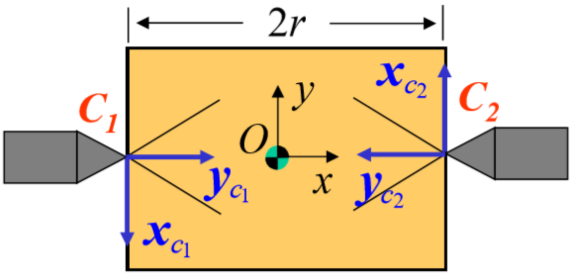
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Ρομποτική ΙΙ (Ροή Σ) – Εαρινό Εξάμηνο 2018-2019
Αβραμίδης Κλεάνθης – 03115117

1η Σειρά Αναλυτικών Ασκήσεων – Απαντήσεις

- **Άσκηση 1**



(a) Θεωρούμε το επίπεδο αντικείμενο του παραπάνω σχήματος, το οποίο υφίσταται ρομποτικό χειρισμό μέσω δύο επαφών σημείου με τριβή. Το τοπικό πλαίσιο (μήτρα στροφής) κάθε επαφής δίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$R_{c1}^{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad R_{c2}^{O} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Η μήτρα ρομποτικής λαβής κάθε επαφής (3x2 εφόσον πρόκειται για επίπεδο μηχανισμό) δίνεται από την παρακάτω σχέση, στην οποία αγνοούμε τους όρους (f_z, n_x, n_y) που δεν αναφέρονται στο επίπεδο του σχήματος:

$$G_1 = W_{c1} * B_{c1} = \begin{bmatrix} R_{c1}^{O} & 0 \\ (-r_{c1,y}, r_{c1,x}) R_{c1}^{O} & 1 \end{bmatrix} * B_{c1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ r & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ r & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = W_{c2} * B_{c2} = \begin{bmatrix} R_{c2}^{O} & 0 \\ (-r_{c2,y}, r_{c2,x}) R_{c2}^{O} & 1 \end{bmatrix} * B_{c2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ r & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ r & 0 \end{bmatrix}$$

όπου W η μήτρα μετασχηματισμού γενικευμένων δυνάμεων επαφής που αξιοποιεί τη μήτρα στροφής και B η μήτρα διανυσματικής βάσης των γενικευμένων δράσεων επαφής (f_x, f_y, n_z). Η συνολική μήτρα ρομποτικής λαβής δίνεται συνδυάζοντας τα αποτελέσματα για κάθε επαφή:

$$G = [G_1 \mid G_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ r & 0 & r & 0 \end{bmatrix}$$

Για τους κώνους τριβής, πρέπει να ισχύουν τα εξής ανά επαφή:

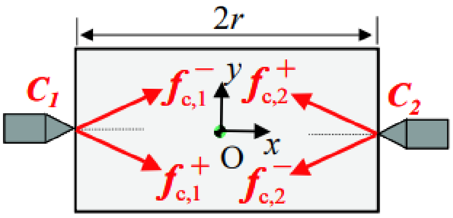
$$FC_{c1} = \left\{ f_{c1} = \left[f_{c1,x}, f_{c1,y} \right]^T \in \mathbb{R}^2 : f_{c1,y} \geq 0, \left| f_{c1,x} \right| \leq \mu f_{c1,y} \right\}$$

$$FC_{c2} = \left\{ f_{c2} = \left[f_{c2,x}, f_{c2,y} \right]^T \in \mathbb{R}^2 : f_{c2,y} \geq 0, \left| f_{c2,x} \right| \leq \mu f_{c2,y} \right\}$$

όπου μ ο συντελεστής τριβής για το συγκεκριμένο αντικείμενο. Ο συνολικός κώνος τριβής δίνεται από την εξής σχέση:

$$FC = \{ f_c = [f_{c1}^T, f_{c2}^T]^T \in \mathbb{R}^4 : f_{c1} \in FC_{c1}, f_{c2} \in FC_{c2} \}$$

