Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Ρομποτική ΙΙ (Ροή Σ) – Εαρινό Εξάμηνο 2018-2019
Κλεάνθης Αβραμίδης – 03115117

2η Αναλυτική Άσκηση

Discrete Kalman Filter for Sensor Fusion & Mobile Robot Localization

Θεωρούμε ρομποτικό όχημα διαφορικής οδήγησης, η θέση και ο προσανατολισμός του οποίου δίνονται από το διάνυσμα $[x, y, \theta]$ όπου θ η γωνία ως προς τον άξονα x. Έστω επίσης $[v, \omega]$ η γραμμική ταχύτητα ως προς τον άξονα x και η γωνιακή ταχύτητα του ρομπότ αντίστοιχα. Το ρομποτικό όχημα διαθέτει τον ακόλουθο εξοπλισμό:

- Σύστημα γραμμικών επιταχυνσιόμετρων που παρέχει μέτρηση της κατά άξονα x επιτάχυνσης
- Μαγνητόμετρο που παρέχει μέτρηση της ως προς άξονα x γωνίας (σφάλμα 3 μοιρών)
- Σύστημα συμμετρικά τοποθετημένων αισθητήρων υπερήχων από τους οποίους λαμβάνουμε μέτρηση μόνο από τον μπροστινό για την κατά άξονα x απόσταση από εμπόδιο (σφάλμα 1 εκατοστού)

Με δεδομένες ορισμένες μετρήσεις σε 2 χρονικές στιγμές $T_0 = 0$ (**state 0**) και $T_1 = 0.5\, s$ (**state 1**) στόχος της παρούσας εργασίας είναι η πλήρης ανάλυση της εφαρμογής ενός διακριτού Extended Kalman Filter για τη βέλτιστη εκτίμηση της θέσης του ρομποτικού οχήματος (localization) σε αυτό το χρονικό διάστημα. Η συγκεκριμένη εφαρμογή είναι κρίσιμης σημασίας για τα ρομποτικά συστήματα, καθώς δίνει τη δυνατότητα σε κάθε αυτόνομο ρομπότ να σχεδιάσει αποδοτικά και με ακρίβεια τις ενέργειές του στο περιβάλλον στο οποίο δρα.

Γενικό Μοντέλο Πρόβλεψης (Kalman Predictor)

Με βάση τη λειτουργικότητα και την συμπεριφορά του ρομπότ, ορίζουμε το ακόλουθο state στο φίλτρο Kalman:

$$state_k \equiv \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ \theta_k \\ v_k \end{bmatrix}$$

όπου x, y είναι οι συντεταγμένες του ρομπότ στο χώρο, θ είναι η γωνία του ως προς την οριζόντια (άξονας x) και v η γραμμική του ταχύτητα. Όλα τα μεγέθη αφορούν την χρονική στιγμή k. Το μοντέλο που θα χρησιμοποιήσουμε θα πρέπει να προβλέπει τις τιμές του **state k+1** βασιζόμενο στην πληροφορία που έχουμε για την συμπεριφορά του ρομπότ και στις τιμές του **state k**, ενώ θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη του πιθανά σφάλματα κατά τη μετάβαση στο **state k+1**, είτε από ακαθόριστους παράγοντες είτε από τον εφαρμοζόμενο έλεγχο.

Στην τελευταία αυτή κατηγορία εντάσσεται το σφάλμα που λαμβάνουμε από το επιταχυνσιόμετρο του μηχανισμού, που υπολογίζεται στα $0.1\, m/s^2$ ανά μέτρηση. Για την πρώτη κατηγορία σφαλμάτων δε μας δίνεται κάποια συγκεκριμένη πληροφορία, επομένως ακολουθούμε την εξής πολιτική: Εφόσον τα μεγέθη x, y, v επηρεάζονται ούτως ή άλλως από το σφάλμα στην επιτάχυνση και έχουν ήδη ένα εύρος τιμών, εκτιμούμε μηδενικό πρόσθετο σφάλμα. Για τη γωνία θ από την άλλη μπορούμε να εκτιμήσουμε σφάλμα που μοντελοποιείται από λευκό γκαουσιανό θόρυβο μηδενικής μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης που αντιστοιχεί σε σφάλμα γωνίας ίσο με 3 μοίρες. Το ρομπότ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση κατά τον x άξονα, με επιτάχυνση που ασκείται επί του x άξονα και δίνεται ως έλεγχος στο σύστημα πρόβλεψης. Συνεπώς, η εξίσωση του μοντέλου πρόβλεψης θα είναι:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ \theta_{k+1} \\ v_{k+1} \end{bmatrix} = \Phi(x_k, u_k) + w(k) = \begin{bmatrix} x_k + v_k cos\theta_k \Delta t + \frac{1}{2} a_k cos\theta_k \Delta t^2 \\ y_k + v_k sin\theta_k \Delta t + \frac{1}{2} a_k sin\theta_k \Delta t^2 \\ \theta_k \\ v_k + a_k \Delta t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta a_k cos\theta_k \frac{\Delta t^2}{2} \\ \Delta a_k sin\theta_k \frac{\Delta t^2}{2} \\ \Delta\theta \\ \Delta a_k \Delta t \end{bmatrix}$$

