ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Κ' ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΡΟΜΠΟΤΙΚΗ 1 (ΡΟΗ Σ) - 7º ΕΞΑΜΗΝΟ 2018-2019
ΑΒΡΑΜΙΔΗΣ ΚΛΕΑΝΘΗΣ - ΑΜ: 03115117

2η Σειρά Αναλυτικών Ασκήσεων - Απαντήσεις

→ **Άσκηση 2.1:**

$A_1^0(q_1) = Tra(y, l_0) \cdot Rot(z, q_1) \cdot Tra(x, l_1)$

$A_2^1(q_2) = Rot(z, q_2) \cdot Tra(x, l_2)$

$A_E^2(q_3) = Rot(y, q_3) \cdot Tra(x, l_3)$

Υπολογίζουμε πρώτα το ευθύ κινηματικό μοντέλο:

$$A_1^0(q_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & c_1 l_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & s_1 l_1 + l_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^1(q_2) = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & c_2 l_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & s_2 l_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_E^2(q_3) = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_3 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 & c_3 l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_3 & 0 & c_3 & -s_3 l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^0(q_1, q_2) = A_1^0(q_1) \cdot A_2^1(q_2) = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & c_1 l_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & s_1 l_1 + l_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & c_2 l_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & s_2 l_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_2^0(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & c_{12} l_2 + c_1 l_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & s_{12} l_2 + s_1 l_1 + l_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^0_E(q_1,q_2,q_3) = A^0_2(q_1,q_2)\cdot A^2_E(q_3) = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & c_{12}l_2+c_1l_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & s_{12}l_2+s_1l_1+l_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 & c_3l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_3 & 0 & c_3 & -s_3l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow A^0_E(q_1,q_2,q_3) = \begin{bmatrix} c_{12}c_3 & -s_{12} & c_{12}s_3 & c_{12}c_3l_3+c_{12}l_2+c_1l_1 \\ s_{12}c_3 & c_{12} & s_{12}s_3 & s_{12}c_3l_3+s_{12}l_2+s_1l_1+l_0 \\ -s_3 & 0 & c_3 & -s_3l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Η ζητούμενη Ιακωβιανή μήτρα είναι της μορφής:

$$J = \begin{bmatrix} b_0\times(p_3-p_0) & b_1\times(p_3-p_1) & b_2\times(p_3-p_2) \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix}, \text{ όπου:}$$

$b_0 = [0,0,1]^T$, το θέτουμε από το σύστημα παγκόσμιων συντεταγμένων

$b_1 = [0,0,1]^T$, η τρίτη στήλη του $R^0_1(q_1)$ *

$b_2 = [-s_{12}, c_{12}, 0]^T$, η δεύτερη στήλη του $R^{0'}_2(q_1,q_2)$

Προκειμένου να αποφύγουμε αυθαίρετες επιλογές, θέτουμε νέα αρχή για το σύστημά μας την O', για την οποία ισχύουν:

$$A^0_{0'} = Tra(y,l_0) \quad . \quad A^{0'}_1 = Rot(z,q_1)\cdot Tra(x,l_1).$$

ώστε να θεωρούμε πάντα τα b_i ως μοναδιαία διανύσματα των αξόνων στροφής των αρθρώσεων $i+1$. Επομένως θα έχουμε $b_0 \Rightarrow b_0' = [0,0,1]^T$ κ' $p_0 \Rightarrow p_0' = \begin{bmatrix} 0 \\ l_0 \\ 0 \end{bmatrix}$

<u>Άρα</u>: $p_0 = [0, l_0, 0]^T$ σύμφωνα με τα παραπάνω, η αρχική μας θέση.