(b) Για τη μελέτη της κλειστότητας ως προς δύναμη της λαβής θα αξιοποιήσουμε τον κώνο τριβής, που μας δίνει μια αναπαράσταση της επίδρασης της τριβής στην εκάστοτε επαφή. Θεωρούμε διανύσματα f_{c1}^{-}, f_{c1}^{+}, f_{c2}^{-}, $f_{c2}^{+} \in \mathbb{R}^2$ με διευθύνσεις παράλληλες στις ακμές των κώνων τριβής των 2 επαφών, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Θεωρώντας 2α την εσωτερική γωνία του κάθε κώνου, για τον συντελεστή τριβής θα ισχύει $\mu = \tan(a)$ οπότε τα 4 παραπάνω διανύσματα θα έχουν τις εξής μορφές ως προς το frame του αντικειμένου:

$$f_{c1}^{-} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mu \end{bmatrix}, \quad f_{c1}^{+} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\mu \end{bmatrix}, \quad f_{c2}^{-} = \begin{bmatrix} -1 \\ -\mu \end{bmatrix}, \quad f_{c2}^{+} = \begin{bmatrix} -1 \\ \mu \end{bmatrix}$$

Μπορούμε τώρα να γράψουμε τις δυνάμεις f_{c1}, f_{c2} ως εξής, θεωρώντας πως δρουν εντός των κώνων τριβής που επιβάλλει η κλειστότητα ως προς δύναμη:

$$\begin{cases} f_{c1} = f_{c1}^{-}x_1 + f_{c1}^{+}x_2 \\ f_{c2} = f_{c2}^{-}x_3 + f_{c2}^{+}x_4 \end{cases}$$

Το σύστημα της λαβής θα είναι κλειστό ως προς δύναμη αν για κάθε εξωτερική γενικευμένη δύναμη F υπάρχουν τέτοιες δυνάμεις f_{c1}, f_{c2} που να εκμηδενίζουν την επίδρασή τους, δηλαδή:

$$\begin{cases} f_{c1} + f_{c2} = -f_{ext} \\ n_{c1} + n_{c2} = -n_{ext} \end{cases}$$

Η μήτρα ρομποτικής λαβής που προκύπτει από τις παραπάνω εξισώσεις φαίνεται από τη γενική σχέση $G' * f = -F_{ext}$. Για την τρίτη γραμμή της μήτρας υπολογίζουμε το εξωτερικό γινόμενο καθενός από τα παραπάνω διανύσματα με το διάνυσμα θέσης $(0, \pm r, 0)$ της επαφής i. Στο επίπεδο μας ενδιαφέρει συγκεκριμένα η τελευταία του γραμμή. Πάνω σε αυτή τη μήτρα θα εφαρμόσουμε την συνθήκη κυρτότητας για την κλειστότητα ως προς δύναμη.

$$G' * f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ \mu & -\mu & -\mu & \mu \\ -\mu r & \mu r & -\mu r & \mu r \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = -F_{ext} = \begin{bmatrix} -f_{ext} \\ -n_{ext} \end{bmatrix}$$

Θα εξετάσουμε συγκεκριμένα τον 4ο κανόνα της συνθήκης κυρτότητας που αφορά την ύπαρξη διανυσμάτων $u_i \in \mathbb{R}^3$, κάθετων στα ζευγάρια στηλών της G', που να έχουν μη αρνητικό εσωτερικό γινόμενο με αυτή. Για κάθε ζευγάρι στηλών (i, j) ορίζουμε λοιπόν το κάθετο διάνυσμα $u_{ij} = col_i \times col_j$. Έχουμε:

$$u_{12} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & \mu & -\mu r \\ 1 & -\mu & \mu r \end{vmatrix} = i(\mu^2 r - \mu^2 r) - j(\mu r + \mu r) + k(-\mu - \mu) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\mu r \\ -2\mu \end{bmatrix}$$

$$u_{13} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & \mu & -\mu r \\ -1 & -\mu & -\mu r \end{vmatrix} = i(-\mu^2 r - \mu^2 r) - j(-\mu r - \mu r) + k(-\mu + \mu) = \begin{bmatrix} -2\mu^2 r \\ 2\mu r \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_{14} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & \mu & -\mu r \\ -1 & \mu & \mu r \end{vmatrix} = i(\mu^2 r + \mu^2 r) - j(\mu r - \mu r) + k(\mu + \mu) = \begin{bmatrix} 2\mu^2 r \\ 0 \\ 2\mu \end{bmatrix}$$

$$u_{23} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -\mu & \mu r \\ -1 & -\mu & -\mu r \end{vmatrix} = i(\mu^2 r + \mu^2 r) - j(-\mu r + \mu r) + k(-\mu - \mu) = \begin{bmatrix} 2\mu^2 r \\ 0 \\ -2\mu \end{bmatrix}$$

$$u_{24} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -\mu & \mu r \\ -1 & \mu & \mu r \end{vmatrix} = i(-\mu^2 r - \mu^2 r) - j(\mu r + \mu r) + k(\mu - \mu) = \begin{bmatrix} -2\mu^2 r \\ -2\mu r \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_{34} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -\mu & -\mu r \\ -1 & \mu & \mu r \end{vmatrix} = i(-\mu^2 r + \mu^2 r) - j(-\mu r - \mu r) + k(-\mu - \mu) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\mu r \\ -2\mu \end{bmatrix}$$

