



Universidade Federal
de Campina Grande

Universidade Federal de Campina Grande
Ciência da Computação

Algoritmo mais eficiente para o cálculo de TT

Disciplina
Laboratório de Organização e Arquitetura de Computadores

Professor
Elmar Melcher
elmar@dsc.ufcg.edu.br

Nome
Kleber Sobrinho
Matrícula: 119210988.

kleber.sobrinho@ccc.ufcg.edu.br

Campina Grande – PB
Julho de 2021

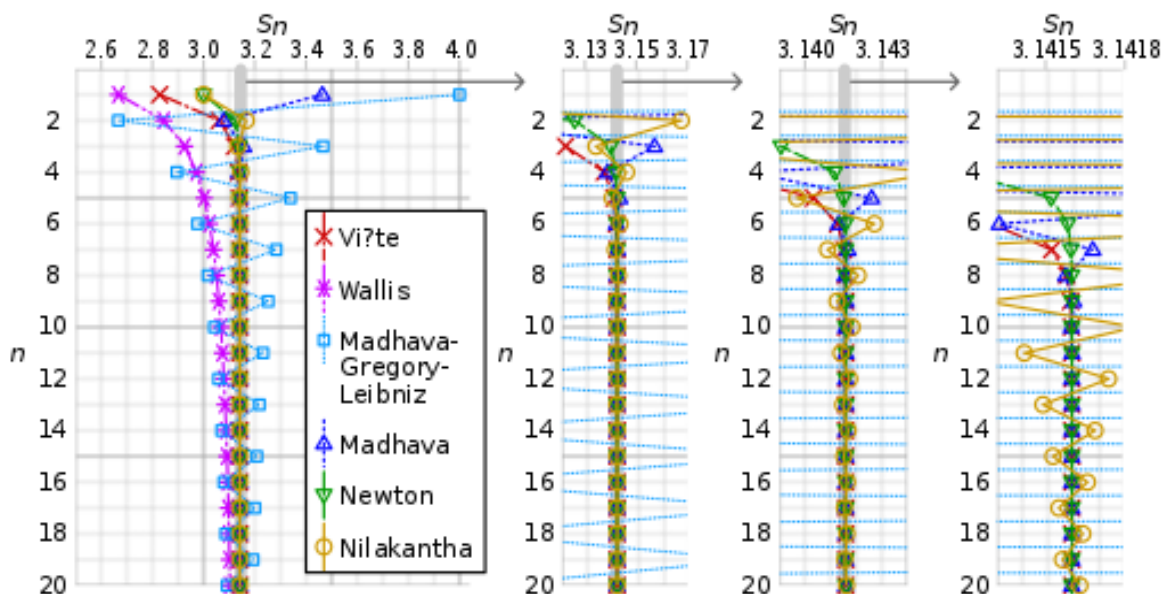
Premissa - Use uma série que converge mais rapidamente do que a série de Leibniz para calcular π e deixe rodar por uma hora, um fim de semana, ou mais. Quantos dígitos se consegue?

Série de Leibniz

A série de Leibniz para cálculo de π recebeu esse nome em homenagem a Gottfried Leibniz, matemático, filósofo, cientista e diplomata alemão. A série afirma que:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4}$$

A série de Leibniz converge de forma extremamente lenta para o cálculo de π , como pode ser visto na imagem abaixo, que compara a convergência da série de Leibniz com várias outras séries históricas infinitas para cálculo de π .



fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Comparison_pi_infinite_series.svg

O cálculo de π para 10 casas decimais corretas usando a soma direta da série requer cerca de cinco bilhões de termos.

Algoritmo de Gauss-Legendre

Apresenta uma convergência rápida, com apenas 25 iterações produz 45 milhões de dígitos corretos de π . A desvantagem é que ele consome muita memória do computador.

O método é baseado no trabalho individual de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e Adrien-Marie Legendre (1752-1833) combinado com algoritmos modernos para multiplicação e raízes quadradas.