$p_1 = [c_1l_1, l_0+s_1l_1, 0]^T$, η 4η στήλη του $A^0_1(q_1)$

$p_2 = [c_{12}l_2+c_1l_1, s_{12}l_2+s_1l_1+l_0, 0]^T$ η 4η στήλη του $A^0_2(q_1,q_2)$

$p_3 = [c_{12}c_3l_3+c_{12}l_2+c_1l_1, s_{12}c_3l_3+s_{12}l_2+s_1l_1+l_0, -s_3l_3]^T$, η 4η στήλη του A^0_E

$$b_0 \times (p_3 - p_{0'}) \Rightarrow b_{0'} \times (p_3 - p_{0'}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_{12}c_3 l_3 + c_{12} l_2 + c_1 l_1 \\ s_{12} c_3 l_3 + s_{12} l_2 + s_1 l_1 \\ -s_3 l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(s_{12}c_3 l_3 + s_{12} l_2 + s_1 l_1) \\ c_{12} c_3 l_3 + c_{12} l_2 + c_1 l_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b_1 \times (p_3 - p_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_{12}c_3 l_3 + c_{12} l_2 \\ s_{12} l_2 + s_{12} c_3 l_3 \\ -s_3 l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_{12} l_2 - s_{12} c_3 l_3 \\ c_{12} c_3 l_3 + c_{12} l_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b_2 \times (p_3 - p_2) = \begin{bmatrix} -s_{12} \\ c_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_{12}c_3 l_3 \\ s_{12} c_3 l_3 \\ -s_3 l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_{12} s_3 l_3 \\ -s_{12} s_3 l_3 \\ -c_3 l_3 \end{bmatrix}$$

Η Ιακωβιανή λοιπόν θα είναι:

$$J = \begin{bmatrix} -(s_{12}c_3 l_3 + s_{12} l_2 + s_1 l_1) & -s_{12} l_2 - s_{12} c_3 l_3 & -c_{12} s_3 l_3 \\ c_{12} c_3 l_3 + c_{12} l_2 + c_1 l_1 & c_{12} c_3 l_3 + c_{12} l_2 & -s_{12} s_3 l_3 \\ 0 & 0 & -c_3 l_3 \\ 0 & 0 & -s_{12} \\ 0 & 0 & c_{12} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Για να βρούμε τις ζητούμενες ιδιομορφίες, θα θεωρήσουμε την ορίζουσα των 3 πρώτων γραμμών του πίνακα J, οι οποίες και αφορούν τη γραμμική ταχύτητα του end-effector: Θέλουμε

$$\begin{vmatrix} -(s_{12}c_3 l_3 + s_{12} l_2 + s_1 l_1) & -s_{12} l_2 - s_{12} c_3 l_3 & -c_{12} s_3 l_3 \\ c_{12} c_3 l_3 + c_{12} l_2 + c_1 l_1 & +c_{12} c_3 l_3 + c_{12} l_2 & -s_{12} s_3 l_3 \\ 0 & 0 & -c_3 l_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-c_3 l_3 \left[-(s_{12}c_3 l_3 + s_{12} l_2 + s_1 l_1)(-c_{12} c_3 l_3 - c_{12} l_2) + (s_{12} l_2 + s_{12} c_3 l_3)(+c_{12} c_3 l_3 + c_{12} l_2 + c_1 l_1) \right] = 0$$

$$\Rightarrow -l_3 c_3 (l_1 l_3 c_3 + l_1 l_2)(c_1 s_{12} - s_1 c_{12}) = 0 \Rightarrow l_3 c_3 s_2 (l_1 l_2 + l_1 l_3 c_3) = 0$$

$$\Rightarrow c_3 = 0 \quad \text{ή} \quad \Rightarrow s_2 = 0 \quad \text{ή} \quad \Rightarrow c_3 = -l_2 / l_3$$

$\rightarrow p_3 =$ σταθ.
Μηδενίζεται η ταχύτητα στον $\hat{z}$ άξονα ($3^η$ σειρά J)
$\Rightarrow$ περιορισμός κίνησης στον $\hat{z}$.

$\rightarrow q_2 = 0$: πλήρης έκταση
$q_2 = \pi$: αναδίπλωση συστήματος στο link 2

$\rightarrow$ Μηδενίζεται η 2η στήλη του J, άρα έχουμε απώλεια ενός βαθμού ελευθερίας. Το q2 δεν παίζει ρόλο στην κίνηση της διάταξης.