Η συμμετρική μήτρα διακύμανσης C_w της αβεβαιότητας θα δίνεται ως εξής:

$$C_w(k) = E[w(k)w^T(k)] = \begin{bmatrix} \left(\Delta a_k cos\theta_k \frac{\Delta t^2}{2}\right)^2 & \left(\Delta a_k \frac{\Delta t^2}{2}\right)^2 cos\theta_k sin\theta_k & 0 & \Delta a_k^2 cos\theta_k \frac{\Delta t^3}{2} \\ \left(\Delta a_k \frac{\Delta t^2}{2}\right)^2 cos\theta_k sin\theta_k & \left(\Delta a_k sin\theta_k \frac{\Delta t^2}{2}\right)^2 & 0 & \Delta a_k^2 sin\theta_k \frac{\Delta t^3}{2} \\ 0 & 0 & \Delta\theta^2 & 0 \\ \Delta a_k^2 cos\theta_k \frac{\Delta t^3}{2} & \Delta a_k^2 sin\theta_k \frac{\Delta t^3}{2} & 0 & \Delta a_k^2 \Delta t^2 \end{bmatrix}$$

Έχοντας προσδιορίσει τα χαρακτηριστικά του μοντέλου πρόβλεψης, θα επιχειρήσουμε να το εφαρμόσουμε για τα δεδομένα της εκφώνησης. Επειδή ωστόσο δε μας δίνεται το αρχικό **state 0** με απόλυτη βεβαιότητα (έχουμε μέτρηση γωνίας θ), θα χρειαστεί να υποθέσουμε ένα επιπλέον **state -1** στο οποίο θεωρούμε με απόλυτη βεβαιότητα πως βρισκόμαστε στην αρχή του συστήματος αξόνων, με μηδενική γωνία και μηδενική κίνηση (ταχύτητα και επιτάχυνση).

State 0: Μοντέλο Πρόβλεψης (Kalman Predictor)

Θα επιχειρήσουμε μέσω μιας απλοϊκής έκδοσης Kalman Filtering να λάβουμε εκτίμηση για το **state 0**. Στο **state 0** έχουμε αβεβαιότητα μόνο για την γωνία, μιας και η επιτάχυνση δίνεται ως είσοδος. Έχουμε αναλυτικά για $\boldsymbol{k = -1}$:

$$state_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \theta_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \Phi(x_{-1}, u_{-1}) + w(-1) = \begin{bmatrix} x_{-1} + v_{-1}cos\theta_{-1}\Delta t + \frac{1}{2}a_{-1}cos\theta_{-1}\Delta t^2 \\ y_{-1} + v_{-1}sin\theta_{-1}\Delta t + \frac{1}{2}a_{-1}sin\theta_{-1}\Delta t^2 \\ \theta_{-1} \\ v_{-1} + a_{-1}\Delta t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta\theta_0 \\ \Delta v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.052 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Η συμμετρική μήτρα διακύμανσης C_w της αβεβαιότητας θα δίνεται ως εξής:

$$C_w(0) = E[w(0)w^T(0)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0027 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Εφόσον ξεκινάμε από αρχική θέση απόλυτης βεβαιότητας για το state, θα έχουμε $P(-1) = 0$, οπότε θα ισχύει:

$$P(0|-1) = AP(-1)A^T + C_w(0) = C_w(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0027 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

State 0: Μοντέλο Μετρήσεων (Kalman Corrector)

Συνδυάζουμε τώρα την πρόβλεψη θέσης με την πληροφορία που λαμβάνουμε από τους αισθητήρες για το εξωτερικό περιβάλλον και το μαγνητόμετρο, για το **state 0**. Θεωρούμε πως λαμβάνουμε πληροφορία μόνο από τον μπροστά αισθητήρα (l_F) και από το μαγνητόμετρο. Θεωρούμε επίσης πως ο τοίχος βρίσκεται σε σταθερή απόσταση από το ρομπότ πριν την έναρξη της κίνησης. Κάνουμε εδώ την εξής παραδοχή: Εφόσον δεν έχουμε απόλυτη βεβαιότητα για τη θέση του τοίχου στα $50\ cm$, θα εισάγουμε εδώ το σφάλμα μέτρησης του αισθητήρα και τυχόν αβεβαιότητα στο x_0 θα ερμηνευθεί ως αβεβαιότητα της θέσης σε σχέση με τον τοίχο και όχι προφανώς της απόλυτης θέσης του ρομπότ, που θεωρείται γνωστή. Λαμβάνουμε λοιπόν το εξής διάνυσμα μετρήσεων, πάντα για $\boldsymbol{k = -1}$:

$$z_{k+1} = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \theta_{k+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x_{k+1} \\ \Delta\theta_{k+1} \end{bmatrix} =^{k+1=0} \begin{bmatrix} 0.5 - l_F \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta l_F \\ \Delta\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \theta_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.052 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.052 \end{bmatrix}$$