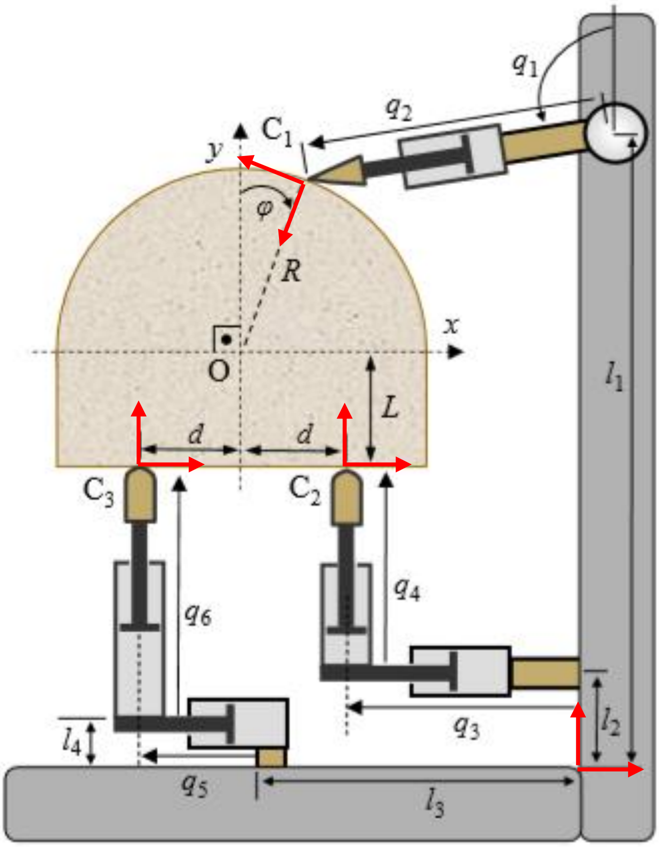
Υπολογίζουμε τώρα τα εσωτερικά γινόμενα των 6 διανυσμάτων με τη μήτρα της λαβής:

$u_{12}^T * G' = [\,0 \quad 0 \quad 4\mu^2 r \quad -4\mu^2 r\,]$ $\quad$ $u_{14}^T * G' = [\,0 \quad 4\mu^2 r \quad -4\mu^2 r \quad 0\,]$ $\quad$ $u_{24}^T * G' = [\,-4\mu^2 r \quad 0 \quad 4\mu^2 r \quad 0\,]$

$u_{13}^T * G' = [\,0 \quad -4\mu^2 r \quad 0 \quad 4\mu^2 r\,]$ $\quad$ $u_{23}^T * G' = [\,4\mu^2 r \quad 0 \quad 0 \quad -4\mu^2 r\,]$ $\quad$ $u_{34}^T * G' = [\,4\mu^2 r \quad -4\mu^2 r \quad 0 \quad 0\,]$

Εφόσον για κάθε δυνατό συνδυασμό καταλήγουμε σε διανύσματα στα οποία υπάρχει εναλλαγή προσήμου, είναι προφανές ότι για κανένα από τα 6 αρχικά διανύσματα δεν ισχύει $u_{ij}^T * G' \geq 0$. Σύμφωνα λοιπόν με τον κανόνα 4 της συνθήκης κυρτότητας, η συγκεκριμένη ρομποτική λαβή είναι κλειστή ως προς δύναμη.

- **Άσκηση 2**



(a) Θεωρούμε το αντικείμενο του παραπάνω σχήματος, το οποίο υφίσταται ρομποτικό χειρισμό μέσω δύο επαφών σημείου χωρίς τριβή (C_2, C_3) και μιας επαφής σημείου με τριβή (C_1) με πλαίσια αναφοράς στις επαφές αυτά που φαίνονται στο σχήμα. Ο άξονας y1 έχει διεύθυνση ακτινική ενώ οι y2 και y3 είναι κάθετοι στον x. Η μήτρα στροφής για κάθε επαφή δίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις (στροφή ως προς το κεντρικό frame έχουμε μόνο στο C_1):