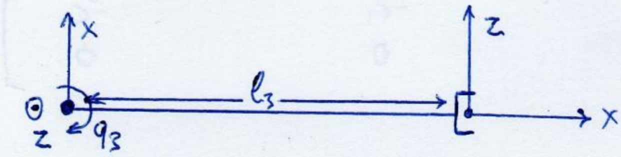
→ <u>Άσκηση 2.2:</u>

Απαιτείται η εύρεση της Ιακωβιανής μήτρας του συστήματος, άρα αρχικά η εύρεση του ορθού κινηματικού μοντέλου. Από άσκηση 1.2:

$$A_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad κ' \quad A_2^0 = \begin{bmatrix} -c_1 s_2 & -c_1 c_2 & s_1 & -l_2 c_1 s_2 \\ -s_1 s_2 & -s_1 c_2 & -c_1 & -l_2 s_1 s_2 \\ c_2 & -s_2 & 0 & c_2 l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{για } l_0 = l_1 = 0$$

Θεωρώντας $q_4 = 0$, για να φτάσουμε στο τελικό στοιχείο απαιτείται:

$$A_\epsilon^2 = Rot\left(z, q_3 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot Tra(x, l_3) \cdot Rot\left(x, -\frac{\pi}{2}\right)$$ κατά DH. <u>Άρα:</u>



$$A_\epsilon^2 = \begin{bmatrix} s_3 & 0 & c_3 & l_3 s_3 \\ -c_3 & 0 & s_3 & -l_3 c_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow A_\epsilon^0 = A_2^0 \cdot A_\epsilon^2 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -s_1 & -c_1 s_{23} & l_3 c_1 c_{23} - l_2 c_1 s_2 \\ s_1 c_{23} & c_1 & -s_1 s_{23} & l_3 s_1 c_{23} - l_2 s_1 s_2 \\ s_{23} & 0 & c_{23} & l_3 s_{23} + l_2 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Για τον υπολογισμό της $J = \begin{bmatrix} b_0 \times (p_3 - p_0) & b_1 \times (p_3 - p_1) & b_2 \times (p_3 - p_2) \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix}$ έχουμε:

$b_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, ο άξονας στροφής της 1ης άρθρωσης (βλ. ασκ. 2.1) z_0

$b_1 = \begin{bmatrix} s_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow z_1$, —»— 2ης άρθρωσης (3η στήλη R_1^0)

$b_2 = \begin{bmatrix} s_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow z_2$, —»— 3ης άρθρωσης (3η στήλη R_2^0)

$p_0 = [0, 0, 0]^T = p_1$, η αρχή του συστήματος

$p_2 = \begin{bmatrix} -l_2 c_1 s_2 \\ -l_2 s_1 s_2 \\ c_2 l_2 \end{bmatrix}$, 4η στήλη του A_1^0 $\quad p_3 = \begin{bmatrix} l_3 c_1 c_{23} - l_2 c_1 s_2 \\ l_3 s_1 c_{23} - l_2 s_1 s_2 \\ l_3 s_{23} + l_2 c_2 \end{bmatrix}$ 4η στήλη του A_ϵ^0

Άρα: $b_0 \times (p_3 - p_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_3 c_1 c_{23} - l_2 c_1 s_2 \\ l_3 s_1 c_{23} - l_2 s_1 s_2 \\ l_3 s_{23} + l_2 c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_3 s_1 c_{23} + l_2 s_1 s_2 \\ -l_2 c_1 s_2 + l_3 c_1 c_{23} \\ 0 \end{bmatrix}$

$$b_1 \times (p_3 - p_1) = \begin{bmatrix} s_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_3 c_1 c_{23} - l_2 c_1 s_2 \\ l_3 s_1 c_{23} - l_2 s_1 s_2 \\ l_3 s_{23} + l_2 c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 l_3 s_{23} + l_2 c_1 c_2 \\ -l_3 s_1 s_{23} - l_2 s_1 c_2 \\ l_3 c_{23} - l_2 s_2 \end{bmatrix}$$

$$b_2 \times (p_3 - p_2) = \begin{bmatrix} s_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_3 c_1 c_{23} \\ l_3 s_1 c_{23} \\ l_3 s_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_3 c_1 s_{23} \\ -l_3 s_1 s_{23} \\ l_3 c_{23} \end{bmatrix}$$

