανέναν ή περισσότερους επιβάτες). Με πόσους τρόπους μπορεί να συμβεί αυτό:

1. αν θεωρήσουμε ότι οι επιβάτες δεν είναι διακεκριμένοι;
2. αν θεωρήσουμε ότι οι επιβάτες είναι διακεκριμένοι και δεν παίζει ρόλο η σειρά αποβίβασης;
3. αν θεωρήσουμε ότι οι επιβάτες είναι διακεκριμένοι και παίζει ρόλο η σειρά αποβίβασης;
4. αν θεωρήσουμε ότι οι επιβάτες είναι 45 άνδρες και 55 γυναίκες, ότι τόσο οι άνδρες μεταξύ τους όσο και οι γυναίκες μεταξύ τους δεν είναι διακεκριμένοι, και ότι δεν παίζει ρόλο η σειρά αποβίβασης ανδρών και γυναικών;
5. αν θεωρήσουμε ότι και στο (4), με μόνη διαφορά ότι τώρα παίζει ρόλο η σειρά αποβίβασης ανδρών και γυναικών;
6. Πόσοι είναι οι τρόποι αποβίβασης για τα ερωτήματα (1) και (3), αν σε κάθε σταθμό κατεβαίνει τουλάχιστον ένας επιβάτης;

Θέμα 2 (Συνδυαστική, 1.6 μον.). (α) Σε ένα παιδικό πάρτυ έχουν έρθει 40 παιδιά. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν σε 4 (ίδια) στρογγυλά τραπέζια των 10 θέσεων το καθένα.

(β) Ένα ράφι περιλαμβάνει n διακεκριμένα βιβλία στη σειρά. Να υπολογίσετε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε k βιβλία (χωρίς να ενδιαφέρει η σειρά επιλογής), με την προϋπόθεση να μην επιλεγούν βιβλία που βρίσκονται το ένα δίπλα στο άλλο. Να θεωρήσετε ότι $2k \leq n + 1$.

(γ) Διαμερίζουμε το σύνολο των προτασιακών τύπων που ορίζονται σε $n \geq 5$ προτασιακές μεταβλητές p_1, \dots, p_n ώστε κάθε κλάση της διαμέρισης να περιέχει όλους τους ταυτολογικά ισοδύναμους τύπους.

(i) Πόσες είναι οι διαφορετικές κλάσεις που σχηματίζονται; (ii) Πόσες από τις κλάσεις αυτές περιέχουν τύπους ψ για τους οποίους αληθεύει η συνεπαγωγή $[(p_1 \rightarrow p_2) \wedge p_3 \wedge p_4 \wedge p_5] \rightarrow \psi$;

Θέμα 3 (Γεννήτριες Συναρτήσεις, 1.5 μον.). (α) Ένα μάθημα παρακολουθείται από 500 φοιτητές και διδάσκεται σε 4 τμήματα από 4 διαφορετικούς καθηγητές (κάθε καθηγητής αναλαμβάνει ένα τμήμα εξ' ολοκλήρου και μπορεί να διαφοροποιηθεί ως προς τον τρόπο εξέτασης). Να διατυπώσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει τους διαφορετικούς τρόπους να χωριστούν οι φοιτητές σε τμήματα, αν κάθε τμήμα πρέπει να έχει τουλάχιστον 50 και το πολύ 200 φοιτητές και:

1. οι φοιτητές είναι διακεκριμένοι και δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία τοποθετούνται στα τμήματα.
2. οι φοιτητές είναι διακεκριμένοι και έχει σημασία η σειρά με την οποία τοποθετούνται στα τμήματα.

(β) Να υπολογίσετε το πλήθος των τετραδικών συμβολοσειρών μήκους $n \geq 1$ στις οποίες το ψηφίο 0 εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά, το ψηφίο 1 έχει άρτιο πλήθος εμφανίσεων και το ψηφίο 2 έχει περιττό πλήθος εμφανίσεων (δεν έχουμε περιορισμούς για το πλήθος των εμφανίσεων του ψηφίου 3).

Θέμα 4 (Γεννήτριες Συναρτήσεις, 1.3 μον.). Θεωρούμε n φοιτητές που απαντούν, ο καθένας ανεξάρτητα, σε μια ερώτηση. Για κάθε φοιτητή i , έστω $p_i \in [0, 1]$ η πιθανότητα να απαντήσει σωστά.

(α) Να διατυπώσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει την πιθανότητα ακριβώς k φοιτητές να απαντήσουν σωστά.

(β) Να διατυπώσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει την πιθανότητα το πολύ k φοιτητές να απαντήσουν σωστά.

Θέμα 5 (Συνδυαστική, Γεννήτριες Συναρτήσεις, 3 μον.). Θεωρούμε μια σχολή HMMY με 200 εγγεγραμμένους φοιτητές σε καθένα από τα 5 έτη σπουδών (άρα έχουμε 1000 φοιτητές συνολικά). Στα πλαίσια μιας διαφημιστικής εκστρατείας, έχουμε 300 (ίδια) κόκκινα και 700 (ίδια) πράσινα μπλουζάκια, τα οποία θα μοιράσουμε στους φοιτητές, ώστε κάθε φοιτητής να πάρει ένα μπλουζάκι.

(α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε τα μπλουζάκια:

1. αν θεωρήσουμε ότι οι φοιτητές είναι διακεκριμένοι.
2. αν θεωρήσουμε ότι οι φοιτητές δεν είναι διακεκριμένοι, και το μόνο που μας ενδιαφέρει είναι πόσα κόκκινα και πόσα πράσινα μπλουζάκια μοιράστηκαν στους φοιτητές κάθε έτους.

(β) Να διατυπώσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει τους διαφορετικούς τρόπους να μοιράσουμε τα μπλουζάκια, αν σε κάθε έτος πρέπει να μοιράσουμε τουλάχιστον δύο και συνολικά άρτιο πλήθος από κόκκινα και από πράσινα μπλουζάκια, και:

1. θεωρήσουμε ότι οι φοιτητές δεν είναι διακεκριμένοι, και το μόνο που μας ενδιαφέρει είναι πόσα κόκκινα και πόσα πράσινα μπλουζάκια μοιράστηκαν στους φοιτητές κάθε έτους.
2. θεωρήσουμε ότι οι φοιτητές είναι διακεκριμένοι.

(γ) Με αμιγώς συνδυαστικά επιχειρήματα, να δείξετε ότι οι συντελεστές των όρων x^{400} και x^{600} στο ανάπτυγμα της $A(x) = (1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots + x^{200})^5$ είναι ίσοι.

Παράδοση. Οι εργασίες πρέπει να παραδοθούν μέχρι και την Πέμπτη 6/7 στις θυρίδες των διδασκόντων. Την Παρασκευή 7/7 θα ανακοινωθεί σχέδιο λύσεων στη σελίδα του μαθήματος.

Καλή Επιτυχία!