O algoritmo possui convergência quadrática, o que essencialmente significa que o número de dígitos corretos dobra a cada iteração do algoritmo.

Implementação para o algoritmo

```
import decimal
import time

PRECISION = 10000

def calculate_pi_gauss_legendre():
    D = decimal.Decimal
    with decimal.localcontext() as ctx:
        ctx.prec += 2

        a, b, t, p = 1, 1 / D(2).sqrt(), 1 / D(4), 1 #initial value setting

        pi = None

        while True:
            an = (a + b) / 2
            b = (a * b).sqrt()
            t -= p * (a - an) * (a - an)
            a, p = an, 2*p

            pi_old = pi
            pi = (a + b) * (a + b) / (4 * t)

            if pi == pi_old:
                break

        return +pi

start_time = time.time()

decimal.getcontext().prec = PRECISION
print(f'Value of  $\pi$ : {calculate_pi_gauss_legendre()}')

end_time = time.time()
time_process = end_time - start_time

print(f'Execution time: {time_process}')
```

Modificando o valor da variável *PRECISION*, na quarta linha, do código acima podemos alterar a quantidade de casas decimais de π que serão calculadas.

Testes

Primeiro teste - Calculando os primeiros 10000 (dez mil) dígitos de π .

```
PRECISION = 10000

pi_gauss_legendre (1)

C:\Users\KLEBER\PycharmProjects\LOAC\venv\Scripts\python.exe C:\Users\KLEBER\PycharmProjects\LOAC\pi_gauss_legendre.py
Value of n: 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923781646062862089986280348253421170679821480865132823066470938446095505822317253594

Execution time: 0.8283085823059082 seconds

Process finished with exit code 0
```

Foram necessários aproximadamente 0.83 segundos.

Segundo teste - Calculando os primeiros 100000 (cem mil) dígitos de π .

```
PRECISION = 100000

pi_gauss_legendre (1)

43500629388144299879053010562173754591826799732177350293689280652100253962688074980926434580116557158867004435039765053234782873273688408635400027406767838
2196352226539290939807367391364082898722017776747168118195856133721583119054682936083236976113450281757830202934845982925000895682630271263295866292147653
1422333517930933879513709534637718368409244442209631933129562030557551734006797374061416210792363342380564685009203716715264255637185388957141641977238742
261059666739697713168169415435095283193556417705668622215217991151355639707143312893657553846483262012064243380169558626985610224606460693307938478588143
67407000599769703649019273328826135329363112403650698652168638987250267238087403396744397830258296894256896741864336134979475245526291426522842419243083388
1035800537870239995421721136865502753413622116931406946695131869281025747959856051450050217159133177516099578655519818861932112821107094422872404428115340
6055895958558152320121846058206535926993034788511320686266275887714460359966561084307256965005630644891875994665967728471715395736121081808415472731426617
489331341746326623542220726001460127012069346395205644455432916629866078308900811879090815295063626782075614388815781351134695366303878412092346942868730
8393204323387277549680521030282154432472338884521534372725012858974769146080831440412586818154004918777228786980185345453700652665564917091542952275670922
22174741120627206566229898060328916720687436549482461086973672255474048128892424718543236057534116728507575520571311566979545848873987422281358879858407831
350605482905148278529489112190538195624228719484759407859398047901094194070671764439032730712135887385049993638838205501683402777496076276844880281912220
636888636811043569529300652195528261526991271637277388418993287113056346468822739828876319864570983630891778648708667618548568004767255267541474285102814580
7403152992197814557756843681110185317498167016426647884090262682824482580275320945499151045185177165463118049045679857132575281179136562781581112888165622
85876030875974963849435275676612168959261485030785362045274507752950631012480341804584059432926079854435620893708091821523920371796678121992280496069738238
74331262673030679594396095495718957721791559730058869364684557667609245090608820221223571925453671519183487258742391941089044411595993276004450655620646116
46556654875942473692523369599363038550958176261762318495619064948396730020377638743693439998294302891470736189479326927624451865602395598537051289781634554
233201149759948962784243274837880327014186769526211809750064051497558896502930048676052088010491537885413909424531691719987628941277221129464568294860281493
1815602496778879498137721622935943781100444806079767242927624951078415344642915084276452000204276947069804177583220909702029165734725158290463091035993784
29775726517208772447409522671663060954697163879431711968734846887381866567512792985750163634113146275304990191356468238043299706957701507893377286580357127
90913767420805655493624666

Execution time: 20.008599042892456 seconds

Process finished with exit code 0
```