Άρα:

$$J = \begin{bmatrix} l_2 s_1 s_2 - l_3 s_1 c_{23} & -c_1 l_3 s_{23} - l_2 c_1 c_2 & -l_3 c_1 s_{23} \\ l_3 c_1 c_{23} - l_2 c_1 s_2 & -l_3 s_1 s_{23} - l_2 s_1 c_2 & -l_3 s_1 s_{23} \\ 0 & l_3 c_{23} - l_2 s_2 & l_3 c_{23} \\ 0 & s_1 & s_1 \\ 0 & -c_1 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Θεωρώντας τώρα ότι το ρομπότ βρίσκεται σε στατική ισορροπία, παίρνουμε το διάνυσμα των γενικευμένων δράσεων πάνω στις αρθρώσεις:

$$\tau = J^T \cdot F_{\sigma\tau\omega} = J^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 s_1 s_2 - l_3 s_1 c_{23} + l_3 c_1 c_{23} - l_2 c_1 s_2 + 0.1 \\ -l_3 c_1 s_{23} - l_2 c_1 c_2 - l_3 s_1 s_{23} - l_2 s_1 c_2 + l_3 c_{23} - l_2 s_2 \\ -l_3 c_1 s_{23} - l_3 s_1 s_{23} + l_3 c_{23} \end{bmatrix}$$

Για $l_2 = l_3 = 0.3\ m$ προκύπτουν τα ζητούμενα συγκεκριμένα διανύσματα:

$$\tau = 0.3 \begin{bmatrix} s_1 s_2 - s_1 c_{23} + c_1 c_{23} - c_1 s_2 + 0.\overline{33} \\ -c_1 s_{23} - c_1 c_2 - s_1 s_{23} - s_1 c_2 + c_{23} - s_2 \\ -c_1 s_{23} - s_1 s_{23} + c_{23} \end{bmatrix}$$

Για κατάσταση αρχικοποίησης έχουμε q1=q2=q3=0.

Άρα με αντικατάσταση προκύπτει τ=[0.4 , 0 , 0.3]

→ ## Άσκηση 2.3:

Για τη μέθοδο Lagrange προσδιορίζουμε αρχικά τα κινηματικά μεγέθη για τη μάζα m:

$$p_m = \begin{bmatrix} l_1 + q_1 + l_2 c_2 \\ l_2 s_2 \end{bmatrix} \Rightarrow v_m = \dot{p}_m = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 - l_2 s_2 \dot{q}_2 \\ l_2 c_2 \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{p}_m = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 - l_2 (s_2 \ddot{q}_2 + c_2 \dot{q}_2^2) \\ l_2 (c_2 \ddot{q}_2 - s_2 \dot{q}_2^2) \end{bmatrix} \qquad \omega_m = \dot{q}_2, \quad \dot{\omega}_m = \ddot{q}_2 \qquad \text{Συνεπώς:}$$

$$K_m = \frac{1}{2} m v^T v + \frac{1}{2} I \omega^T \omega = \frac{m}{2} (\dot{q}_1 - l_2 s_2 \dot{q}_2)^2 + \frac{m}{2} (l_2 c_2 \dot{q}_2)^2 + \frac{I}{2} \dot{q}_2^2$$

$U_m = mgh = mg l_2 s_2$. Υπολογίζουμε τα μεγέθη που χρειαζόμαστε:

$$\frac{\partial U_m}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial U_m}{\partial q_2} = mg l_2 c_2, \quad \frac{\partial K_m}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial K_m}{\partial \dot{q}_1} = m(\dot{q}_1 - l_2 s_2 \dot{q}_2)$$

$$\frac{\partial K_m}{\partial q_2} = m(\dot{q}_1 - l_2 s_2 \dot{q}_2)(-l_2 \dot{q}_2 c_2) + m(l_2 c_2 \dot{q}_2)(-l_2 s_2 \dot{q}_2)$$

