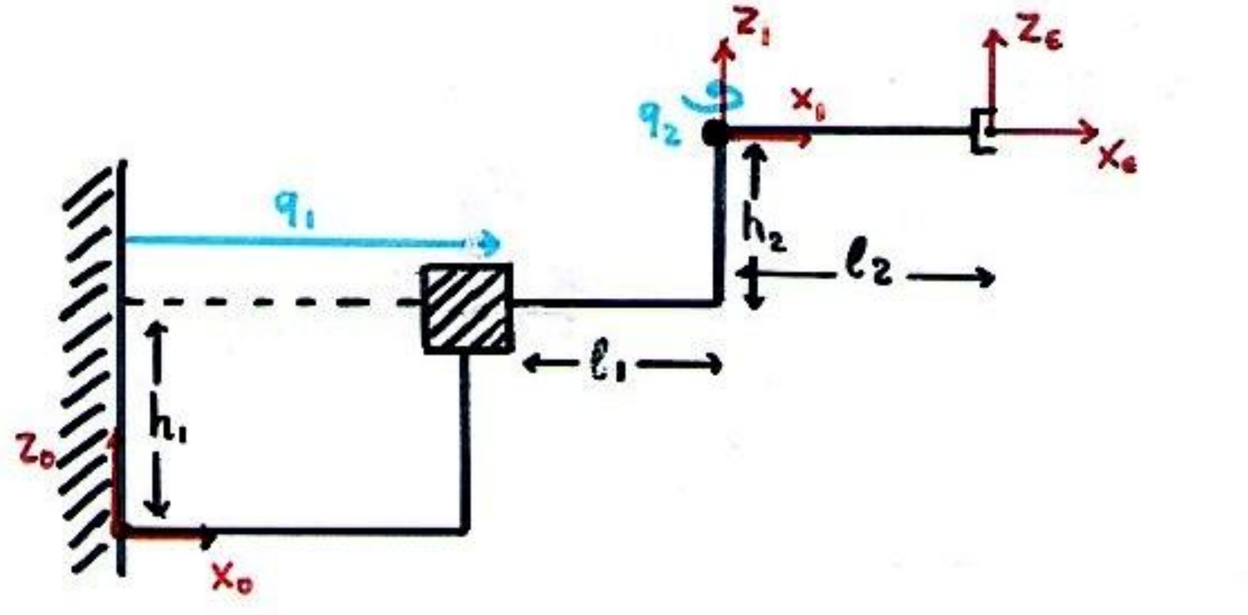
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Ρομποτική Ι (Ροή Σ) – 7^{ο} Εξάμηνο 2018-2019
Αβραμίδης Κλεάνθης – ΑΜ: 03115117

1^{η} Σειρά Αναλυτικών Ασκήσεων – Απαντήσεις

➢ *Άσκηση 1.1*

a) Για να προσδιορίσουμε το ευθύ γεωμετρικό μοντέλο της διάταξης θεωρούμε τα πλαίσια μεταξύ των συνδέσμων, όπως φαίνονται στο σχήμα:



Προσδιορίζουμε τώρα τους πίνακες διαδοχικών μετασχηματισμών μεταξύ αυτών των πλαισίων:

$$A_1^O = Tra(z, h_1 + h_2) \cdot Tra(x, q_1 + l_1) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 + h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 + q_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 + q_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 + h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_E^1 = Rot(z, q_2) \cdot Tra(x, l_2) =$$

$$\begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & c_2 l_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Η κινηματική εξίσωση της διάταξης δίνεται τελικά από την σχέση:

$$T_E^O = A_1^O \cdot A_E^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 + q_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 + h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & c_2 l_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_1 + c_2 l_2 + q_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 + h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Η θέση $\mathrm{r} = \left(\mathrm{p_{ex}}\ \mathrm{p_{ey}}\ \mathrm{p_{ez}}\right)^{\mathrm{T}}$ του άκρου του τελικού στοιχείου δίνεται από την τέταρτη στήλη (3 πρώτες γραμμές) του πίνακα της κινηματικής εξίσωσης. Εξισώνοντας, προκύπτει το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} p_{ex} = l_1 + c_2 l_2 + q_1 \\ p_{ey} = l_2 s_2 \\ p_{ez} = h_1 + h_2 \end{cases}$$

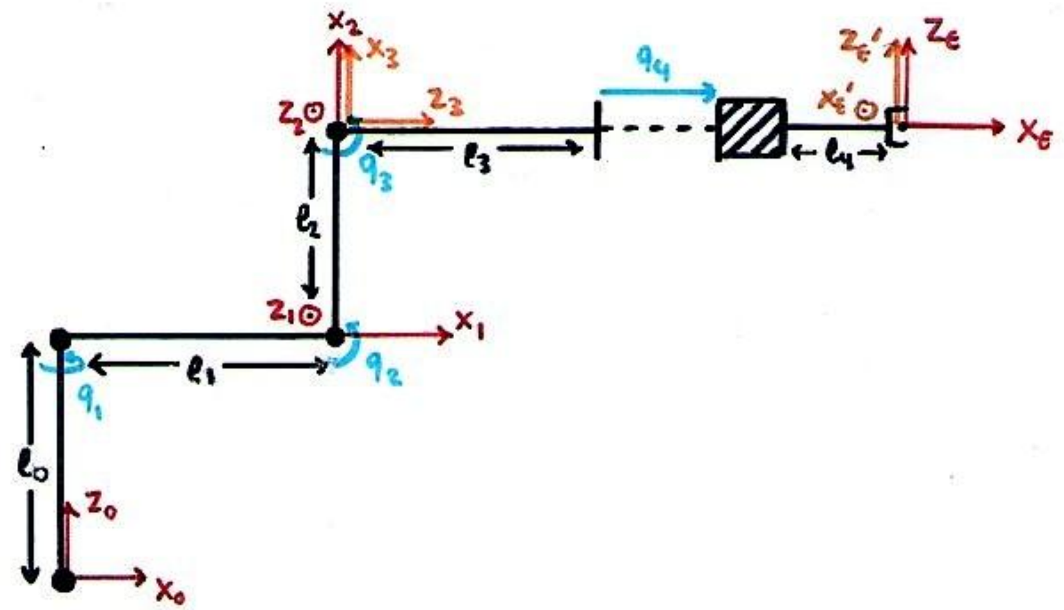
Με την αντίστροφη κινηματική ανάλυση θέλουμε να προσδιορίσουμε τις μεταβλητές των αρθρώσεων του συστήματος συναρτήσει της θέσης του τελικού στοιχείου. Λύνουμε αντίστοιχα το σύστημα:

$$\begin{cases} p_{ex} = l_1 + c_2 l_2 + q_1 \\ p_{ey} = l_2 s_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_2 l_2 = p_{ex} - l_1 - q_1 \\ l_2 s_2 = p_{ey} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_2 l_2 = (p_{ex} - l_1 - q_1)^2 + p_{ey}^2 = l_2^2 \\ tanq_2 = \dfrac{p_{ey}/l_2}{(p_{ex} - l_1 - q_1)/l_2} \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} q_1 = p_{ex} - l_1 \mp \sqrt{l_2^2 - p_{ey}^2} \\ q_2 = \operatorname{arctan2}\left(p_{ey}, \mp\sqrt{l_2^2 - p_{ey}^2}\right) \end{cases}$$

- ***Άσκηση 1.2***

a) Στο παρακάτω σχήμα έχουν τοποθετηθεί τα πλαίσια των συνδέσμων του ρομποτικού βραχίονα με βάση τη μέθοδο Denavit-Hartenberg:



Ξεκινάμε από το δοθέν πλαίσιο αναφοράς $\mathrm{O_0}$. Ο άξονας $\mathrm{z_1}$ ταυτίζεται με τον άξονα της δεύτερης άρθρωσης, ενώ ο $\mathrm{x_1}$ επιλέγεται κατά μήκος της κοινής καθέτου των $\mathrm{z_0}$, $\mathrm{z_1}$. Ο άξονας $\mathrm{z_2}$ ταυτίζεται με τον άξονα της τρίτης άρθρωσης, ενώ ο $\mathrm{x_2}$ επιλέγεται κατά μήκος της κοινής καθέτου των $\mathrm{z_1}$, $\mathrm{z_2}$. Ο άξονας $\mathrm{z_3}$ ταυτίζεται με τον άξονα της τέταρτης άρθρωσης, ενώ ο $\mathrm{x_3}$ επιλέγεται κατά μήκος της κοινής καθέτου των $\mathrm{z_2}$, $\mathrm{z_3}$. Η συγκεκριμένη κάθετος ταυτίζεται στη συγκεκριμένη περίπτωση με την κοινή κάθετο των $\mathrm{z_1}$, $\mathrm{z_2}$ οπότε το πλαίσιο $\mathrm{O_3}$ θα πέφτει πάνω στο προηγούμενό του. Μπορούμε πλέον να μετακινηθούμε στο end-effector, αρχικά με απόκλιση μίας στροφής. Ο άξονας $\mathrm{z_{E'}}$ ταυτίζεται με τον άξονα του end-effector, ενώ ο $\mathrm{x_{E'}}$ επιλέγεται κατά μήκος της κοινής καθέτου των $\mathrm{z_3}, \mathrm{z_{E'}}$ (επιλέγουμε την κάθετη στη σελίδα διεύθυνση). Με μια στροφή κατά x ταυτιζόμαστε πλέον με το τελικό δοθέν πλαίσιο αναφοράς. Επομένως, ο πίνακας των παραμέτρων D-H για το συγκεκριμένο ρομποτικό σύστημα είναι:

	θ	**d**	a	**α**
0 → 1	q_1	l_0	l_1	$\pi/2$
1 → 2	$\pi/2 + q_2$	0	l_2	0
2 → 3	q_3	0	0	$\pi/2$
3 → E′	$\pi/2$	$l_3 + q_4 + l_4$	0	$\pi/2$
E′ → E	$\pi/2$	0	0	0

b) Υπολογίζουμε τους πίνακες μετασχηματισμών από το σύστημα O_0 στο O_1 και από το O_1 στο O_2:

$$A_1^0 = Rot(z, q_1) \cdot Tra(z, l_0) \cdot Tra(x, l_1) \cdot Rot(x, \pi/2) =$$

$$\begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & s_1 & c_1 l_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & l_1 s_1 \\ 0 & 1 & 0 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2^1 = Rot(z, \pi/2 + q_2) \cdot Tra(x, l_2) =$$

$$\begin{pmatrix} -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s_2 & -c_2 & 0 & -l_2 s_2 \\ c_2 & -s_2 & 0 & c_2 l_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Το ζητούμενο μητρώο ομογενούς μετασχηματισμού δίνεται από την σχέση:

$$T_2^0 = A_1^0 \cdot A_2^1 = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & s_1 & c_1 l_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & l_1 s_1 \\ 0 & 1 & 0 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -s_2 & -c_2 & 0 & -l_2 s_2 \\ c_2 & -s_2 & 0 & c_2 l_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 s_2 & -c_1 c_2 & s_1 & c_1 l_1 - l_2 c_1 s_2 \\ -s_1 s_2 & -c_2 s_1 & -c_1 & l_1 s_1 - l_2 s_1 s_2 \\ c_2 & -s_2 & 0 & c_2 l_2 + l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$