Αξιοποιήσαμε τη μέτρηση από τον μπροστά αισθητήρα $(0.5m)$ καθώς και τη μέτρηση του μαγνητόμετρου $(\theta = 0^o)$ κατά την στιγμή 0. Βλέπουμε πως το μοντέλο μέτρησης είναι γραμμικό, συνεπώς ο πίνακας H είναι ο ακόλουθος:

$$H_{k+1} = H_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Μπορούμε τώρα μέσω αυτού να υπολογίσουμε το βέλτιστο κέρδος του φίλτρου (optimal Kalman gain):

$$K_{k+1} = P(k+1|k)H_{k+1}^T\left[H_{k+1}P(k+1|k)H_{k+1}^T + C_v(k+1)\right]^{-1} \;\rightarrow$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0027 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0027 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0001 & 0 \\ 0 & 0.0027 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

όπου ο πίνακας αβεβαιότητας μέτρησης $C_v(0)$ δίνεται από την παραπάνω εξίσωση μέτρησης:

$$C_v(0) = E[v(0)v^T(0)] = \begin{bmatrix} \Delta l_F^2 & 0 \\ 0 & \Delta\theta^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0 \\ 0 & 0.0027 \end{bmatrix}$$

Θα επανεκτιμήσουμε έτσι το **state 0** του ρομπότ σύμφωνα με την ακόλουθη εξίσωση:

$$state'_{k+1} = state_{k+1} + K_{k+1}(z_{k+1} - H_{k+1}state_{k+1}) \;\rightarrow$$

$$state'_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Δηλαδή οι μετρήσεις που πήραμε για το **state 0** επιβεβαίωσαν την αρχική εκτίμηση, που είναι και το πλέον λογικό. Τέλος, για την εφαρμογή Kalman Filter για το **state 1** θα χρειαστούμε και την εξής μήτρα διακύμανσης:

$$P(k+1) = (I - K_{k+1}H_{k+1})P(k+1|k) \;\rightarrow$$

$$P(0) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0027 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0014 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

State 1: Μοντέλο Πρόβλεψης (Kalman Predictor)

Επιστρέφουμε τώρα στο μοντέλο πρόβλεψης του **state 1** όπου, σε συνέχεια των παραπάνω, θα ισχύει το εξής ($\boldsymbol{k = 0}$):

$$P(k+1|k) = AP(k)A^T + C_w(k) \;\rightarrow$$

$$P(1|0) = A\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0014 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}A^T + \begin{bmatrix} 0.0002 & 0 & 0 & 0.0006 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0027 & 0 \\ 0.0006 & 0 & 0 & 0.0025 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0002 & 0 & 0 & 0.0006 \\ 0 & 0 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 0.0001 & 0.0041 & 0 \\ 0.0006 & 0 & 0 & 0.0025 \end{bmatrix}$$

όπου ο πίνακας A λαμβάνεται γραμμικοποιώντας τον χώρο κατάστασης και με αντικατάσταση του $state'_0$:

$$A_k = \nabla\Phi|_{k=0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -v_k sin\theta_k \Delta t - \frac{\Delta t^2}{2}a_k sin\theta_k & cos\theta_k \Delta t \\ 0 & 1 & v_k cos\theta_k \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2}a_k cos\theta_k & sin\theta_k \Delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και ο πίνακας $C_w(1)$ λαμβάνεται με αντικατάσταση των τιμών του $state'_0$ καθώς και των παραδεκτών σφαλμάτων στον τύπο που παρουσιάστηκε παραπάνω, λαμβάνοντας υπόψη ότι τα σφάλματα Δθ και Δα είναι ασυσχέτιστες γκαουσιανές κατανομές. Θεωρούμε δηλαδή πως $\Delta\theta\Delta a = 0$. Το διάνυσμα πρόβλεψης που επιστρέφεται τελικά είναι:

$$state_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \theta_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + v_0 cos\theta_0 \Delta t + \frac{1}{2}a_1 cos\theta_0 \Delta t^2 \\ y_0 + v_0 sin\theta_0 \Delta t + \frac{1}{2}a_1 sin\theta_0 \Delta t^2 \\ \theta_0 \\ v_0 + a_1 \Delta t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