Foram necessários aproximadamente 20 segundos.

Terceiro teste - Calculando os primeiros 1000000 (um milhão) de dígitos de π .

```
PRECISION = 1000000

pi_gauss_legendre (1)

8317822348215338918706836327618181943322769555311258190484751746290562001346899644071619823205434718461102051131555093022682510749199014960817856260510885
90365847451503763849151340003295163991062192405572830081035217619796168322139816924083576395562116571261121929050871632552585586496166382541935914821818761
95923292056995506376458182685575221152787011802994335467415362762077497854054133303136335423682410108464673749063885279841490076466497648540094796358954975
4614813763697059163569983681198752505479306935320757076678014844770142471624190816682249007420711186488154772891718653596776539579933503342728214605416964
96009847069795859264304287036366471307131478233061157641991322242064609989883076268583605552740990478467610760424178421506285175573529996478625529524283674
29870646579437580101407402116186148432976574426342852870477855630830963143527878304194601970294657577732816746858087453931603937253315899280579436431408
7358608617788263349277461511849116551368818467136773488233410851364083947932088768863336394613823583447940815696109142938773471389342377361918064605642447
477908207604966027135618954106444832136598082938909729618912118342914906163896386106937520895346883983344671898212434780723874074576975545074368467471350
24858818399665568196344528811941833172636825050611864900394125520574571203603557802514190435267183721921384829905803224695842432135898434251039654435350535
4322921674704077861468485976255744615351188003143056995492784716745444972697612839332518381972232836070522781292813010656941262948730634268837338181742170
608647548267394242391402753218042951903411635170469807423351550057857562450999253201787499636640473477038955873065076038709977318431281098798982085435595
50943253902371895216820233442455725753078792633985509016455942373396625223351648750589556942172972448959988250892321120347958941546546030378786175915716613
98869326873749684730549653293782147564810579380828530053244708050656929422340010959348294614539078890661626402150130735330033192074563726377077099939992288
621224324880262634850888530360107234368901360642758142528398785949179979611219637975615924521867896088092137111977500087815930430729344883930957574159241
375285977797291893453850508038319867745900251865791273080857416429715380788406071306868036198241971577476389507253468404569192759331937237022290155800656
0760473854735990447799674874996976942713766869553319512533776409858709668386326392616494560868414037458420719405950701743035469182150900466493998551741389
3851975731215682616228622318810967297476060130283311937161140874270676255856777511995666748615196491297019331808499410961813929649278936090212635443327375
60426062429941203273625582441749834509473094534366159072841631936830757197980682315357371555718161221567879364250138871170232755557793022667858031999308108
3057630765233205074081393909580796163771762925928376487479617274125678190555621805048764699140839977919376542320623374717324703369763357925891515260315
61403332127849194418437150696552087542450598956787961303311646283996346460422090106105779458151

Execution time: 334.93632078170776 seconds

Process finished with exit code 0
```

Foram necessários aproximadamente 335 segundos que equivale a 5 minutos e 35 segundos.