$$R_{c1}^O = \begin{bmatrix} -cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & -cos\varphi \end{bmatrix}, \qquad R_{c2}^O = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R_{c3}^O = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Η μήτρα ρομποτικής λαβής κάθε επαφής (3 γραμμών εφόσον πρόκειται για επίπεδο μηχανισμό) δίνεται από την παρακάτω σχέση, στην οποία αγνοούμε τους όρους (f_z, n_x, n_y) που δεν αναφέρονται στο επίπεδο του σχήματος:

$$G_1 = W_{c1} * B_{c1} = \begin{bmatrix} R_{c1}^O & 0 \\ (-r_{c1,y}, r_{c1,x})R_{c1}^O & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & -cos\varphi \\ R & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = W_{c2} * B_{c2} = \begin{bmatrix} R_{c2}^O & 0 \\ (-r_{c2,y}, r_{c2,x})R_{c2}^O & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ d \end{bmatrix}$$

$$G_3 = W_{c3} * B_{c3} = \begin{bmatrix} R_{c3}^O & 0 \\ (-r_{c3,y}, r_{c3,x})R_{c3}^O & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -d \end{bmatrix}$$

όπου W η μήτρα μετασχηματισμού γενικευμένων δυνάμεων επαφής που αξιοποιεί τη μήτρα στροφής και B η μήτρα διανυσματικής βάσης των γενικευμένων δράσεων επαφής (f_x, f_y, n_z) που για τις χωρίς τριβή επαφές 2 και 3 είναι μονοδιάστατη. Η συνολική μήτρα ρομποτικής λαβής δίνεται συνδυάζοντας τα αποτελέσματα για κάθε επαφή:

$$G = [G_1 \mid G_2 \mid G_3] = \begin{bmatrix} -cos\varphi & -sin\varphi & 0 & 0 \\ sin\varphi & -cos\varphi & 1 & 1 \\ R & 0 & d & -d \end{bmatrix}$$

Ο κώνος τριβής για την επαφή με τριβή C_1 είναι $FC_{c1} = \left\{ f_{c1} = \left[f_{c1,x}, f_{c1,y}\right]^T \in \mathbb{R}^2 : f_{c1,y} \geq 0, \left|f_{c1,x}\right| \leq \mu f_{c1,y} \right\}$.

(b) Θεωρούμε διανύσματα διευθύνσεων $f_1^-, f_1^+ \in \mathbb{R}^2$ παράλληλων στις ακμές του κώνου τριβής της επαφής C_1. Θεωρώντας 2α την εσωτερική γωνία του κώνου, για τον συντελεστή τριβής θα ισχύει $\mu = \tan(a) = 1$ οπότε τα 2 παραπάνω διανύσματα θα έχουν τις εξής μορφές ως προς το frame της επαφής:

$$f_1^+ = \begin{bmatrix} 1 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad f_1^- = \begin{bmatrix} -1 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Θα χρειαστεί να εκφράσουμε τα διανύσματα ως προς το frame του αντικειμένου. Έχουμε:

$$R * [f_1^+ \quad f_1^-] = \begin{bmatrix} -cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & -cos\varphi \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -sin\varphi - cos\varphi & -sin\varphi + cos\varphi \\ sin\varphi - cos\varphi & -sin\varphi - cos\varphi \end{bmatrix}$$

Μπορούμε τώρα να γράψουμε τη δύναμη f_{c1} ως εξής, θεωρώντας πως δρα εντός του κώνου τριβής που επιβάλλει η κλειστότητα ως προς δύναμη: $f_{c1} = f_1^+ x_1 + f_1^- x_2$. Το σύστημα της λαβής θα είναι κλειστό ως προς δύναμη αν για κάθε εξωτερική γενικευμένη δύναμη F υπάρχουν δυνάμεις f_{c1}, f_{c2}, f_{c3}, που να εκμηδενίζουν την επίδρασή της:

$$\begin{cases} f_{c1} + f_{c2} + f_{c3} = -f_{ext} \\ n_{c1} + n_{c2} + n_{c3} = -n_{ext} \end{cases}$$