Σημειώνουμε πως θέσαμε $\alpha_0 = \alpha_1 = 0.4m/s^2$ λαμβάνοντας υπόψη πως το σύστημα πρέπει κάπως να ξεκινήσει να κινείται και πως εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

State 1: Μοντέλο Μετρήσεων (Kalman Corrector)

Η πρόβλεψη θέσης του ρομποτικού οχήματος χρησιμοποιώντας τον έλεγχο επιτάχυνσης μπορεί τώρα να συνδυαστεί με την πληροφορία που λαμβάνουμε από τους αισθητήρες για το εξωτερικό περιβάλλον και το μαγνητόμετρο. Θεωρούμε πως ο τοίχος βρίσκεται σε σταθερή απόσταση από το ρομπότ πριν την έναρξη της κίνησης, όπως αυτή προσδιορίστηκε από την αρχική μέτρηση του μπροστά σόναρ. Θα εκφράσουμε μέσω αυτών το **state 1**, δηλ. $\boldsymbol{k = 0}$:

$$z_1 = \begin{bmatrix} 0.5 - l_F \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta l_F \\ \Delta\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \theta_1 \\ v_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.052 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04 \\ 0.087 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.052 \end{bmatrix}$$

Αξιοποιήσαμε τη μέτρηση από τον μπροστά αισθητήρα $(0.46m)$ καθώς και τη μέτρηση του μαγνητόμετρου $(\theta = 5^o)$ κατά την στιγμή 0. Το μοντέλο μέτρησης είναι γραμμικό, συνεπώς ο πίνακας H είναι ο ακόλουθος:

$$H_{k+1} = H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Μπορούμε τώρα μέσω αυτού να υπολογίσουμε το βέλτιστο κέρδος του φίλτρου (optimal Kalman gain):

$$K_{k+1} = P(k+1|k)H_{k+1}^T\left[H_{k+1}P(k+1|k)H_{k+1}^T + C_v\right]^T \rightarrow$$

$$K_1 = P(1|0)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} P(1|0) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0001 & 0 \\ 0 & 0.0027 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.61 & 0 \\ 0 & 0.01 \\ 0 & 0.6 \\ 2.44 & 0 \end{bmatrix}$$

όπου ο πίνακας αβεβαιότητας μέτρησης C_v δίνεται από την ταυτόσημη με πριν εξίσωση μέτρησης:

$$C_v(1) = E[v(1)v^T(1)] = \begin{bmatrix} \Delta l_F^2 & 0 \\ 0 & \Delta\theta^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0 \\ 0 & 0.0027 \end{bmatrix}$$

και επίσης από πριν, ο πίνακας συνδιακύμανσης P έχει βρεθεί κατά προσέγγιση ως

$$P(1|0) = \begin{bmatrix} 0.0002 & 0 & 0 & 0.0006 \\ 0 & 0 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 0.0001 & 0.0041 & 0 \\ 0.0006 & 0 & 0 & 0.0025 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς μπορούμε να επανεκτιμήσουμε το **state 1**, σύμφωνα με την ακόλουθη εξίσωση:

$$state'_1 = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.61 & 0 \\ 0 & 0.01 \\ 0 & 0.6 \\ 2.44 & 0 \end{bmatrix} * \left(\begin{bmatrix} 0.04 \\ 0.087 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.05 \\ 0 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0.044 \\ 0.009 \\ 0.052 \\ 0.176 \end{bmatrix}$$

Η τιμή αυτή του state είναι και η τελική τιμή που επιστρέφει ο αλγόριθμος Kalman Filtering όσον αφορά την εκτίμηση της θέσης και της κατάστασης του ρομπότ τη χρονική στιγμή $T_1 = 0.5\ s$. Βλέπουμε πως πρόκειται για μια λογική εκτίμηση με βάση τα δεδομένα που μας δόθηκαν, τα οποία και αξιοποιήθηκαν εξαντλητικά. Το ρομπότ φαίνεται να προχωράει όντως κατά 4 εκατοστά αλλά και να στρίβει περίπου 3^o, με βάση την τελευταία μέτρηση. Αυτή η στροφή αναγκάζει και τη μετατόπιση που παρατηρείται στον κάθετο άξονα. Η ταχύτητα τέλος είναι σε προβλεπόμενα για επιταχυνόμενη κίνηση επίπεδα. Παραθέτουμε για λόγους πληρότητας και την μήτρα διακύμανσης του αποτελέσματος:

$$P(k+1) = (I - K_{k+1}H_{k+1})P(k+1|k) \rightarrow$$

$$P(1) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.61 & 0 \\ 0 & 0.01 \\ 0 & 0.6 \\ 2.44 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0.0002 & 0 & 0 & 0.0006 \\ 0 & 0 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 0.0001 & 0.0041 & 0 \\ 0.0006 & 0 & 0 & 0.0025 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0 & 0 & 0.0002 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0016 & 0 \\ 0.0002 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$