Quarto teste - Calculando os primeiros 5000000 (cinco milhões) de dígitos de π .

```
PRECISION = 5000000

calculate_pi_gauss_legendre() with decimal.localcontext() as ...

pi_gauss_legendre()

9713075191678092675514843415539745917015681978457461287083032374267153419152402769592814681760710167953132457524582622156874083274800478706780990632027931
48376101286106134039284729140974989141886715171711290147069627453788050319690593607785926232424855838780176546492245887180509637918340095192001268050715888
79798278294833101873208435917818839891147324990829139250855577418289805727717235362154476507914136740015964721549874696366031310077952400564315282083738195
76107262089503750543188907471654504974245821940346873445838802374450564430946261951031165426648089111086042928053079831337173457479004070232567181804225909
63413439319005409757034965882117241276864209394283461531471490270565809400818654031607271014253605923073978145350992421299780395426669880396784344753888568
08603898975610661419570449973027411080170687528561537065304231138406948455098715093780933979024639796649607396256570517958805764838639130105916976350740427
3403761792129585881116693855226917012478427434627753308355013973192881719593029015171668694545995928593729939977846010563050605144473250379780286232048843
902568823329337650511814615023505942187507506932290581072062585364600853297340316070097961282583541351904979303597171446396393232320825224081707045526471
463011545898918745460821356956982556750120896424506011454105648736202153246942743951689667908463450084698405914553319219377594974355786671781161715425262
0438304320373354730605895713877009457576325479920868985151798907455872619028709188622595436052618944758920830511355825255560648417406336490746908306579133
7483392540852495246852093240034997559852852641584983628151539204064796368260183443983527140299706376700045182338269403500755190250238295800892905488844544
367820370611367961281656844732879244294700108872051799892211088515202953567365680640100959322140648086568374177986187886469148555605658373737968851368974
3057295756054005570072899175254080620301343848886801134902235909748573118551226360432031154140197603077750588867954713686656420170843606102667273149888595
4397449480754784558100182731931632488412884488722296956798550154648557808486736535227982836997918808486723064962221004527085768335035212869684801817137616329
9756173842516034047253710005635164034216249202717966824926458930960182645026923102266570541641753472034155491377042150576445280780903524839362169303102288
09623848687792314524084163727118095305889004068843766781431498914299893621278545260143140439048499388015563360595131167318911327657778813646907084703686341
11963236638865074808521256828422578525240308699370325569209396881858741418123048415320404920234989002732447593020323794790776444752398445514673044032109689
852449619671434396489589319055233849818852746844924836314634250006421630628686858848274533186699267347306427350363640028500221896635011429182634319974163
2533723687985534511125305262391840826399709345081466725213811059130472100524281898862653316946933195167529620930675229159071599989846172800592620084863
8138811280944056488021060488658551918467023654221761783505181721320764619716

Execution time: 2850.200086167908 seconds

Process finished with exit code 0
```

Foram necessários aproximadamente 2850 segundos que equivale a 47 minutos e 30 segundos.