Οι άλλες δύο επαφές είναι χωρίς τριβή, επομένως οι τιμές τους στη G δε μεταβάλλονται. Η μήτρα ρομποτικής λαβής που προκύπτει από τις παραπάνω εξισώσεις φαίνεται από τη γενική σχέση $G' * f = -F_{ext}$. Για την τρίτη γραμμή της μήτρας υπολογίζουμε το εξωτερικό γινόμενο καθενός από τα παραπάνω διανύσματα με το διάνυσμα θέσης του. Στο επίπεδο μας ενδιαφέρει η τελευταία του γραμμή:

$$G' * f = \begin{bmatrix} -sin\varphi - cos\varphi & -sin\varphi + cos\varphi & 0 & 0 \\ sin\varphi - cos\varphi & -sin\varphi - cos\varphi & 1 & 1 \\ R & -R & d & -d \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = -F_{ext} = \begin{bmatrix} -f_{ext} \\ -n_{ext} \end{bmatrix}$$

Θα εξετάσουμε και εδώ τον 4ο κανόνα της συνθήκης κυρτότητας που αφορά την ύπαρξη διανυσμάτων $u_i \in \mathbb{R}^3$, κάθετων στα ζευγάρια στηλών της G', που να έχουν μη αρνητικό εσωτερικό γινόμενο με αυτή. Για κάθε ζευγάρι στηλών (i, j) ορίζουμε το κάθετο διάνυσμα $u_{ij} = col_i \times col_j$. Έχουμε:

$$u_{12} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -sin\varphi - cos\varphi & sin\varphi - cos\varphi & R \\ -sin\varphi + cos\varphi & -sin\varphi - cos\varphi & -R \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 2Rcos\varphi \\ -2Rsin\varphi \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$u_{13} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -sin\varphi - cos\varphi & sin\varphi - cos\varphi & R \\ 0 & 1 & d \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} d(sin\varphi - cos\varphi) - R \\ d(sin\varphi + cos\varphi) \\ -sin\varphi - cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$u_{14} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -sin\varphi - cos\varphi & sin\varphi - cos\varphi & R \\ 0 & 1 & -d \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -d(sin\varphi - cos\varphi) - R \\ -d(sin\varphi + cos\varphi) \\ -sin\varphi - cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$u_{23} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -sin\varphi + cos\varphi & -sin\varphi - cos\varphi & -R \\ 0 & 1 & d \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -d(sin\varphi + cos\varphi) + R \\ d(sin\varphi - cos\varphi) \\ -sin\varphi + cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$u_{24} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -sin\varphi + cos\varphi & -sin\varphi - cos\varphi & -R \\ 0 & 1 & -d \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} d(sin\varphi + cos\varphi) + R \\ d(-sin\varphi + cos\varphi) \\ -sin\varphi + cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$u_{34} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 1 & -d \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -2d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε τώρα τα εσωτερικά γινόμενα των 6 διανυσμάτων με τη μήτρα της λαβής:

$u_{12}^T * G' = [\,0 \quad 0 \quad 2(d - Rsin\varphi) \quad -2(d + Rsin\varphi)\,]$

$u_{13}^T * G' = [\,0 \quad -2(d - Rsin\varphi) \quad 0 \quad 2d(cos\varphi + sin\varphi)\,]$

$u_{14}^T * G' = [\,0 \quad 2(d + Rsin\varphi) \quad -2d(cos\varphi + sin\varphi) \quad 0\,]$

$u_{23}^T * G' = [\,2(d - Rsin\varphi) \quad 0 \quad 0 \quad 2d(sin\varphi - cos\varphi)\,]$

$u_{24}^T * G' = [\,-2(d + Rsin\varphi) \quad 0 \quad -2d(sin\varphi - cos\varphi) \quad 0\,]$

$u_{34}^T * G' = [\,2d(cos\varphi + sin\varphi) \quad 2d(sin\varphi - cos\varphi) \quad 0 \quad 0\,]$

Σύμφωνα με τον κανόνα 4 της συνθήκης κυρτότητας, επιθυμούμε για καθένα από τα παραπάνω διανύσματα να μην ισχύει $u_{ij}^T * G' \geq 0$. Από την τελευταία σχέση, απαιτώντας $cos\varphi + sin\varphi \geq 0$ και $sin\varphi - cos\varphi \leq 0$ περιορίζουμε τις επιτρεπτές τιμές της γωνίας φ γύρω από τις 45 μοίρες. Στη συνέχεια συναληθεύουμε τα υπόλοιπα γινόμενα συναρτήσει των d,R, ούτως ώστε να τηρείται ο κανόνας. Η συγκεκριμένη ρομποτική λαβή λοιπόν είναι κλειστή ως προς δύναμη, αν ισχύουν οι εξής 2 συνθήκες:

$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], \qquad |sin\varphi| \leq d/R$$