$$= \cancel{m l_2^2 \dot{q}_2^2 s_2 c_2} - m l_2 \dot{q}_2 \dot{q}_1 c_2 - \cancel{m l_2^2 \dot{q}_2^2 c_2 s_2} = -m l_2 c_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2$$

$$\frac{\partial K_m}{\partial \dot{q}_2} = m \cdot (\dot{q}_1 - l_2 s_2 \dot{q}_2)(-l_2 s_2) + m(l_2 c_2 \dot{q}_2) l_2 c_2 + I \dot{q}_2$$

$$= -m \dot{q}_1 l_2 s_2 + m l_2^2 s_2^2 \dot{q}_2 + m l_2^2 c_2^2 \dot{q}_2 + I \dot{q}_2 = I \dot{q}_2 + m l_2^2 \dot{q}_2 - m \dot{q}_1 l_2 s_2$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial K_m}{\partial \dot{q}_1}\right) = m \ddot{q}_1 - m l_2 (s_2 \ddot{q}_2 + c_2 \dot{q}_2^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial K_m}{\partial \dot{q}_2}\right) = I \ddot{q}_2 + m l_2^2 \ddot{q}_2 - m l_2 (\ddot{q}_1 s_2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2 c_2)$$

↳ Ο. εξ. Lagrange:

Για $i=1$: $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial K_m}{\partial \dot{q}_1}\right) - \cancelto{0}{\frac{\partial K_m}{\partial q_1}} + \cancelto{0}{\frac{\partial U_m}{\partial q_1}} = \tau_1 \Rightarrow \tau_1' = m\ddot{q}_1 - m l_2 (s_2 \ddot{q}_2 + c_2 \dot{q}_2^2) - J^T f_x$

Για $i=2$: $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial K_m}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial K_m}{\partial q_2} + \frac{\partial U_m}{\partial q_2} = \tau_2 \Rightarrow \tau_2' = I\ddot{q}_2 + m l_2^2 \ddot{q}_2 - m l_2 \ddot{q}_1 s_2 + mg l_2 c_2$

Μένει μόνο ο υπολογισμός της ορίζουσας J, αφού $F = f_x =$ σταθ.

Υπολογίζουμε πρώτα το ευθύ κινηματικό μοντέλο της διάταξης:

$$A_1^0 = Tra(x, l_1+q_1) = \begin{array}{cccc} & & & (p1) \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_1+l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow b_0 = [1\ 0\ 0]^T \quad (\text{αρχή})$$

$$A_2^1 = Rot(z, q_2)\cdot Tra(x, l_2) = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & c_2 l_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & s_2 l_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow b_1 = [0\ 0\ 1]^T$$

(στροφή ως προς z)

$$\Longrightarrow A_E^0 = A_1^0 A_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_1+l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & c_2 l_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & s_2 l_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} (p2) \\ \end{array}\begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & c_2 l_2 + q_1 + l_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & s_2 l_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Μορφή Ιακωβιανής Μήτρας: $$J^T = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \times (p2-p1) \\ 0 & b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -l_2 s_2 \\ 0 & l_2 c_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Η λύση συνεπώς: $$\tau = \begin{bmatrix} m\ddot{q}_1 - m l_2 (s_2 \ddot{q}_2 + c_2 \dot{q}_2^2) - (J_L^T F_x)_1 \\ \mathcal{I}\ddot{q}_2 + m l_2^2 \ddot{q}_2 - m l_2 s_2 \ddot{q}_1 + m g l_2 s_2 - (J_L^T F_x)_2 \end{bmatrix}$$

$$\tau = \begin{bmatrix} m\ddot{q}_1 - m l_2 (s_2 \ddot{q}_2 + c_2 \dot{q}_2^2) - F_x \\ \mathcal{I}\ddot{q}_2 + m l_2^2 \ddot{q}_2 - m l_2 s_2 \ddot{q}_1 + m g l_2 s_2 + l_2 s_2 F_x \end{bmatrix},$$

αφού $$J_L^T F_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -l_2 s_2 & l_2 c_2 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} F_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ -l_2 s_2 F_x \end{bmatrix}$$