Quinto teste - Calculando os primeiros 10000000 (dez milhões) de dígitos de π .

```
PRECISION = 10000000

pi_gauss_legendre()

6071810208684895932422509046356885927561472362924460728336956384061413085434993600141230459631982773100240795033148846427654777875861489719895273066088830
5532276509992085459904316423733948757051255353067643417446265144745727091255372555765479069438008872547072769262746995432246718215202175918520457957960472
02199121590495048437921584978884934225705721192882100230294388612728453803322738400545991949882625846653754017086357905764652584808182807013102768662488667
7670892614929514712092592497021856335504389635244693548325329523026034845356889955350264388789438436377017121252144746042883540658390818327845804908336135
0710636385417875526556474132147529519409842506786359881279071788810119817427695947561653141577210250260172739941737280303127104138862754250649340180458699
83033187551567582910474669964490041429000225005324524587977238849295572166258275725882941390952477950988079949065070473629795277063814740248100355606660055
19865018256894559150714247438757991549873818840897647312864039972305624753413237011242568717376320800509177953816301054067717305159786531268750534388871810
16862372491023430621543695437591614809694740505238470835958344181790116851762418600095660240326726955039367283368234357892122266304779502641682694670529138
0815645411729954529622006551511576786222140702711581651746883015534932110394695998123858047373969786856746945113891741422198766920190823132475464262313695
69799545351686926085601387479736974829143700709732665803037094164861099932527343671783209421919861014343268868920901545558617437690496426844975426343447
0088349143770673576080860951219411480518746914289049059808439739804762619071766949279307836666826187136408703163723027092374818546928845321976345565512434058
39164161130473795973096484326078231326467369315462882312344417688493860948974484417642062322670376391988823262212446049556833785034035920513488001281337062
24976113128937982794507250247792098349739489857257141101656407082069831857682275990632695099568049018331448584259231617721860881760630664089718208481525585
7651385509781824351672822784991072040028675790790446633512718202979251506177253340668949889564247032692301539982090039016627522433818442480858939529365258
253635685841754855367448186502892451882064478532807912967550486557292908308348548393758334671019089120671145369551731409294618234664787252895299742040212
7635235923293305770179423865225963240694027480604128803030924524810349415827359324388727310939741634889604695819245395151341043433998381874650972336926352
25791472454244013263129643963912096078001634485119912542081973740744604589974214573104231364564686019378010635266037440565882386138937544397351681296831
5679116188842222511477322612331396186060803731103486926609339404384163003261434492805082113157573772773982155152228650699976624325872139339344590209166227
29054934938271782051266690211494719231138093382231122409958837224633250122232337896895269025366263941267010317327864987170257149617761051554925798575920455
3240894468742025046397995653265319406099946978733810631719481735348955897

Execution time: 6419.631212472916 seconds

Process finished with exit code 0
```

Foram necessários aproximadamente 6420 segundos que equivale a 1 hora e 47 minutos.

Os testes acima foram realizados em um computador com processador Intel(R) Core(TM) i5-8250 U CPU @ 1.60GHz 1.80 GHz e 8GB de memória RAM.

Outros algoritmos mais rápidos que a série de Leibniz

Algoritmo Chudnovsky

Método rápido para calcular os dígitos de π , com base na fórmula produzida por Ramanujan. Esse algoritmo foi publicado em 1988 pelos irmãos Chudnovsky.

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q (6q)! (545140134q + 13591409)}{(3q)! (q!)^3 (640320)^{3q+3/2}}$$

Foi utilizada para quebrar o recorde mundial calculando 2.7 trilhões de dígitos de π em dezembro de 2009, 10 trilhões de dígitos em outubro de 2011, 22.4 trilhões de dígitos em novembro de 2016, 31.4 trilhões de dígitos em setembro de 2018 - janeiro de 2019.

A quebra de recorde de 31.4 trilhões de dígitos foi realizada por Emma Haruka, cientista da computação da Google. O processo demorou cerca de 121 dias, a Google utilizou 96 CPUs virtuais com 1.4 TB de memória RAM, leu um total de 9.02 petabytes em dados e escreveu outros 7.95 petabytes. A Google Cloud publicou um [artigo](#) muito interessante relacionado à conquista.

Algoritmo BBP

O algoritmo “Bailey-Borwein-Plouffe” (BBP) para cálculo de π é baseado na fórmula BBP para cálculo de π , que foi descoberta em 1995 e publicada em 1996.

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right).$$

Esta fórmula permite que π seja calculado rapidamente para qualquer dada precisão. Um fato interessante é que a fórmula BBP foi utilizada de maneira independente para verificar a corretude dos dígitos de π após a quebra do recorde mundial em 2019.

Referências

https://en.wikipedia.org/wiki/Leibniz_formula_for_%CF%80

https://en.wikipedia.org/wiki/Chudnovsky_algorithm

https://en.wikipedia.org/wiki/Gauss%E2%80%93Legendre_algorithm

<https://www.piday.org/million/>

https://www.researchgate.net/publication/228702113_The_BBP_Algorithm_for_Pi

<https://cloud.google.com/blog/products/compute/calculating-31-4-trillion-digits-of-archimedes-constant-on-google-cloud>