Οι παραπάνω συνθήκες έχουν λογική ερμηνεία. Προφανώς η πρώτη επαφή θα πρέπει να συγκρατεί το αντικείμενο σε μια ακτίνα γύρω από τη γωνία $\varphi = 0^o$ και θα μπορεί να παρεκκλίνει περισσότερο, όσο πιο ανοιχτά και «στιβαρά» συγκρατείται το αντικείμενο από τις κάτω επαφές. Αυτή τη σχέση αναπαριστά η δεύτερη συνθήκη. Παρατηρούμε τέλος πως η οριακή περίπτωση $\varphi = 0^o, d = 0$ οδηγεί σε μηδενισμό τα παραπάνω διανύσματα οπότε (οριακά) χάνουμε εκεί την ιδιότητα της κλειστότητας.

(c) Η συνολική Ιακωβιανή μήτρα της ρομποτικής λαβής δίνεται από τον ακόλουθο τύπο. Θα χρειαστεί να υλοποιήσουμε πλήρη κινηματική ανάλυση των 3 «δαχτύλων» για να υπολογίσουμε για κάθε ένα την Ιακωβιανή του.

$$J_{hand} = \begin{bmatrix} B_{c1}^T * T_E^{c1} * J_{c1} & 0 & 0 \\ 0 & B_{c2}^T * T_E^{c2} * J_{c2} & 0 \\ 0 & 0 & B_{c3}^T * T_E^{c3} * J_{c3} \end{bmatrix}$$

όπου για τις B μήτρες διανυσματικής βάσης των γενικευμένων δράσεων επαφής έχουμε:

$$B_{c1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_{c2} = B_{c3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>Ρομποτικός Βραχίονας Επαφής 1</u>

Ο πίνακας μετασχηματισμού δίνεται εποπτικά και αξιοποιώντας τη μήτρα στροφής από τον παρακάτω τύπο:

$$A_E^{c1} = \begin{bmatrix} -cos\varphi & sin\varphi & -q_2 \sin(q_1) \\ -sin\varphi & -cos\varphi & l_1 + q_2 \cos(q_1) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Η Ιακωβιανή μήτρα θα προκύπτει τότε από την κατάλληλη παραγώγιση του μετασχηματισμού:

$$J_{c1} = \begin{bmatrix} -q_2\, cos(q_1) & -sin(q_1) \\ -q_2 sin(q_1) & cos(q_1) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Συνολικά, έχουμε

$$B_{c1}^T * T_E^{c1} * J_{c1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -cos\varphi & sin\varphi & 0 \\ -sin\varphi & -cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * J_{c1} = \begin{bmatrix} q_2 cos(\varphi + q_1) & sin(\varphi + q_1) \\ q_2 sin(\varphi + q_1) & -cos(\varphi + q_1) \end{bmatrix}$$

<u>Ρομποτικός Βραχίονας Επαφής 2</u>

Ο πίνακας μετασχηματισμού και η Ιακωβιανή δίνονται εποπτικά από τους παρακάτω τύπους:

$$A_E^{c2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -q_3 \\ 0 & 1 & l_2 + q_4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad J_{c2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Συνολικά, έχουμε

$$B_{c2}^T * T_E^{c2} * J_{c2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Ρομποτικός Βραχίονας Επαφής 3</u>

Ο πίνακας μετασχηματισμού και η Ιακωβιανή δίνονται εποπτικά από τους παρακάτω τύπους:

$$A_E^{c3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -l_3 - q_5 \\ 0 & 1 & l_4 + q_6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad J_{c3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Συνολικά, έχουμε

$$B_{c3}^T * T_E^{c3} * J_{c3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς, η τελική Ιακωβιανή της ρομποτικής λαβής είναι η ακόλουθη:

$$J_h = \begin{bmatrix} q_2 cos(\varphi + q_1) & sin(\varphi + q_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_2 sin(\varphi + q_1) & -cos(\varphi + q_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Πηγές – Βιβλιογραφία**

[1] Διαφάνειες Μαθήματος, Ενότητα «Επιδέξια Ρομποτική Λαβή»

[2] Κ. Τζαφέστας, Συμπληρωματικές Σημειώσεις – Επιδέξιος Ρομποτικός Χειρισμός: Επιδέξια Ρομποτική Λαβή

[3] J. Kerr and B. Roth, «Analysis of Multifingered Hands», International Journal of Robotics Research, 1986

[4] R.M. Murray, Z. Li, and S. Sastry, A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation, CRC Press, 1994

[5] Bruno Siciliano, Oussama Khatib, Handbook of Robotics, Springer, 2008